Coloquio de Matemática

Tendencias de la Matemática Moderna: un tour por el Análisis Variacional y sus aplicaciones

Ana Maria Amarillo Bertone

Universidade Federal de Uberlândia

24 de Octubre de 2012

Resumen

El Cálculo das variaciones

es una de las más antiguas áreas de la matemática que influenció el desarrollo de la misma de muchas maneras.

Resumen

El Cálculo das variaciones

es una de las más antiguas áreas de la matemática que influenció el desarrollo de la misma de muchas maneras.

Esta área cambió rotundamente en el siglo XX

con el aparecimiento de nuevos métodos y pasó a ser conocida como Análisis Variacional.

Resumen

El Cálculo das variaciones

es una de las más antiguas áreas de la matemática que influenció el desarrollo de la misma de muchas maneras.

Esta área cambió rotundamente en el siglo XX

con el aparecimiento de nuevos métodos y pasó a ser conocida como Análisis Variacional.

El nombre de Cálculo de las Variaciones (CV)

viene de una publicación del famoso matemático Leonard Euler "Un método para encontrar las curvas que dividem ciertas propiedades de máximo o mínimo" datado em 1744.

Pero la teoria es mucho más antigua

debido a su íntima relación con problemas encontrados desde las orígenes de la humanidad, como la de encontrar soluciones "óptimas" para problemas más práticos, por ejemplo, para "minimizar pérdidas" o para "maximizar los beneficios". En este sentido más amplio de encontrar soluciones óptimas, esta área tiene cerca de 3,000 años!

Pero la teoria es mucho más antigua

debido a su íntima relación con problemas encontrados desde las orígenes de la humanidad, como la de encontrar soluciones “óptimas” para problemas más práticos, por ejemplo, para “minimizar pérdidas” o para “maximizar los beneficios”. En este sentido más amplio de encontrar soluciones óptimas, esta área tiene cerca de 3,000 años!

En los tiempos actuales

los métodos del Análisis Variacional interactuan con otras áreas del conocimento, como física, especialmente mecánica, geometria diferencial y áreas más aplicadas como economia y ingeniería. Optimización y teoria del control usan esta poderosa herramienta como base da sus teorias.

En esta charla

En esta charla

- Iremos recorrer un poco de la history de esta importante área de la matemática.

En esta charla

- Iremos recorrer un poco de la história de esta importante área de la matemática.
- Vamos ver alguns exemplos prácticos, históricos y modernos, que motivan su utilización.

En esta charla

- Iremos recorrer un poco de la história de esta importante área de la matemática.
- Vamos ver alguns exemplos prácticos, históricos y modernos, que motivan su utilización.
- Mostraremos un esbozo de sus bases teóricas.

En esta charla

- Iremos recorrer un poco de la história de esta importante área de la matemática.
- Vamos ver alguns exemplos prácticos, históricos y modernos, que motivan su utilización.
- Mostraremos un esbozo de sus bases teóricas.
- Finalmente algunos resultados científicos aplicados a la Ecuaciones Diferenciales Parciales con no linealidad discontinua, motivo de investigación de la Profa Dra Ana Maria.

Un poco de historia

El primer problema del CV: el problema del Isoperímetro (800 AC)

El Problema de la Reina Dido

Un poco de historia

El primer problema del CV: el problema del Isoperímetro (800 AC)

El Problema de la Reina Dido

encontrar la forma de la frontera que se debía poner en el suelo (utilizando tiras hechas con la piel de un buey) con el objeto de encerrar una superficie de área máxima.

En la Antigua Grecia (250 AC)

Una muestra del antiguo CV es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio de Pergamo, que vivió entre los años 262 y 190 a.C., en el cual se dedica a estudiar

En la Antigua Grecia (250 AC)

Una muestra del antiguo CV es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio de Pergamo, que vivió entre los años 262 y 190 a.C., en el cual se dedica a estudiar

segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica.

En la Antigua Grecia (250 AC)

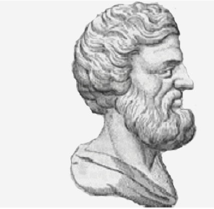
Una muestra del antiguo CV es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio de Pergamo, que vivió entre los años 262 y 190 a.C., en el cual se dedica a estudiar

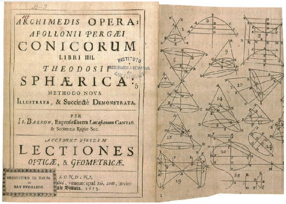
segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica.

En la Antigua Grecia (250 AC)

Una muestra del antiguo CV es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio de Pergamo, que vivió entre los años 262 y 190 a.C., en el cual se dedica a estudiar

segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica.

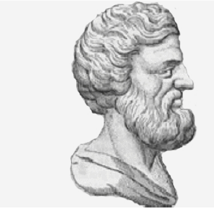


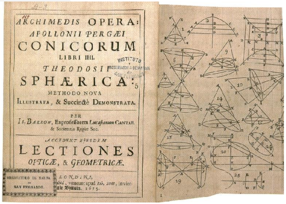

ARCHIMEDIS OPERA:
APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI IIII.
THEODOSII
SPHÆRICA:
METHODO NOVA
ILLUSTRATA, & Succinctè DEMONSTRATA.
PER
Is. BARROW, Exprofessorem Lucasianum CANTAB. & Societatis Regiæ Soc.
ACCEDUNT EJUSDEM
LECTIONES
OPTICÆ, & GEOMETRICÆ.
LONDINI,

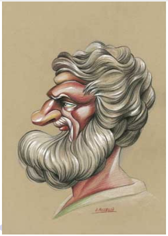
En la Antigua Grecia (250 AC)

Una muestra del antiguo CV es el libro V de la obra sobre cónicas escrita en ocho tomos por Apolonio de Pergamo, que vivió entre los años 262 y 190 a.C., en el cual se dedica a estudiar

segmentos de longitud máxima y longitud mínima trazados respecto a una cónica.







En tiempos más modernos (1662)

El principio de Fermat

En tiempos más modernos (1662)

El principio de Fermat

El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo.

En tiempos más modernos (1662)

El principio de Fermat

El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo.

Julho de 1696

El nacimiento del Cálculo de las variaciones moderno con Johann Bernoulli que propuso el problema de la "Braquistocrona"(*)

En tiempos más modernos (1662)

El principio de Fermat

El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es un mínimo.

Julho de 1696

El nacimiento del Cálculo de las variaciones moderno con Johann Bernoulli que propuso el problema de la "Braquistocrona"(*)

encontrar la forma de una cuerda a lo largo de la cual una partícula, inicialmente en reposo se desliza sobre el efecto único de la gravedad de una extremidad a otra en tiempo mínimo. Las extremidades de la curva son especificadas y el movimento de la partícula ocurre sin frición.

1684

Liebniz hizo su primera publicación de cálculo diferencial: el comienzo de la teoría matemática de la optimización.

1684

Liebniz hizo su primera publicación de cálculo diferencial: el comienzo de la teoría matemática de la optimización.

1744

L. Euler publicó el libro "A method for finding curves enjoying certain maximum or minimum properties".

1684

Liebniz hizo su primera publicación de cálculo diferencial: el comienzo de la teoría matemática de la optimización.

1744

L. Euler publicó el libro “A method for finding curves enjoying certain maximum or minimum properties”.

1753

Legendre: Como distinguir puntos estacionarios. *Una condición necesaria para extremos en función de la segunda variación.*

1684

Liebniz hizo su primera publicación de cálculo diferencial: el comienzo de la teoría matemática de la optimización.

1744

L. Euler publicó el libro "A method for finding curves enjoying certain maximum or minimum properties".

1753

Legendre: Como distinguir puntos estacionarios. *Una condición necesaria para extremos en función de la segunda variación.*

1788

Lagrange: *Mécanique analytique.*

1837

Jacobi completó el estudio de Legendre.

1837

Jacobi completó el estudio de Legendre.

$\approx$ 1850

El problema de Dirichlet: Dirichlet y Riemann, presuponiendo la existencia de extremos "resolveram" el problema $\Delta u = 0$ en un dominio G del plano con valores de frontera.

1837

Jacobi completó el estudio de Legendre.

$\approx$ 1850

El problema de Dirichlet: Dirichlet y Riemann, presuponiendo la existencia de extremos "resolveram" el problema $\Delta u = 0$ en un dominio G del plano con valores de frontera.

1870

Wierstrass mostró que Dirichlet, Gauss y Riemann estabam equivocados produciendo ejemplos que mostrabam que mínimo no es la misma cosa que ínfimo de un conjunto.

1837

Jacobi completó el estudio de Legendre.

$\approx$ 1850

El problema de Dirichlet: Dirichlet y Riemann, presuponiendo la existencia de extremos "resolveram" el problema $\Delta u = 0$ en un dominio G del plano con valores de frontera.

1870

Wierstrass mostró que Dirichlet, Gauss y Riemann estabam equivocados produciendo ejemplos que mostrabam que mínimo no es la misma cosa que ínfimo de un conjunto.

1878

Dini y Hadamard introducen el concepto de subdiferencial.

Siglo XX

1901

Hilbert mostró que el principio de Dirichlet estaba correto estableciendo el concepto de semicontinuidade inferior en el sentido débil.

Siglo XX

1901

Hilbert mostró que el principio de Dirichlet estaba correto estableciendo el concepto de semicontinuidade inferior en el sentido débil.

1935

Charathéodory publica "Isopérimaitre incomparable" una extensión de los métodos variacionales para EDP.

Siglo XX

1901

Hilbert mostró que el principio de Dirichlet estaba correto estableciendo el concepto de semicontinuidade inferior en el sentido débil.

1935

Charathéodory publica "Isopérimaitre incomparable" una extensión de los métodos variacionales para EDP.

1965

Browder usa una teoría sistemática para resolver EDP no lineales via operadores monotónicos.

Finalmente: el auge del AV

1970

L. Pontryagin, T. Rockafellar y F. Clarke trabajaron en "Optimal Control Theory", una generalización del Cálculo de las Variaciones y el desarrollo del Análisis Variacional.

Finalmente: el auge del AV

1970

L. Pontryagin, T. Rockafellar y F. Clarke trabajaron en "Optimal Control Theory", una generalización del Cálculo de las Variaciones y el desarrollo del Análisis Variacional.

Finalmente: el auge del AV

1970

L. Pontryagin, T. Rockafellar y F. Clarke trabajaron en "Optimal Control Theory", una generalización del Cálculo de las Variaciones y el desarrollo del Análisis Variacional.

Finalmente: el auge del AV

1970

L. Pontryagin, T. Rockafellar y F. Clarke trabajaron en “Optimal Control Theory”, una generalización del Cálculo de las Variaciones y el desarrollo del Análisis Variacional.

Finalmente: el auge del AV

1970

L. Pontryagin, T. Rockafellar y F. Clarke trabajaron en "Optimal Control Theory", una generalización del Cálculo de las Variaciones y el desarrollo del Análisis Variacional.

Como conclusión de esta parte histórica, vemos la actuación de esta área de la matemática en

Como conclusión de esta parte histórica, vemos la actuación de esta área de la matemática en

- la evolución del cálculo diferencial

Como conclusión de esta parte histórica, vemos la actuación de esta área de la matemática en

- la evolución del cálculo diferencial
- contribuiciones para la física, astronomia, economia (especialmente en el siglo XX), resolviendo, desde tiempos inmemoriables problemas del cotidiano humano

Como conclusión de esta parte histórica, vemos la actuación de esta área de la matemática en

- la evolución del cálculo diferencial
- contribuiciones para la física, astronomia, economia (especialmente en el siglo XX), resolviendo, desde tiempos inmemoriables problemas del cotidiano humano
- con la llegada de la era computacional, el boom de la optimización y de la teoria del control.

Como conclusión de esta parte histórica, vemos la actuación de esta área de la matemática en

- la evolución del cálculo diferencial
- contribuiciones para la física, astronomia, economia (especialmente en el siglo XX), resolviendo, desde tiempos inmemoriables problemas del cotidiano humano
- con la llegada de la era computacional, el boom de la optimización y de la teoria del control.

Veremos a seguir un problema sencillo y moderno de la AV en acción.

Análisis Variacional en acción

Sobrejetividade das Derivadas

Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty.$$

Entonces $\{f'(x), x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

Análisis Variacional en acción

Sobrejetividade das Derivadas

Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable y verifica

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{f(x)}{|x|} = +\infty.$$

Entonces $\{f'(x), x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$.

demostración

Sea $y \in \mathbb{R}$ cualquiera. Definamos entonces la función auxiliar $g(x) = f(x) - xy$ para $x \in \mathbb{R}$. Como g es coerciva, existe un elemento x_y mínimo de g, con $0 = g'(x_y) = f'(x_y) - y$.

Condiciones esenciales para esta afirmación:

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)
- *Diferenciabilidad*

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)
- *Diferenciabilidad*

En los años 70

esas condiciones fueron substituidas por otras más debiles:

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)
- *Diferenciabilidad*

En los años 70

esas condiciones fueron substituidas por otras más debiles:

- *semicontinuidade inferior* dando origem aos *Principios Variacionales*;

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)
- *Diferenciabilidad*

En los años 70

esas condiciones fueron substituidas por otras más debiles:

- *semicontinuidade inferior* dando origem aos *Principios Variacionales*;
- Conceptos más generales de diferenciabilidad.

Condiciones esenciales para esta afirmación:

- *Compacidad* (garantia do mínimo global)
- *Diferenciabilidad*

En los años 70

esas condiciones fueron substituidas por otras más debiles:

- *semicontinuidade inferior* dando origem aos *Principios Variacionales*;
- Conceptos más generales de diferenciabilidad.

De ahi aparecem existem várias opciones técnicas:

Dimensión Finita/Convexidade: Rockafellar; Geométrica: B.S. Mordukhovich; Analíticas: J.M. Borwein y Q. J. Zhu.

Conceptos teóricos básicos

En el corazón de la AV

reside el concepto de *Subdiferencial*. Iniciamos um mini tour en este concepto, primeiramente en espacio de dimensión finita.

Conceptos teóricos básicos

En el corazón de la AV

reside el concepto de *Subdiferencial*. Iniciamos um mini tour en este concepto, primeiramente en espacio de dimensión finita.

Una función f de varias variables convexa

tiene la propiedad

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T (y - x)$$

siendo $\nabla f(x)$ una aproximación lineal global "por abajo" y $(\nabla f(x), -1)$ contiene el *epif* en el punto $(x, f(x))$.

Pregunta:

y si f no es diferenciable?

Pregunta:

y si f no es diferenciable?

Subgradiente de una función es la respuesta

Pregunta:

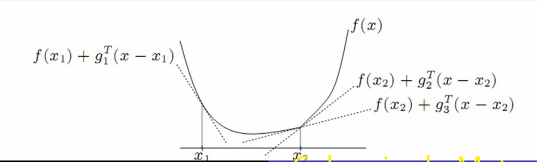
y si f no es diferenciable?

Subgradiente de una función es la respuesta

Definición:

g (vetor de $\mathbb{R}$) es subgradiente de f en el punto x si

$$f(y) \geq f(x) + g^T(y - x), \text{para todo } y$$



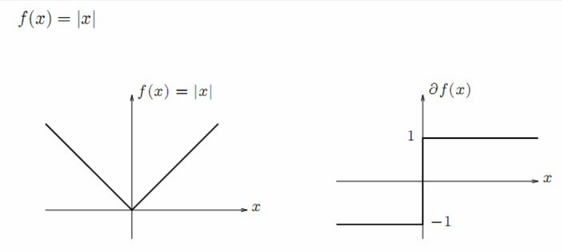
Definición:

el conjunto de todos los subgradientes de f en el punto x es llamado de *subdiferencial* de f em x.

Definición:

el conjunto de todos los subgradientes de f en el punto x es llamado de *subdiferencial* de f em x.

Ejemplo



Una ojeadita a la técnica más avanzada

Elementos abstractos avanzados

Una ojeadita a la técnica más avanzada

Elementos abstractos avanzados

- Espacios de Banach;

Una ojeadita a la técnica más avanzada

Elementos abstractos avanzados

- Espacios de Banach;
- Funcionales Convexos y Lipchitzianos;

Una ojeadita a la técnica más avanzada

Elementos abstractos avanzados

- Espacios de Banach;
- Funcionales Convexos y Lipchitzianos;
- Subdiferenciales de estos funcionales.

Una ojeadita a la técnica más avanzada

Elementos abstractos avanzados

- Espacios de Banach;
- Funcionales Convexos y Lipchitzianos;
- Subdiferenciales de estos funcionales.

Una extensión del resultado que vimos en dimensión finita

Teorema: Si X es un espacio de Banach reflexivo y $\Phi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ debilmente semicontinuo inferiormente, satisfaciendo

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\Phi(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Entonces $\bigcup_{x\in X} \partial_F \Phi(x) = X^*$.

Otra aplicación

Un modelo biomédico

la neuroprótesis, cuyos dispositivos tienen como objetivo restaurar o apoyar partes de los sistemas neuro musculares y/o sensoriais, estimulando la atividade muscular electricamente.

Otra aplicación

Un modelo biomédico

la neuroprótesis, cuyos dispositivos tienen como objetivo restaurar o apoyar partes de los sistemas neuro musculares y/o sensoriais, estimulando la atividade muscular electricamente.

Un campo elétrico ativa las células nerviosas y musculares, para desencadenar una secuencia de eventos que tienen lugar en la membrana celular, que es un ambiente ionizado.

El modelo matemático

Para este modelo de comportamiento eletrostático, vamos considerar

El modelo matemático

Para este modelo de comportamiento eletrostático, vamos considerar

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como seción horizontal de un cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$ conteniendo una solución ionizada;

El modelo matemático

Para este modelo de comportamiento eletrostático, vamos considerar

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como seción horizontal de un cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$ conteniendo una solución ionizada;
- v_0 la temperatura de la superfície lateral ∂C;

El modelo matemático

Para este modelo de comportamiento eletrostático, vamos considerar

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como seción horizontal de un cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$ conteniendo una solución ionizada;
- v_0 la temperatura de la superfície lateral ∂C;
- v la temperatura de la solución;

El modelo matemático

Para este modelo de comportamiento eletrostático, vamos considerar

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ como seción horizontal de un cilindro $C \subset \mathbb{R}^3$ conteniendo una solución ionizada;
- v_0 la temperatura de la superfície lateral ∂C;
- v la temperatura de la solución;
- $\delta \geq v_0$ la temperatura de descarga y $\sigma(v)$ la condutividad elétrica.

Como la solución es ionizada, tenemos una discontinuidad en $v = \delta$ para σ, esto es, $\sigma(v) = 0$ si $v \leq \delta$ y $\sigma(v)$ es positiva y contínua para $v > \delta$.

Como la solución es ionizada, tenemos una discontinuidad en $v = \delta$ para σ, esto es, $\sigma(v) = 0$ si $v \leq \delta$ y $\sigma(v)$ es positiva y contínua para $v > \delta$.

Las ecuaciones constitutivas son

$$\begin{cases} E = & -\mathrm{grad}\ v \\ D = & \alpha E \\ \mathrm{div}\ D = & \sigma \end{cases}$$

siendo E el campo elétrico, D el campo de indución elétrica y $\alpha = \chi^{-1}|E|^2$, con χ la condutividade térmica, suponiendo χ y $|E|$ constantes.

siendo que v verifica

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta v = & 0,\ \text{si } v \leq \delta, \\ -\Delta v = & \alpha\sigma(v),\ \text{si } v > \delta, \\ v = & v_0,\ \text{em } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

siendo que v verifica

$$\left\{\begin{array}{rl} -\Delta v = & 0, \text{ si } v \leq \delta, \\ -\Delta v = & \alpha\sigma(v), \text{ si } v > \delta, \\ v = & v_0, \text{ em } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{1}$$

Escribimos $u = v - v_0$ y $\gamma = \delta - v_0 \geq 0$ para destacar la dependencia de v_0 y δ, tornando (1) en

$$-\Delta u = \alpha H(u-\gamma)\sigma(u+v_0) \text{ en } \Omega, \; u = 0 \text{ en } \partial\Omega, \tag{2}$$

donde $H(x-\gamma)$ es la función de Heaviside con salto en γ.

AV en acción

La solución del problema 2 es el mínimo del funcional, definido en un espacio de Banach adecuado,

$$I(u) = \frac{1}{2}\int \Omega|\nabla(u)|^2 - \int H(u-\gamma)u.$$

AV en acción

La solución del problema 2 es el mínimo del funcional, definido en un espacio de Banach adecuado,

$$I(u) = \frac{1}{2} \int \Omega |\nabla(u)|^2 - \int H(u - \gamma)u.$$

I no es "diferenciable", pero es Lipchitziano y tiene, en consequencia, una subdiferencial. Así, usando el teorema anterior, tendrá un mínimo global.

Finalmente...

Terminando con una frase de Euler

Leonhard Euler 1707 - 1783

(1774) *Namely, because the shape of the whole universe is most perfect and, in fact designed by the wisest creator, nothing in all of the world will occur in which no maximum or minimum rule is somehow shining forth.*

(A saber, porque la forma del universo es la más perfecta y, de hecho, proyectado por el Creador más sabio, nada en el mundo pasará sin que de una forma o otra la regla del máximo o del mínimo den su brilho.)