L'OEUVRE DE MICHAEL F. ATIYAH

HENRI CARTAN

Je parlerai très brièvement des travaux d'Atiyah dans trois domaines, d'ailleurs étroitement reliés entre eux : la K-théorie, la formule de l'indice, et la « formule de Lefschetz ». Je laisserai de côté d'autres contributions, fort intéressantes d'ailleurs, à la Géométrie algébrique ou à la théorie du cobordisme ; et je passerai aussi sous silence les résultats tout récents, encore inédits, dont l'auteur parlera lui-même dans sa conférence pendant ce Congrès.

1. La K-théorie. La plupart des travaux d'Atiyah en K-théorie ont été faits en collaboration avec F. Hirzebruch. C'est en 1956 que paraissait l'ouvrage fondamental de Hirzebruch (« Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie ») dont le but ultime était le théorème fameux qui porte aujourd'hui le nom de « théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch ». Il s'agissait de géométrie algébrique sur le corps complexe. Peu après, Grothendieck cherchait et obtenait une démonstration purement algébrique (valable sur tout corps de base algébriquement clos, de caractéristique quelconque) d'un théorème plus général [1], puisqu'au lieu de considérer une variété algébrique X il étudiait un morphisme $X \to Y$ (le cas traité par Hirzebruch étant celui où la variété algébrique Y est réduite à un point). C'est à cette occasion que Grothendieck introduisit un foncteur contravariant qui, à chaque variété algébrique X, associe un *anneau* construit à l'aide des classes d'isomorphie de fibrés vectoriels algébriques de base X. Atiyah et Hirzebruch [2] eurent l'idée de faire de même pour un espace topologique *compact* X et pour les classes de fibrés vectoriels *complexes* de base X (il s'agit de fibrés topologiques, localement triviaux). On définit ainsi un anneau $K(X)$ pour tout espace compact X, d'où le nom de K-théorie. Il y a aussi une KO-théorie pour les fibrés vectoriels *réels*, et une KSp-théorie pour les fibrés vectoriels quaternioniens.

Bornons-nous, pour simplifier, à la K-théorie. On définit des groupes relatifs $K(X, Y)$ (pour Y sous-espace fermé de X), puis, par suspension, des groupes $K^n(X, Y)$ pour n entier $\leqslant 0$, avec $K^0(X, Y) = K(X, Y)$. On a alors une suite exacte

$$\dots \to K^n(X, Y) \to K^n(X) \to K^n(Y) \to K^{n+1}(X, Y) \to \dots$$

analogue à la suite exacte de cohomologie. D'autre part, Atiyah observe que le célèbre théorème de périodicité de Bott [qui concerne les groupes d'homotopie du groupe unitaire infini $U = \lim\limits_{\overrightarrow{m}} U(m)$] peut s'exprimer par un isomorphisme explicite

$$K^n(X) \approx K^{n+2}(X),$$

ce qui permet de définir le foncteur K^n aussi pour n entier >0. De cette façon on obtient une « théorie cohomologique » au sens d'Eilenberg-Steenrod, à cela près qu'un des axiomes d'Eilenberg-Steenrod (l'axiome « de dimension ») n'est pas vérifié. Cette théorie fut d'abord baptisée « cohomologie extraordinaire ».

Si on veut comparer la cohomologie extraordinaire à la cohomologie ordinaire, on peut dire en gros ceci : au lieu de considérer, comme en cohomologie ordinaire, les classes d'homotopie d'applications d'un espace X dans les espaces d'Eilenberg-MacLane $K(\pi, n)$, on envisage, dans la K-théorie, le groupe unitaire infini U (ou, ce qui revient au même, le groupe linéaire complexe infini), et son espace classifiant BU ; ce sont eux qui servent d'espaces de comparaison. Les relations existant entre les deux théories cohomologiques (ordinaire et extraordinaire) s'expriment par une suite spectrale, et le « caractère de Chern »

$$\mathrm{ch}\colon K^*(X, Y) \to H^*(X, Y; \mathbf{Q})$$

est un homomorphisme multiplicatif d'une théorie dans l'autre.

L'importance de la « cohomologie extraordinaire » fut vite mise en évidence par les applications qu'Atiyah et Hirzebruch en firent, en Topologie algébrique et ailleurs [3]. Citons quelques exemples qui illustrent ces applications de la K-théorie :

— un théorème du type « Riemann-Roch-Grothendieck », valable cette fois pour les variétés différentiables [4] ;

— le calcul de $K(X)$ pour certains espaces homogènes, et le lien de cette question avec la théorie des représentations des groupes de Lie compacts [2] ;

— des théorèmes de non-plongement [5] : par exemple, l'espace projectif complexe $P_n(\mathbf{C})$ ne peut pas être différentiablement plongé dans l'espace numérique $\mathbf{R}^{4n-2\alpha(n)}$, où $\alpha(n)$ désigne le nombre des chiffres 1 du développement dyadique de l'entier n ;

— des critères permettant de reconnaître si une classe de cohomologie d'une variété analytique complexe compacte peut être représentée par une sous-variété analytique [6].

Toutes ces applications sont dues à la collaboration d'Atiyah avec Hirzebruch. Il y en a d'autres ; par exemple, c'est grâce à la K-théorie et à l'introduction de certains foncteurs $K \to K$ (dont l'idée revient essentiellement à Grothendieck) que J.-F. Adams [7] a pu résoudre complètement un problème classique, resté longtemps sans réponse : celui de la détermination exacte, en fonction de l'entier n, du nombre maximum de champs de vecteurs linéairement indépendants sur la sphère S^n (voir la conférence d'Adams au Congrès de Stockholm en 1962).

2. Le théorème de l'indice. Mais la plus belle application de la K-théorie devait être faite par Atiyah lui-même : je veux parler du *théorème de l'indice* (1963), démontré en collaboration avec I. Singer [8].

Soit D un opérateur elliptique sur une variété différentiable compacte X (supposée sans bord), opérant de l'espace vectoriel $\Gamma(E)$ des sections différentiables d'un fibré vectoriel complexe E dans l'espace $\Gamma(F)$ des sections différentiables d'un fibré vectoriel complexe F. On sait que le noyau et le conoyau de l'application linéaire $D:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ sont de dimension finie ; l'*indice* $i(D)$ est l'entier défini par

$$i(D) = \dim(\mathrm{Ker}\, D) - \dim(\mathrm{Coker}\, D).$$

Les travaux de plusieurs mathématiciens soviétiques avaient mis en évidence le fait que $i(D)$ ne change pas quand D varie d'une façon continue, et I. M. Gelfand, en 1960 [9], avait conjecturé que $i(D)$ devait donc pouvoir être calculé au moyen d'invariants purement topologiques liés à la donnée de X et de D. C'est ce problème qu'Atiyah et Singer ont complètement résolu. Les termes homogènes de plus haut degré de l'opérateur D définissent un « symbole » $\sigma(D)$ qui permet d'abord de définir l'ellipticité de D, puis, par l'intervention de la K-théorie, du caractère de Chern, et de la classe de Todd du fibré cotangent à X (lequel a une structure presque complexe), de définir finalement une classe de cohomologie, élément de $H^*(X\,;\,\mathbf{Q})$. Sa composante de degré $n = \dim X$ est un élément de $H^n(X\,;\,\mathbf{Q}) \approx \mathbf{Q}$ (on suppose X orientable, pour simplifier). D'où un *nombre rationnel* $i_t(D)$ attaché à D (et à X), et défini au signe près ; on peut l'appeler l'« indice topologique » de D. Le théorème d'Atiyah-Singer dit alors que *l'indice topologique* $i_t(D)$ *est égal à l'indice* $i(D)$ (moyennant des conventions convenables d'orientation). Ce théorème établit ainsi un pont entre deux vastes domaines des mathématiques : l'analyse des équations aux dérivées partielles d'une part, la topologie algébrique d'autre part.

Observons que, par définition, $i(D)$ est un entier. Il s'ensuit que le nombre rationnel $i_t(D)$ fourni par la Topologie algébrique est, en fait, un entier. On obtient par ce moyen, d'une façon naturelle et par le choix d'opérateurs elliptiques appropriés, tous les « théorèmes d'intégralité » relatifs aux classes caractéristiques des variétés (intégralité du L-genre, du genre de Todd, du $\hat{A}$-genre). Inversement, toute information fournie par la Topologie algébrique donne un résultat qui intéresse l'Analyse ; par exemple, on voit facilement que l'indice topologique i_t (D) est nul si la variété X est de dimension impaire.

La démonstration du théorème i $(D) = i_t$ (D) est laborieuse, mais fort intéressante, car elle conduit à introduire des opérateurs plus généraux que les opérateurs différentiels, à savoir les opérateurs intégraux singuliers de Calderon-Zygmund et de Seeley. La démonstration repose également sur une théorie du cobordisme qui constitue une généralisation (relativement facile) de celle due à Thom. En fait il existe une nouvelle démonstration, plus récente, de la formule de l'indice, qui évite le recours au cobordisme.

Au lieu de considérer un seul opérateur elliptique, on peut envisager une suite d'opérateurs différentiels

$$\text{(D)} \qquad \Gamma(E_0) \to \Gamma(E_1) \to \ldots \to \Gamma(E_k)$$

formant un « complexe » (i.e : le composé de deux opérateurs consécutifs est zéro). On définit l'« ellipticité » d'un tel complexe. A chaque complexe elliptique on attache encore un nombre rationnel i_t (D). D'autre part les groupes d'homologie du complexe elliptique (D) sont des espaces vectoriels de dimension finie ; soit χ (D) la somme alternée de leurs dimensions (c'est une sorte d'invariant d'Euler-Poincaré). Alors on a le théorème :

$$\chi(D) = i_t(D).$$

Cette forme plus générale du théorème de l'indice est fort utile dans les applications. Par exemple, si on l'applique à une variété analytique complexe compacte X, et au « complexe » défini par l'opérateur différentiel d'' (noté aussi $\overline{\partial}$) des formes différentielles, on retrouve exactement l'énoncé du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch. Ce dernier n'était démontré auparavant que pour les variétés algébriques sans singularité ; il est désormais valable pour toute variété analytique compacte.

Je laisse de côté le théorème de l'indice pour les variétés à bord [10] ; il nécessite une nouvelle définition de l'ellipticité qui tienne compte des « conditions aux limites ». La question a été entièrement résolue par Atiyah en collaboration avec Bott et Singer.

3. Formules de points fixes. Le théorème de l'indice n'est, en réalité, qu'un cas extrême d'une situation dont un autre cas extrême est, lorsque le complexe elliptique est celui défini par l'opérateur de différentiation extérieure des formes différentielles, la formule de Lefschetz relative aux points fixes (supposés isolés) d'une transformation d'une variété compacte X en elle-même. Il y a de nombreux cas intermédiaires, dont l'étude est en cours. Les résultats déjà obtenus sont dûs à la collaboration d'Atiyah et de Bott [11]. Expliquons sur un exemple de quoi il s'agit : soit X une variété analytique complexe, compacte, et soit $f : X \to X$ une application holomorphe ; on sait que les espaces vectoriels de cohomologie $H^q(X, \mathcal{O})$ à coefficients dans le faisceau $\mathcal{O}$ des fonctions holomorphes sont de dimension finie; soit $L(f)$ la somme alternée des traces

$$(-1)^q \operatorname{Tr}(f|_{H^q(X, \mathcal{O})}).$$

C'est un entier ; dans le cas où f est l'identité, cet entier n'est autre que le premier membre de l'égalité de Riemann-Roch-Hirzebruch. Dans le cas général, on se propose d'exprimer cet entier à l'aide des propriétés topologiques de f au voisinage de l'ensemble des points fixes de f. Si f est l'identité, on peut considérer que la formule de Hirzebruch (démontrée par Atiyah-Singer) résout le problème. Supposons au contraire que f n'ait qu'un nombre fini de points fixes P, et que la différentielle df_P n'admette pas la valeur propre 1 (c'est notamment le cas lorsque f est une transformation d'ordre fini). Alors le déterminant

$$\det_C(1 - df_P)$$

est un nombre complexe $\neq 0$; le théorème prouvé par Atiyah et Bott affirme que, sous ces hypothèses, l'entier $L(f)$ est égal à la somme des inverses de ces nombres complexes.

Nous bornant à cet exemple, nous ajouterons simplement que les résultats déjà obtenus fournissent une démonstration « sans calculs » de la formule de H. Weyl donnant le caractère d'une représentation d'un groupe semi-simple, et qu'ils permettent aussi de résoudre des problèmes de Conner-Floyd sur les variétés compactes où opère un groupe fini. Signalons aussi que, d'après Hirzebruch [12], on peut en déduire une formule de Langlands donnant la dimension des espaces vectoriels de formes automorphes pour un groupe discret à quotient compact.

En conclusion, l'on doit à Michael Atiyah plusieurs contributions majeures qui mettent en relation étroite la Topologie et l'Analyse. Chacune d'elles a été réalisée en collaboration ; sans diminuer en rien la part qui revient à des collaborateurs aussi éminents que Hirzebruch, Singer ou Bott, il ne fait aucun doute que dans chaque cas l'intervention personnelle d'Atiyah a été décisive. Il nous donne l'exemple d'un mathématicien chez qui la clarté des conceptions et la vision d'ensemble des phénomènes s'allie harmonieusement à l'imagination créatrice, et aussi à la persévérance qui conduit aux grands achèvements.

RÉFÉRENCES

[1] Borel A., Serre J. P., Le théorème de Riemann-Roch, *Bull. Soc. Math. France*, 86 (1958), 97-136.

[2] Atiyah M. F., Hirzebruch F., Vector bundles and homogeneous spaces, Symp. Pure Math., n° 3, A.M.S., 1961.

[3] A t i y a h M. F., The Grothendieck ring in Geometry and Topology, Proc. Int. Congress Math., Stockholm (1962), 442-446.
[4] A t i y a h M. F., H i r z e b r u c h F., Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds, *Bull. A.M.S.*, **65** (1959), 276-281.
[5] A t i y a h M. F., H i r z e b r u c h F., Quelques théorèmes de non plongement pour les variétés différentiables, *Bull. Soc. Math. France*, **89** (1959), 383-396.
[6] A t i y a h M. F., H i r z e b r u c h F., Analytic cycles on complex manifolds, *Topology*, **1** (1962), 25-46.
[7] A d a m s J. F., Vector fields on spheres, *Ann. Math.*, **75** (1962), 603-632.
[8] A t i y a h M. F., S i n g e r I., The index of elliptic operators on compact manifolds, *Bull. A.M.S.*, **69** (1963), 422-433. Voir aussi deux Seminaires tenus en 1963-64, l'un par S. Palais (Annals of Math. Studies, n° 57, Princeton Univ. Press, 1965), l'autre par H. Cartan et L. Schwartz (Secrétariat Math., Inst. H. Poincaré, Paris 1965).
[9] Г е л ь ф а н д И. М., Об эллиптических уравнениях, *УМН*, **15**, №3(1960), 121-132. English translation: G e l f a n d I. M., On elliptic equations, Russian Math. Surveys, **15**, № 3, (1960), 113.
[10] A t i y a h M. F., B o t t R., The index problem for manifolds with boundary, Differential Analysis, Bombay, 1964.
[11] A t i y a h M. F., B o t t R., Report on the Woods Hole Fixed Point Theorem, Seminar (1964).
[12] H i r z e b r u c h F., Elliptische Differentialoperatoren auf Mannigfaltigkeiten, Festschrift Weierstrass, Westdeutsche Verlag Köln u. Opladen, 1965, 583-608.