ATTI

DEL

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO II.

COMUNICAZIONI

SEZIONE I [A-B]

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1930 - VIII

COMUNICAZIONI

Sezione Prima A

T. NAGELL (Oslo - Norvège)

SUR LA REPRÉSENTATION D'UN NOMBRE ENTIER PAR UNE FORME CUBIQUE

Il existe depuis Lagrange et Gauss une théorie classique des formes binaires quadratiques. Ainsi on sait résoudre complètement le problème suivant: Étant donnée la forme binaire quadratique $f(x, y)$ à coefficients entiers, déterminer les solutions en nombres entiers x, y de l'équation

$$f(x, y)=N,$$

où N est un nombre entier quelconque.

On peut généraliser ce problème et demander les représentations d'un nombre entier donné N par une forme binaire $f(x, y)$ d'un degré quelconque n. Le premier résultat général sur cette question est très récent. En effet, c'est seulement en 1909 que AXEL THUE, géomètre norvégien, a publié l'important résultat que voici: Étant donnée une forme binaire irréductible $f(x, y)$ à coefficients entiers, d'un degré $\geqq 3$, l'équation indéterminée

$$f(x, y)=N,$$

où N est un nombre entier quelconque, n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers x, y.

Ce théorème est un corollaire d'un résultat très général et très profond sur l'approximation d'un nombre algébrique par des nombres rationnels ([1]). La méthode de Thue est très compliquée, et malheureusement elle ne donne aucun procédé pour effectivement déterminer toutes les solutions de cette équation, s'il y en a. Ainsi le problème n'est pas encore complètement résolu.

Pour trouver des résultats plus précis et plus complets, on est conduit à spécialiser les formes. Les formes les plus simples sont les formes cubiques à discriminant négatif. Le premier résultat sur les formes cubiques est dû à M. BORIS DELAUNAY ([2]), qui a, en effet, démontré le théorème suivant:

L'équation indéterminée

$$x^3+Dy^3=1,$$

([1]) Voir A. THUE, *Ueber Annäherungswerte algebraischer Zahlen,* Journal f. Math., Bd. 135, 1909.

([2]) Publ. Soc. math. Kharkow, 1916 (en russe).

D étant un entier qui n'est pas un cube parfait, possède en dehors de la solution triviale $y=0$, $x=1$, au plus une seule solution en nombres entiers x, y, et dans ce cas le nombre

$$x+y\sqrt[3]{D}$$

est l'unité fondamentale de l'anneau $R(\sqrt[3]{D})$ dans le corps algébrique engendré par $\sqrt[3]{D}$.

Ainsi le problème est complètement résolu dans ce cas, puisqu'il est réduit au problème connu de déterminer l'unité fondamentale d'un anneau.

Dans un travail récent (¹) j'ai généralisé ce résultat en montrant que l'équation plus générale

$$Ax^3+By^3=1 \text{ (ou}=3)$$

possède au plus une seule solution en nombres entiers différents de zéro. Ma méthode donne aussi un algorithme pour effectivement déterminer toutes les solutions.

Le premier résultat sur la forme cubique générale est également dû à M. Delaunay (²):

Étant donnée une forme binaire cubique, irréductible, à coefficients entiers et à discriminant négatif, le nombre de représentations de l'unité par cette forme ne dépasse pas 4, sauf dans le cas d'une forme équivalente à la forme $x^3-xy^2+y^3$, dans lequel il y a exactement 5 représentations.

Pour que la forme ait plus de 2 représentations, il faut qu'elle soit équivalente à une forme

$$x^3+bx^2y+cxy^2+y^3,$$

où le premier et le dernier coefficient sont égaux à 1.

Sans connaître ce travail de M. Delaunay, j'ai attaqué le problème par une autre méthode, et dans un travail qui vient de paraître (³), j'ai établi le théorème plus précis, que voici:

Il y a au plus trois représentations de l'unité par une telle forme, sauf dans les trois cas d'exception suivants: 1°) Il y a exactement quatre représentations quand la forme est équivalente à $x^3-x^2y+xy^2+y^3$; 2°) il y a exactement quatre représentations quand la forme est équivalente à $x^3+xy^2+y^3$; 3°) il y a exactement cinq représentations quand la forme est équivalente à $x^3-xy^2+y^3$.

Les formes d'exception sont celles dont la valeur absolue du discriminant est la plus petite: dans le dernier cas le discriminant est -23, dans le deuxième

---

(¹) Journal de Math., Paris 1925.

(²) Mémoires de l'Acad. d. Sciences, Leningrad, 1922.

(³) Mathematische Zeitschrift, Berlin 1928.

cas il est -31 et dans le premier cas il est -44. Ce résultat est définitif puisqu'il y a, comme on voit aisément, une infinité de formes inéquivalentes avec trois représentations de l'unité.

La méthode de M. Delaunay ainsi que la mienne sont indépendantes de celle de Thue. Mais, elles ne donnent non plus aucun procédé pour effectivement déterminer les représentations dans le cas général.

Il résulte immédiatement des résultats précédents: Le nombre des représentations d'un nombre quelconque positif N par une telle forme ne surpasse pas $5N$.

C'est un fait très remarquable que cette limite supérieure est indépendante des coefficients de la forme et qu'elle dépend seulement de N.

B. DELAUNAY (Leningrad - U. S. S. R.).

UEBER DIE DARSTELLUNG DER ZAHLEN DURCH BINÄRE KUBISCHE FORMEN VON NEGATIVER DISCRIMINANTE

Die Fragen nach der Aequivalenz und der Klassification der binären kubischen Formen waren noch von Eisenstein (1840) gelöst, nichts wusste man aber bisher über die Darstellung der Zahlen durch solche Formen, d. h. über die Lösung der unbestimmten gleichungen 3-ten grades mit 2 Unbekannten. Dieses Problem hat noch Lagrange schon 1770 sich direckt als Aufgabe gestellt, nachdem er die Lösung der analogen Gleichungen 2-ten grades erhalten hatte. Erst im Jahre 1908 machte A. Thue die überraschen Entdeckung dass die Anzahl der Darstellungen einer Zahl durch eine binäre Form von höherem als dem 2-ten grade nicht unendlich gross sein kann. Wenn man die Methode von Thue bis zu ihrer natürlichen Grenze verfolgt erhält man ja, noch etwas mehr, eben dass man mit seine Hilfe sogar alle Lösungen finden kann, mit Ausnahme vielleicht von $2k$ von ihnen, wo k die Anzahl der reellen Wurzeln der Form ist. Die Thuesche Methode ist ganz elementar, sogar die Theorie der algebraischen Zahlen wird in ihr nicht angewandt. Es wurde aber seit Lagrange die Theorie der Einheiten d. h. die Darstellung der Zahlen durch Normen geschaffen und für die wirkliche Berechnung dieser Lösungen, im Falle $n=3$, scharfsinnige Methoden ausgearbeitet (z. B. der Algorithmus von Voronoï) welche man als direckte Verallgemeinerungen des Kettenbruchalgorithmus ansehen muss. Ich stellte mir 1914 die Aufgabe die binären Formen als Degenerationen der Normen zu betrachten und deren Lösungen zu erforschen, indem ich die vorhergehende Berechnung (durch jene Methoden) der entsprechenden Fundamentaleinheiten voraussetzte.

Als erstes Resultat erhielt ich die vollständige Lösung der Gleichung $a \cdot x^3 + y^3 = 1$. [Journ. der Chark. Math. ges. 1915 (russisch), in den Mem. der St. Petersb. Akad. der Wiss. 1922 (russisch) und in der Math. Zeitschr. (Berlin) 1928, wiederholt]. Es ergab sich das für diese Gleichung (ausser der trivialen Lösung $x=0$, $y=1$) nur die Fondamentaleinheit des Ringe $[(\sqrt[3]{a})^2, \sqrt[3]{a}, 1]$ eine Lösung sein kann. Es genügt also diese Fundamentaleinheit zu berechnen.

Noch interessanter ergab sich die Untersuchung der allgemeiner binären kubischen Form $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, im Falle einer negativer Discriminante.

[C. R. 171 (1920) S. 336 und Mem. der St. Petersburg. Akad. der Wiss. 1922]. Wie noch Lagrange gezeigt hat (1770), reduciert sich die Darstellung einer beliebigen Zahl durch eine binäre Form auf die Darstellung der Zahl 1 durch solche Formen. Mein Resultat ist das folgende: Man kann immer in einer im voraus begrenzter Anzahl von Schritten entscheiden ob die Form (a, b, c, d) einer Form mit $a=d=1$ äquivalent ist. Wenn dies nicht der Fall ist (d. h. im allgemeinene Falle), kann die Form nicht mehr als 2 Darstellungen der Zahl 1 haben, wenn aber die gegebene Form einer Form mit $a=d=1$ äquivalent ist, so hat sie sicher nicht mehr als 4 Darstellungen der Zahl 1, mit der einziger Ausnahme für die Formenklasse $(1, 0-1, 1)$ welche genau 4 Darstellungen der Zahl 1 besitzt.

D. h., hier wenighstens, lässt der Thue-sche Satz eben soviel Lösungen unbestimmt wie viel es überhaupt Lösungen geben kann!

Es gibt nach diesem meinem Satze überraschenderweise für die binären Formen, wenigstens im Falle $n=3$, $D<0$, für die Anzahl der Darstellungen einer Zahl σ eine Grenze welche nur von der darstellharen Zahl, nicht aber von den Koefficienten der Form, abhängt; diese grenze ist hier 5σ.

Dieser Satz wurde von mir durch eine eigenartige Methode gefunden, welche eigentlich eine successive Aunäherung an die Lösungen darstellt. Ich habe diese Methode Algorithmus der Erhöhung genannt.

Es ist 1925 T. Nagell gelungen meine Methode welche ich auf die Gleichung $a\cdot x^3+y^3=1$ anwandte auf die Gleichung $a\cdot x^3+d\cdot y^3=1$ oder 3 zu verallgemeinern und mit deren Hilfe diese Gleichung auf diejenige zu reducieren [Journ. de Math. 1925]. Noch schöner als diese sind die letzten Arbeiten von Nagell in welchen er eine Methode gibt mittels der er zwar nicht die Lösung der Gleichung $a\cdot x^3+y^3=1$ finden kann, aber einen höhst einfachen Beweis dessen liefert dass diese gleichung nicht mehr als eine einzige Lösung haben kann.

Diese Methode hat Nagell auch auf die Form $(1, b, c, 1)$, $D<0$ angewandt und gefunden das für diese speziellen Gleichungen meine Grenze 4 noch auf die Grenze 3 sich reducieren lässt, mit den zwei Ausnahmen der Klassen von $(1, -1, 1, 1)$ und $(1, 0, 1, 1)$.

Diese Methode von Nagell fusst auf Ungleichungen, welche man schon aus geometrischen Betrachtungen leicht erhält, und lässt sich auf die Formen $(a, 0, 0, 1)$ unmittelbar anwenden weil diese Formen entsprechende geometrische Eigenschaften haben. Um diese Methode an die allgemeine Form (a, b, c, d) anzuwenden ist es unbedingt notwendig vorher diese Form mittels des Algorithmus der Erhöhung oder irgend einem ihm äquivalenten Verfahren zu « reducieren ». [Math. Zeitschr. 1928].

Die Methode des Algorithmus der Erhöhung wurde von mir auch weiteren Untersuchungen unterworfen. [Dissertat. 1921 und Journ. der. Leningrader Math. ges. 1927]. Es erwies sich die Tatsache dass in ihrem Laufe sich gewisse

Kriteria des Aufenthaltes begegnen können, d. h. solche Umstände welche zeigen dass es weiter bis ins Unendliche keine Lösungen geben kann. Ich habe auf zahlreichen Zahlenbeispielen dieses Verfahren erprobt und habe bister keinem einzigen Falle begegnet in welchem dieser vervollständigte Algorithmus der Erhöhung mir nicht die vollständige Lösung der Gleichung gab. In der folgende Tabelle sind alle Lösungen aller nicht äquivalenter gleichungen

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1$$

mit $-300 \leqq D < 0$ gegeben:

$-D(a, b, c, d)(x, y)$

23	(1, 0, —1, 1)	(1, 1) (0, 1) (1, 0) (—1, 1) (4, —3)	199	(1, 4, 1, 1)	(0, 1) (1, 0)
31	(1, 1, 0, 1)	(0, 1) (1, 0) (—1, 1) (3, —2)	200	(4, 3, 2, 1)	(0, 1)
44	(1, 1, —1, 1)	(0, 1) (1, 0) (2, —1) (—103, 56)	204	(3, 1, 1, 1)	(0, 1)
59	(1, 2, 0, 1)	(0, 1) (1, 0) (2, 1)	211	(1, 10, 6, 1)	(0, 1) (1, 0)
76	(1, 3, 1, 1)	(0, 1) (1, 0) (36, 13)	212	(2, 4, 1, 1)	(0, 1) (2, —1)
83	(1, 2, 2, 1)	(0, 1) (1, 0)	216	(2, 3, 0, 1)	(0, 1)
87	(1, 2, 1, 1)	(0, 1) (1, 0)	231	(1, 5, 4, 1)	(0, 1) (1, 0)
104	(2, 1, 0, 1)	(0, 1) (2, 3)	236	(2, 1, 2, 1)	(0, 1)
107	(1, 1, 2, 1)	(0, 1) (1, 0) (7, 2)	239	(3, —1, 0, 1)	(0, 1) (3, —5)
108	(2, 0, 0, 1)	(0, 1) (1, 1)	243	(1, 12, —1, 1)	(0, 1) (1, 0)
116	(2, 0, 1, 1)	(0, 1)	244	(2, 4, 5, 1)	(0, 1)
135	(1, 3, 0, 1)	(0, 1) (1, 0) (—3, 1)	247	(1, 4, —3, 1)	(0, 1) (1, 0)
139	(1, 6, 4, 1)	(0, 1) (1, 0)	255	(1, 8, 5, 1)	(0, 1) (1, 0)
140	(1, 5, 3, 1)	(0, 1) (1, 0)	268	(1, 13, 7, 1)	(0, 1) (1, 0)
152	(2, —2, 1, 1)	(0, 1)	279	(1, 5, 2, 1)	(0, 1) (1, 0)
172	(2, 0, 2, 1)	(0, 1)	283	(1, 4, 0, 1)	(0, 1) (1, 0) (—4, 1)
175	(1, 3, —2, 1)	(0, 1) (1, 0)	300	(2, 2, 4, 1)	(0,1)
176	(1, 3, —1, 1)	(0, 1) (1, 0)			

u. s. w.

Doch habe ich bis jetzt keinen Beweis dessen gefunden dass das Kriterium des Aufenthaltes tatsächlich nach einer in voraus begrenzter Anzahl von Schritten erscheinen soll. Es ist interessant dass die anscheinend naheliegende Frage: alle ganzzahligen kubischen Gleichungen (mit dem höhsten Koefficiente 1) mit einer gegebenen Discriminante zu finden, ganz dieselben Schwierigkeiten bietet. Hier folgt eine Tabelle aller solchen Gleichungen (wobei immer nur die Gl. mit dem absolut kleinsten Koeff. von x^2 gegeben ist; jede Gl. kann sich auf eine solche durch die Substitution $x=\bar{x}+k$ reducieren welche ihre Discriminante nicht ändert) $x^3=nx^2+px+q$ für alle $-172 \leqq D < 0$:

$-D=$ 23	31	44	59	76	83
$n=1,\ p=-2,\ q=1$	0, —1, 1	—1, —1, 1	0, —2, 1	1, —3, 1	1, —1, 2
$-1,\ 0,\ 1$	1, 0, 1	1, 1, 1	—1, 1, 2	0, 2, 2	—1, 3, 4
$0,\ 1,\ 1$	1, 2, 1	1, 11, 11	1, 9, 8	1, 3077, 64681	
$-1,\ 4,\ 5$	0, 17, 27	—1, 31281, 2139919			
$0,\ 55,\ 157$					

87	104	107	108	116	135	139	140	152	172
—1, —2, 1	0, 1, 2	1, —3, 2	0, 0, 2	1, 0, 2	0, —3, 1	—1, —1, 2	—1, 5, 7	1, 2, 2	2, 0, 2
—1, 2, 3	1, 46, 106	1, 3, 2	0, 6, 6		0, 3, 3	0, 8, 9	0, —2, 2		
		—1, 157, 812			0, 33, 73				

u. s. w.

welche ich mit meiner Methode berechnet habe.

Man kann auch der ganzen Frage die folgende Form geben: es ist zu beweisen das wenn der absolute Betrag der Discriminante einer reellen ganzen algebraischen Zahl von oben begrenzt ist, so ist der absolute Betrag der Zahl selbst von unten begrenzt.

Ich denke dass der von mir gefundene Satz über die Anzahl der Darstellungen nicht eine Ausnahme ist und dass es auch in allgemeinen für die Anzahl der Darstellungen der Zahl 1 durch binäre Formen (mit $n \geqq 3$) immer eine, so zu sagen, absolute Grenze existiert, d. h. eine solche Grenze welche nur von dem grade n und der Anzahl der reellen Wurzeln der Form abhängt, nicht aber von seinen Koefficienten. Z. B. für $n=3$, $D>0$ ist vielleicht diese Grenze 9. Ist es aber wirklich so?

Hier wissen wir nichts.

G. SANSONE (Firenze - Italia)

NUOVE FORMULE RISOLUTIVE DELLE CONGRUENZE CUBICHE

1. - Questa Comunicazione si riattacca ad altri miei lavori sulla risoluzione apiristica delle congruenze. Tale questione, nel caso delle congruenze binomie, fu trattata magistralmente dal prof. M. CIPOLLA [1]; in seguito il prof. G. SCORZA [2] mediante l'uso della formula di interpolazione Lagrangiana provò la possibilità di costruire *più tipi* di formule risolutive per le congruenze medesime. Io ho preso a studiare le congruenze di tipo diverso dalle binomie. In un primo tempo ho dato la risoluzione delle congruenze cubiche e biquadratiche [3], poi ho studiato la risoluzione delle congruenze di grado qualunque e in particolare la risoluzione delle congruenze di terzo e quarto grado [4].

Nelle ricerche precedenti sulle cubiche avevo trovato che nel caso che le tre radici della congruenza avessero lo stesso carattere quadratico rispetto al modulo non era possibile applicare le formule risolutive della congruenza da me stabilite, senza passare attraverso una sua conveniente trasformata lineare.

(1) M. CIPOLLA: a) *Formule di risoluzione della congruenza binomia quadratica e biquadratica.* [« Rend. della R. Acc. delle Scienze fis. mat. di Napoli », gennaio 1905]; b) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie secondo un modulo primo.* [« Math. Ann. », Bd. LXIII, 1906]; c) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze binomie.* Note 1ª e 2ª. [Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 8° e 9° del vol. XVI, ser. 5ª, 1° sem. 1907].

(2) G. SCORZA: *La risoluzione apiristica delle congruenze binomie e la formula di interpolazione di Lagrange.* [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 7°, vol. III, ser. 6ª, 1° sem. 1926].

(3) G. SANSONE: a) *La risoluzione apiristica delle congruenze cubiche.* Il lavoro è in pubblicazione negli « Annali di Matematica ». Per la prima parte cfr. T. VI, (Serie IV), p. 127-160. I resultati sono stati riassunti nel « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », Anno VII°, n. 1, p. 27; b) *La risoluzione apiristica delle congruenze biquadratiche.* [« Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei », fasc. 12°, vol. VI°, ser. 6ª, 2° sem. 1927].

(4) G. SANSONE: a) *Sul problema della risoluzione apiristica delle congruenze di grado qualunque rispetto ad un modulo primo, e la risoluzione apiristica delle congruenze di quarto grado.* [Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei, fasc. VIII, vol. III, ser. 6ª, 1929]. I resultati sono stati riassunti nel « Boll. dell'Un. Mat. Ital. », Anno VII°, n. 3; b) *Sulla risoluzione apiristica delle congruenze cubiche le cui radici hanno lo stesso carattere quadratico rispetto al modulo.* [Rendiconto R. Istituto Lombardo di Sc. e Lettere, fasc. XI-XV, vol. LXI, 1928).

Anche in questo caso sono ora riuscito a stabilire formule assai semplici ed eleganti per la loro risoluzione ([1]).

2. - Riassumiamo i risultati precedentemente ottenuti.

Una congruenza cubica può sempre ridursi con una sostituzione lineare, o alla forma binomia $x^3 \equiv a$ (mod. p) risolubile con la formula di CIPOLLA ([2]) o alla forma

$$x^3 + ax + a \equiv 0 \pmod{p} \tag{1}$$

dove supponiamo a intero, p primo, $p \neq 2, 3$.

Posto

$$aD_{-3} = 1, \quad D_{-2} = 0, \quad D_{-1} = 0, \quad D_0 = 1, \quad D_1 = 0,$$

$$\begin{gathered} D_{2k} = \binom{k}{0}a^k - \binom{k-1}{2}a^{k-1} + \binom{k-2}{4}a^{k-2} - \dots + (-1)^r\binom{k-r}{2r}a^{k-r} \\ \left(\text{per } k > 1,\ r = \left[\frac{k}{3}\right]\right), \\ D_{2k+1} = -\binom{k}{1}a^k + \binom{k-1}{3}a^{k-1} - \binom{k-2}{5}a^{k-2} + \dots + (-1)^{r+1}\binom{k-r}{2r+1}a^{k-r} \\ \left(\text{per } k > 1, r = \left[\frac{k-1}{3}\right]\right), \end{gathered} \tag{2}$$

condizione necessaria e sufficiente perchè la (1) abbia tre radici incongrue è che il numero a soddisfi la congruenza

$$D_{p-2}(a) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{3}$$

e nel caso che essa possegga una radice che non ha modulo p il carattere quadratico delle altre due, [e per ciò è necessario e basta che si abbia

$$D_{(p-5)/2}(a) \not\equiv 0 \pmod{p}], \tag{4}$$

questa radice si determina colla formula

$$x \equiv (-1)^{\frac{p-3}{2}} D_{(p-3)/2}(a) \,/\, D_{(p-5)/2}(a) \pmod{p}. \tag{I}$$

Nel caso che la (1) abbia tre radici x_1, x_2, x_3 aventi tutte e tre lo stesso carattere quadratico del modulo, abbiamo pure visto ([3]) che esse possono supporsi tutte e tre residuo quadratico del modulo. Quando ciò sia, se i tre numeri $x_1 - \sqrt{x_2x_3}$, $x_2 - \sqrt{x_3x_1}$, $x_3 - \sqrt{x_1x_2}$ non hanno tutte e tre lo stesso carattere quadratico modulo p, allora posto:

$$T_{2k}(b) = \sum_i (-1)^i \binom{k-i}{2(k-2i)} b^{k-i}, \quad T_{2k+1}(b) = \sum_i (-1)^{i+1} \binom{k-i}{2(k-2i)-1} b^{k-i}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{5}$$

([1]) Per le dimostrazioni cfr. G. SANSONE « Nuove formule risolutive delle congruenze cubiche ». [Rend. della R. Acc. di Sc. fis. e mat di Napoli, vol. XXXV, ser. 4ª, 1929].

([2]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. ([3]) b), p. 13.

([3]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. ([4]) b), p. 13.

dove in ciascuna somma i prende tutti i possibili valori interi positivi o nulli per i quali i coefficienti binomiali hanno i loro termini non negativi e il numeratore non minore del denominatore, con la solita convenzione $\binom{a}{0}=1$, la formula

$$x\equiv 2(-1)^{\frac{p-1}{2}} T_{\frac{p-7}{2}}\left(-\frac{2^6}{a}\right) \Big/ T_{\frac{p-5}{2}}\left(-\frac{2^6}{a}\right) \qquad \text{(mod. } p) \tag{II}$$

dà una radice della (1).

3. - È facile provare che se nella (1) le tre radici x_1, x_2, x_3 hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, ma le tre differenze x_1-x_2, x_2-x_3, x_3-x_1 non hanno lo stesso carattere quadratico modulo p, con una trasformazione lineare *nota*, la (1) può ridursi in un'altra per la quale si può applicare la formula (I). Il caso di cui possiamo perciò occuparci è il seguente:

$$\left(\frac{x_1}{p}\right)=\left(\frac{x_2}{p}\right)=\left(\frac{x_3}{p}\right); \qquad \left(\frac{x_1-x_2}{p}\right)=\left(\frac{x_2-x_3}{p}\right)=\left(\frac{x_3-x_1}{p}\right). \tag{6}$$

Si dimostra allora:

a) Sia $p=4l+1$, e le tre radici della (1) soddisfino le (6), si abbia cioè:

$$(-1)^{\frac{p+1}{2}} D_{\frac{p-3}{2}}(a) + \frac{3}{2} D_{\frac{p-5}{2}}(a) \equiv 0, \quad D_{\frac{p-5}{2}}\left(-\frac{27a}{27+4a}\right)\equiv 0 \qquad \text{(mod. } p). \tag{7}$$

Consideriamo il polinomio

$$\psi(a) = a(a^{l-3} + c_{l-4}a^{l-4} + \dots + c_1 a + c_0),$$

definito univocamente dalla congruenza differenziale del secondo ordine di tipo fuchsiano:

$$16(a^3+aa-a)\psi''(a)+24(3a^2+a)\psi'(a)+45a\psi(a)\equiv 0 \qquad \text{(mod. } p). \tag{8}$$

I coefficienti di $\psi(a)$ *sono determinati dalle relazioni:*

$$\begin{gathered}(4i+9)(4i+13)c_i+8a(2i+7)(i+3)c_{i+2}-16a(i+3)(i+4)c_{i+3}\equiv 0 \quad \text{(mod. } p)\\ i=l-4,\ l-5, \dots, 3, 2, 1, 0.\\ c_{l-1}=0, \quad c_{l-2}=0, \quad c_{l-3}=1,\end{gathered} \tag{9}$$

e l'equazione

$$\psi(a)\equiv 0 \qquad \text{(mod. } p) \tag{10}$$

ammette $l-2$ *radici incongrue. La formula*

$$x\equiv -a+1\Big/\left(2\,\frac{3a^2+a}{a^3+aa-a}+4\,\frac{\psi'(a)}{\psi(a)}\right) \tag{III}$$

per ciascuno dei $3l+3$ *valori incongrui di* a *che non soddisfano la* (10) *fornisce sempre una radice della congruenza* (1), e precisamente dei tre numeri x_1+a, x_2+a, x_3+a dà quello che non ha il carattere quadratico degli altri due.

b) Sia $p=4l+3$, e le tre radici della (1) soddisfino le (6) o ciò che è lo stesso le (7).

Consideriamo il polinomio

$$\psi(a)=a(a^{l-1}+c_{l-2}a^{l-2}+c_{l-3}a^{l-3}+\ldots.+c_2a^2+c_1a+c_0)$$

di grado l, *definito univocamente dalla congruenza differenziale del secondo ordine di tipo fuchsiano:*

$$(8') \qquad 16(a^3+\alpha a-\alpha)\psi''(a)+8(3a^2+\alpha)\psi'(a)-3\alpha\psi(a)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

I coefficienti di $\psi(a)$ *sono determinati dalle relazioni:*

$$(9') \qquad \begin{gathered}(4i+3)(4i+7)c_i+8\alpha(2i+5)(i+3)c_{i+2}-16\alpha(i+3)(i+4)c_{i+3}\equiv 0 \ (\text{mod. } p)\\ c_{l+1}=c_l=0, \qquad c_{l-1}=1; \qquad i=l-2, l-3, \ldots., 2, 1, 0,\end{gathered}$$

e l'equazione

$$(10') \qquad \psi(a)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

ammette l *radici incongrue* (0 incluso). *La formula*

$$(\text{III}^*) \qquad x\equiv -a+\frac{1}{4}\frac{\psi(a)}{\psi'(a)} \qquad (\text{mod. } p)$$

per ciascuno dei 3l *valori di a che non soddisfano la* (10), *e distinti da* $-x_1$, $-x_2$, $-x_3$ *fornisce una radice della congruenza* (1).

4. - Passando a studiare le proprietà delle radici della congruenza

$$(10) \qquad \psi(a)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

relativa ad una congruenza (1) per la quale sono soddisfatte le (7) si dimostra: *La* (10) *ammette le radici*

$$a_1,\ a_2=\frac{3}{2}\pm\sqrt{-4\alpha-27}/6$$

e se a è una radice della (1) *incongrua* a_1, a_2 *modulo* p, *essa ammette anche le radici che si ottengono da a con le trasformazioni lineari, una inversa dell'altra:*

$$\frac{(9\alpha+\sqrt{\Delta})a+2\alpha^2}{6\alpha a+(-9\alpha+\sqrt{\Delta})}, \quad \frac{(9\alpha-\sqrt{\Delta})a+2\alpha^2}{6\alpha a+(-9\alpha-\sqrt{\Delta})}, \qquad \Delta=-\alpha^2(4\alpha+27).$$

G. Candido (Brindisi - Italia)

APPLICAZIONI DELLE FUNZIONI U_n E V_n DI LUCAS ALL'ANALISI INDETERMINATA

I.

La equazione di Fermat $x^2 - Dy^2 = +1$....(1), con D intero e positivo.

Definizione. *Le soluzioni delle indeterminate espresse mediante le* U_n *e* V_n *le diremo lucasiane.*

1. Teorema. *Se* $x_1 = \lambda$, $y_1 = \mu$ *è la soluzione minima positiva della* (1), *tutte le soluzioni positive di questa sono date dalla lucasiana* $\left\{ x_n = \frac{1}{2} V_n(2\lambda, +1), \; y_n = \mu U_n(2\lambda, +1) \right\}$....(2), *al variare dell'intero* n *da* 0 *a* $+\infty$.

La cosa si vede subito per il fatto che le (2) coincidono colle formule di Lagrange, che danno la risoluzione completa della (1).

Il teorema precedente ci permette di dedurre facilmente sviluppi, formule ricorrenti, ecc. relativi alle (x_n, y_n), e di tutto questo diamo una semplice indicazione.

2. *Forme diverse della* (x_n, y_n) *dedotte da quelle delle* U_n *e* V_n:

1ª) *La* (x_n, y_n) *sotto forma di continuanti di ordine* n:

$$\left\{ x_n = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \; \dots & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 & 0 \; \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 1 \; \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \; \dots & 2\lambda \end{vmatrix} \qquad y_n = \mu \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \; \dots & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 & 0 \; \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & 1 \; \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \; \dots & 2\lambda \end{vmatrix} \right\} \dots\text{(I)}$$

2ª) *La* (x_n, y_n) *sotto forma waringhiana:*

$$\left\{ x_n = \frac{1}{2}\left[(2\lambda)^n - \frac{n}{1}(2\lambda)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\cdot 2}(2\lambda)^{n-4} - \dots\right], \right.$$

$$\left. y_n = \mu\left[(2\lambda)^{n-1} - \frac{n-2}{1}(2\lambda)^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\cdot 2}(2\lambda)^{n-5} - \dots\right] \right\} \quad \text{(II)}$$

3ª) *La* (x_n, y_n) *sotto forma goniometrica:*

Per n pari:

$$\left\{ \pm x_n = 1 - \frac{n^2}{\pi(2)}\lambda^2 + \dots + \frac{n^2(n^2-2^2)\dots[n^2-(n-2)^2]}{\pi(n)}\lambda^n, \right.$$

$$\left. \pm y_n = \mu\left[-\frac{n}{\pi(1)}\lambda^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{\pi(3)}\lambda^4 - \dots + \frac{n(n^2-2^2)\dots[n^2-(n-2)^2]}{\pi(n-1)}\lambda^n\right] \right\}, \quad \text{(III)}$$

dove nel primo membro va preso il segno $+$ se $n=4k$, ed il segno $-$ se $n=4k+2$, con $k=0, 1, 2, \ldots$

Per n dispari:

$$\left\{\begin{aligned} \pm x_n &= n\left[\frac{1}{\pi(1)}\lambda - \frac{n^2-1^2}{\pi(3)}\lambda^3 + \ldots + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{\pi(n)}\right], \\ \pm y_n &= \mu\left[\frac{1}{\pi(1)}\lambda - \frac{n^2-1^2}{\pi(2)}\lambda^2 + \ldots + \frac{(n^2-1^2)\ldots[n^2-(n-2)^2]}{\pi(n-1)}\right] \end{aligned}\right\} \ldots \text{(III)}$$

dove nel primo membro va preso il segno $+$ se $n=4k+1$, ed il segno $-$ se $n=4k+3$.

4[a]) *La* (x_n, y_n) *sotto la forma binomiale o lagrangiana:*

$$\text{(IV)} \quad \left\{\begin{aligned} x_n &= \lambda^n + \frac{n(n-1)}{\pi(2)}\lambda^{n-2}(\lambda^2-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{\pi(4)}\lambda^{n-4}(\lambda^2-1)^2 + \ldots, \\ y_n &= \mu\left[\frac{n}{\pi(1)}\lambda^{n-1} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\pi(3)}\lambda^{n-3}(\lambda^2-1) + \right. \\ &\left. \quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{\pi(5)}\lambda^{n-5}(\lambda^2-1)^2 + \ldots\right] \end{aligned}\right\}.$$

3. *Formole ricorrenti che legano le soluzioni della* (1).

Le formole di ricorrenza fra le U_n e V_n portano, sempre in virtù del teorema § 1, alle formole:

$$\{x_{n+m} = x_n x_m + D y_n y_m, \quad y_{n+m} = x_n y_m + x_m y_n\} \ldots (1),$$
$$\{x_{n-m} = x_n x_m - D y_n y_m, \quad y_{n-m} = y_n x_m - y_m x_n\} \ldots (2)$$

e da queste si deducono successivamente gli altri due gruppi:

$$\{x_{n+m} = 2x_n x_m - x_{n-m}, \quad y_{n+m} = 2y_n x_n - y_{n-m}\} \ldots (3),$$
$$\{x_{nr} = 2x_r x_{r(n-1)} - x_{r(n-2)}, \quad y_{nr} = 2x_r y_{r(n-1)} - y_{r(n-2)}\} \ldots (4).$$

Caso particolare dei gruppi (3) e (4) è quello più comunemente usato e che si poteva dedurre direttamente:

$$\{x_{n+2} = 2\lambda x_{n+1} - x_n, \quad y_{n+2} = 2\lambda y_{n+1} - y_n\} \ldots (5).$$

4. La generalizzazione delle formole delle U_n, V_n porta naturalmente ad altri sviluppi della (x_n, y_n) ed alla costruzione di altre relazioni fra le soluzioni della (1).

5. *La equazione* $x^2 - Dy^2 = -1 \ldots (1)$, *con* D *intero e positivo.*

Nella ipotesi del teorema precedente le infinite soluzioni della (1) § 5 ci sono date dalla lucasiana $\left\{x_{2i-1} = \frac{1}{2}V_{2i-1}(2\lambda, -1), \; y_{2i-1} = \mu U_{2i-1}\right\} \ldots (2)$, mentre la lucasiana $\left\{x_{2i} = \frac{1}{2}V_{2i}(2\lambda, -1), \; y_{2i} = \mu U_{2i}(2\lambda, -1)\right\} \ldots (3)$ dà infinite soluzioni della (1) § 1.

Le formole ricorrenti comunemente usate per la (1), analoghe alle (5) del § 3, sono:

$$\{x_{n+1} = 2\lambda x_n + x_{n-1}, \quad y_{n+1} = 2\lambda y_n + y_n\}, \ldots (5)$$

ma queste comprendono le due serie di soluzioni date dalle (2) e (3). Pertanto ecco un gruppo di formole ricorrenti — ricavato sempre mediante le U_n e V_n —

che dà solamente soluzioni della (1) § 1, o della (1) § 5, *fissate le condizioni iniziali*, rispettivamente $x_0=1$, $y_0=0$; $x_1=2\lambda^2+1$, $y_1=2\lambda\mu$ per la prima, ed $x_1=\lambda$, $y_1=\mu$; $x_2=4\lambda^3+3\lambda$, $y_2=\mu(4\lambda^2+1)$ per la seconda.

$$\{ x_{n+2}=(4\lambda^2+2)x_{n+1}-x_n,\ y_{n+2}=(4\lambda+2)y_{n+1}-y_n \}\dots(6).$$

6. *Se si pone* $l=2\lambda$ *e si considera* λ *come un parametro, fra le* x_n *ed* y_n *sussiste la relazione:*

$$2\mu x_n'(l,+1)=ny_n(l,+1)\dots(1).$$

Questa relazione riduce naturalmente della metà il formulario delle (x_n, y_n). A parte questa considerazione, la (1) che pare notata qui per la prima volta potrà forse apportare altri vantaggi all'analisi indeterminata di 2° grado.

7. *Le equazioni differenziali del 2° ordine relative alle soluzioni della equazione* $x^2-Dy^2=\pm 1$, *in cui* D *è funzione di un parametro* λ.

Ecco le due proposizioni che danno rapidamente le equazioni di cui in questo §:

1ª) *La equazione differenziale del 2° ordine soddisfatta dalla* x_n *si ottiene eliminando* V_n'', V_n', *e* V_n *fra le due equazioni:*

$$\{ (4\lambda^2\mp 4)V_n''(2\lambda,\pm 1)+2\lambda V_n'(2\lambda,\pm 1)-n^2V_n(2\lambda,\pm 1)=0,\ x_n=\frac{1}{2}V_n(2\lambda,\pm 1) \}\dots(1)$$

2ª) *La equazione differenziale del 2° ordine soddisfatta dalle* y_n *si ottiene eliminando* U_n'', U_n' *ed* U_n *fra le due equazioni:*

$$\{ 4\lambda^2\mp 4)U_n''(2\lambda,\pm 1)+3\cdot 2\lambda U_n'(2\lambda,\pm 1)-(n^2-1)U_n(2\lambda,\pm 1)=0,$$
$$y_n=\mu U_n(2\lambda,\pm 1) \}\dots(2).$$

II.

La equazione $X^2-DY^2=K\dots(1)$, con D e K interi e positivi.

1. Indichiamo, come innanzi, con (λ, μ) la soluzione minima positiva della equazione di Fermat $x^2-Dy^2=1\dots(2)$, con $\mu\neq 0$, ed indichiamo con (ξ_i, ψ_i) una soluzione appartenente al sistema fondamentale delle soluzioni della (1). [Quelle cioè per le quali si ha $0<\psi_i<\mu\sqrt{K}$ e quindi $0<\xi_i<\lambda\sqrt{K}$]. Si hanno allora i seguenti teoremi:

1°) *Se* (ξ_m, ψ_m) *è una delle* i *soluzioni fondamentali della* (1), (λ, μ) *la soluzione minima positiva della* (2) *e* $\left[\frac{1}{2}V_n(2\lambda,+1),\ \mu U_n(2\lambda,+1)\right]$ *una lucasiana qualunque di questa, tutte le soluzioni intere e positive della* (1) *sono date, e ciascuna una sola volta, dalle lucasiane*

$$\{ X_n=\xi_m\frac{1}{2}V_n(2\lambda,+1)+D\psi_m\mu U_n(2\lambda,+1),$$
$$Y_n=\psi_m\frac{1}{2}V_n(2\lambda,+1)+\mu\xi_m U_n(2\lambda,+1) \}\dots(F),$$

quando si faccia $m=1, 2,\dots, i$, *e poi* $n=1, 2,\dots$

2°) *Le soluzioni* (X_r, Y_r) *della* (1) *sono governate dalle relazioni di ricorrenza*

$$\{ X_n = 2\lambda X_{n-1} - X_{n-2}, \quad Y_n = 2\lambda Y_{n-1} - Y_{n-2} \} \text{....(G)}$$

colle condizioni iniziali

$$\left.\begin{array}{l} X_0 = \xi_m, \quad X_1 = \lambda\xi_m + D\mu\psi_m, \\ Y_0 = \psi_m, \quad Y_1 = \lambda\psi_m + \mu\xi_m. \end{array}\right\} \text{....(H).}$$

3°) *Tutte le soluzioni della* (1) *sono date da*

$$\{ X_n = (\lambda\xi_m + D\mu\psi_m) U_n(2\lambda, +1) - \xi_m U_{n-1}(2\lambda, +1),$$
$$Y_n = (\lambda\psi_m + \mu\xi_m) U_n(2\lambda, +1 - \quad \psi_m U_{n-1}(2\lambda, +1) \} \text{....(C)}$$

quando si faccia m=1, 2,...., i, *e poi* n=1, 2,....

2. Le (F) ci permettono di risolvere la questione: *Data della* (1) *una soluzione* (A, B) *non fondamentale, trovare la soluzione fondamentale* (ξ_i, ψ_i) *a cui quella appartiene.*

A questo quesito si risponde adoperando convenientemente le formole:

$$\{ \xi_i = A \cdot \frac{1}{2} V_n(2\lambda, +1) - BD\mu U_n(2\lambda, +1) < \lambda \sqrt{K};$$
$$\psi_i = B \cdot \frac{1}{2} V_n(2\lambda, +1) - A\mu U_n(2\lambda, +1) < \mu\sqrt{K} \} \text{....}$$

III.

La equazione $X^2 - DY^2 = -K$....(1) con D e K interi e positivi.

1. I risultati a' quali si perviene in questo caso sono perfettamente analoghi a quelli del caso precedente.

Ricordando che le soluzioni fondamentali della (1) sono quelle per le quali si ha $\psi_i \leq \sqrt{\frac{K(\lambda+1)}{2D}}$ e quindi $\xi_i \leq \sqrt{\frac{K(\lambda-1)}{2}}$, salvo il caso noto e studiato in cui le limitazioni stesse forniscano una soluzione della (1); si hanno i teoremi:

1°) *Le lucasiane che danno la soluzione completa della* (1) *sono:*

$$\{ X_n = \pm \xi_m \frac{1}{2} V_n(2\lambda_1 + 2) + \psi_m D\mu U_n(2\lambda_1 + 1),$$
$$Y_n = \psi_m \frac{1}{2} V_n(2\lambda_1 + 1) \pm \xi_m \mu U_n(2\lambda_1 + 1) \} \text{....(F')}$$

quando si faccia m=1, 2, ..., i, *e poi* n=0, 1, 2, ...; *colla avvertenza che per* n=0 *bisogna rifiutare il segno — che affetta la* ξ_m.

2°) *Le soluzioni* (X_r, Y_r) *della* (1) *sono governate dalle soluzioni di ricorrenza*

$$\{ X_n = 2\lambda X_{n-1} - X_{n-2}, \quad Y_n = 2\lambda Y_{n-1} - Y_{n-2} \} \text{....(G')}$$

colle condizioni iniziali

$$\{ X_0 = \xi_m, \quad Y_0 = \psi_m, \quad X_1 = \lambda\xi_m + D\mu\psi_m, \quad Y_1 = \lambda\psi_m + \mu\xi_m;$$
$$X_0 = \xi_m, \quad Y_0 = \psi_m, \quad X_1 = -\lambda\xi_m + D\mu\psi_m, \quad Y_1 = \lambda\psi_m - \mu\xi_m \} \text{....(H').}$$

3°) *Tutte le soluzioni della* (1) *sono date da*

$$\left.\begin{array}{l} \{ X_n = (\lambda\xi_m + D\mu\psi_m)\, U_n(2\lambda,+1) - \xi_m U_{n-1}(2\lambda,+1), \\ \qquad\qquad Y_n = (\lambda\psi_m + \mu\xi_m)\, U_n(2\lambda,+1) - \psi_m U_n(2\lambda,+1) \} \\ \{ X_n = (-\lambda\xi_m + D\mu\psi_m)\, U_n(2\lambda,+1) + \xi_m U_{n-1}(2\lambda,+1), \\ \qquad\qquad Y_n = (\lambda\psi_m - \mu\xi_m)\, U_n(2\lambda,+1) - \psi_m U_{n-1}(2\lambda,+1) \} \end{array}\right\} \ldots (C').$$

2. Risultati del tutto analoghi si possono enunciare rispetto alla totalità delle soluzioni razionali della equazione generale

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \ldots (2).$$

Così, indicando con $(\xi_m,\ \psi_m)$ le soluzioni fondamentali della equazione

$$X^2 - 4(-A_{33})\, Y^2 = 16(A_{23}^2 - A_{22}A_{33}) \ldots (3)$$

dove A_{11} [illegible] 0 ed A_{23}^2 [illegible] $A_{22}A_{33} > 0$; con $(x_n,\ x_n)$ le soluzioni razionali della (2) e con $(\lambda,\ \mu)$ la soluzione minima positiva della equazione $x^2 - 4(-A_{33})y^2 = 1$, si hanno rispetto alla (2) i teoremi:

1°) *Tutte le soluzioni razionali della* (2) *sono date da*

$$\left.\begin{array}{l} x_n = [illegible] (a_{\ldots} [illegible])\, U_n(2\lambda,+1) [illegible] (a_{\ldots}\psi_m \quad 2\xi_m)\, U_n(2\lambda,+1) + \frac{A_{13}}{A_{33}} \\ y_n = [illegible]\, U_n(2\lambda,+1) [illegible]\, U_n(2\lambda,+1) [illegible] \end{array}\right\} \ldots (F'')$$

2°) *Le soluzioni* $(x_n,\ y_n)$ *sono governate dalle relazioni ricorrenti:*

$$\left\{ x_{n+1} = 2\lambda x_n - x_{n-1} - \frac{2A_{13}(\lambda - 1)}{A_{33}},\quad y_{n+1} = 2\lambda y_n - y_{n-1} - \frac{2A_{23}(\lambda - 1)}{A_{33}} \right\} \ldots (G'')$$

colle condizioni iniziali:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = \frac{a_{12}}{4a_{11}A_{33}}\xi_m + \frac{1}{2a_{11}}\psi_m + \frac{A_{13}}{A_{33}},\quad y_0 = \frac{-1}{4A_{33}}\xi_m + \frac{A_{23}}{A_{33}}, \\ x_1 = \frac{a_{12}}{4a_{11}A_{33}}(\lambda\xi_m - A_{33}\mu\psi_m) + \frac{1}{2a_{11}}(\lambda\psi_m + \mu\xi_m) + \frac{A_{13}}{A_{33}}, \\ y_1 = \frac{-\lambda}{4A_{33}}\xi_m + \frac{\mu}{4}\psi_m + \frac{A_{23}}{A_{33}}. \end{array}\right\} \ldots (H'')$$

3°) *Tutte le soluzioni razionali della* (2) *sono date dalle formole*

$$\left.\begin{array}{l} x_n = \frac{1}{4a_{11}A_{33}}[(a_{12}\lambda + 2\mu A_{33})\xi_m + (2\lambda - a_{12}\mu)A_{33}\psi_m]\, U_n + \\ \qquad\qquad - \frac{1}{4a_{11}A_{33}}(a_{12}\xi_m + 2A_{33}\psi_m)\, U_{n-1} + \frac{A_{13}}{A_{33}}, \\ y_n = \frac{1}{4A_{33}}(-\lambda\xi_m + \mu A_{33}\psi_m)\, U_n - \frac{1}{4A_{33}}\xi_m U_{n-1} + \frac{A_{23}}{A_{33}} \end{array}\right\} \ldots (C'')$$

S'intende bene che m ed n variano, in questi teoremi, come nei precedenti analoghi.

IV.

La equazione $\eta^2 - D\theta^2 = \pm k^n$....(1), con D, k, n interi e positivi.

1. TEOREMA. *Indicando con* (X_n, Y_n) *le soluzioni della equazione* $X^2 - DY^2 = k$....(2), *le lucasiane*

$$\left\{ \eta_{n,m} = \frac{1}{2} V_m(2X_n,\ k), \qquad \theta_{n,m} = Y_n U_m(2X_n,\ k), \right\} \text{....(3)}$$

al variare di n *intero da* 0 *a* $+\infty$ *danno* i *infinità di soluzioni della* (1), *supponendo* i *le soluzioni fondamentali della* (2).

2. In corrispondenza di quanto è detto nel II § 2, da una lucasiana (3) si può rimontare ad una soluzione fondamentale $(\xi_j',\ \psi_j')$ della (1) mediante le formole:

$$\left\{ \begin{aligned} &\xi_j' = \eta_{m,n} \frac{1}{2} V_r(2\lambda, +1) - \theta_{m,n} D\mu U_r(2\lambda, +1) < \lambda k^{\frac{m}{2}}, \\ &\psi_{m,n}' = \theta_{m,n} \frac{1}{2} V_r(2\lambda, +1) - \gamma\mu_{m,n} U_r(2\lambda, +1) < \mu k^{\frac{m}{2}} \end{aligned} \right\} \text{....(4).}$$

3. Naturalmente, in possesso di una soluzione fondamentale della (1), $\eta_0 = \xi_0'$, $\theta_0 = \psi_0'$ possiamo utilizzare le formole ricorrenti

$$\eta_n = 2\lambda\gamma_{n-1} - \gamma_{n-2}, \text{ con } \eta_0 = \xi_0',\ \eta_1 = \lambda\xi_0' + D\mu\psi_0', \text{ ecc.}$$

V.

La equazione $a\xi^2 - b\psi^2 = z^n$....(1) con a e b interi e >0.

A differenza de' metodi noti per la trattazione della (1), l'uso delle U_n e V_n evita l'impiego degli immaginari e degli irrazionali. Si premette il

TEOREMA. *La equazione* $a\xi^2 + b\psi^2 = z^{n-1}$....(2) *riceve infinite soluzioni da' polinomi interi e razionali*

$$\xi = \frac{1}{2\sqrt{a}} V_{2r-1}(2\lambda\sqrt{a},\ a\lambda^2 + b\mu^2), \quad \psi = \mu U_{2r-1}(2\lambda\sqrt{a},\ a\lambda^2 + b\mu^2), \quad z = a\lambda^2 + b\mu^2,$$

in cui λ *e* μ *sono numeri arbitrari.*

Consegue da questo teorema il corollario seguente:

Se la equazione $ax^2 - by^2 = \pm 1$, *con* a *e* b *positivi ammette la soluzione* $x = l$, $y = m$, *essa ne ammette infinite che sono date dalle lucasiane*

$$x_{2r-1} = \frac{1}{2\sqrt{a}} V_{2r-1}(2l\sqrt{a}, \pm 1), \qquad y_{2r-1} = m U_{2r-1}(2l\sqrt{a}, \pm 1),$$

al variare di r *intero da* 1 *a* $+\infty$. *Le formole ricorrenti di queste soluzioni sono, per la equazione* $+1$:

$$\left. \begin{aligned} x_{2n+1} &= (4al^2 - 2)x_{2n-1} - x_{2n-3}, \\ y_{2n+1} &= (4al^2 - 2)y_{2n-1} - y_{2n-3}. \end{aligned} \right\} \text{ colle condizioni iniziali: } \left\{ \begin{aligned} &x_1 = l, \quad x_3 = 4l^3a - 3l, \\ &y_1 = m, \quad y_3 = m(4l^2a - 1), \end{aligned} \right.$$

e per la equazione -1:

$$\left.\begin{array}{l} x_{2n+1}=(4al^2+2)x_{2n-1}-x_{2n-3}, \\ y_{2n+1}=(4al^2+2)y_{2n-1}-y_{2n-3}. \end{array}\right\} \textit{colle condizioni iniziali: } \left\{\begin{array}{ll} x_1=l, & x_3=4l^3+3l, \\ z_1=m, & y_3=m(4al^2+1). \end{array}\right.$$

Da quanto si è ora premesso si ha, relativamente alla (1), il seguente

TEOREMA. *Se la equazione* $ax^2-by^2=1$ *ammette le soluzioni* $x=l$, $y=m$, *la* (1) *ammette le infinite soluzioni*

$$\left\{\begin{array}{l} \xi=\frac{1}{2\sqrt{a}}V_{2i-1}(2l\sqrt{a},\ +1)\,\frac{1}{2}V_n(2\lambda,\lambda^2-ab\mu^2)+bm\mu\,U_{2i-1}(2l\sqrt{a},+1)\,U_n(2\lambda,\lambda^2-ab\mu^2) \\ \psi=m\,U_{2i-1}(2l\sqrt{a},\ +1)\,\frac{1}{2}V_n(2\lambda,\lambda^2-ab\mu^2)+\frac{1}{2\sqrt{a}}a\mu\,V_{2i-1}(2l\sqrt{a},+1)\,U_n(2\lambda,\lambda^2-ab\mu^2) \\ z=\lambda^2-ab\mu^2, \end{array}\right.$$

dove λ *e* μ *sono numeri arbitrari,* n *indice fisso ed* i *prende tutti i valori interi* 1, 2,...., $+\infty$.

NOTA. — A' risultati precedenti possono aggiungersi quelli relativi alle equazioni $x^2-Dy^2=k^rz^n$, $ax^2-by^2=k^rz^n$. Inoltre abbiamo qui omesso la trattazione, con applicazioni, della frazione continua del Cataldi, che, sotto forma di aggiunta, seguiva l'esposizione precedente anche per dimostrare la coincidenza delle ricerche di Lagrange con altre posteriori.

La brevità dello spazio ci ha costretto non solo ad una esposizione schematica della « Comunicazione », ma anche monca sia per la esemplificazione numerica, sia per i riferimenti e confronti con le ricerche di altri Autori [Eulero, Gauss, Legendre, Tannery, Fauquemberg, Frattini, Landry, Gérardin, Bortolotti, ecc.]. La « Comunicazione » sarà pubblicata integralmente in altro posto.

A. PADOA (Genova - Italia)

UN DUPLICE SISTEMA INDETERMINATO

1. - La risoluzione, mediante numeri razionali positivi (zero escluso), del sistema

(I) $X^2+n=Y^2$ (II) $X^2-n=Z^2$

ha una storia pressochè ininterrotta d'un millennio: da un manoscritto arabo anonimo del 972 sino ai nostri giorni (1).

Tuttavia, eccone una *formula ricorrente* diversa da quella trovata da E. LUCAS (2), in cui x, y, z designano una soluzione qualunque del sistema (I) (II) ed X, Y, Z ne designano una nuova soluzione, per il medesimo valore di n.

(III) $$X=(x^4+n^2)/2xyz$$

(IV) $Y=X+(nz/xy)$ (V) $Z=X-(xz/y)$.

Infatti, dalla (IV),

$$Y^2=X^2+(2Xnz/xy)+(nz/xy)^2$$

da cui, per la (III),

$$Y^2-X^2=n[x^4+n(n+z^2)]/(xy)^2$$

da cui, poichè x e z verificano la (II),

$$Y^2-X^2=n(x^2+n)/y^2$$

da cui, poichè x ed y verificano la (I),

$$Y^2-X^2=n$$

cioè la (I).

Similmente, dalla (V),

$$Z^2=X^2-(2Xxz/y)+(xz/y)^2$$

da cui, per la (III),

$$X^2-Z^2=[(x^2-z^2)x^2+n^2]/y^2$$

da cui, poichè x e z verificano la (II),

$$X^2-Z^2=n(x^2+n)/y^2$$

---

(1) Se ne veda la copiosa bibliografia in *History of the theory of numbers*, Volume II, *Diophantine analysis*, by LEONARD EUGENE DICKSON, The Carnegie institution, Washington, 1920, Chap. XVI, 459-472.

(2) Nouv. Ann. Math., (2), 17, 1878, 450 ovvero Dickson, op. cit., 469.

da cui, poichè x ed y verificano la (I),

$$X^2 - Z^2 = n$$

cioè la (II) ([1]).

2. - Invece, della risoluzione (sempre con numeri razionali positivi, zero escluso) del sistema

$$\text{(VI)} \qquad n + x^2 = y^2 \qquad\qquad \text{(VII)} \qquad n - x^2 = z^2$$

pare si sia occupato ALKARKHI ([2]) e soltanto per darne la soluzione particolare

$$(1) \qquad « n = 5 », \ « x = 2 », \ « y = 3 », \ « z = 1 ».$$

Mi sembra quindi non superfluo mostrare come ciascuna soluzione di questo sistema possa *generare* una soluzione del sistema (I) (II), per il medesimo valore di n, e rilevare il fatto curioso che, a tal fine, può servire la (III) stessa: ma congiuntamente alle formule

$$\text{(VIII)} \qquad Y = X + (xz/y) \qquad\qquad \text{(IX)} \qquad Z = X - (nz/xy).$$

Infatti, dalla (VIII),

$$Y^2 = X^2 + (2Xxz/y) + (xz/y)^2$$

da cui, per la (III),

$$Y^2 - X^2 = [n^2 + x^2(x^2 + z^2)]/y^2$$

da cui, per la (VII),

$$Y^2 - X^2 = n(n + x^2)/y^2$$

da cui, per la (VI),

$$Y^2 - X^2 = n$$

cioè la (I).

Similmente, dalla (IX),

$$Z^2 = X^2 - (2Xnz/xy) + (nz/xy)^2$$

da cui, per la (III),

$$X^2 - Z^2 = n[x^4 + n(n - z^2)]/(xy)^2$$

da cui, per la (VII),

$$X^2 - Z^2 = n(x^2 + n)/y^2$$

([1]) È opportuno rilevare che la (V) non può mai dare « $Z = 0$ ». Infatti, perchè ciò accadesse, dovrebb'essere « $X = xz/y$ »; cioè, per la (III), « $x^4 + n^2 = 2x^2z^2$ »; cioè, poichè x e z verificano la (II), « $x^4 + n^2 = 2x^4 - 2nx^2$ », cioè « $2n^2 = (x^2 - n)^2$ »: il che è impossibile, n ed « $x^2 - n$ » (cioè « z^2 ») essendo razionali (zero escluso).

Però, analogamente, la (V) dà « $Z < 0$ » quando « $2n^2 < (x^2 - n)^2$ »; cioè, essendo positivi n per ipotesi ed « $x^2 - n$ » perchè eguale a « z^2 », « $n\sqrt{2} < x^2 - n$ », cioè « $x^2 > (1 + \sqrt{2})n$ »: il che può accadere, non contraddicendo alla condizione « $x^2 > n$ » richiesta dalla (II), anzi implicandola. In tal caso, a Z si attribuirà *il valore assoluto* di quello fornito dalla (V), da esso soltanto dipendendo la verifica della (II).

([2]) F. WOEPCKE, *Extrait du Fakhrî*, Paris, 1853, (28), 85 e (27), 111-2 ovvero Dickson, op. cit., 460.

da cui, per la (VI),

$$X^2 - Z^2 = n$$

cioè la (II) ([1]).

3. - Ad es., la soluzione (1) del sistema (VI) (VII) genera la soluzione

(2) « $n=5$ », « $X=41/12$ », « $Y=49/12$ », « $Z=31/12$ »

del sistema (I) (II), che nel 1220 LEONARDO PISANO diede in risposta alla sfida di GIOVANNI PALERMITANO; mentre da questa, mediante la formula ricorrente [§ 1], se ne ricava la soluzione del sistema stesso, sempre per « $n=5$ », trovata per altra via da J. SVOBODA ([2]), in cui

$$X = 3344161/1494696 \tag{3}$$

la quale frazione, essendo irriducibile, non incoraggia a proseguire nell'applicazione della formula ricorrente.

Quanto alla (2), mi sembra probabile che il PISANO l'abbia desunta invece dall'identità di MOHAMMED BEN ALHOCAIN ([3])

$$\left[\frac{a^2+b^2}{2(a-b)}\right]^2 \pm \frac{ab(a+b)}{a-b} = \left(\frac{a+b}{2} \pm \frac{ab}{a-b}\right)^2 \tag{4}$$

ponendovi « $a=5$ » e « $b=4$ », e dividendone ambo i membri per 36.

4. - Comunque, moltiplicandone ambo i membri per « $(a-b)^2/c^2$ », dalla (4) si ricava quest'altra identità

$$\left(\frac{a^2+b^2}{2c}\right)^2 \pm \frac{ab(a^2-b^2)}{c^2} = \left(\frac{a^2-b^2 \pm 2ab}{2c}\right)^2 \tag{X}$$

la quale *risolve* il sistema (I) (II) allorchè

$$n = ab(a^2-b^2)/c^2. \tag{XI}$$

LEONARDO PISANO disse *congruo* ogni numero n che rende *risolubile razionalmente* il sistema (I) (II) e gli studiosi di questo fornirono espressioni, proprietà e valori particolari dei numeri *congrui*, necessariamente *deducibili* dalla (XI).

([1]) Neppure la (IX) può mai dare « $Z=0$ ». Infatti, perchè ciò accadesse, dovrebb'essere « $X=nz/xy$ »; cioè, per la (III), « $x^4+n^2=2nz^2$ »; cioè per la (VII), « $x^4+n^2=2n^2-2nx^2$ », cioè « $(x^2+n)^2=2n^2$ »: il che è impossibile, « x^2+n » ed n essendo razionali (zero escluso).

Però, analogamente, la (IX) dà « $Z<0$ » quando « $(x^2+n)^2<2n^2$ »; cioè, n essendo positivo, quando « $x^2+n<n\sqrt{2}$ », cioè « $x^2<(-1+\sqrt{2})n$ »: il che può accadere, non contraddicendo alla condizione « $x^2<n$ » richiesta dalla (VII), anzi implicandola. In tal caso, a Z si attribuirà *il valore assoluto* di quello fornito dalla (IX), da esso soltanto dipendendo la verifica della (II).

([2]) L'intermédiaire des math., 21, 1914, 176-8.

([3]) F. WOEPCKE, Atti Acc. Pont. Nuovi Lincei, 14, 1860-1, 350-3.

Che la (XI) sia *sufficiente* risulta dalla (X).

Che sia *necessaria* può dimostrarsi *direttamente*, per una via diversa da quella seguita da E. LUCAS nell'op. cit. [1].

Supposto il sistema (I) (II) risolto razionalmente, si ponga

(5) $a/b=(X+Y)/(X+Z)$ (6) $c=a(a+b)/(X+Y)$

e se ne ricavi

(7) $X+Y=a(a+b)/c$ (8) $X+Z=b(a+b)/c$

da cui, sottraendo membro a membro,

(9) $$Y-Z=(a^2-b^2)/c.$$

D'altra parte, eguagliando i valori di n forniti dalle (II) (I),

$$X^2-Z^2=Y^2-X^2 \qquad \text{cioè} \qquad X-Z=(Y^2-X^2)/(X+Z)$$

da cui, per la (5),

$$X-Z=(a/b)(Y-X)$$

cioè, aggiungendo ad ambo i membri « $Y-X$ »,

$$Y-Z=[(a+b)/b](Y-X)$$

che, confrontata con la (9), dà

$$Y-X=b(a-b)/c$$

il cui prodotto per la (7) dà

$$Y^2-X^2=ab(a^2-b^2/c^2$$

cioè, per la (I), la (XI).

Per la (5), a e b possono essere entrambi *interi* e *primi fra loro* e, per la (6), c dev'essere *razionale*.

Se si vuole che n risulti *intero* e *privo di fattori quadrati*, si assumerà come valore di « c^2 » *il massimo quadrato* per cui risulta divisibile « $ab(a^2-b^2)$ ».

Ad es., per « $a=16$ » e « $b=9$ », risulta « $ab(a^2-b^2)=16.9.25.7=60^2 7$ ». Quindi, posto « $c=60$ », risulta « $n=7$ » e, per la (X), il sistema (I) (II) è risolto dalle identità:

(10) $(337/120)^2+7=(463/120)^2$ (11) $(337/120)^2-7=(113/120)^2$.

Si noti che è *congruo* ogni *prodotto di tre numeri naturali consecutivi* nonchè ogni *prodotto di due numeri naturali consecutivi per la loro somma*; il che si deduce immediatamente dalla (XI), ponendovi « $a-b=c=2$ » ovvero « $a-b=c=1$ ». Si ottiene:

$$n=b(b+1)(b+2) \qquad \text{ovvero} \qquad n=(b+1)b[(b+1)+b].$$

---

[1] Vedi nota [2] al § 1.

5. - In generale, affinchè il valore di n fornito dalla (XI) risulti *positivo*, si dovrà scegliere « $a > b$ ».

Così facendo, nella (X), anche « $a^2 - b^2 + 2ab$ » risulta *positivo*.

Quanto ad « $a^2 - b^2 - 2ab$ », esso risulta *diverso da zero*. Altrimenti,

$$\text{« } a^2 = b^2 + 2ab \text{ », cioè « } 2a^2 = (a+b)^2 \text{ »:}$$

il che è impossibile per valori interi (od anche soltanto razionali) di a e di b.

Ma « $a^2 - b^2 - 2ab$ » risulterebbe *negativo*, se fosse « $a^2 - 2ab < b^2$ », cioè « $(a-b)^2 < 2b^2$ », cioè $a - b < b\sqrt{2}$ », cioè « $a < (1+\sqrt{2})b$ ». In tal caso, si potrebbe usare il *valore assoluto* di « $a^2 - b^2 - 2ab$ ». Ma è preferibile *imporre* la condizione

$$\text{(XII)} \qquad a > (1+\sqrt{2})b$$

la quale implica l'altra già imposta, cioè « $a > b$ », e garantisce che anche « $a^2 - b^2 - 2ab$ » risulta *positivo*.

Così facendo, apparentemente si *pèrdono* i valori *positivi* di n che si troverebbero, dopo aver scelto b, scegliendo a in modo che risulti

$$\text{(12)} \qquad b < a < (1+\sqrt{2})b.$$

Senonchè, invece, la (XII) evita la vana *ripetizione* di cotesti valori di n.

Infatti, supposto verificata la (12), si ponga

$$\text{(13)} \quad A = a + b \qquad \text{(14)} \quad B = a - b \qquad \text{(15)} \quad C = 2c$$

e si osservi che, per la (12), « $b\sqrt{2} > a - b$ », cioè « $2b > (a-b)\sqrt{2}$ », da cui, per le (13) (14), « $A - B > B\sqrt{2}$ »; sicchè A e B verificano la (XII).

Inoltre, risulta

$$AB(A^2 - B^2)/C^2 = ab(a^2 - b^2)/c^2$$

sicchè, usando A, B, C invece di a, b, c, la (XI) fornisce *lo stesso* valore di n.

6. - Nessuno ch'io sappia s'è occupato di trovare l'espressione generale dei valori di n che rendono *risolubile razionalmente* il sistema (VI) (VII) e ch'io dico essere

$$\text{(XIII)} \qquad n = (r^4 + 4s^4)/t^2.$$

Che questa sia *sufficiente* risulta dall'identità

$$\text{(XIV)} \qquad (r^4 + 4s^4)/t^2 \pm (2rs/t)^2 = [(r^2 \pm 2s^2)/t]^2.$$

Che sia *necessaria* si dimostra supponendo risolto il sistema (VI) (VII) e ponendo

$$\text{(16)} \quad r/s = (y+z)/x \qquad \text{(17)} \quad t = 2r^2/(y+z)$$

il cui prodotto membro a membro dà « $rt/s = 2r^2/x$ », cioè

$$\text{(18)} \qquad x = 2rs/t.$$

Dalle (16) (18),

(19) $$y+z=2r^2/t$$

mentre, dalla (VI) sottraendo la (VII), « $2x^2=y^2-z^2$ »; da cui, per la (18), « $y^2-z^2=8r^2s^2/t^2$ »; che, divisa per la (19), dà

(20) $$y-z=4s^2/t.$$

Ora, la semisomma delle (19) (20) dà

(21) $$y=(r^2+2s^2)/t$$

e quindi, per le (18) (21),

$$y^2-x^2=(r^4+4s^4)/t^2$$

da cui, per la (VI), la (XIII).

Per la (16), r ed s possono essere entrambi *interi* e *primi fra loro* e, per la (17), t dev'essere *razionale.*

Se si vuole che n risulti *intero* e *privo di fattori quadrati*, si assumerà come valore di « t^2 » *il massimo quadrato* per cui risulti divisibile « r^4+4s^4 ».

Ad es., per « $r=6$ » ed « $s=1$ », risulta « $r^4+4s^4=1296+4=10^2 13$ ». Quindi posto « $t=10$ », risulta « $n=13$ » e, per la (XIV), il sistema (VI) (VII) è risolto dalle identità:

(22) $$13+(6/5)^2=(19/5)^2$$ (23) $$13-(6/5)^2=(17/5)^2.$$

7. - A. Genocchi ha trovato varie espressioni di numeri *congrui*, fra cui « r^4+4s^4 » [1].

Quanto precede, ci consente di asserirlo *a priori*. Infatti, codesta espressione si ricava dalla (XIII) ponendovi « $t=1$ »; in tal modo si ottiene un valore di n che rende *risolubile razionalmente* il sistema (VI) (VII) e quindi [§ 2] anche il sistema (I) (II).

---

[1] Annali di Sc. Mat. e Fis., 6, 1355, 313-7.

Non ho avuto l'opportunità di valermi di questa citazione del Dickson (op. cit., 465). Comunque, per *trasformare* la (XI) nella (XIII), basta porvi

(24) $$a=r^4+4s^4$$ (25) $$b=4r^2s^2$$ (26) $$c=2rst(r^4-4s^4).$$

Quindi, la (XIII), ch'è *generale* per il sistema (VI) (VII), è invece *particolare* per il sistema (I) (II).

A. GÉRARDIN (Nancy - Francia)

FACTORISATION COMPLÈTE ET PRIMALITÉ

Je présente ici une application nouvelle de mes méthodes personnelles [1] toutes inédites, en étudiant la factorisation complète de polynomes du second degré, sommes de deux carrés, et obtenant automatiquement la primalité. La généralisation est très facile, ainsi que l'étude d'autres formes.

Soit un polynome

$$P \equiv Ax^2 + Bx + C = (mx \pm 1)^2 + x^2 \qquad m \neq 1 \tag{1}$$

à étudier pour toutes les valeurs successives de 1 à x, limite quelconque choisie.

P étant une somme de deux carrés, ses facteurs serent de même forme.

Soit un de ces diviseurs [2]

$$p = a^2 + b^2. \tag{2}$$

---

(1) Voir les Congrès Math. français et internationaux: Cambrige, 1912; Strasbourg, 1920; Dundee, 1912; A. F. A. S. et Sociétés Savantes, *depuis* 1912; Enseignement Math., 1912 et 1917; Intermédiaire des Mathématiciens et Sphinx-Oedipe, *depuis* 1912.

Méthode Universelle A. G. 1911, Soc. Philomat. Paris.

La première machine à Congruences: A. G., 1912.

Équation de PELL-FERMAT.

$$x^2 - Ay^2 = \pm 1, D \qquad \text{(1917, méthodes inédites)}$$

(pour toutes valeurs de A non carré, inférieur à 10.000; inédit entre 3.000 et 10.000).

Équations

$$[f_n(x)]^2 - g_n(x)[h_n(x)]^2 = \pm 1$$

(On ne connaît que peu de polynomes entiers initiaux satisfaisant à cette identité algébrique. J'en ai calculé *quelque centaines* encore inédits).

Méthodes inédites et Tables des solutions minima de

$$z^2 - mt^2 = \pm n \qquad (1917)$$

très importantes pour *n inférieur* à m; grand nombre de résultats en mss. Applications à l'équation de FERMAT. Etc....

(Je n'ai jamais utilisé les réduites de fractions continues).

L. E. DICKSON, History of the Theory of Numbers, Carnegie, Public. N. 256, 1919-1920, surtout, t. I, p. XII, 365-7, 390; t. II, p. XXI, 395, 400.

(2) Cette Table a été calculée par M.le Lt Col. Allan Cunningham, Quadratic Partitions, Londres, 1904, pp. 1-240, pour p inférieur à 100.000.

J'écrirai donc, le facteur cherché étant y^2+z^2,

$$(mx\pm 1)^2+x^2=(a^2+b^2)(y^2+z^2)\equiv(ay+bz)^2+(az-by)^2 \tag{3}$$

le double signe devient inutile ici, et j'égale terme à terme.

$$x=az-by, \qquad mx\pm 1=ay+bz=m(az-by)\pm 1 \tag{4}$$

d'où

$$(a+mb)y-(ma-b)z=\pm 1. \tag{5}$$

Soit par exemple ([1]) $m=11$, et en conséquence

$$P=122x^2+22x+1 \tag{6}$$

et P égal à 500 millions la limite demandée.

Sur un premier cahier M, inscrivons en premiere colonne et en chiffres gras la suite ininterrompue des nombres premiers sommes de deux carrés jusqu'à 22349 inclus, et ceci donnera tous les facteurs possibles. L'étude successive de chacun des modules acceptables donnera *deux* nombres r, s, qu'on inserira sur ce cahier en face de leur module p. On saura dès lors que pour $x=np+r$, s le nombre P sera divisible par p. Nous prendrons un deuxième cahier N, et inscrirons dans une première colonne en chiffres gras aussi, les valeurs successives de x, de 1 à 2025, puis dans une deuxième colonne toutes les valeurs de P à chaque calcul nouveau nous inscrirons les $2n$ valeurs de x trouvées, inférieures à 2025; et à la même hauteur, nous mettrons le facteur p.

Il est évident: que nous aurons ainsi tous les facteurs premiers acceptables (lorsqu'un nombre supérieur aux limites des tables de LEHMER se présentera, il suffira d'essayer une ou plusieurs fois la division par un facteur déjà trouvé); alors, jusqu'à la limite indiquée, il suffit de porter sur notre cahier N toutes les doubles solutions $np+r, s$ du cahier M, et les valeurs de x qui ne s'y trouvent pas fournissent automatiquement des valeurs blanches pour lesquelles P est premier.

J'ai utilisé, pour la résolution de (5), diverses méthodes, et me suis arrêté à la plus élégante et la plus rapide; elle a un avantage incontestable ici, c'est d'occuper, pour un module quelconque, à peu près toujours le même espace; et j'ai résolu *plusieurs milliers* de ces équations (5) en utilisant *pour ces calculs complets que je dois conserver* des feuilles 18×25 cm. contenant chacune toutes les opérations doubles pour quatre modules. Les valeurs a et b sont ici interchangeables; il y a donc deux séries de calculs chaque fois, et deux solutions inférieures au module. Le procédé est analogue à celui de la recherche du p. g. c. d.

([1]) M. L. G. DU PASQUIER, Professeur à l'Université de Neuchâtel, Suisse, a étudié, à d'autres points de vue, les cas de $m=10$ et 11, en 1926-1927.

Soit à résoudre:

$$m=10 \qquad P=101x^2+20x+1\equiv 0 \qquad (\text{mod. } 12553)$$

12553 $a=112,\ b=3$	12553 $a=3,\ b=112$
$142\,y-1117\ z=\pm 1$	$1123\,y+82\ z=\pm 1$
7 1 6 2	13 1 2 3 1 1
1117 142 123 19 9	1123 82 57 25 7 4 3
123 19 9 1	57 25 7 4 3 1
1/0 7/1 8/1 55/7 118/15	1/0 13/1 14/1 41/3 137/10 178/13 315/23
$y=118,\ z=15,\ r=1326.$	$y=-23,\ z=315,\ s=1631.$

Nous inscrirons donc au cahier des modules M les valeurs $r=1326$ et $s=1631$, et au cahier N le facteur 12553 en face de 1326, 13879,.... 1631, 14184,.... nous ajouterons ici cette factorisation difficile par d'autres méthodes:

	x	P	
(N)	1326	177.612.397	$=12.553\times 14.149.$—

ce qui donne encore une vérification (anticipée à ce moment) de r ou s égal à 1326 pour $p=14.149$.

Nous avons maintenant, en exemple, quelques lignes consécutives prises au hasard dans notre cahier N, pour $m=11$; alors $P=122x^2+22x+1$. Les nombres *en blanc* sont premiers, ainsi que tous les facteurs indiqués.

x	P	
479	28.002.341	$337\times 83.093.$—
480	28.119.361	$1.021\times 27.541.$—
481	28.236.625	$5\times 5\times 5\times 397\times 569.$—
482	28.354.133	$1.289\times 21.997.$—
483	28.471.885	$5\times 13\times 438.029.$—
484	28.589.881	$1.949\times 14.669.$—
485	28.708.121	$13\times 17\times 129.901.$—
486	28.826.605	$5\times 73\times 78.977.$—
487	28.945.333	$1.709\times 16.937.$—
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
492	29.542.633	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
495	29.903.941	
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .

Voici maintenant effectuée la factorisation complète et la primalité reconnue pour la limite cherchée de P. J'indique un théorème important et sa démonstration évidente permettant actuellement de doubler la longueur des résultats par l'introduction de toutes les valeurs *négatives* de x (de -1 à $-n$), *sans recommencer tous ces milliers d'opérations.*

Soient r et s les deux solutions minima, inférieures au module p de

$$P = Ax^2 + Bx + C \equiv 0, \qquad (\text{mod. } p)$$

ou encore

$$Ar^2 + Br + C \quad \text{et} \quad As^2 + Bs + C \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

On aura $(A \mp B)$:

$$r' = p - r, \qquad s' = p - s$$

comme solutions de

$$Q = Ax^2 - Bx + C \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

En effet,

$$A(p-r)^2 - B(p-r) + C \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$
$$A(p-s)^2 - B(p-s) + C \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Donc reprenons notre cahier M pour la valeur étudiée, faisons une nouvelle colonne double $r' = p - r$, $s' = p - s$; et voici, à l'aide *simplement* de $2h$ soustractions, la factorisation complète et la primalité de Q automatiquement jusqu'à la même limite imposée, et *en liaison réciproque.*

Simple exemple:

$$m = 11, \quad x = r = 285, \quad P = 9.915.721 \qquad (\text{premier}).$$

Donc:

$$m = 11, \quad x' = 9.915.721 - 285 = 9.915.436$$
$$Q = 122 \times 9.915.436^2 - 22 \times 9.915.436 + 1$$
$$Q = 11.994.536.052.412.121 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 9.915.721)$$

(le quotient est 1.209.648.401).

PROBLÈMES CONNEXES: Il y en a de très intéressants, avec ou sans changement de variable, donnant de grandes listes de résultats, pour d'autres formes définies ou indéfinies, mais nous n'en parlerons pas avec détails.

Soit à résoudre

$$x^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

on peut évidemment employer les mêmes méthodes qui m'ont donné des listes très allongées de solutions. De plus, remarquons en général que

$$P = (mx+1)^2 + x^2 = (m^2+1)x^2 + 2mx + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p)$$

mais

$$[P - (mx+1)]^2 + x^2 \text{ sera encore } \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Donc, après division par x,

$$[(m^2+1)x + m]^2 + 1 \equiv 0 \qquad [(\text{mod. } p) \ (m^2+1)].$$

D'autre part, si dans P, on pose $x = t - 1/2m$, on en tire:

$$[(m^2+1)t]^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Réciproquement, si l'on a

$$u^2 + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

on aura aussi

$$(kp \pm hu)^2 + h^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p).$$

Donnons un dernier exemple: Soit à étudier:

$$R = (mx \pm 1)^2 + 2x^2.$$

Tous ses facteurs sont de la forme $a^2 + 2b^2$. Il faut résoudre

$$(mx \pm 1)^2 + 2x^2 = (a^2 + 2b^2)(y^2 + 2z^2) = (ay + 2bz)^2 + 2(by - az)^2.$$

Je pose donc:

$$x = by - az, \qquad mx \pm 1 = ay + 2bz = m(by - az) \pm 1$$
$$(ma + 2b)z - (mb - a)y = \pm 1.$$

Il en sera de même d'une façon absolue pour toutes les formes qui admettent des diviseurs de même espèce. Pour d'autres polynomes, la théorie se compliquera, et pour ceux qui admettront pour P et Q des diviseurs dissemblables, on n'aura plus que la première partie du travail.

Ceci permet déjà d'étendre d'une façon très appréciable les tables de certaines formes et de préparer des listes intéressantes de grands nombres premiers inédits.

S. CHERUBINO (Napoli - Italia)

SUI POLINOMI DEFINITI O SEMIDEFINITI

Non più tardi di mercoledì 5 settembre in questo stesso Congresso (1) il prof. PICONE, dell'Università di Napoli, ha rilevato come una importante quistione di approssimazione (che risale a TCHEBICHEF) si riduce, in sostanza, alla ricerca di una condizione necessaria e sufficiente cui devono soddisfare i coefficienti di un polinomio perchè il polinomio stesso resti invariato di segno, in un dato intervallo (2).

Mi permetto ora di comunicare al Congresso un criterio — cui già accennai nella seduta citata — contenente una condizione necessaria e sufficiente perchè un polinomio di grado assegnato sia definito o semidefinito, cioè conservi segno costante su tutto l'asse delle ascisse. Esso mi darà anche modo di fare alcune osservazioni sull'enumerazione delle radici di un tal polinomio e sulle sue decomposizioni in somme di quadrati.

Nel redigere per iscritto questa Comunicazione mi sono accorto che i varii teoremi che possedeva potevano esser meglio precisati con l'aggiunta di alcune altre proposizioni, sì che se ne otteneva un tal insieme di osservazioni che mi è sembrato non poter tacere ai lettori e che perciò riassumo brevemente qui, insieme a quanto fu detto a voce.

Intanto pongo subito in rilievo che pur essendo, almeno sotto un certo aspetto (3), questa quistione strettamente collegata con quella che diede origine al teorema di STURM, pure nella mia analisi non ho mai fatto ricorso a questo celebre teorema, nè ai lavori che da esso ebbero origine.

Invece il problema propostomi si è rilevato intimamente legato a quello della decomposizione di un polinomio definito o semidefinito in somme di quadrati ed a certe forme quadratiche, che dico *connesse* al polinomio.

---

(1) Sezione IV, A.

(2) Il prof. PICONE si era imbattuto nello stesso problema anche in altra sua ricerca riguardante l'approssimazione delle soluzioni di certe equazioni differenziali interessanti la fisica-matematica. Avendone avuto notizia, credetti opportuno interessarmi dell'argomento.

(3) Ad es. quando, *dato un polinomio a coefficienti numerici, ci si proponga di riconoscere* se esso è oppur no di segno costante in un dato intervallo.

Ciò non farà meraviglia quando si ricordi che i classici lavori dello HERMITE sulle funzioni di STURM sono appunto imperniati sulla teoria delle forme quadratiche (1) e che il bel teorema di CAYLEY-BORCHARDT (2) si dimostra ricorrendo ad una forma quadratica.

1. - È chiaro che i polinomi definiti o semidefiniti (a coefficienti reali) sono tutti e soli quelli le cui radici o sono tutte imaginarie coniugate, ovvero parte reali e parte imaginarie coniugate, con quelle reali ciascuna di molteplicità pari. Quindi il grado del polinomio è sempre pari e il suo segno costante coincide con quello del coefficiente del termine di grado più elevato.

Ne segue facilmente che ogni polinomio $f(x)$ definito o semidefinito è necessariamente quadrato di un altro polinomio ovvero è somma dei quadrati di due o più polinomi: il che, ovviamente, è anche sufficiente (ed è noto) (3).

Fra le decomposizioni di $f(x)$, definito o semidefinito, in somme di quadrati di altri polinomi interessano principalmente quelle in cui le basi di questi quadrati sono linearmente indipendenti (*decomposizioni irreducibili*).

Orbene, un primo risultato notevole è che:

a) *perchè un polinomio* f(x), *di grado* 2m, *sia definito occorre e basta che sia decomponibile nella somma di* m + 1 *quadrati a basi* (*linearmente*) *indipendenti* (a meno di un fattore eguale al primo coefficiente del polinomio),

b) *perchè sia semidefinito occorre e basta che sia decomponibile in somme di quadrati di cui quelli a basi indipendenti siano sempre in numero non superiore ad* m (a meno, etc., c. s.),

c) *perchè sia semidefinito ed abbia radici tutte reali occorre e basta che sia quadrato di un altro polinomio senza poter essere somma di due o più quadrati a basi indipendenti* (a meno, etc., c. s.).

Questi tre teoremi dipendono da quest'altro, la cui dimostrazione è molto semplice, e da alcune osservazioni elementari sul prodotto di due matrici:

d) *ogni polinomio definito o semidefinito di grado* 2m, *a radici non tutte reali, è sempre eguale al primo coefficiente moltiplicato per la somma dei quadrati di due polinomii uno di grado* m, *l'altro di grado* m — 1, *quindi linearmente indipendenti.*

---

(1) Cf., ad es. la Monografia di MIGNOSI G. *Teorema di Sturm e sue estensioni* [Rend. Cir. di Pal. t. XLIX (1925) fasc. I].

(2) Pochi anni fa acutamente perfezionato dal CIPOLLA M. *Il discriminante e il numero delle radici.....* [Atti Acc. Gioenia, vol. X (1917)].

(3) Cf., ad es., HILBERT, *Ueber Darstellung definiter Formen als Summe von quadratische Formen* [Math. Ann., Bd. 32, 1888, p. 342-350].

2. - Il nostro polinomio $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n$, $n=2m$, definito o semidefinito, sia decomposto nella somma di $q+1$ quadrati:

$$f(x)=a_0\cdot\sum_{r=0}^{q}(e_{r0}x^m+e_{r1}x^{m-1}+....+e_{rm})^2=a_0\cdot\sum_{ks}^{0...m}\sum_{r=0}^{q}e_{rk}e_{rs}x^{2m-(k+s)}. \tag{1}$$

Ponendo

$$a_{ks}=a_0\sum_{r=0}^{q}e_{rk}e_{rs}=a_{sk} \qquad (k, s=0, 1,...., m) \tag{2}$$

e considerando la forma quadratica

$$\varphi(y)=\varphi(y_0y_1....y_m)=\sum_{ks}^{0...m}a_{ks}y_ky_s$$

si ha

$$\varphi(y)=a_0\sum_{r=0}^{q}(e_{r0}y_0+e_{r1}y_1+....+e_{rm})^2. \tag{3}$$

Dalle (1) (2) seguono subito le

$$a_i=\sum_{k+s=i}a_{ks} \qquad (k, s=0, 1,...., m) \quad (i=0, 1,...., 2m) \tag{4}$$

mentre la (3) dà luogo all'identità

$$\varphi(x^m, x^{m-1},...., 1)=f(x). \tag{5}$$

Le forme quadratiche i cui coefficienti sono dati dalle (4) le diciamo *associate* ad $f(x)$: quelle fra esse che, come la $\varphi(y)$, sono definite o semidefinite le diciamo *connesse* ad $f(x)$.

È chiaro che ad ogni decomposizione di $f(x)$ in somma di quadrati corrisponde una forma quadratica ad esso connessa, mentre ogni tal forma dà luogo ad infinite decomposizioni di $f(x)$ in somme di quadrati.

Ponendo

$$a=\|a_{ks}\| \quad , \quad e=\|e_{rk}\|$$

ed osservando che le (2) dicono che $a=a_0\cdot e_{-1}\cdot e$, si dimostra che la caratteristica di a, ossia di φ, coincide con quella di e. Da ciò, dal fatto che se la matrice e ha caratteristica $p+1$, $\varphi(y)$ risulta equivalente ad una forma quadrica $\Phi(Y)$ su $p+1$ variabili, e dalle proposizioni sopra indicate, completate con opportune osservazioni, possono dedursi le seguenti interessanti conseguenze:

a) *perchè* f(x) *sia definito, occorre e basta che fra le forme quadratiche ad esso connesse ve ne sia una* (*almeno*) *definita.*

b) *perchè* f(x) *sia semidefinito, occorre e basta che esista qualche forma quadratica ad esso connessa, ma che fra queste non ve ne sia alcuna definita.*

c) *se* f(x) *è un polinomio semidefinito a radici tutte reali, di forme ad esso annesse ve ne è una ed una sola e questa è di caratteristica uno.*

3. - L'importanza delle forme connesse a un dato polinomio (definito o semidefinito) oltre che dalle proposizioni precedenti, è messa in rilievo dal teorema che andiamo ad enunciare, il quale dipende dalla seguente osservazione sulle decomposizioni di una forma quadratica reale definita o semidefinita in somme di quadrati di forme lineari omogenee (a coefficienti reali):

Se una forma quadratica si trova decomposta in una somma di quadrati di forme lineari omogenee indipendenti (in numero necessariamente eguale alla sua caratteristica) ogni altra decomposizione si ottiene da questa operando sulle forme basi con una sostituzione lineare omogenea la cui matrice dei coefficienti è ortogonale [1].

Esprimendo questo fatto col dire che: *le decomposizioni in somme di quadrati di forme lineari omogenee di una stessa forma quadratica sono fra loro equivalenti* e dicendo che due decomposizioni di uno stesso polinomio in somme di quadrati sono fra loro *equivalenti* quando una di esse è a basi (linearmente) indipendenti e quando da questa si passa all' altra operando come sulle forme lineari di cui all' enunciato precedente, si ottiene che [2]:

Le decomposizioni di f(x) *— definito o semidefinito — in somme di quadrati si distribuiscono in tante classi distinte rispetto alla relazione di equivalenza quante sono le forme quadratiche connesse ad* f(x), *fra loro distinte. Ogni classe è pienamente caratterizzata dalla corrispondente forma quadratica* $\varphi(y)$, *connessa ad* f(x), *nel senso che le decomposizioni di ciascuna classe sono tutte e sole quelle assegnate dalle decomposizioni della forma quadratica* $\varphi(y)$ *in somme di quadrati.*

4. - Passando ad esaminare le relazioni esistenti fra queste forme connesse, le decomposizioni in somme di quadrati e le radici del polinomio $f(x)$, mi è riuscito di fare varie osservazioni di cui le più interessanti sono riassunte brevemente qui appresso:

a) *se* f(x), *semidefinito di grado* 2m, *possiede* p *coppie di radici imaginarie coniugate e le rimanenti* 2(m—p) *sono reali, la massima caratteristica delle forme quadratiche ad esso connesse è* p+1 *e quindi le sue decomposizioni in somme di quadrati non possono avere più di* p+1 *basi indipendenti. Anzi esiste certamente (almeno) una forma connessa di caratteristica* p+1, *quindi una decomposizione in somma di* p+1 *quadrati a basi indipendenti, e precisamente una tale che le basi di questi quadrati*

---

[1] Se questa matrice è quadrata, si ottengono ancora decomposizioni a basi indipendenti. Se la forma è definita, quindi di caratteristica massima, questa osservazione è quasi immediata: non può dirsi altrettanto quando si tratti di forme semidefinite. Tuttavia, benchè non ci risulti, non intendiamo escludere che questa (e così qualche altra osservazione sulle forme quadratiche che abbiamo inclusa nella memoria) non sia già occorsa altrove, sia pure incidentalmente o sotto altro aspetto.

[2] In questo enunciato, e in tutti quelli che seguono, si suppone, per semplificare gli enunciati, di avere a che fare con polinomi definiti o semidefiniti *positivi*, cioè che $a_0 > 0$.

abbiano per massimo comun divisore il polinomio delle radici reali di f(x), *ciascuna con molteplicità dimezzata.*

Questa proposizione è invertibile in tutte le sue parti.

Dopo aver osservato che: $q+1$ *polinomi di grado* m, *linearmente indipendenti, hanno il massimo comune divisore di grado non superiore ad* $m-q$, si comprende la portata della seguente proposizione, che è conseguenza della precedente:

b) *i polinomi semidefiniti di grado* 2m *che ammettono almeno* $2(m-q)$ *radici reali sono tutti e soli quelli che sono somme dei quadrati di non più di* $q+1$ *polinomi (di grado* $\leqq m$) *indipendenti (linearmente).*

Questa proposizione, insieme a quella del n. 3, permette di invertire la *c*) del n. 2 e cioè ci consente di affermare che:

c) *affinchè un polinomio semidefinito sia a radici tutte reali occorre e basta che di forme quadratiche ad esso connesse ve ne sia una ed una sola e questa sia di caratteristica uno.*

Quindi:

d) *un polinomio ha le sue radici tutte reali allora e solo allora che ad esso, od al suo quadrato, sia connessa una ed una sola forma quadratica e questa sia di caratteristica uno.*

O. E. GLENN (Winthrop, Maine - U. S. A.)

THE COMPLEX REALM MODULO n, AN ARBITRARY INTEGER

When it is required to annul an integral polynomial,

$$f(x) = a_0 x^e + a_1 x^{e-1} + \dots + a_e,$$

irresoluble modulo n, a prime, the appropriate extension of the number system is the field of galoisian imaginaries. However if n is composite the number domain for roots is again imperfectly known and must once more be extended by the introduction of a new complex realm, $\varrho(n, \infty)$, and this paper is an exposition of its properties.

In method I follow the lead of GALOIS although his theory of the galoisian field has been considerably augmented by others [1], as DICKSON, JORDAN and E. H. MOORE.

I. Congruences without integral roots. - The coefficients of all polynomials will be assumed to be integers unless the contrary is stated.

THEOREM 1. *There exists, for any order* m *and integral modulus* n, *a congruence,*

$$F(x) = x^m - rx - s \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

$(s \not\equiv 0)$, *which has no integral roots.*

We first assume m even, $r \equiv 0$; $s \not\equiv 0$, and $\not\equiv \left(\frac{1}{2}n\right)^m$ when n is even, but otherwise arbitrary. Then the existence of an integral root a of $F(x) \equiv 0$ (mod. n), implies also another root $n-a$.

The exception $n=2$ where $-1 \equiv +1$ is avoided by taking $F(x) = x^m - x - 1$.

If m is odd, $n > 2$ and we temporarily assume $s \equiv 0$, then r may be chosen so $F(x)$ has a root $a \not\equiv 0$ and $\not\equiv \frac{1}{2}n$ whence also $n-a$ is a root. Thus, for any value of m and any $F(x)$ as specially defined, the sequence, $F(1), F(2), \dots, F(n-1)$, assumed to contain zeros, contains two at least and at least one of the numbers $1, \dots, n-1$, is missing from this sequence. Suppose a missing one is β. Then $F(x) - \beta$ will have no integral root.

---

(1) SERRET, Mem. Ac. Sc. de l'Institut de France, 35 (1866), 617. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, vol. 1 (1919), Ch. 8, 233.

Hence when m is even the congruence $F(x) = x^m - rx - s \equiv 0 \pmod{n}$, r being zero except when $n = 2$, has no integral root, and when m is odd and $r(\not\equiv 0)$ is a fixed chosen integer, this congruence has no integral root. In either instance $s(\not\equiv 0)$ is a definite residue of n whose choice depends upon the arithmetical form of n.

II. **The domain $\Delta(n, m)$.** - Assume a congruence irresoluble in integers,

$$F(x) = x^m + s_1 x^{m-1} + \dots + s_m \equiv 0 \qquad \pmod{n},$$

and an imaginary number l such that $F(l) \equiv 0 \pmod{n}$. In the formula,

$$\omega = \varphi(l) = u_1 l^{m-1} + u_2 l^{m-2} + \dots + u_m, \tag{1}$$

let the coefficients u_j be integral residues of n. Any polynomial,

$$f(l) = a_0 l^e + a_1 l^{e-1} + \dots + a_e,$$

may be reduced to the form $\varphi(l)$ by means of $F(l) \equiv 0$.

The formula $\varphi(l)$ represents n^m numbers since each u_j may assume any value of the set $0, \dots, n-1$. The domain thus defined will be referred to as $\Delta(n, m)$ and any totality, $\Delta(n, 2)$, $\Delta(n, 3), \dots, \Delta(n, t), \dots, \infty$, as a complex realm $\varrho(n, \infty)$.

Since the $\Delta(n, m)$ is the $GF(n^m)$ when n is prime, we here emphasize the theory of a composite n.

By a theorem [1] of E. H. MOORE every finite field is abstractly identical with a $GF(p^a)$, where p is prime: Hence $\Delta(n, m)$, with n composite, does not satisfy the postulates for a field. The postulate 4 of DICKSON's set of ten postulates [2] for a field is not satisfied.

The indeterminate l is defined to be a solution of an integrally irresoluble congruence but its nature as a number is unknown. Additive processes in $\Delta(n, m)$ involving l are purely formal as far as l is concerned and are independent of the particular $F(x)$ used in the construction of the domain.

III. **Congruences belonging to and irreducible in $\Delta(n, m)$.** - Unless n is a prime number the factorization of a polynomial $f(x)$ is not unique and is usually avoided. The known theory and practicum on the determination of irreducible quantics in a $GF(p^a)$ is for this reason not easy to generalize. The method of paragraph I of this article, however, may be considerably extended.

For any order m and integral modulus n there exists a polynomial,

$$E(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \qquad (b_0 \not\equiv 0),$$

(1) *Mathematical Papers of the Chicago Congress* (1893), p. 210, § 3.

(2) Göttinger Nachrichten, Heft 4 (1905), 3.

such that, if $E(x)\equiv 0$ (mod. n) has an integral root a it has another

$$n-a+\beta, \qquad (\beta \not\equiv 2a).$$

To prove this assertion, we have

$$E(-a+\beta)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}[\tbinom{m}{k}b_0\beta^k+\tbinom{m-1}{k-1}b_1\beta^{k-1}+\dots+b_k]a^{m-k}.$$

This vanishes by hypothesis if it is equated, (mod. n), to $(-1)^m E(a)$, whence,

$$\begin{aligned}
&\tbinom{m}{1}b_0\beta+b_1\equiv -b_1,\\
&\tbinom{m}{2}b_0\beta^2+\tbinom{m-1}{1}b_1\beta+b_2\equiv b_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(2)\qquad &\tbinom{m}{k}b_0\beta^k+\tbinom{m-1}{k-1}b_1\beta^{k-1}+\tbinom{m-2}{k-2}b_2\beta^{k-2}+\dots+b_k\equiv(-1)^k b_k,\\
&(k=1,\dots, m).
\end{aligned}$$

These formulae, and (3), (4), also, are algebraic. They hold for equations as well as for congruences.

With some loss of generality we may choose

$$(3)\qquad b_0\equiv 1,\ b_2\equiv b_4\equiv\dots\equiv b_{2t}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

where $2t=m-2$ if m is even and $2t=m-1$ if m is odd.

We can then solve for the determinations,

$$\begin{aligned}
&b_1\equiv -\frac{1}{2}\tbinom{m}{1}\beta,\quad b_3\equiv\frac{1}{4}\tbinom{m}{3}\beta^3,\\
&b_5\equiv -\frac{1}{2}\tbinom{m}{5}\beta^5,\quad b_7\equiv\frac{17}{8}\tbinom{m}{7}\beta^7,\\
&b_9\equiv -\frac{31}{2}\tbinom{m}{9}\beta^9,\quad b_{11}\equiv\frac{691}{4}\tbinom{m}{11}\beta^{11},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
(4)\qquad &b_{2i+1}\equiv p_{2i+1}\tbinom{m}{2i+1}\beta^{2i+1},\ (i=1,\ 2,\dots).
\end{aligned}$$

In the latter formula, $2i+1$ extends from 3 to m or $m-1$ according as m is odd or even and p_{2i+1} is a rational number which is determined by the recursion formula (2). The case $n=2$ was noticed in paragraph I.

THEOREM 2. *There exists, for any order* m *and any integral modulus* n, *a finite set of congruences,*

$$E(x)=x^m-\frac{1}{2}\tbinom{m}{1}\beta x^{m-1}+\sum_{i=1}^{u}p_{2i+1}\tbinom{m}{2i+1}\beta^{2i+1}x^{m-2i-1}+s\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

which have no integral roots (*where* $\mathrm{u}=\frac{1}{2}(\mathrm{m}-1)$ *or* $\frac{1}{2}(\mathrm{m}-2)$ *according as* m *is odd or even*).

Assume $E(a)\equiv 0$, and suppose β is any residue $\not\equiv 2a$. Then the congruence has another root $-\alpha+\beta$ and at least one number γ of the sequence $1, \ldots, n-1$ is missing form the sequence,

$$E(1), \quad E(2), \ldots, \quad E(n-1).$$

Thus, if $E(x) \equiv 0$ has solutions, we obtain an irresoluble congruence, $E(x)-\gamma \equiv 0$, by a proper alteration of the absolute term of $E(x)$. The theorem is proved.

Consider a form,

$$D(x)=b_0x^t+b_1x^{t-1}+\ldots+b_t,$$

the b_j being real or imaginary numbers of $\Delta(n, m)$, and which has no integral roots. By proper choice of b_j, $D(x) \equiv 0$ (mod. n) will be irresoluble in $\Delta(n, m)$.

In fact, suppose t to be even and let ω_i, $(i=1, \ldots, n^m-n)$ be the imaginary numbers of $\Delta(n, m)$. Leaving out of account the cases $2\omega_i \equiv 0$ (mod. n), at least one half of the set ω_1, $\omega_2, \ldots$, is missing from the set,

$$\omega_1{}^t, \quad \omega_2{}^t, \ldots, \quad \omega_v^t, \qquad (v=n^m-n).$$

If a missing number is ω then $G(x)=x^t-\omega \equiv 0$ (mod. n), is irresoluble in $\Delta(n, m)$. If t is any order and

$$g(x)=x^t-rx-s \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

is irresoluble in integers, r, s, being real residues, while all

$$(5) \qquad g(\omega_1), \quad g(\omega_2), \ldots, \quad g(\omega_v),$$

are different from zero, then $g(x)$ is irresoluble in $\Delta(n, m)$. If some number (5) is zero at least one imaginary $\omega_1, \ldots, \omega_v$, is missing from the sequence (5). Suppose it is ω'', then $G(x)=g(x)-\omega'' \equiv 0$ (mod. n), has no solutions in $\Delta(n, m)$. Hence we obtain, for all orders t, a congruence,

$$G(x)=x^t-r'x-s' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

belonging to and irresoluble in $\Delta(n, m)$.

Assume a congruence belonging to Δ and irresoluble in that domain, in the form,

$$G(x)=x^t+s_1'x^{t-1}+s_2'x^{t-2}+\ldots+s_t' \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

and let k be an imaginary number such that $G(k) \equiv 0$ (mod. n). Then the latter congruence defines a complex domain, $\delta(n, mt)$, of n^{mt} numbers,

$$V=v_1k^{t-1}+v_2k^{t-2}+\ldots+v_t,$$

where v_i, $(i=1, \ldots, t)$, may assume any value of the set (1).

THEOREM 3. *The domain* δ(n, mt) *is identical with the* Δ(n, mt) *constructed from a properly chosen irresoluble congruence of order* mt *having integral coefficients.*

We rearrange $G(k)$ as a polynomial of order $\leqq m-1$ in l. Then we have two simultaneous congruences in l,

$$F(l)=l^m+s_1l^{m-1}+ \dots +s_m\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$
$$G(k)=c_0(k)l^{m-1}+c_1(k)l^{m-2}+ \dots +c_{m-1}(k)\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

The dialytic eliminant (Stieltjes), assumed congruent to zero, is a necessary condition for the existence of l. It is also sufficient [1] under the hypotheses. Since $G(k)$ contributes m rows to the make-up of this determinant its expansion is a polynomial of order mt in k with integral coefficients, viz.,

$$F'(k)=q_0k^{mt}+q_1k^{mt-1}+ \dots +q_{mt}\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n).$$

It, as well as $G(k)$, will determine $\Delta(n, mt)$ but the domain determined by F' contains only one imaginary, viz., k. The theorem is proved.

IV. **The solution of congruences.** - The imaginary element upon which the analytic complex domain is based is defined as a root of the equation $x^2+1=0$, and this equation suffices. No other imaginary unit or irreducible equation need be introduced. The realm $\varrho(n, \infty)$ is not defined by means of a single irresoluble congruence but we have proved that irresoluble congruences whose coefficients are integers are sufficient to determine all requisite imaginaries.

There are congruences which have no solutions in a given domain $\Delta(n, m)$, for example $5x+3\equiv 0$ (mod. 10). The totality of such congruences will be said to form the inconsistent class $B(n)$. Let

$$f(x)=a_0x^e+a_1x^{e-1}+ \dots +a_e\equiv 0 \qquad (\text{mod. } n), \tag{6}$$

be a congruence not in B and substitute ω of (1) for x.

Reduction of $f(\omega)$, by $F(l)\equiv 0$ (mod. n), gives,

$$f(\omega)=f_0(u_1,\dots, u_m)l^{m-1}+f_1(u_1,\dots, u_m)l^{m-2}+ \dots +f_{m-1}(u_1,\dots, u_m)\equiv 0 \ (\text{mod. } n).$$

The f_j are linear in $a_0,\dots, a_e$ and of degree e in $u_1\dots, u_m$. The congruence (6) has solutions in $\Delta(n, m)$ if and only if there are sets of residues of n, $i \cdot e$, $u_1,\dots, u_m$, for which, simultaneously [2],

$$f_j(u_1,\dots, u_m)\equiv 0 \quad (\text{mod. } n), \qquad (j=0,\dots, m-1).$$

Any linear congruence $ax+b\equiv 0$ (mod. n), in which a is not prime to n, and which is not in class $B(n)$, has imaginary solutions in $\Delta(n, m)$.

V. **Theory of indices.** - The general law of recurrence in the series of powers of an arbitrary number ω of the domain $\Delta(n, m)$, in as follows. In the sequence

$$\omega, \ \omega^2,\dots, \ \omega^{u+1},\dots, \ \omega^{u+v},\dots,$$

---

[1] GLENN, Annals of Math., 29 (1928), p. 463.

[2] ARNOUX, *Essai de Géométrie analytique modulaire* (1911).

there is no periodicity until a determinate power ω^u, is reached, when a period, ω^u to $\omega^{u+v} \equiv \omega^u$, begins. Then

$$\omega^{u+v} \equiv \omega^{u+2v} \equiv \omega^{u+3v}, \dots, \qquad (\text{mod. } n).$$

Consider $\Delta(n, 2)$ as determined by $F(x) = x^2 - x - s$. We have

$$\begin{aligned} l^2 &\equiv l + s, \\ l^3 &\equiv [1+s]l + s, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ l^7 &\equiv [1 + 5s + 6s^2 + s^3]l + [s + 4s^2 + 3s^3]. \end{aligned}$$

The induction which these cases initiate leads to the formula,

$$\begin{aligned} l^u \equiv {} & [1 + \tbinom{u-2}{1}s + \tbinom{u-3}{2}s^2 + \tbinom{u-4}{3}s^3 + \dots]l \\ & + [s + \tbinom{u-3}{1}s^2 + \tbinom{u-3}{2}s^3 + \tbinom{u-5}{4}s^4 + \dots]. \end{aligned}$$

The expressions in brackets terminate as finite series by their own law. It follows that $l^{u+v} \equiv l^u$ (mod. n), when u and v are the least positive integers for which, simultaneously,

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{u+v-j-1}{j} s^j \equiv \sum_{j=0}^{l} \binom{u-j-1}{j} s^j \qquad (\text{mod. } n),$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{u+v-j-2}{j} s^{j+1} \equiv \sum_{j=0}^{l} \binom{u-j-2}{j} s^{j+1} \qquad (\text{mod. } n),$$

where $k = \frac{1}{2}(u+v-1)$, $l = \frac{1}{2}(u-1)$.

This is a generalization of Fermat's theorem for the number l and we say that l appertains (mod. n) to the pair of exponents $(u+v, u)$. An arbitrary number of $\Delta(n, 2)$ satisfies an analogous pair of conditions for a period, but we can generalize still farther. The laws of exponents in $\Delta(n, m)$ are contingent upon the congruence,

$$F(l) = l^m + s_1 l^{m-1} + \dots + s_m \equiv 0 \qquad (\text{mod. } n),$$

and we obtain for ω of (1) a formula,

$$\begin{aligned} \omega^u \equiv {} & A_0(u_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_m, u) l^{m-1} + A_1(u_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_m, u) l^{m-2} \\ & + \dots + A_{m-1}(u_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_m, u) \qquad (\text{mod. } n). \end{aligned}$$

The generalization of Fermat's result is therefore the following.

THEOREM 4. *The pair of exponents,* (u+v, u) *to which an arbitrary number of* Δ(n, m) *appertains is determined by the least positive integers* u, v, *for which, simultaneously,*

$$(7) \qquad A_j(u_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_m, u+v) \equiv A_j(u_1, \dots, u_m, s_1, \dots, s_m, u) \qquad (\text{mod. } n),$$
$$(j = 0, \dots, m-1).$$

Among the known properties of the functions A_j for a prime n, are

$$A_j(u_1,\dots, u_m, s_1,\dots, s_m, n^m) \equiv A_j(u_1,\dots, u_m, s_1,\dots, s_m, 1) \pmod{n},$$
$$(j=0,\dots, m-1).$$

Also evidently solutions of (7) exist, in which $u+v \leqq n^m$, for every ω.

VI. **The isomorphism of two domains** $\Delta(n, m)$. - The $GF(n^m)$ is independent of the choice of the irreducible congruence of order m used in its determination. This theorem does not hold in the case of $\Delta(n, m)$, with n composite.

We define as isomorphic (abstractly identical) two domains $\Delta(n, m)$, $\Delta'(n, m)$, constructed from different irresoluble forms $F(x)$, whose numbers ω can be arranged in a one to one correspondence with the property: If ω, ω_1, ω_2, of Δ correspond, respectively, to ω', ω_1', ω_2' of Δ', while $\omega\omega_1=\omega_2$, then also, $\omega'\omega_1'=\omega_2'$.

Two conclusions which relate to exponents follow, viz.: (α) Any number of Δ appertains (mod. n) to the same set of indices, $(u+v, u)$, as does the corresponding number in Δ' and: (β) If $\omega_1 \not\equiv 0$ in Δ corresponds to $\omega_1'(\not\equiv 0)$ in Δ', while $\omega_1^{u+v}\equiv 0$ (mod. n), then must $\omega'^{u+v}_1 \equiv 0$ (mod. n).

Thus two galoisian fields constructed from different irreducible congruences of order m are isomorphic.

Consider the $\Delta(6, 2)$ determined by $F(x)=x^2-2\equiv 0$ (mod. 6).

There are no primitive roots in this domain. In fact the greatest index $u+v$ is 10. The pair of indices of each of the two numbers $l+2$, $5l+2$, is (10, 2). On the other hand, in the $\Delta'(6, 2)$, constructed from

$$F(x)=x^2-x-1\equiv 0 \pmod{6},$$

the imaginary l itself appertains to the exponents (25,1). Hence Δ and Δ' are not abstractly identical.

Suppose that $\Delta^{(\alpha)}(n, r)$, $(\alpha=1,\dots, N_r)$, is the complete set of non-isomorphic domains $\Delta(n, r)$, N_r being necessarily finite. Then all essentially distinct complex numbers of the categories described in this paper are comprised in the system,

$$R(n, \infty): \Delta^{(\alpha)}(n, 2),\ \Delta^{(\alpha)}(n, 3),\dots,\ \Delta^{(\alpha)}(n, r),\dots,\ \infty,$$

which may be designated as the total complex realm, modulo n. Aside from exceptions which can be classified, any congruence,

$$f(x)=a_0x^e+a_1x^{e-1}+\dots+a_e\equiv 0 \pmod{n},$$

(n composite), has solutions in each and every domain $\Delta^{(\alpha)}(n, r)$.

A. KÉRIM (Stambul - Turchia)

ÜBER DIE TRÄGHEITSFORMEN EINES MODULSYSTEMS

Das Vorliegende Thema behandelt (auf Anregung des Herrn Prof. E. FISCHER) die von Hurwitz in seiner Abhandlung « Annali di Matematica » (serie III, tomo XX) aufgestellte Trägheitsformen eines Modulsystems.

« Eine Form T der Variablen und der unbestimmten Koeffizienten des Grundformensystems $f_1, \ldots, f_n$ heisst eine Trägheitsform, wenn eine ganze Zahl μ vorhanden ist, so dass für jedes Potenzprodukt X_μ der Variablen die Kongruenz

$$X_\mu T \equiv 0 \qquad (\text{modd. } f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

erfüllt ist, wobei die Kongruenz sowohl auf die Variablen als auf die Koeffizienten zu beziehen ist ».

Den kleinsten zulässigen Wert von μ nennt man die Stufe der Trägheitsform Die Trägheitsformen 0^{ter} Stufe sollen uneigentliche, die übrigen Trägheitsformen aber eigentliche heissen.

In dieser Arbeit nehme ich den speziellen Fall des Zugrundeliegenden Modulsystems, welches aus zwei Formen m^{ten} grades von zwei Variablen mit unbestimmten Koeffizienten besteht. Zu erst sei einige Eigenshaften der Trägheitsformen kurz zitiert.

I. Es sei T eine eigentliche Trägheitsformen von der μ^{ter} Stufe, $\mu \geqq r \geqq 0$, dann sind die Formen

$$X_r T,$$

wo X_r alle Potenzprodukte r^{ten} Grades durchläuft, sämtlich Trägheitsformen sind von $(\mu - r)^{\text{ter}}$ oder niedrigerer Stufe und mindestens eine unter ihnen ist genau von der $(\mu - r)^{\text{ter}}$ Stufe.

II. Bezeichnen f, g Formen der Variablen x, y vom Grade m mit unbestimmten Koeffizienten, so ist jede Trägheitsform der ersten Stufe des Moduls $M = (f, g)$ vom Grade

$$\varrho = 2m - 2.$$

III. Bezeichnen f, g Formen der Variablen x, y vom Grade m mit unbestimmten Koeffizienten und ist T eine eigentliche Trägheitsform σ^{ter} Stufe und ϱ^{ten} Grades des Moduls $M = (f, g)$, so gilt die Gleichung

$$\varrho + \sigma = 2m - 1.$$

IV. Die Funktionaldeterminante J der Funktionen f, g, im bezug auf die Variablen x, y, ist eine Trägheitsform erster Stufe des Modulo (f, g).

V. Eine Identität von der Gestalt

$$AJ + A_1 f + A_2 g = 0,$$

in welcher A, A_1, A_2 Formen und A eine Form vom Grade Null ist, kann nicht anders bestehen, als wenn $A = 0$ ist.

VI. Jede Trägheitsform T erster Stufe des Moduls (f, g) lässt sich darstellen:

$$T = AJ + A_1 f_1 + A_2 g,$$

wenn unter A, A_1, A_2 passend gewählte Formen verstanden werden. Darin sind T und J vom Grad $r-1$, A ist vom nullten Grad, A_1, A_2 vom Grad $r-m-1$. $(r = 2m-1$ ist).

Hurwitz, nachdem Mertens die Trägheitsform der höchstmöglichen Stufe bestimmt hatte, hat den Ausdruck irgend einer Trägheitsform des Modulsystems $f_1, f_2, \dots, f_n$, $(\mu \leqq m)$ Stufe aufgestellt, (im welchem m der niedrigste Grad von $f_1, f_2, \dots, f_n$ bedentet).

Nun bestimmt vorliegende Arbeit für den speziellen Fall des Modulsystems, welches aus zwei formen m^{ten} Grades von zwei Variablen mit unbestimmten Koeffizienten besteht, alle Trägheitsformen der Stufe $m+1$.

Bevor wir allgemein die Trägheitsform von der $(m+1)^{\text{ten}}$ Stufe des Moduls (f, g) bestimmen, werden wir zunächst den folgenden vorbereitenden Satz aufstellen:

VII. Das Gleichungssystem sei

$$(1) \qquad \begin{aligned} a_0 l_0 + a_1 l_1 + \dots + a_m l_m &= 0 \\ b_0 l_0 + b_1 l_1 + \dots + a_m l_m &= 0, \end{aligned}$$

wo $a_0, \dots, a_m$, $b_0, \dots, b_m$ unbestimmte und von einander unabhängige Koeffizienten sind, sind $l_0, \dots, l_m$ ganze rationale Funktionen derselben und Lösungen der Gleichungen (1), dann ist der Ausdruck

$$t_0 l_0 + t_1 l_1 + \dots + t_m l_m = L(a, b, t),$$

worin $t_0, \dots, t_m$ unabhängige Parameter bedeuten, in folgender Form darstellbar:

$$L(a, b, t) = \sum_{i<j<k} V_{ijk}(a, b) \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ t_i & t_j & t_k \end{vmatrix} \qquad (i, j, k = 0, 1, \dots, m)$$

wo $V_{ijk}(a, b)$ ganze rationale Funktionen in (a, b) sind, und zwar geben beliebige solche Funktionen stets eine Lösung $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ zu (1).

Jetzt versuchen wir die Trägheitsform von $(m+1)^{\text{ter}}$ Stufe herzustellen für das Modulsystem (f, g) vom 2 Formen m^{ten} Grades von x, y.

Nehmen wir irgend eine Trägheitsform des Moduls (f, g) von $(m+1)^{\text{ter}}$ Stufe, der Grad ϱ der Trägheitsform ist nach Satz 3:

$$\varrho = m-2.$$

Wir denken uns dabei den wert m beliebig, nur zur vereinfachung der Schreibweise nehmen wir $m=4$.

Für eine gegebene Trägheitsform T von der $(m+1)=5^{\text{ten}}$ Stufe gelten nach Satz I und Satz VI folgende Kongruenzen:

$$\left.\begin{array}{l} T\cdot x^4 \equiv l_0\cdot J \\ T\cdot x^3 y \equiv l_1\cdot J \\ \cdots\cdots \\ T\cdot y^4 \equiv l_4\cdot J \end{array}\right\} \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

oder

$$T\cdot(t_0 x^4 + \dots + t_4 y^4) \equiv L(t)\cdot J \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Nun multiplizieren wir diese Kongruenzen bezw mit $a_0,\dots, a_4$ und $b_0,\dots, b_4$ und addieren, dann wird:

$$\left.\begin{array}{l} T\cdot(a_0x^4+\dots+a_4y^4) \equiv (a_0l_0+\dots+a_4l_4)J \\ T\cdot(b_0x^4+\dots+b_4y^4) \equiv (b_0l_0+\dots+b_4l_4)J \end{array}\right\} \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

also ist:

$$\left.\begin{array}{l} (a_0l_0+\dots+a_4l_4)J \equiv 0 \\ (b_0l_0+\dots+b_4l_4)J \equiv 0 \end{array}\right\} \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

nach dem Satz V

$$\begin{array}{l} a_0l_0+\dots+a_4l_4 = 0 \\ b_0l_0+\dots+b_4l_4 = 0, \end{array}$$

dabei sind $l_0, l_1,\dots, l_{m=4}$ ganze razionale Funktionen von a, b.

Nach Hilfssatz ist der Ausdruck

$$L(t) = L(a,\ b,\ t) = t_0l_0 + \dots + t_4l_4$$

in dieser Form darstellbar:

$$L(a,\ b,\ t) = \underset{0,1,2}{V(a,\ b)} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ t_0 & t_1 & t_2 \end{vmatrix} + \dots$$

Jetzt betrachten wir anderseits die Determinante:

$$\mathfrak{T} = \begin{vmatrix} a_0 & 0 & b_0 & 0 & v_0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & b_1 & b_0 & v_1 & v_0 & 0 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 & v_2 & v_1 & v_0 \\ a_3 & a_2 & b_3 & b_2 & v_3 & v_2 & v_1 \\ a_4 & a_3 & b_4 & b_3 & 0 & v_3 & v_2 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x^2 & xy & y^2 \end{vmatrix}$$

wo v_0, v_1, v_2, v_3 unbestimmte Parameter sind.

Wie leicht ersichtlich ist, ist J eine Trägheitsform und zwar von $m+1=5^{\text{ter}}$ oder nullter Stufe. Folglich bestehen die Kongruenzen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}\cdot x^4 &\equiv q_0\cdot J \\ &\ldots\ldots \\ \mathfrak{T}\cdot y^4 &\equiv q_4\cdot J \end{aligned} \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

also

$$\mathfrak{T}(t_0x^4+\ldots\ldots+t_4\cdot y^4)\equiv c\cdot J \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Nun versuchen wir c auszudrücken:

$$C=\frac{(-1)^{m+1}}{m^2}\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & t_0 & v_0 & 0 \\ a_1 & b_1 & t_1 & v_1 & v_0 \\ a_2 & b_2 & t_2 & v_2 & v_1 \\ a_3 & b_3 & t_3 & v_3 & v_2 \\ a_4 & b_4 & t_4 & 0 & v_3 \end{vmatrix} \qquad (\text{hier } m=4)$$

Entwicklen wir die Determinanten $\mathfrak{T}$ und C nach Potenzprodukten von v:

$$(D_{00}v^2+D_{01}v_0v_1+\ldots.)\psi(t)\equiv z(\underset{234}{\varDelta}\cdot v_0^2-\underset{134}{\varDelta}\cdot v_0v_1+\ldots.)J \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

dabei sind:

$$\psi(t)=t_0x^4+t_1x^3y+\ldots.+t_4y^4, \qquad z=\frac{-1}{16},$$

$$\varDelta_{ijk}=\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ t_i & t_j & t_k \end{vmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} D_{00}\cdot\psi(t) &\equiv z\cdot\underset{234}{\varDelta}J \\ D_{01}\cdot\psi(t) &\equiv -z\underset{134}{\varDelta}\cdot J \\ D_{02}\cdot\psi(t) &\equiv z(\underset{134}{\varDelta}-\underset{234}{\varDelta})J \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

Von diesem Kongruenzen kann man (auch im Falle eines beliebigen m) solche lineare Combination bilden, dass rechte nur immer ein $\varDelta$ Faktor von J ist:

$$\begin{aligned} \underset{234}{Q}\cdot\psi(t) &\equiv z\cdot\underset{234}{\varDelta}\cdot J \\ \underset{134}{Q}\cdot\psi(t) &\equiv z\cdot\underset{134}{\varDelta}\cdot J \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

wobei die Q_{ijk} entweder eine den D_{ij} oder lineare homogene Ausdrücke von D_{ij} sind. $\underset{234}{Q},\ldots,$ nennen wir Basis, sie sind nach obigen vollkommen bestimmt, ihre Anzahl $=\frac{(m+1)m(m-1)}{3!}$.

Jetzt kehren wir zurück zu der Gleichung, welche sich auf irgend eine Trägheitsform bezog.

Wenn wir die obigen Kongruenzen multiplizieren mit den Koeffizienten, welche in der Gleichung der $L(t)$ als Koeffizienten der entsprechende Δ_{ijk} vorkommen und dann Seite zu Seite addieren, so wird:

$$(\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\underset{134}{V}\cdot\underset{134}{Q}+\ldots)\psi(t)\equiv z(\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{\Delta}+\ldots)\cdot J \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Aber infolge der Gleichung

$$L(t)=\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{\Delta}+\underset{134}{V}\cdot\underset{134}{\Delta}+\ldots$$

ist schliesslich:

$$(\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\ldots)\psi(t)\equiv z\cdot L(t)\cdot J \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Wenn wir mit der Kongruenz

$$T\cdot(t_0x^4+\ldots+t_4y^4)\equiv L(t)\cdot J \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

vergleichen, wird:

$$(\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\ldots)\psi(t)\equiv z\cdot T\cdot\psi(t) \qquad (\text{modd. } f,\ g)$$

oder:

$$(zT-\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\ldots)\psi(t)\equiv 0 \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Da aber $\psi(t)$ von a, b unabhängig und $t_0,\ldots\ t_4$ Parameter sind, folgt:

$$zT-\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}-\underset{134}{V}\cdot\underset{134}{Q}\ldots \qquad (\gamma)$$

ist eine Trägheitsform vierter oder nullter Stufe. Von $(m=4)^{\text{ter}}$ Stufe kann sie nach Satz III nicht sein, denn der Ausdruck γ hat den Grad $(m-2=2)$, also ist er von nullter Stufe.

Mithin

$$zT-\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}-\underset{134}{V}\cdot\underset{134}{Q}-\ldots\equiv 0 \qquad (\text{modd. } f,\ g).$$

Die linke Seite hat hier Grad $\varrho=m-2$, die rechte Seite mindestens Grad m, folglich ist

$$-\frac{1}{16}T=[\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\underset{134}{V}\,\underset{134}{Q}+\ldots].$$

Ebenso erhält man den Satz:

Für f, g von m^{ten} Grade gibt es gewisse Trägheitsformen $\underset{234}{Q},\ldots$ von der Stufe $m+1=5$ (Grad $m-2=2$), und die allgemeinste Trägheitsformen lautet:

$$T=\underset{234}{V}\cdot\underset{234}{Q}+\ldots$$

worin $\underset{234}{V},\ldots$ beliebige ganze rationale Funktionen der a, b bedenten.

O. C. HAZLETT (Illinois - U. S. A.)

INTEGERS AS MATRICES

Relation to the literature. - In view of the current interest of many mathematicians which converges on the study of ideals for an algebraic field and on generalizations thereof, there may be some interest in the following theorems on the arithmetic of a general linear associative algebra. The pioneer work on the definition and theory of an arithmetic of an algebra which is not a field was done by LIPSCHITZ (1) and A. HURWITZ (2); but, as DICKSON (3) pointed out, the definitions there used are wholely unsatisfactory for a general algebra. In fact, Dickson satisfactorily defined an arithmetic of an algebra E over the field of rational numbers to be any set of numbers x of E which possesses the following properties:

R, The rank equation of x has all its coefficients rational integers and the coefficient of the highest power of the variable is unity.

C, The set is closed under addition, subtraction and multiplication.

U, The set contains the modulus.

M, The set is a maximal set of all those sets possessing properties R, C and U that is, it is not contained in any other set possessing properties R, C and U.

For the case of an arithmetic of an algebra over any algebraic field, a satisfactory definition was given by the writer (4). The present paper uses little technical knowledge of the theory of algebras. For the essentials of this theory necessary to read this paper, the reader is referred to Dickson's *Algebras and their arithmetics* (especially Chapters I, VII, VIII) or to its German translation under the editorship of Speiser and Fueter.

---

(1) *Untersuchungen über die Summen von Quadraten*, Bonn (1886); French translation in Jour. de Math., ser. 4, vol. 2 (1886), pp. 393-439.

(2) Gött. Nach. (1896), pp. 311-346; *Vorlesungen über die Zahlentheorie der Quaternionen*, Berlin (1919).

(3) *A new simple theory of hypercomplex integers*, Jour. de Math., ser. 9, vol. 2 (1923), pp. 281-326 (in particular, pp. 289-292) and *Algebras and their arithmetics*, Univ. of Chicago Press., (1923), pp. 145-147.

(4) *On the arithmetic of a general associative algebra*, Proc. of the Inter. Math. Congress at Toronto (1924). Dickson, *Algebren und ihre Zahlentheorie*, Zürich 1927, pp. 198-200.

Let E be an algebra of order m over any field F and suppose that A is any arithmetic of E of order a. Let the numbers of a basis of A be chosen as some of the basal numbers $e_1, \ldots, e_a$ of the algebra E. Then since A has the property C the totality of numbers of E linearly dependent on the e_i $(i=1, \ldots, a)$ form a subalgebra D of E and by proterty R the constants of multiplication for D are integers and the first matrices of all numbers of A have integral elements. If $a<m$, there are numbers of E linearly independent of these e_i. Take as a set of basal numbers of E any set of linearly independent numbers of E which includes the e_i $(i=1, \ldots, a)$. The totality T of first matrices of numbers of E whose elements are integers has properties R, C and U and hence the corresponding numbers of E have properties R, C, U. If T' were a maximal of sets of first matrices possessing properties R, C, U, and containing T, then the corresponding numbers of E form an arithmetic of E of order m. Hence we have

THEOREM 1. *Every arithmetic of an algebra has the same order as the algebra.*

Integers of any algebra as matrices. - Let M be a simple matric algebra and let e_{ij} $(i, j \leqslant n)$ be the usual set of basal numbers of M and let u_{ij} $(i, j \leqslant n)$ be a basis of any aritmetic A of M. If we take the u_{ij} a sa new set of basal nombers of M, the constants of multiplication are rational integers. With this set of basal numbers, let μ be the first matrix of any number a of A. Since the general element of μ is $\sum_r x_r \gamma_{rst}$, every element of μ is a rational integer. Hence the set S of all such matrices μ is contained in the totality T of those square matrices of order n with integral coefficients which are first matrices of numbers of M. Conversely, the set T is contained in S. For if ν be any matrix of T, then the rank equation for ν is the equation $|\nu - \omega I| = 0$ and thus the coefficients of the rank equation for ν are rational integers and the set T has property R. Moreover, the set T has properties C und U. Combining these results, it follows that if a basis of an arithmetic A of M be taken as the basal numbers of M, then the set S of the first matrices of the numbers of A coincides with the totality T of those first matrices whose elements are rational integers. Thus we have

THEOREM 2. *Every algebra* E *of order* m *with a modulus is equivalent to a subalgebra* M *of a simple matric algebra. Any aritmetic of* E *has a basis of order* m *and if a basis thereof be taken as the set of basal numbers of* E, *then this arithmetic is equivalent to the totality of matrices of* M *with rational integral elements.*

Uniqueness of the arithmetic. - Next there arises the question as to the manner in which two arithmetics of the same algebra may differ from each other. Now if a range over all the numbers of an arithmetic A of an algebra E and if d be any fixed number of E which has an inverse, then $d^{-1}ad$ ranges over a set A' of numbers of E which possesses properties R, C and U. To see that it possesses property M, suppose that A' were not a maximal, but is contained in a larger set A'' possessing properties R, C, U. Then the set of numbers $dA''d^{-1}$ possesses properties R, C, U and contains A. But A is a maximal set of numbers of E possessing properties R, C, U and thus $A=dA''d^{-1}$. Hence A' has property M and is an arithmetic of E.

Is it true conversely that every arithmetic is a transform of a particular one? We shall not answer this question but a related one. Let E be any algebra of order n and let A be any arithmetic of M. By Theorem 1, a basis of A may be taken as a set of basal numbers of E; and, when this is done, the set of first matrices of numbers of A is the totality of first matrices of numbers of E having integral elements. That is, by a transformation T on the basal numbers of E we obtain a new set of basal numbers of E which form a basis of A. But, if we subject the basal numbers e_k of any algebra to the transformation

$$T \qquad e_k=\sum_q a_{kq}e_q',$$

then it is readily proved that the constants of multiplication γ_{rpq}' of the transformed algebra are obtained from the constants of multiplication γ_{ijk} of the original algebra by a succession of three transformations: 1) the transformation T on the γ_{ijk} where the i and k are fixed and j varies from 1 to n; 2) followed by the transformation which is the transform of T^{-1} on the resulting B_{ipq} where i and p are fixed and q varies from 1 to n; and 3) the transformation T^{-1} on the resulting Γ_{ipq} where p and q are fixed and i varies from 1 to n. The first tranformation affects the columns only of the first matrix and the second affects the rows only, while the third merely transforms the terms of any one element among themselves. A similar statement is true of the second matrices. Hence the general first matrix μ is transformed into $T'\mu(T')^{-1}$, with a similar statement for second matrices. Thus we have

THEOREM 3. *Let* E *be any algebra of order* m *over the field of rational numbers and* A′ *any arithmetic of* E. *Let* M *be the algebra of square matrices (first matrices or second) of order* m *to which* E *is equivalent and let* M′ *be the subset of the matrices of* M *which is isomorphic wich the arithmetic* A′. *Then there is always a non-singular square matrix* T *of order* m *such that the totality of matrices* $\mathrm{T'M'(T')^{-1}}$ *have their elements rational integers. Moreover,* T *is the matrix of the transformation from the original set of basal numbers of* E *to the new set of basal numbers, and the latter form a basis for the arithmetic.*

Arithmetic of a direct product.

THEOREM 4. *The direct product of an aritmetic of one algebra by an arithmetic of another algebra is an arithmetic of the direct product of these two algebras; and, conversely, any arithmetic of the direct product of the two algebras is a direct product of an arithmetic of the one algebra and an arithmetic of the other algebra.*

To prove the first part, let the first algebra be E with arithmetic A having as basis e_i $(i=1,\ldots, n)$ which we shall take as basal numbers of E. Let the coordinates of the general number of E be indicated by x_i $(i=1,\ldots, n)$ and let the constants of multiplication be γ_{ijk}. Let the notation for the second algebra be the same with primes. Then a basis for the direct product, E^*, of the algebras is $E_{ij}=e_ie_j'=e_j'e_i$ $(i=1,\ldots, n;\ j=1,\ldots, n')$, and

$$E_{ij}E_{kl}=\sum_{s,t}\Gamma_{ij,\,kl,\,st}E_{st}$$

$i, k, s=1,\ldots, n$ and $j, l, t=1,\ldots, n'$ and where $\Gamma_{ij,\,kl,\,st}=\gamma_{iks}\gamma_{jlt}'$. We shall also need a notation for the basal numbers of certain simple matric algebras. Let e_{ks} $(k, s=1,\ldots, n)$ be the standard basal numbers of a simple matric algebra M of order n^2 and let e_{lt}' $(l, t=1,\ldots, n')$ be the standard basal numbers of a simple matric algebra M' of order $(n')^2$. Then the

$$E^*_{k+n(l-1),\ s+n(t-1)}=e_{ks}\,e_{lt}'=e_{lt}'\,e_{ks}\,(k, s=1,\ldots, n;\ l, t=1,\ldots, n')$$

are the standard basal numbers for the simple matric algebra of order $(nn')^2$ which is the direct product of M and M'.

With this notation, the first matrix of the number e_i in the algebra E is $M_i=\sum_{k,s}\gamma_{iks}e_{ks}$ and the first matrix of the numbers e_j' in the algebra E' is $M_j'=\sum\gamma_{jlt}'e_l'$ where the letters i, j, k, l, s, t have the same range as above. Thus the first matrix of the general number $X=\sum_{p,q}X_{pq}\,E_{pq}$ of E^* is $M^*=$ $=\sum_{i,j}X_{ij}M_iM_j'$. *That is, the first matrix of the number* X *of the direct product is formed from the first matrices of the basal numbers of the two algebras* E *and* E′ *in precisely the same way that* X *is formed from the basal numbers of* E *and* E′.

In particular, this means that, if the coordinates of X are rational integers, then the elements of its first matrix, M^*, are rational integers, also. Since every number X with integral coordinates can be expressed in one and in only one way as a bilinear function of numbers chosen from the two arithmetics, A and A', then we shall speak of the totality A^* of such numbers X with integral coordinates as the direct product of the two arithmetics A and A'. Thus A^* has property R. Moreover, it also has properties C and U.

On the other hand, A^* has property M. For, if A^* do not have property M, it is contained in some larger set, B^*, of numbers of E^* which has properties R, C, U and M. If a basis of B^* be chosen as a set of basal numbers of E^* instead of the original set, the E_{ij}, this subjects the original basal numbers of E^* to a transformation T and replaces every first matrix μ^* of a number of E^* by $T'\mu^*(T')^{-1}=\mu^{**}$. When we use the second set of basal numbers of E^*, the totality of first matrices of the numbers B^* is precisely the totality of first matrices of E^* with integral elements. In particular, every μ^{**} can be expressed in one way as a sum of products of two matrices, one a first matrix μ of a number of E and the other a first matrix μ' of a numbar of E', say $\mu^{**}=\Sigma\mu\mu'$; and, since the order of E^* is the product of the orders of E and E', this expression can be made in only one way, except for scalar factors that can be shifted from μ to μ' at will. Since the elements of μ^{**} are rational integers, then this can always be so done that the elements of every μ and of every μ' are rational integers. Denote the totality of such matrices μ by P and the totality of such matrices μ' by P'. Then, since the set B^* contains the set A^*, it follows that P contains a subset which is simply isomorphic with the set S of first matrices of numbers of A and similarly P' contains a subset which is simply isomorphic with the set S' of first matrices of numbers of A' to be precise, the matrices of the subsets are the transforms of the matrices of the sets S and S' by suitable matrices of orders n and n', respectively. If B^* were actually larger than A^*, then P would be actually larger than S or P' would be actually larger than S' or both would be true. But since the sets P and P' have properties R, C and U, this is a contradiction since S and S' are both maximals of sets having these three properties. Hence A^* has property M and the first part of the theorem is proved.

To prove the second part of the theorem, start with any arithmetic A^* of E^* and use any basis of A^* as basal numbers of E^*. Then the set M^* of first matrices μ^* of the numbers of A^* consists of the totality of those first matrices of the numbers of E^* which have integral elements. Then, as above, each such matrix μ^* can be expressed in the form $\Sigma\mu\mu'$ where μ and μ' are as defined above and have integral elements. Hence the totality, M, of such matrices μ has properties R, C and U. Moreover, the set M has property M. For, if not, it would be contained in a larger set, N, of first matrices of numbers of E which has properties R, C and U. Then, by the argument used in the proof of the first part of the theorem, the direct product of the two sets, N and M', is a set of matrices having properties R, C and U and contains M^*. But this is impossible, since M^* is a maximal of sets having these three properties.

Hence the set M has property M; and, similarly, the totality M' of matrices μ' has properties R, C, U and M. Since the set of first matrices of the numbers of any algebra is simply isomorphic with the numbers of the algebra, the set A of numbers of E corresponding to the first matrices of the set M is an arithmetic of E, and similarly for the algebra E'. Thus the second part is proved.

H. W. TURNBULL (St. Andrews - Scozia)

MATRIX CONTINUED FRACTIONS

§ 1. - The elementary theory of continued fractions lends itself to noncommutative algebra in an interesting manner. In the following pages I propose to work out a few of the leading properties, and to suggest their value in dealing with quadratic equations.

Let small italic letters a, b, x,.... (except i, j, m, n) denote matrices or any other generalized numbers for which all the fundamental laws of algebra apply, excluding the commutative law of multiplication. Also let Greek letters denote ordinary scalar numbers. So in general $ab \neq ba$, but $b\beta = \beta b$. Then there are two sorts of multiplication as indicated by

$$c = ab, \quad d = ba$$

where in general c and d differ. Conversely there are two sorts of division, fore and after division; or left and right division. Following Sylvester (1), left division of a by b is denoted by

$$\frac{:a}{b} = b^{-1}a;$$

although it is convenient to denote right division by

$$a/b = \frac{a}{b} = ab^{-1}.$$

In particular if a and b are equal we write

$$\frac{:a}{a} = \frac{a}{a} = 1.$$

Using these laws, together with the significant *reversal law*

$$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},$$

it is easy to verify the following identities,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \quad \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b},$$
$$\frac{:a}{b} + \frac{:c}{b} = \frac{:(a+c)}{b}, \quad \frac{:xa}{xb} = \frac{a}{b};$$

(1) Collected Works IV p. 227.

but it is important to notice that, for after-division, xa/xb is *not* equal to a/b. In fact

$$\frac{xa}{xb}=xab^{-1}x^{-1}=x\frac{a}{b}x^{-1};$$

and more generally if $f(z)=\lambda_0 z^n+\lambda_1 z^{n-1}+ \dots +\lambda_n$ is a polynomial in z with scalar coefficients, then

$$f\left(\frac{xa}{xb}\right)=xf\left(\frac{a}{b}\right)x^{-1},$$

and

$$f\left(\frac{:ax}{bx}\right)=x^{-1}f\left(\frac{:a}{b}\right)x.$$

Another identity not difficult to prove is the following

$$f(ab)=af(ba)a^{-1}. \tag{1}$$

§ 2. - **Left and Right handed continued Fractions.** By a right handed continued fraction is meant the function

$$x=\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\dots}}=\frac{b_1}{a_1+}\,\frac{b_2}{a_2+}\dots, \tag{2}$$

and by a left handed continued fraction is meant

$$x'=\cfrac{:b_1}{a_1+\cfrac{:b_2}{a_2+\dots}}=\frac{:b_1}{a_1+}\,\frac{:b_2}{a_2+}\dots \tag{3}$$

In x, division is right handed throughout; in x' left handed. We denote the n^{th} convergent as usual by using p_n, q_n. For x it is $\frac{p_n}{q_n}$, and for x', $\frac{:p_n}{q_n}$. For example

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{b_1}{a_1},\ \frac{p_2}{q_2}=\frac{b_1}{a_1+}\,\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_1a_2}{a_1a_2+b_2},$$

obtained by multiplying *on the right*, in the numerator and denominator, by a_2. But, on the other hand,

$$\frac{:p_1'}{q_1'}=\frac{:b_1}{a_1},\ \frac{:p_2'}{q_2'}=\frac{:b_1}{a_1+}\,\frac{:b_2}{a_2}=\frac{:a_2b_1}{a_2a_1+b_2}.$$

For the case of n steps, ending with a_n, b_n there are obviously 2^n different continued fractions possible, because at each step the division may be right or left. I consider only the two extreme cases as above, leaving the intermediate mixed cases aside.

The formulae for the n^{th} convergents are as follows:

$$\left.\begin{aligned}p_n&=p_{n-1}\,a_n+p_{n-2}\,b_n\\ q_n&=q_{n-1}\,a_n+q_{n-2}\,b_n\end{aligned}\right\}\quad \left.\begin{aligned}p_n'&=a_np_{n-1}'+b_np_{n-2}'\\ q_n'&=a_nq_{n-1}'+b_nq_{n-2}'\end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

starting with

$$p_1=b_1,\ p_2=b_1a_2,\qquad p_1'=b_1,\ p_2'=a_2b_1,$$
$$q_1=a_1,\ q_2=a_1a_2+b_2,\qquad q_1'=a_1,\ q_2'=a_2a_1+b_2.$$

The proof follows the usual lines of induction; for if the formulae hold for $n-1$, then

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-2}\left(a_{n-1}+\dfrac{b_n}{a_n}\right)+p_{n-3}\,b_{n-1}}{q_{n-2}\left(a_{n-1}+\dfrac{b_n}{a_n}\right)+q_{n-3}\,b_{n-1}}.$$

This simplifies after multiplying both numerator and denominator *on the right* by a_n, and gives

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}a_n+p_{n-2}b_n}{q_{n-1}a_n+q_{n-2}b_n}.$$

Likewise for p_n', q_n' by multiplying *on the left.*

In particular if each element b_i is a unit, then the continued fractions are equal, namely

$$\frac{1}{a_1+}\,\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{a_n+}\cdots=\frac{:1}{a_1+}\,\frac{:1}{a_2+}\cdots\frac{:1}{a_n+}\cdots$$

Here it follows that $q_n'p_n=p_n'q_n$ and

$$p_n=p_{n-1}\,a_n+p_{n-2},\qquad p_n'=a_np_{n-1}'+p_{n-2}',$$
$$q_n=q_{n-1}\,a_n+q_{n-2},\qquad q_n'=a_n\,q_{n-1}'+q_{n-2}',$$

and also

(5)
$$\left.\begin{aligned}p_nq_{n-1}'-p_{n-1}q_n'&=(-)^n1\\ q_np_{n-1}'-q_{n-1}p_n'&=(-)^n1\end{aligned}\right\}.$$

These last are proved by straightforward induction. For scalar algebra they merge into one well known formula: but in general they are only true if accented in this particular way. No simple expression exists for $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$, involving right handed convergents alone. This is one of the chief differences between scalar and general continued fractions.

Again left handed convergents lead to a reversed right handed continued fraction, thus

(6)
$$\begin{aligned}\frac{p_n'}{p_{n-1}'}&=a_n+\frac{b_np_{n-2}'}{p_{n-1}'}=a_n+\frac{b_n}{p_{n-1}'/p_{n-2}'}\\ &=a_n+\frac{b_n}{a_{n-1}+}\,\frac{b_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{b_3}{a_2},\\ \frac{q_n'}{q_{n-1}'}&=a_n+\frac{b_n}{a_{n-1}+}\,\frac{b_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\frac{b_2}{a_1}.\end{aligned}$$

Also

(7)
$$\frac{:p_n}{p_{n-1}}=a_n+\frac{:b_n}{a_{n-1}+}\cdots\frac{:b_3}{a_2},\quad\frac{:q_n}{q_{n-1}}=a_n+\frac{:b_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{:b_2}{a_1}.$$

§ 3. - **Transposed continued fractions.** If the elements possess transposed or conjugate elements, as in the case when each is a matrix of order m, then right and left handed continued fractions can be derived from each other by transposition. For, if an accent denotes transposition, there are identities

$$(a+b)'=a'+b',\quad (ab)'=b'a'.$$

It follows that
$$\frac{b_1'}{a_1'+}\,\frac{b_2'}{a_2'+}\cdots\quad\text{and}\quad\frac{:b_1}{a_1+}\,\frac{:b_2}{a_2+}\cdots$$

are conjugate of each other. In particular if all the elements a_i, b_i are symmetrical, so that $a_i'=a_i$, $b_i'=b_i$, then the right and left fractions with the *same* sets of elements are conjugates.

§ 4. - **Recurring continued Fractions.** When the elements b_i, a_i repeat after periods of n steps, and the continued fraction is endless but convergent, then, as in the scalar algebra, it provides a root of a quadratic equation. Thus if, for the right handed case,

(8)
$$x=\frac{b_1}{a_1+}\,\frac{b_2}{a_2+}\cdots\frac{b_n}{a_n+}\,\frac{b_1}{a_1+}\cdots\frac{b_n}{a_n+}\cdots,$$
we may write
$$x=\frac{b_1}{a_1+}\cdots\frac{b_n}{a_n+x}.$$

Let p_i/q_i be the i^{th} convergent in x. Then applying the formula for the n^{th} convergent, we have
$$x=\frac{p_{n-1}(a_n+x)+p_{n-2}b_n}{q_{n-1}(a_n+x)+q_{n-2}b_n}=\frac{p_n+p_{n-1}x}{q_n+q_{n-1}x},$$
or
(9)
$$xq_n+xq_{n-1}x=p_n+p_{n-1}x,$$

after right handed cross multiplication. This is a quadratic equation for x in terms of p_{n-1}, q_{n-1}, p_n, q_n. Now let

(10)
$$xq_{n-1}=y,\quad q_{n-1}x=z,$$

so that $x=yq_{n-1}^{-1}=q_{n-1}^{-1}z$. Then, substituting for x in (9) it follows that

(11)
$$\left.\begin{aligned} yq_{n-1}^{-1}q_n+y^2&=p_nq_{n-1}+p_{n-1}y\\ zq_n+z^2&=q_{n-1}p_n+p_{n-1}q_{n-1}^{-1}z\end{aligned}\right\}.$$

These two equations are both of the same particular quadratic form

(12)
$$t^2+pt+tq+r=0.$$

So if p, q, r are given, and if the coefficients in this equation for y are chosen such that
$$p_{n-1}=-p,\quad q_{n-1}^{-1}q_n=q,\quad p_nq_{n-1}=-r,$$

then y is a solution of (12). The alternative conditions to render z a solution of (12) can at once be written down. Again, by analogous reasoning, the same equation has a solution in terms of a left handed continued fraction x', the equation itself being obviously symmetrical as regards right and left handedness.

§ 5. - The number n of steps in the recurring cycle has not yet been fixed. Now for example suppose $n=1$, and that the right handed convergent continued fraction is

$$x_1=\frac{b}{a+}\,\frac{b}{a+}\cdots$$

Then $x_1=\dfrac{b}{a+x_1}$ whence $x_1a+x_1^2=b$.

This is a particular form of the more general equation (12). A second solution of the same equation is given by a left handed fraction

$$x_2'=-a+\frac{:b}{-a+}\,\frac{:b}{-a+}\cdots,$$

provided as always, the fraction converges. Again if

$$y_1'=\frac{:b}{a+}\,\frac{:b}{a+}\cdots,\quad y_2=-a+\frac{b}{-a+}\,\frac{b}{-a+}\cdots,$$

then y_1', y_2 are solutions of the corresponding equation

$$y^2+ay=b.$$

Various forms of these fractions exist, and it is interesting to notice the relations

$$x_1+y_2=-a=x_2'+y_1'$$
$$x_1y_2=-b=x_2'y_1'.$$

§ 6. - The next case, when $n=2$, gives a formal solution of the more general equation (12). For if

$$x=\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\,\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+}\cdots,$$

then

$$x=\frac{a}{b+}\,\frac{c}{d+x}=\frac{a(d+x)}{bd+bx+c},$$

so that

$$xbx-ax+x(bd+c)-ad=0,$$

which leads to (12) by writing $bx=t$ and

$$a=-b^{-1}pb,\ c=q-p^{-1}r,\ d=b^{-1}p^{-1}r.$$

Here p, q, r are given, b is arbitrary, and a, c, d are determined. Taking $b=1$, a solution of the quadratic equation is thus given by

$$x=\frac{-p}{1+}\,\frac{q-p^{-1}r}{p^{-1}r+}\,\frac{-p}{1+}\,\frac{q-p^{-1}r}{p^{-1}r+}\cdots$$

If p is singular, p^{-1} does not exist, and the method fails. Then if q is non-singular, a left handed solution is still possible. Apart from convergency conditions, if both p and q are singular this formula breaks down. There are however possibilities in the use of recurring continued fractions where m non-recurring steps precede the cycle of n steps.

§ 7. - Some further results may be stated shortly. As the equation has three independent coefficients p, q, r it is natural to inquire whether a recurring fraction of three steps provides a possible solution.

1. *If* $x=a+\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots$ *then both* (bc+1)x *and* x(bc+1) *are roots of an equation of the type*

$$t^2+pt+tq+r=0.$$

But a, b, c *can be found as rational integral functions of* p, q, r, *in the case* (bc+1)x, *if and only if* q^{-1} *and* (p−r) *possess a non singular commutant; and, in the case* x(bc+1), *if* q^{-1} *and* $(rq^{-1}-p)$ *possess a non singular commutant.*

By a commutant of y and z is meant u such that $yu=uz$.

2. *If* $x=\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\frac{1}{a+}\frac{1}{b+}\frac{1}{c+}\ldots$ *then* (ab+1)x *and* x(ab+1) *are roots of the equation*

$$t^2+pt+tq+r=0.$$

Here if a parameter s is defined in terms of p, q, r as the root of the three-term linear equation

$$ps+rsp=pqp,$$

the values of a, b, c for the case of $x(ab+1)=t$ are given explicitly by

$$a=(1-s^{-1})p^{-1},\ b=-p,\ c=p^{-1}(1+rs).$$

Analytically s can be expressed as a geometrical progression

$$s=qp-p^{-1}rqp^2+(p^{-1}r)^2qp^3-(p^{-1}r)^3qp^4+\ldots,$$

provided this series is convergent.

This series in turn can be dealt with for the case when $p^{-1}r$ and p denote matrices whose latent roots λ_i, μ_i are known, by examining the matrix whose $(ij)^{\text{th}}$ element is

$$\frac{\eta_{ij}}{1+\lambda_i\mu_j},$$

where $[\eta_{ij}]$ is the matrix $h^{-1}(qp)k$ constructed from the factors h, k, found in the canonical forms, hlh^{-1} and kmk^{-1}, of $(p^{-1}r)$ and p respectively.

§ 8. - **The continuants p_r and q_r.** In a pure recurring continued fraction whose period has n steps, it is possible to establish a recurrance relation between p_i, p_{n+i}, p_{2n+i}, p_{3n+i},.... for all values of i. This follows, for a given value of i, by eliminating each intermediate p. For a right handed continued fraction the recurrence relation is of type

$$p_{mn+i}f+p_{(m-1)n+i}\,g+p_{(m-2)n+i}\,h=0,$$

where $m=2, 3, 4,\ldots$, and f, g, h are rational functions of the elements in the original fraction, but are independent of m. It is noteworthy that for right handed fractions these coefficients f, g, h all occur on the right. Contrariwise for left handed fractions.

Similarly for the denominators q_r of convergents.

Example. The fraction $\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{1}{b+}\cdots$ can be examined in considerable detail. Let

$$c=ab, \quad d=ba.$$

Then it is found that $p_1=1$, $p_2=b$, $p_3=d+1$, $p_4=b(c+2)=(d+2)b$; and if $n>0$,

$$p_{2n+1}=\binom{2n}{0}d^n+\binom{2n-1}{1}d^{n-1}+\cdots+\binom{2n-i}{i}d^{n-i}+\cdots+\binom{2n-n}{n},$$

$$p_{2n-2}=\left\{\binom{2n+1}{0}d^n+\binom{2n}{1}d^{n-1}+\cdots+\binom{2n-n+1}{n}\right\}b,$$

where

$$\binom{i}{j}=\frac{i!}{j!(i-j)!}.$$

Also

$$q_1=a, \quad q_2=c+1, \quad q_3=(c+2)a=a(d+2),$$

and so on.

Then p_n/q_n can be expressed as $f(d)\cdot a^{-1}$ or $b\cdot\Phi(c)$, where both $f(z)$ and $\Phi(z)$ are rational functions of a *single* variable z with positive integral coefficients. For instance

$$\frac{p_6}{q_6}=b\,\frac{c^2+4c+3}{c^3+5c^2+6c+1}.$$

If now c and d are matrices, thrown into canonical form, the question of convergency for the original fraction is settled by examining the nature of $f(z)$, when z is a canonical matrix. For the case of real numbers, convergency is secured if all the latent roots of c are not less than unity.

The case of quaternions was considered by Hamilton in the *Philosophical Magazine* $\underset{\mathrm{m}}{3}$ (1852), 371,373: $\underset{\mathrm{m}}{4}$ (1852), 303: $\underset{\mathrm{m}}{5}$ (1853) 117, etc. The case when each numerator is a unit has been considered by Wedderburn, in the *Annals of Matematics* $\underset{\mathrm{m}}{15}$ (1913), 101-105.

EMMY NOETHER (Göttingen - Germania)

HYPERKOMPLEXE GRÖSSEN UND DARSTELLUNGSTHEORIE IN ARITHMETISCHER AUFFASSUNG [1]

Ich möchte Ihnen zeigen, wie sich die Darstellungstheorie — insbesondere also die Darstellung der Gruppen — auffassen lässt als eine Theorie der Modul - und Idealklassen; und wie diese letzteren sich wieder einem verallgemeinerten Gruppenbegriff unterordnen, den Gruppen mit Operatoren [2].

Unter der *Darstellung einer Gruppe* — in einem vorgegebenen Körper P — versteht man behanntlich das Folgende: Den Elementen $a, b, ...$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ werden Matrizen $A, B, ...$ mit Koeffizienten aus P zugeordnet, derart dass dem Produkt ab das Produkt AB entspricht; das System der Matrizen wird ein homomorphes Bild der Gruppe. Mit dieser Darstellung ist zugleich eine Darstellung des « Gruppenrings » gegeben, der aus allen « Gruppenzahlen », d. h. allen linearen Verbindungen $a\alpha + b\beta + ... + c\gamma$ besteht, wo $a, b, ..., c$ alle Kombinationen von je endlich vielen Gruppenelementen, $\alpha, \beta, ..., \gamma$ entsprechend von je endlich vielen Elementen aus P durchlaufen (wobei die $a, b, ..., c$ als linear unabhängig betrachtet werden und die Multiplikation durch Gruppenmultiplikation und Rechengesetze definiert ist). Die Darstellung des Gruppenrings wird zugleich homomorph imbezug auf Addition; die Darstellung der Gruppen ordnet sich so dem allgemeinen Problem der *Darstellung der Ringe* unter, wobei Homomorphie inbezug auf Addition und Multiplikation verlangt wird.

Zwei Probleme sind hier wesentlich: das erste ist das der *Reduktion* einer *gegebenen* Darstellung, und die Frage nach der Eindeutigkeit der dabei auftretenden irreduziblen Bestandteile; das zweite besteht in der Frage nach der

---

(1) Eine ausführliche Darstellung wird in der Math. Zeitschr. erscheinen, wo in einer Fortsetzung auch auf nichtkommutative Galoissche Theorie eingegangen werden wird. Vgl. auch für « Zerfällungskörper »: R. BRAUER u. E. NOETHER, Ber. Berl. Ak. 1927 und für allgemeine Struktursätze den Vortrag von G. KÖTHE in diesen Atti.

(2) Die Gruppen mit Operatoren gehen auf W. KRULL (Math. Zeitschr. 23) und O. SCHMIDT (Math. Zeitschr. 29) zurück. Auch die hier gebrachte Behandlung des Problems der Reduktion einer gegebenen Darstellung rührt — in der Beschränkung auf kommutative Darstellungskörper — von W. KRULL her (Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Heidelberger Ber. 1926).

Gesamtheit der mögliche Darstellungen — etwa nur der irreduzibeln — eines gegebenen Ringes in einem gegebenen, nicht notwendig kommutativen Körper.

Das *erste Problem* ist das weitaus einfachere, was sich schon darin zeigt, dass über den darzustellenden Ring und über den — im allgemeinen nichtkommutativen — Darstellungskörper keinerlei spezielle Voraussetzungen nötig sind; die Tatsache, dass es sich bei der Darstellung um Matrizen eines festen Grades handelt, ergibt alle nötigen Endlichkeitsvoraussetzungen. Das Problem lässt sich vollständig behandeln vermöge der Theorie der Gruppen mit Operatoren, auf die ich daher kurz eingehen will:

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ heisst eine *Gruppe mit Operatorenbereich*, wenn zugleich ein System von Symbolen Θ, H,.... — die Operatoren — gegeben ist, derart dass die Verknüpfung $\Theta(a)$, $H(a)$,.... für jedes a aus $\mathfrak{G}$ eindeutig definiert ist und ein Element aus $\mathfrak{G}$ ergibt, und dass das distributive Gesetz erfüllt ist: $\Theta(ab) = \Theta(a)\Theta(b)$. Zwei Gruppen mit gleichem Operatorenbereich heisen operatorisomorph, wenn sie isomorph im üblichen Sinn sind, und wenn ausserdem aus dem Entsprechen von a und $\bar{a}$ auch dasjenige von $\Theta(a)$ und $\Theta(\bar{a})$, $H(a)$ und $H(\bar{a})$.... folgt. Werden dann als Untergruppen nur solche zugelassen, die selbst den Operatorenbereich gestatten (so dass eine Gruppe also einfach heisst, wenn sie keinen zulässigen echten Normalteiler ausser der Einheit besitzt), so bleibt der Jordan-Höldersche Satz von der Kompositionsreihe bestehen in der Fassung: Besitzt eine Gruppe mit Operatorenbereich überhaupt eine Kompositionsreihe, so ist das System der Faktorgruppen im Sinn der Operatorisomorphie bis auf die Anordnung eindeutig bestimmt. Und unter derselben Voraussetzung gilt der Satz von der im Sinn der Operatorisomorphie eindeutigen Zerlegung in direkt unzerlegbare Faktoren.

Der *Zusammenhang mit dem Darstellungsproblem* ist dadurch gegeben, dass zu den Gruppen mit Operatoren insbesondere Ideale und Moduln gehören, diese aufgefasst als Abelsche Gruppen gegenüber der Addition, während die Operatoren durch die Multiplikation mit den Ringelementen gegeben sind. Jede Darstellung aber wird durch einen Darstellungsmodul erzeugt, d. h. durch einen Modul inbezug auf Ring und Darstellungskörper. Genauer erzeugt jede Modulklasse, d. h. Klasse von unter sich operatorisomorphen Darstellungsmoduln, dieselbe Darstellung. Damit aber wird die Frage nach der Eindeutigkeit der Reduktion einer Darstellung durch den Kompositionsreihensatz und den Satz über das direkte Produkt beantwortet. Die Kompositionsreihe ergibt, angewandt auf den Darstellungsmodul, für jede Matrix eine Reduktion der Form:

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ & B_2 & 0 \\ A_{ik} & \dots & B_r \end{pmatrix}$$

wobei die den Faktorgruppen entsprechenden Diagonalmatrizen eine « irreduzible » Darstellung erzeugen, d. h. nicht mehr selbst eine solche Reduktion zulassen.

Da aber die Klassen dieser Faktorgruppen eindeutig bestimmt sind, gilt das gleiche von den Diagonaldarstellungen (eindeutig im Sinn der Aequivalenz von Darstellungen). Analog ergibt der Satz vom direkten Produkt die Eindeutigkeit des « Zerfallens » in « unzerfällbare » Bestandteile:

$$\begin{pmatrix} C_1 & & & \\ & C_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & C_s \end{pmatrix},$$

wobei dann jedes C_i sich noch nach dem Kompositionsreihensatz eindeutig reduzieren lässt.

Das *zweite Problem* möchte ich skizzieren im Fall der Darstellung von hyperkomplexen Systemen, allgemeiner von Ringen, die dem « Doppelkettensatz » genügen. Das Resultat ist, dass jede irreduzible (einfache) Modulklasse Idealklasse ist, dass also die Kompositionsreihen aus (einseitigen) Idealen durch ihre Faktorgruppen schon alle irreduzibeln Darstellungen liefern. Und zwar genügen genauer die Kompositionsreihen im Restklassenring nach dem Radikal, welch letzterer ein « vollständig reduzibler » Ring wird. Das Problem ist damit zurückgeführt auf die Strukturuntersuchung der vollständig reduzibeln Ringe; und damit erweist es sich als dem Problem entsprechend, die Darstellungen in den Automorphismenkörpern als Ausgangspunkt zu nehmen. Darunter ist das Folgende zu verstehen: Alle einfachen (Rechts) Ideale einer zweiseitig einfachen Komponente eines solchen Ringes gehören derselben Klasse an, besitzen also denselben Automorphismenring, der wegen der Einfachheit der Ideale zum Körper wird, zugleich Automorphismenring der einfachen Linksideale ist. Der einfache Ring selbst wird dem System aller Matrizen im Automorphismenkörper isomorph; und aus dieser Darstellung entspringen alle Darstellungen inbezug auf einen Unterkörper, also insbesondere inbezug auf den Koeffizientenbereich des hyperkomplexen Systems, indem man die Elemente des Automorphismenkörpers selbst durch zugeordnete Matrizen ersetzt. So wird hier der im Fall der hyperkomplexen Systeme bekannte Wedderburnsche Struktursatz durch den der allgemeinen Gruppentheorie entstammenden Begriff des Automorphismenkörpers neu gedeutet, und zugleich als Quelle der Darstellungstheorie der hyperkomplexen Systeme erkannt. Es entstehen die neuen Fragen der Galoisschen Theorie nichtkommutativer Körper, die eng mit der Frage der « Zerfällungskörper » zusammenhängen. Zugleich ergibt sich ein Ausblick auf Struktursätze allgemeiner, nicht vollständig reduzibler Ringe vermöge der Automorphismenringe der unzerlegbaren Ideale. Die Gruppentheorie erweist sich, in ihrer Ausdehnung auf allgemeinste Gruppen mit Operatoren, auch hier wieder als ordnendes Prinzip.

G. KÖTHE (Göttingen - Germania)

STRUKTUR DER RINGE DIE DIE DURCHSCHNITTSMINIMALBEDINGUNG ERFÜLLEN

Eine neue Entwicklung der Theorie der hyperkomplexen Größen hat mit den Arbeiten von Herrn ARTIN und Fräulein NOETHER eingesetzt. Die Methoden, die dabei verwendet werden, sind die Methoden der abstrakten Idealtheorie, die man Fräulein NOETHER, und der allgemeinen Gruppentheorie, die man Herrn KRULL verdankt. Grundlegend für die letztere Methode ist die Auffassung eines Ideals in einem Ring als verallgemeinerte Abelsche Gruppe, d. h. als Abelsche Gruppe mit Operatorenbereich. So ist z. B. ein Rechtsideal eine additive Gruppe von Elementen des Ringes, die die Rechtsmultiplikation mit sämtlichen Elementen des Ringes gestattet, d. h. für die $r \cdot x$ wieder im Ideal liegt, wenn r Element des Ideals und x ein beliebiges Ringelement. Der Operatorenbereich ist also die Gesamtheit der Elemente des Ringes, die Operation, die mit ihnen ausgeführt wird, die Rechtsmultiplikation. Der Nutzen dieser Auffassung eines Ideals zeigt sich darin, daß die Sätze der gewöhnlichen Gruppentheorie sich auf Gruppen mit Operatorenbereich ohne weiteres übertragen, wenn man als Untergruppen ebenfalls nur solche zuläßt, die wieder den Operatorenbereich gestatten.

Es stellte sich nun mit Hilfe der neuen Methoden, die die Existenz einer Basis des hyperkomplexen Systems nicht benützen, heraus, daß der Geltungsbereich der Struktursätze durchaus nicht auf die hyperkomplexen Systeme beschränkt ist, sondern auch auf allgemeinere nichtkommutative Ringe ausgedehnt werden kann.

So hat Herr ARTIN die Struktur der Ringe erforscht, für die der Doppelkettensatz für Rechtsideale vorausgesetzt ist. Allerdings verwendet er nicht gruppentheoretische Methoden sondern nur idealtheoretische Hilfsmittel. Es sei kurz daran erinnert, was man unter Doppelkettensatz zu verstehen hat. Man bezeichnet als « Teilerkettensatz » die Voraussetzung, daß eine Kette von Idealen $w_1 < w_2 < w_3 < \dots$, in der jedes Ideal echtes Oberideal des vorangehenden, nach endlich vielen Gliedern abbricht; als « Vielfachenkettensatz » die Voraussetzung, daß jede Kette $w_1 > w_2 > \dots$ im Endlichen abbricht. Beide Sätze zusammen nennt man « Doppelkettensatz ».

Wir unterscheiden in einem Ring reguläre Ideale und Nilideale. Ein Nilideal ist ein Ideal, das nur nilpotente Elemente enthält, regulär nennen wir jedes Ideal, das kein Nilideal ist, das also mindestens ein nicht nilpotentes Element enthält. Unter einem « primären Ring » verstehen wir einen Ring, der kein reguläres zweiseitiges echtes Unterideal besitzt, unter einem « vollständig primären » einen, der kein reguläres einseitiges echtes Unterideal besitzt. Das Hauptresultat von ARTIN ist der Struktursatz: Jeder primäre Ring mit Haupteinheit, der den Doppelkettensatz erfüllt, läßt sich auffassen als Matrizenring endlichen Grades in einem vollständig primären Ring.

Andererseits hatte Fräulein NOETHER mit gruppentheoretischen Methoden, die Struktur der vollständig reduziblen Ringe ohne nilpotentes Ideal, die ebenfalls dem Doppelkettensatz genügen, erforscht. Es ist nun von Interesse, erstens die allgemeinen Ringe mit Doppelkettensatz ebenfalls vom gruppentheoretischen Standpunkt zu untersuchen, zweitens den Geltungsbereich der Struktursätze auszudehnen. Beides soll nun versucht werden.

Ein Ideal c heißt das Radikal des Ringes v, wenn c das einzige maximale zweiseitige Nilideal von v ist und außerdem alle rechtsund linksseitigen Nilideale (im mengentheoretischen Sinn) umfaßt. Dabei sind auch die Ausdrücke « maximal » und « minimal » mengentheoretisch aufzufassen. Die Existenz eines Radikals in einem Ring muß natürlich bewiesen werden. Es gelten nun die beiden für die weiteren Uberlegungen grundlegenden Sätze:

a) Ein Ring, in dem jedes reguläre Rechtsideal ein Idempotent enthält, besitzt ein Radikal.

b) Jedes minimale reguläre Rechtsideal eines beliebigen Ringes, d. h. also jedes reguläre Rechtsideal, das kein reguläres echtes Unterideal besitzt, enthält ein Idempotent.

Wenn wir daher von einem Ring verlangen, daß jedes reguläre Rechtsideal ein minimales reguläres umfaßt, so besitzt der Ring ein Radikal. Diese Forderung stellt sich aber als zu weit heraus, um die Struktursätze zu erhalten, da auch z. B. Matrizenringe unendlichen Ranges in einem vollständig primären Ring diese Bedingung erfüllen, die Struktursätze aber sämtliche Ringe aus Matrizenringen endlichen Ranges aufbauen.

Ich bezeichne als « Durchschnittsminimalbedingung » für die regulären Rechtsideale eines Ringes die folgende Voraussetzung: Jede in bezug auf die Durchschnittsbildung von Idealen abgeschlossene Menge M von Rechtsidealen, die mindestens ein reguläres Ideal enthält, enthält auch ein in M minimales reguläres Rechtsideal.

Setzen wir eine Wohlordung der Ideale des Ringes voraus, so ist diese Bedingung äquivalent mit dem « Durchschnittsvielfachenkettensatz »: Jede wohlgeordnete Kette von regulären Rechtsidealen $w_1 > w_2 > \dots$ hat einen Durchschnitt, der ebenfalls reguläres Rechtsideal ist.

Aus der Durchschnittsminimalbedingung folgt, daß der Ring v sich darstellen läßt als direkte Summe von n minimalregulären und direkt unzerlegbaren Rechtsidealen w_i und einem Nilideal $\mathfrak{G}$, also

$$v = w_1 + w_2 + \dots + w_n + \mathfrak{G}. \tag{1}$$

Ich will nun einen kurzen Uberblick über den Aufbau der Ringe, die der Durchschnittsminimalbedingung genügen, geben.

Der Restklassenring v/c nach dem Radikal c des Ringes v ist ein Ring ohne Nilideal und genügt dem Doppelkettensatz, besitzt also nach der Theorie der vollständigreduziblen Ringe die Gestallt

$$(2) \qquad v/c = u_1^* + u_2^* + \dots + u_m^* = \quad (3) \quad = w_1^* + w_2^* + \dots + w_p^*.$$

also direkte Summe von zweiseitig einfachen Idealen u_i^*, die selbst wieder direkte Summe von einfachen Rechtsidealen w_i^* sind. (Unter einem einfachen Ideal verstehen wir ein Ideal, das kein echtes Unterideal besitzt). Weiters besitzen zwei verschiedene Zerlegungen (3) des Restklassenringes die gleiche Anzahl von einfachen Rechtsidealen, und es sind zwei einfache Rechtsideale, die nicht derselben Zerlegung wohl aber demselben zweiseitig einfachen Ideal w_i^* angehören müssen, operatorisomorph in bezug auf Rechtsmultiplikation.

Es besteht nun der folgende Zusammenhang zwischen der direkten Zerlegung (1) des Ringes und der Zerlegung (3) des Restklassenringes: Gehe ich von einem direkt unzerlegbaren Ideal w_i zum Ideal $w_i/_c$ im Restklassenring über, so ist $w_i/_c$ einfach, es ist also der Restklassenring $v/_c$ direkte Summe von n einfachen Rechtsidealen, wenn in einer Zerlegung (1) gerade n direkt unzerlegbare reguläre Rechts ideale vorhanden sind. Daher besitzen zwei verschiedene Zerlegungen (1) genau dieselbe Anzahl n von direkt unzerlegbaren Rechtsidealen. Weiters läßt sich zeigen, daß zwei beliebige direkt unzerlegbare Rechtsideale w_i und w_h aus v dann und nur dann operatorisomorph sind, wenn es $w_i/_c$ und $w_h/_c$ im Restklassenring sind. Es gibt also genau m Klassen von operatorisomorphen unzerlegbare Rechtsidealen in v und in $v/_c$, wenn m die Anzahl der u_i^* in der Zerlegung (2) bedeutet.

Die Struktur der Ringe, die die Durchschnittsminimalbedingung erfüllen, wird durch die folgenden beiden Struktursätze gegeben, mit denen ich meine Mitteilung schließen will:

Ein primärer Ring v mit Haupteinheit ist ringisomorph einem Matrizenring endlichen Grades in einem vollständig primären Ring, der mit dem Automorphismenring der direkt unzerlegbaren Rechtsideale von v ringisomorph ist.

Ein beliebiger Ring v läßt sich darstellen als direkte Summe von m primären Ringen v_i mit Haupteinheit und eines additiv abgeschlossenen Systems n von Elementen aus dem Radikal c:

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_m + n.$$

m ist wiederum die Anzahl der u_i^* in (2).

A. SPEISER (Zürich - Svizzera)

PROBLEME DER GRUPPENTHEORIE

1. - Ein Problem, auf das man in der Gruppentheorie immer wieder geführt wird, ist dasjenige der Erweiterung einer Gruppe durch Hinzufügung eines Zentrums. Es sei $AB = C$ eine Relation der Ausgangsgruppe, dann sollen neue Elemente eingeführt werden welche der Relation genügen

$$AB = a_{AB}\, C$$

Die erweiterte Gruppe lässt sich gelegentlich in weniger Variabeln darstellen, als die Ausgangsgruppe. So gestattet die Ikosaedergruppe eine Darstellung durch drei Variable, als räumliche Drehungsgruppe. Projiziert man das Ikosaeder stereographisch auf die Ebene, so erhält man in bekannter Weise eine Darstellung der Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen einer Variabeln.

Versucht man diese homogen zu machen, so gelingt es in keiner Weise, einen Faktor -1 wegzuschaffen, sondern nur eine erweiterte Gruppe, welche ein Zentrum von der Ordnung 2 besitzt, lässt sich homogen in zwei Variabeln darstellen.

Man kann das Problem noch etwas erweitern, indem man die a_{AB} als Zahlen eines Galoisschen Körpers voraussetzt, dessen Gruppe gerade durch die gegebene Gruppe repräsentiert wird, und ferner für die Multiplikation das Gesetz postuliert:

$$aA = Aa^{A}$$

Die Zahlen a_{AB} sind selbverständlich nicht willkürlich, aber Herr I. Schur hat gezeigt, dass die Geltung des Assoziativgesetzes alle Bedingungen liefert.

Das erweiterte Problem ist von Herrn L. E. Dickson behandelt worden (Algebren und ihre Zahlentheorie, Kap. 3, Zürich, 1927) Diese Algebren, die ich als *Dicksonalgebren* bezeichnen möchte, sind wahrscheinlich für die Behandlung des zu Grunde liegenden algebraischen Zahlkörpers von Wichtigkeit. Vor allen Dingen werden die Diskriminantenteiler einer Untersuchung bedürfen.

Das Problem der Darstellung einer Gruppe in Zahlkörpern hat den Sprechenden auf die analoge Fragestellung im Gebiet der Matrizen geführt, weitere Untersuchungen im Anschluss daran sind von den Herren I. SCHUR und R. BRAUER ausgeführt worden.

Schliesslich ist auch das für die Kristallographie fundamentale, mathematisch noch völlig ungelöste Problem der Raumgruppen mit der obigen Fragestellung verwandt.

2. - Als zweites prinzipiell wichtiges Ergebnis möchte ich die Wiederentdeckung von Beziehungen zu einem abgestorbenen Zweig der Mathematik, der Geometrie der symmetrischen Figuren, nennen. Die Gruppentheorie setzt uns in Stand, neue Formulierungen der künstlerischen Gestalten zu geben. Es handelt sich vor allem darum, den mathematischen Gehalt gewisser Kunstgebiete, der Ornamentik u. a. anzugeben. Für die Musik hat W. Graeser schöne Resultate erhalten.

Die Algebra ist in früheren Zeiten in engster Verbindung mit der Kunst betrieben worden, wie das Beispiel des Bologneser Mathematikers LUCA PACIOLI aus dem 16. Jahrhundert zeigt.

G. MIGNOSI (Palermo - Italia)

EQUAZIONI ALGEBRICHE IN UN CORPO FINITO RISOLUBILI PER RADICALI

In un lavoro precedente [1] del quale è apparso un breve sunto nel « Bollettino dell'U. M. I. » del 15 giugno 1928 (VI), Anno VII, N. 3 (pp. 149-150), l'A. ha dimostrato che la risoluzione di una equazione cubica in un corpo finito Γ (il cui ordine è sempre una potenza $N=p^m$ di un numero primo p) può sempre ridursi alla risoluzione di equazioni binomie, salvo, ove occorra, un prolungamento di Γ, trasportando alle equazioni cubiche in Γ qualcuno dei procedimenti classici relattivi alle equazioni algebriche di 3° grado nel corpo complesso. In quella occasione egli ha soltanto notato che la risolubilità per equazioni binomie di una equazione algebrica qualunque in Γ è legata intimamente alla risolubilità per radicali dell'equazione stessa interpretata nel corpo complesso, così che il risultato ottenuto in quel lavoro s'inquadra in un fatto assai più generale, e, cioè, che: « *Affinchè una equazione algebrica qualunque in un corpo finito Γ sia risolubile per radicali in Γ è necessario e sufficiente che esista una interpretazione dell'equazione nel corpo complesso* K *risolubile per radicali* ».

Lo scopo della nuova Memoria dell'A. è appunto la dimostrazione di questo importante teorema, il quale riconducendo la questione della risolubilità per radicali in Γ all'analoga relativa a K, permette di utilizzare direttamente per i corpi finiti i classici risultati italiani sulla risoluzione algebrica delle equazioni.

1. - La Memoria si compone di 4 capitoli. Nel primo di essi è risoluta la questione esistenziale della radice n^{ma} di un numero a (non nullo) di un corpo finito Γ e in ordine a ciò è stabilita la seguente proposizione:

I). *Se Γ è un corpo numerico d'ordine* $\mathrm{N}=\mathrm{p}^{\mathrm{m}}$ (p *primo*) *ed* n *un numero intero positivo qualunque non divisibile per* p, *l'equazione binomia in x*:

$$x^n=a$$

in Γ, ammette sempre, qualunque sia a, n *soluzioni distinte in un corpo*

[1] G. MIGNOSI, *Risoluzione apiristica della equazione generale cubica in un corpo numerico* [Rend. Circ. Mat. di Palermo, t. 58, a. 1929].

finito $\Gamma^{(h)}$ *derivato da* Γ *mediante un polinomio irriducibile in* Γ, *di un certo grado* h, *le quali sono in astratto unicamente determinate da* Γ *ed* a.

Posto

$$\delta = D(N-1, n),$$

delle dette soluzioni soltanto δ, o nessuna, appartengono a Γ secondo che sia o non sia soddisfatta la condizione:

$$a^{\frac{N-1}{\delta}} = 1.$$

In particolare Γ conterrà sempre e soltanto δ radici n^{me} dell'unità. Se ω è una di esse che sia primitiva, denotanto con $^*\sqrt[n]{a}$ la classe delle dette soluzioni e con $\sqrt[n]{a}$ una di esse, si avrà, come nel corpo complesso:

$$^*\sqrt[n]{a} = \omega^r \sqrt[n]{a}, \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots\, n-1).$$

In $\Gamma^{(h)}$, quindi, ogni radicale d'indice n sopra un numero a di Γ, ha n dêterminazioni distinte e ogni espressione radico-razionale sopra numeri di Γ ha sempre significato in Γ o in un prolungamento $\Gamma^{(\mu)}$ di Γ (il corpo *relativo* all'espressione) con tante determinazioni generalmente distinte quanto è il prodotto degli indici dei radicali che vi figurano.

2. - Nel secondo Capitolo è data la forma apiristica delle determinazioni di $^*\sqrt[n]{a}$ fondandosi sulla nozione fondamentale di *sistema completo di grado* δ di numeri di Γ (cioè di un sistema $r_k\left(k=1, 2, \ldots, \frac{N-1}{\delta}\right)$ di numeri di Γ, le cui potenze δ^{me} siano tutte e sole le potenze δ^{me} di Γ) e sul teorema di CIPOLLA relativo alle congruenze binomie (mod. p), esteso dallo SCORZA ai corpi finiti, per mezzo della proposizione generale seguente:

II). *Se* Γ *è un corpo d'ordine* $N=p^m$ (p *primo*), *a un numero qualunque* (*non nullo*) *di* Γ *ed* n *un intero positivo non divisibile per* p, *le* n *determinazioni di* $^*\sqrt[n]{a}$ *nel corpo* $\Gamma^{(h)}$ *relativo a* $^*\sqrt[n]{a}$, *ammettono le espressioni apiristiche:*

$$(1) \qquad ^*\sqrt[n]{a} = \omega^r \sum_{i,0}^{\lambda-1} A_i^{(h)} a^i, \qquad \left(\lambda = \frac{N^h-1}{n}, \; r = 0, 1, \ldots, n-1\right)$$

dove ω *è una radice* n^{ma} *primitiva dell'unità, appartenente a* $\Gamma^{(h)}$,

$$(2) \qquad A_i^{(h)} = -n \sum_{h,1}^{\lambda} {r_h^{(k)}}^{ni-1}$$

ed $r_h^{(k)}$ $(k=1, 2, \ldots, \lambda)$ *un sistema completo di grado* n *di numeri di* $\Gamma^{(h)}$.

3. - Nel capitolo terzo, esaminati successivamente i casi particolari dei radicali quadratici e cubici, si passa alla costruzione effettiva dei sistemi completi

$r_k^{(h)}$ di grado n di $\Gamma^{(h)}$ per mezzo di quelli r_k, di egual grado n, di Γ e con l'uso delle (1) e (2) se ne deducono le espressioni apiristiche delle determinazioni di $\sqrt[*]{a}$ in $\Gamma^{(h)}$ mediante le r_k di Γ.

Pel caso generale si suppone per semplicità che n (non divisibile per p) sia un divisore di $N-1$ e che il polinomio irriducibile in Γ secondo cui $\Gamma^{(h)}$ è derivato da Γ abbia la forma binomia $x^n-\nu$ (quindi ν non potenza n^{ma} in Γ).

Si perviene così alla seguente proposizione:

III). *Se* Γ *è un corpo d'ordine* $\mathrm{N}=\mathrm{p}^{\mathrm{m}}$ (p *primo*), n *un divisore di* $\mathrm{N}-1$, *non divisibile per* p, *ed* $\mathrm{x}^{\mathrm{n}}-\nu$ *un binomio irriducibile in* Γ, *le determinazioni di* $^*\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$, *con* a *numero qualunque (non nullo) di* Γ *esistono sempre nel corpo* $\Gamma^{(\mathrm{n})}$ *derivato da* Γ *mediante* $\mathrm{x}^{\mathrm{n}}-\nu$, *e sono date dalle formule finali:*

$$(3)\qquad {}^*\sqrt[n]{a}=\omega^r\{\sigma_0 A(a)x^n+\sigma_1 A(a\nu)x^{n-1}+\dots+\sigma_{n-1}A(a\nu^{n-1})\},\quad (r=0,1,\dots,n-1)$$

dove ω *è una radice primitiva* n^{ma} *dell'unità, appartenente a* Γ; *i coefficienti* σ_{i} *e i polinomi* $\mathrm{A(a)}$ *sono definiti ponendo:*

$$\sigma_i=\frac{1}{n\nu}\sum_{j,0}^{n-1}(a\nu^i)^{j\frac{N-1}{n}},\qquad A(a)=\sum_{i,0}^{\frac{N-1}{n}-1}A_i a^i$$

ed

$$A_i=-n\sum_{k,1}^{\frac{N-1}{n}} r_k^{n-i},$$

essendo $\mathrm{r_k}\left(\mathrm{k}=1,2,\dots,\frac{\mathrm{N}-1}{\mathrm{n}}\right)$ *un sistema completo di grado* n *di numeri di* Γ.

Il secondo membro della (3) può essere ordinato secondo le potenze di a, e si ottiene l'altra forma:

$$(3')\qquad {}^*\sqrt[n]{a}=\frac{\omega^r}{\nu n}\sum_{i,0}^{N-2}A_iP_i(x)a^i,$$

i polinomî in x, $P_i(x)$, essendo definiti da:

$$P_i(x)=\sum_{s,0}^{n-1}\nu^{si}x^{s-n},\qquad (i=0,1,\dots,N-2).$$

La (3′), confrontata con l'altra:

$$(4)\qquad {}^*\sqrt[n]{a}=\omega^r\sum_{i,0}^{\frac{N-1}{n}-1}A_i a^i,$$

valevole nel caso in cui a sia potenza n^{ma} in Γ $\left(a^{\frac{N-1}{n}}=1\right)$, indica bene le modificazioni da apportare ai polinomî (4) per ottenere le determinazioni di $^*\sqrt[n]{a}$ nel caso in a sia un numero qualunque (non nullo) di Γ.

Le (3) ammettono pure una forma *ridotta* assai semplice, che permette di controllare indirettamente e in modo facile l'esattezza delle (3).

Basta osservare che esiste uno ed un solo valore i_0 dell'indice i per cui $a\nu^{i_0}$ è potenza n^{ma} in Γ. Allora si ha:

$$\sigma_{i_0} = \frac{1}{\nu},$$

e per $i \neq i_0$:

$$\sigma_i = 0,$$

e quindi:

(3″)
$$\sqrt[n]{a} = \frac{\omega^r x^{\nu - i_0}}{\nu} A(\nu a^{i_0}).$$

D'altra parte, essendo

$$(a\nu^{i_0})^{\frac{N-1}{n}} = 1,$$

la (4) è applicabile al numero $a\nu^{i_0}$ e si ha:

$$A^n(a\nu^{i_0}) = a\nu^{i_0},$$

e poi appunto:

$$\left[\frac{\omega^r x^{\nu - i_0}}{\nu} A(a\nu^{i_0})\right]^n = a.$$

4. - Dopo le questioni riguardanti il significato e la costruzione delle espressioni apiristiche dei radicali in Γ, con l'ultimo capitolo è compiuta la ricerca delle equazioni algebriche risolubili per radicali in Γ.

La teoria generale dei corpi finiti (magistralmente esposta dallo SCORZA) consente di ricondurre il problema alle equazioni algebriche nel corpo complesso K.

Si dimostra, anzitutto, come sia possibile interpretare nel corpo K il corpo finito Γ:

Il corpo Γ d'ordine $N = p^m$ (p primo) contiene un corpo C d'ordine p (il *sottocorpo fondamentale* di Γ) isomorfo alla classe:

$$R = \{r\}$$

degl'interi relativi ordinarî r contradistinti dalla relazione di congruenza (mod. p).

È pure noto che ogni corpo finito Γ d'ordine $N = p^m$ (p primo) è isomorfo ad un corpo algebrico $[C, P]$ derivato da C mediante un polinomio $P(x)$ in C di grado m, irriducibile in C, ossia alla classe dei polinomî $p_i(x)$, di grado $m-1$, al massimo, in x, a coefficienti arbitrari in C, i quali polinomi siano contradistinti dalla relazione di congruenza (mod $P(x)$). In tale corpo $[C, P]$, x è uno zero di $P(x)$.

Ciò posto, fissato un particolare sistema completo d'interi relativi incongrui (mod. p), ad esempio:

$$R_0 = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\},$$

si sostituiscano i cofficienti di $P(x)$ coi corrispondenti numeri di R_0, e si denoti con θ uno zero del polinomio $P_0(x)$ così ottenuto.

Si sostituiscano, poi, i coefficienti dei polinomî $p_i(x)$ con elementi qualunque della classe R, e si cambi in essi x in θ.

Si ottiene allora una classe infinita $R(\theta)$ di numeri complessi (algebrici).

Se gli elementi di $R(\theta)$ si contradistinguono mediante la relazione di congruenza a doppio modulo (mod. p, $P_0(\theta)$), mentre gli elementi di Γ formano un corpo finito rispetto all'eguaglianza in Γ, i corrispondenti elementi di $R(\theta)$ formano un corpo finito isomorfo a Γ rispetto alla relazione di congruenza (mod. p, $P_0(\theta)$).

Assunti, ad arbitrio, $N=p^m$ elementi di $R(\theta)$, incongrui (mod. p, $P_0(\theta)$), si ottiene un sistema $R'(\theta)$ di numeri complessi (algebrici) al quale appartiene uno ed un solo numero γ' che sia corrispondente di un elemento dato γ di Γ nell'isomorfismo tra Γ ed $R(\theta)$.

Il sistema $R'(\theta)$ si dirà una *interpretazione di Γ nel corpo complesso* K, e si conchiude, intanto, che:

IV). *Ogni corpo finito Γ ammette infinite interpretazioni* $\mathrm{R}'(\theta)$, $\mathrm{R}''(\theta)$,.... *nel corpo complesso* K.

Data, poi, una equazione algebrica:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+ \,....\, +a_nx^n=0 \tag{5}$$

nel corpo Γ, si potrà supporre che Γ sia prolungato così che le espressioni radico-razionali che occorre considerare abbiano significato in Γ.

Si sostituiscano i coefficienti a_i della (5) coi numeri complessi a_i' che corrispondono alle a_i nell'interpretazione di Γ in K. Allora alla equazione in Γ corrisponderà in $R(\theta)$ la congruenza condizionale in x:

$$f'(x)=a_0'+a_1'x+a_2'x^2+ \,....\, +a_n'x^n\equiv 0 \qquad (\text{mod. } p,\ P_0(\theta)).$$

Or bene, l'equazione in x nel corpo complesso K:

$$f'(x)=a_0'+a_1'x+a_2'x^2+ \,....\, +a_n'x^n=0 \tag{5'}$$

si dirà l'*interpretazione* in K della (5), corrispondente all'interpretazione $R'(\theta)$ di Γ in K, e, naturalmente, esisteranno infinite interpretazioni della (5) in K.

Dopo ciò, non presenta difficoltà la dimostrazione della prop. fondamentale:

V). *Affinchè una equazione algebrica* (5) *nel corpo finito Γ sia risolubile per radicali in Γ, è necessario e sufficiente che esista una interpretazione dell'equazione* (5) *nel corpo complesso* K, *risolubile per radicali in* K.

Ne segue subito che le equazioni algebriche dei primi quattro gradi in Γ sono sempre risolubili in Γ o in un conveniente prolungamento di Γ, con le medesime espressioni radicali relative alle equazioni algebriche ordinarie in K.

La forma apiristica delle formule di risoluzione si potrà poi dedurre applicando le formule (3) o (3′) o (3″) precedenti.

Osservando, poi, che se la (5) è l'equazione *generale* di grado n in Γ, essa ammette una *sola* interpretazione in K, si potrà anche estendere alle equazioni nei corpi finiti il teorema di RUFFINI, e concludere che anche pei corpi finiti sono risolubili per radicali le sole equazioni generali dei primi quattro gradi.

Infine, supponendo, particolarmente che Γ si riduca al suo sottocorpo fondamentale $C(N=p^m, m=1)$ o se si vuole alla classe R degl'interi relativi contradistinti dalla relazione di congruenza (mod. p), si può ritenere compiuta con le note formule classiche, la risoluzione apiristica delle congruenze condizionali di 3° e 4° grado.

M. KRAWTCHOUK (Kiew, Ukraine - U. R. S. S.)

SUR LE THÉORÈME DE STURM

Soit

$$F(z) = a_0 z + a_1 z^2 + a_2 z^3 + \dots \tag{1}$$

un élément d'une fonction analytique, dont les l singularités les plus voisines de $z=0$ sont des pôles simples.

En posant

$$F_m(z) = a_m z + a_{m+1} z^2 + a_{m+2} z^3 + \dots, \quad z = \frac{1}{x}, \tag{2}$$

cherchons les deux polynômes

$$\Psi_l^0(x) \text{ et } \Psi_l^1(x),$$

le premier étant de degré l, tels que les $2l$ premiers termes du développement

$$\frac{\Psi_l^1(x)}{\Psi_l^0(x)} = \frac{a_m}{x} + \frac{a_{m+1}}{x^2} + \dots + \frac{a_{m+2l-1}}{x^{2l}} + \dots \tag{3}$$

soient respectivement égaux à ceux de $F_m\left(\frac{1}{x}\right)$; ceci est possible sous la condition:

$$\begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} \dots a_{m+l-1} \\ a_{m+1} & a_{m+2} \dots a_{m+l} \\ \dots & \dots \\ a_{m+l-1} & a_{m+l} \dots a_{m+2l-2} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si l'indice m est assez grand, la décomposition de la fonction (3) en fractions simples a la forme suivante:

$$\frac{\Psi_l^1(x)}{\Psi_l^0(x)} = \sum_{j=1}^{l} \frac{R_{lj}}{x - a_{lj}} \tag{4}$$

En comparant maintenant (3) et (4), on parvient aux égalités

$$\begin{aligned} &\sum_j R_{lj} a_{lj}^h = a_{m+k} = \sum_j A_j a_j^{m+k} + l_m^{(h)} r^{-m-k} \\ &\sum_j R_{lj} a_{lj}^{k+1} = a_{m+k+1} = \sum_j A_j a_j^{m+k+1} + l_{m+1}^{(k)} r^{-m-k-1} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\sum_j R_{lj} a_{lj}^{k+l-1} = a_{m+k+l-1} = \sum_j A_j a_j^{m+k+l-1} + l_{m+l-1}^{(k)} r^{-m-k-l+1} \end{aligned} \tag{5}$$

$$(k=0, 1, \dots, l-1;\ r > |a_l^{-1}|),$$

où

(6) $$a_1^{-1},\ a_2^{-1}, \ldots, a_l^{-1}$$

sont les pôles mentionnés de $F(z)$, ordonnés de sorte que

$$|a_j| \geqslant |a_{j+1}|,$$

$A_j a_j^{-2}$ étant leurs résidus et $l_{m+s}^{(k)}$ des fonctions bornées de m.

Des égalités (5) on tire:

(7) $$R_{lj} a_{lj}^k = \sum_{\gamma=1}^{l} A_\gamma a_\gamma^{m+k} \cdot \prod_{\substack{i \\ (i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,l)}} \frac{a_\gamma - a_{li}}{a_{l\gamma} - a_{li}} + L_{lj}^{(k)} r^{-m}$$
$$(k=0, 1, \ldots, l-1)$$

où tous les nombres $L_{lj}^{(k)}$ sont aussi des fonctions bornées de m.

Les nombres (6) étant distincts, on peut indiquer les l nombres λ_k qui satisfont aux équations

(8) $$\begin{gathered} \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_1^k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_{j-1}^k = 0 \\ \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_j^k = 1 \\ \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_{j+1}^k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_l^k = 0 \end{gathered}$$

Donc, vu que

$$\lim_{m=\infty} a_{lj} = a_j,$$

on a

(9) $$\lim_{m=\infty} \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_{lj}^k = 1, \quad \lim_{m=\infty} \prod_{\substack{i \\ (i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,l)}} \frac{a_j - a_{li}}{a_{lj} - a_{li}} = 1$$

D'autre part, des égalités (7) on peut former la combinaison linéaire suivante:

$$R_{lj} \cdot \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k a_{lj}^k = A_j a_j^m \cdot \prod_{\substack{i \\ (i=1,\ldots,j-1,j+1,\ldots,l)}} \frac{a_j - a_{li}}{a_{lj} - a_{li}} + r^{-m} \sum_{k=0}^{l-1} \lambda_k L_{lj}^{(k)},$$

ce qui donne, à l'aide de (9), cette conclusion simple:

(10) $$\lim_{m=\infty} \frac{R_{lj}}{A_j a_j^m} = 1$$

Parmi les diverses applications de cette dernière égalité nous indiquerons ici la suivante:

Si les coefficients a_m, a_{m+1}, a_{m+2},.... *sont tous réels et si tous les pôles réels de la serie* (6) *ont des résidus du même signe, alors, pour l'indice m assez grand et pair, l'algorithme d'Euclide appliqué aux fonctions* $\Psi_l^0(x)$ *et* $\Psi_l^1(x)$ *amène à une suite de Sturm*

$$\Psi_l^0(x),\ \Psi_l^1(x),\ \Psi_l^2(x),.... \tag{11}$$

Par conséquent le nombre des pertes des variations des signes dans la suite (11) *le long de l'intervalle réel* (a, b) *est égal au nombre des pôles de la serie* (6) *qui appartiennent à cet intervalle.*

La condition ci-dessus formulée concernant les résidus est remplie par ex. dans le cas important

$$F(z) = -\frac{G'(z)}{G(z)},$$

où $G(z)$ est une fonction entière.

Les résultats esquissés plus haut sont susceptibles de diverses généralisations et de quelques approfondissements.

J. C. FIELDS (Toronto - Canadà)

REPRESENTATION OF THE BRANCHES OF AN ALGEBRAIC FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES IN THE NEIGHBOURHOOD OF THE SINGULAR MANIFOLD

Where u is defined by an integral algebraic equation $F(z_1, ..., z_r; u) = 0$, it is shown that a branch of u in the neighbourhood of a point $z_1 = a_1, ..., z = a_r$ on an irreducible element $\varphi(z_1, ..., z_r) = 0$ of the Discriminant manifold $D(z_1, ..., z_r) = 0$ can be represented in the form

$$P_0 + P_1 \varphi^{1/\nu} + ... + P_{\nu-1} \varphi^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

where $P_0, ..., P_{\nu-1}$ are series in powers of $z_1 - a_1, ..., z_r - a_r$ exception being made only of points on an $(r-2)$-fold complex manifold included under the Discriminant manifold (1).

(1) For proof see Trans. Roy. Can. Inst. Vol. XV, Part. 2, 1926.

J. C. FIELDS (Toronto - Canadà)

THE EXISTENCE THEOREM FOR THE BRANCHES OF AN ALGEBRAIC FUNCTION OF A COMPLEX VARIABLE

Let

$$f(z, u)=0 \tag{1}$$

be an algebraic equation of degree n and suppose it to be satisfied by a pair of values $z=a$, $u=b$. We may assume that $f(z, u)$ does not present a multiple factor and that it is not divisible by $z-a$ or $u-b$.

Expressing the left-hand side in terms of powers of $z-a$, $u-b$ and arranging according to dimensions the equation can be written in the form

$$u_n+u_{n-1}+\dots+u_r=0 \tag{2}$$

where $r \geqq 1$. If $r=1$ and if $u-b$ in u_1 has a cofficient $\neq 0$ we can, as we know, readily obtain a series $P(z-a)$ in which the constant term is 0 and such that the equation is satisfied on substituting in it $u-b=P(z-a)$.

If however $r=1$ and $u-b$ does not appear in u_1 we can obtain a series $Q(u-b)$ where $Q(0)=0$ and such that the equation is satisfied on putting $z-a=Q(u-b)$ where the series $Q(u-b)$ begins with a term of second degree at least. Inverting this equation we obtain $u-b$ as a series in powers of $z-a$ involving however fractional exponents. In any case if $r=1$ the equation (2) is satisfied by a relation of the form

$$u-b=P((z-a)^{1/\nu}) \tag{3}$$

where on the right-hand side we have a series in ascending integral powers of the element $(z-a)^{1/\nu}$. Here in general $\nu=1$.

Where $r>1$, we can now prove by induction that equation (2) is satisfied by a relation of the type (3). We shall begin by assuming that this holds for equations of the character here in question in which terms of dimension $<r$ present themselves. In effecting the proof we shall have occasion to make use of the well known lemma that polynomials $g(z, u)$ and $h(z, u)$ of degrees $n-2$ and $n-1$ respectively in u can be found such that identically

$$g(z, u)\, f(z, u)+h(z, u)\, f_u'(z, u)=(z-a)^i\,((z-a)) \tag{4}$$

where $g(z,u)$, $h(z,u)$ are integral in $z-a$ without factor $z-a$ and where the series $((z-a))$ has a constant term $\neq 0$. The exponent i is then a perfectyl definite integer.

Returning to the equation (2) and assuming $r>1$ we shall split u_r into its linear factors. First suppose that these linear factors are not all the same; we may then write

(5) $$u_r=(z-a)^{r-\varrho}\, l_1^{\varrho_1}\, l_2^{\varrho_2}....$$

where

$$l_1=u-b-c_1(z-a),\ \ l_2=u-b-c_2(z-a)....$$

That in the factors l_1, l_2,.... we may assume 1 to be the coefficient of $u-b$ is evident, since we are free to divide the equation (2) by a constant. On writing $u-b=(z-a)v$ and transforming equation (2) to terms of $z-a, v$ the element u_r becomes

(6) $$u_r=(z-a)^r(v-c_1)^{\varrho_1}(v-c_2)^{\varrho_2},....$$

All the other transformed elements on the left-hand side of (2) are divisible by $(z-a)^{r+1}$. Dividing through by $(z-a)^r$ and rearranging according to powers of $z-a, v-c_1$ the term

$$(c_1-c_2)^{\varrho_2}(c_1-c_3)^{\varrho_3}....(v-c_1)^{\varrho_1}$$

actually presents itself and the dimension ϱ_1 of this term in $z-a$, $v-c_1$, is $<r$ since in the case in question the linear factors of u_r in (5) are not all the same. By our hypotheses then the equation in $z-a$, $v-c_1$ can be satisfied on substituting for $v-c_1$ a series in powers of $z-a$ which may or may not involve fractional exponents. Consequently the equation in $z-a$, $u-b$ may be satisfied by substituting for $u-b=(z-a)v$ a series in powers of $z-a$. This disposes of the case where the linear factors of u_r are not all the same.

Let us now consider the case where the linear factors of u_r are all the same. We then have one of the alternatives

(7) $$(i)\ \ u_r=\{u-b-c(z-a)\}^r,\quad (ii)\ \ u_r=(z-a)^r.$$

Let us first consider (i). Write $u-b=(z-a)v$. Divide through by $(z-a)^r$ and rearrange equation according to powers of $z-a$, $v-c$. The term $(v-c)^r$ actually presents itself. Terms of dimension lower than r may or may not present themselves. If they do then by our hypothesis $v-c$ and therefore $u-b$ can be represented as a series in powers of $z-a$. If they do not then the terms of dimension r represented by v_r may be split into linear factors. If these factors are not all the same then from what we have seen above we can represent $v-c$ and therefore $u-b$ by a series in powers of $z-a$. If they are all the same we can write

$$v_r=\{v-c-d(z-a)\}^r$$

Here we would repeat with regard to $z-a$, $v-c$ the argument employed with regard to $z-a$, $u-b$ in connection with the case in (7). We would then obtain a series in powers of $z-a$ for $v-c$ or would arrive at a transformed equation in $z-a$, $w-d$ with terms of lowest dimension represented by

$$w_r = \{w-d-e(z-a)\}^r$$

where

$$u-b=(z-a)(v-c)+c(z-a)=(z-a)^2(w-d)+d(z-a)^2+c(z-a).$$

Application of the above process cannot be continued indefinitely without arriving at an equation in which the dimension of the terms of lowest degree is $<r$. For if after application of the process k times equation (2) has been transformed to an equation in $z-a$, $\varphi-\sigma$ in which the terms of lowest degree are still of dimension r this means that after k successive substitutions for $u-b$, $v-c$,.... as indicated above and k successive divisions by $(z-a)^r$ we transform $f(z, u)$ into a polynomial in $z-a$, $\varphi-\sigma$. That is to say we have

$$f(z,u)=(z-a)^{kr}g(z-a, \varphi-\sigma)$$

where

$$u-b=(z-a)^k(\varphi-\sigma)+\sigma(z-a)^k+ \dots + c(z-a).$$

We should then have

$$f_u'(z,u)=(z-a)^{k(r-1)}g_\varphi'(z-a, \varphi-\sigma).$$

Substitution for u in terms of φ on the left-hand side of the identity (4) would then give us an expression divisible by the factor $(z-a)^{k(r-1)}$ so that $k(r-1)$ cannot be $>i$.

It follows that after some finite number k of transformations of the character indicated above we arrive at an equation in two elements $z-a$, $\varphi-\sigma$ in which the dimension of the terms of lowest degree is $<r$ and $\geqq 1$. By our hypothesis then we can obtain for $\varphi-\sigma$ and therefore also for $u-b$ a series in powers of $z-a$ which may or may not involve fractional exponents.

The alternative (*ii*) in (7) is treated the same as (*i*) on interchanging $z \quad a$ and $u-b$ in the argument. This then ultimately gives us for $z-a$ a series in powers of $u-b$ and through inversion then we arrive at a series in powers of $z-a$ for $u-b$.

J. C. FIELDS (Toronto - Canadà)

PROOF OF A THEOREM IN THE THEORY OF THE ALGEBRAIC FUNCTIONS

Let

$$(1) \qquad f(z, u)=0$$

be an integral algebraic equation of degree n in u. Corresponding to a value $z=a$ there will be n branches:

$$(2) \qquad u-P_1=0,\ldots, u-P_n=0$$

where the P's are series in powers of $z-a$ involving, it may be, fractional exponents. These branches group themselves into a number of cycles. Usually a cycle is of order 1 and consists of a single branch. A cycle of order ν consists of ν branches whose equations may be represented by

$$(3) \qquad u=P\left(\varepsilon_1(z-a)^{1/\nu}\right),\ldots, u=P\left(\varepsilon_\nu(z-a)^{1/\nu}\right)$$

where $\varepsilon_1,\ldots, \varepsilon_\nu$ are the νth roots of unity.

Any polynomial $g(u)$ in u with coefficients which are series in powers of $z-a$ will have certain orders of coincidence with the branches in (2) or, as we may express it, certain order numbers corresponding to these branches. These order numbers are by definition the lowest exponents in the series in powers of $z-a$ obtained on substituting successively for u in $g(u)$ the series $P_1,\ldots, P_n$. The order number of a branch $u-P_\varrho=0$ with a branch $u-P_\sigma=0$ is defined as the order of coincidence of the branch $u-P_\varrho=0$ with $u-P_\sigma$. This then is the lowest exponent in the difference $P_\varrho-P_\sigma$ and is designated by $\mu_{\varrho,\sigma}$. Evidently $\mu_{\varrho,\sigma}=\mu_{\sigma,\varrho}$.

The order of coincidence of the branch $u-P_\varrho=0$ with the polynomial $f_u'(z, u)$ is desigated by μ_ϱ and is readily seen to be the same as the order of coincidence of this branch with the product

$$(4) \qquad (u-P_1)\ldots (u-P_{\varrho-1})(u-P_{\varrho+1})\ldots (u-P_n).$$

It is evident that we have

$$(5) \qquad \mu_\varrho=\mu_{\varrho,1}+\mu_{\varrho,2}+\ldots+\mu_{\varrho,\varrho-1}+\mu_{\varrho,\varrho+1}+\ldots+\mu_{\varrho,n}.$$

Any polynomial in u with coefficients which are series in powers of $z-a$ can be represented as a polynomial of degree $n-1$ in u with coefficients which are series in powers of $z-a$. In particular any rational function of (z, u) can be represented as a polynomial in u of degree $n-1$ with coefficients which are rational functions of z and therefore also at the same time expressible as series in powers of $z-a$. We do not alter a function of (z, u) by adding to it the product of $f(z, u)$ by any arbitrary factor. We can then evidently represent any polynomial in u with coefficients which are series in powers of $z-a$ as a polynomial of degree n in u with coefficients which are series in powere of $z-a$ and in particular with, as coefficient of u^n.

The number of conditions imposed on the numerical coefficients in the general polynomial of degree $n-1$ in u with coefficients which are arbitrary power-series in $z-a$ by a certain set of order numbers $\tau_1, \ldots, \tau_n$ corresponding to the n branches is evidently the same as the number of conditions imposed by these order numbers on the polynomial

$$G(z, u)=u^n+g_1(z)u^{n-1}+\ldots+g_n(z) \tag{6}$$

in which the coefficients $g_1(z), \ldots, g_n(z)$ are arbitrary power-series in $z-a$.

Where $g(z)$ is an arbitrary power-series in $z-a$ we evidently subject its coefficients to precisely τ conditions on imposing on the function $u+g(z)$ the order of coincidence τ with the branch $u-P=0$ in the case where P involves no fractional exponents it being understood that τ is a positive integer.

Where $Q_1(z), \ldots, Q_m(z)$ are arbitrary power-series in $z-a$ the number of conditions imposed on the function

$$u^m+Q_1(z)u^{m-1}+\ldots+Q_m(z) \tag{7}$$

by the order of coincidence τ with the branch $u-P=0$ is also τ for it evidently cannot exceed this number nor can it be less than the number of conditions imposed by this order number on the general function $u+Q(z)$; for included under the general function of the form (7) is the product of $u+Q(z)$ by fhe general function of degree $m-1$ in u of the type (7).

If we would impose on the general function of the form (7) the respective order numbers $\tau_1, \ldots, \tau_m$ with m branches $u-P_1=0, \ldots, u-P_m=0$ where $P_1, \ldots, P_m$ involve no fractional exponents we may impose them in the order here indicated. We shall in what follows assume that each successive τ is sufficiently great to suit our purpose.

The order number τ_1 imposed on (7) means in any case that the coefficients in this function are subjected to τ_1 conditions, and also, assuming τ_1 to be sufficiently great, that the function has with the branches $u-P_2=0, \ldots, u-P_m=0$ the orders of coincidence $\mu_{1,2}, \ldots, \mu_{1,m}$, for τ_1 may be taken so great that it implies the existence of a linear factor $u-p_1$ of (7) which coincides with $u-P_1$ beyond the points of bifurcation of the branch $u-P_1=0$ with each of the branches $u-P_2=0,\dots, u-P_m=0$. This splits (7) into the product of $u-p_1$ and the arbitrary polynomial

$$(7') \qquad u^{m-1}+Q_1^{(1)}u^{m-2}+\dots+Q_{m-1}^{(1)}$$

of degree $m-1$ in u of the type (7).

The factor $u-p_1$ and therefore the function (7) will then have with the branches

$$u-P_2=0,\dots,\ u-P_m=0$$

respectively the orders of coincidence $\mu_{2,1},\dots, \mu_{m,1}$. Successive imposition of the order number τ_2 on (7), means imposition of the order number $\tau_2-\mu_{2,1}$ on its factor (7′) which implies the subjection of the coefficients of (7′) to just this many successive conditions. This evidently means just $\tau_2-\mu_{2,1}$ additional conditions imposed on the coefficients of (7) in order to assure to it an order of coincidence τ_2 with the branch $u-P_2=0$ after it has been conditioned by the order number τ_1. For $\tau_2-\mu_{2,1}$ and therefore for τ_2 sufficiently great this implies the splitting off from (7′) of a linear factor $u-p_2$ which coincides with $u-P_2$ beyond the points of bifurcation of the branch $u-P_2=0$ with the branches $u-P_1=0$, $u-P_3=0,\dots, u-P_m=0$.

The polynomial (7) then will be the product of the quadratic $(u-p_1)(u-p_2)$ by the arbitrary polynomial

$$(7'') \qquad u^{m-2}+Q_1^{(2)}u^{m-3}+\dots+Q_{m-2}^{(2)}$$

of degree $m-2$ of the type (7). Its factor $(u-p_1)(u-p_2)$ then and therefore (7) itself will have with the branches $u-P_2=0,\dots, u-P_m=0$ respectively the orders of coincidence

$$\mu_{3,1}+\mu_{3,2},\ \mu_{4,1}+\mu_{4,2},\dots,\ \mu_{m,1}+\mu_{m,2}.$$

Continuing the above process and imposing on (7″) the order of coincidence $\tau_3-\mu_{3,1}-\mu_{3,2}$ with the branch $u-P_3=0$ we therewith impose on (7) the order of coincidence τ_3 with this branch and for τ_3 sufficiently great split off from (7″) a factor $u-p_3$ which coincides with $u-P_3$ beyond the points of bifurcation of the branch $u-P_3=0$ with the branches

$$u-P_1=0,\ u-P_2=0,\ u-P_4=0,\dots,\ u-P_m=0.$$

We at the same time impose on (7″) and therewith on (7) $\tau_3-\mu_{3,1}-\mu_{3,2}$ conditions.

Successive application of the above process ultimately splits (7) into a product of m linear factors

$$(u-p_1)(u-p_2)\dots(u-p_m),$$

imposes on (7) the order numbers $\tau_1,\dots, \tau_r$, and at the same time subjects its coefficients to conditions whose number is given by the sum

$$\tau_1+(\tau_2-\mu_{2,1})+(\tau_3-\mu_{3,1}-\mu_{3,2})+\dots+(\tau_m-\mu_{m,1}-\dots-\mu_{m,m-1}).$$

The number of conditions to which the coefficients of the general function (7) are subjected by imposition of the orders of coincidence $\tau_1,\dots, \tau_r$ (assumed to be sufficiently great) with the branches $u-P_1=0,\dots, u-P_m=0$ respectively is then evidently represented by the sum

$$\sum_{\lambda=1}^{m}\tau_\lambda-\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{m}\mu_\lambda' \tag{8}$$

where $\mu_\lambda'(=\mu_{\lambda,1}+\dots+\mu_{\lambda,\lambda-1}+\mu_{\lambda,\lambda+1}+\dots+\mu_{\lambda,m})$ is the sum of the orders of coincidence of the branch $u-P_\lambda=0$ with the branches

$$u-P_1=0,\dots,\ u-P_{\lambda-1}=0,\ u-P_{\lambda+1}=0,\dots,\ u-P_m=0.$$

Let us now consider the case of a cycle of order ν and determine the number of conditions imposed on the general function of the form

$$R(z-a,\ u)=u^\nu+Q_1(z-a)u^{\nu-1}+\dots+Q_\nu(z-a) \tag{9}$$

by an order of coincidence τ with the braches of the cycle.

Represent the ν branches of the cycle by the notation

$$u-P\left(\varepsilon_1(z-a)^{1/\nu}\right)=0,\ u-P\left(\varepsilon_2(z-a)^{1/\nu}\right)=0,\dots,\ u-P\left(\varepsilon_\nu(z-a)^{1/\nu}\right)=0$$

where $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\dots,\ \varepsilon_\nu$ are the νth roots of unity, and designate by N the number of the conditions imposed on the general function of the form (9) by the order of coincidence τ with the branches of the cycle. Denote by μ' the sum of the orders of coincidence of one of the branches of the cycle with the remaining branches. Writing $z-a=\xi^\nu$ evidently N will be the number of the conditions imposed on the general function of the form

$$R(\xi^\nu,\ u)=u^\nu+Q_1(\xi^\nu)u^{\nu-1}+\dots+Q_\nu(\xi^\nu) \tag{10}$$

by the order of coincidence $\tau\nu$ with the ν branches

$$u-P_1(\varepsilon_1\xi)=0,\ u-P_2(\varepsilon_2\xi)=0,\dots,\ u-P_\nu(\varepsilon_\nu\xi)=0. \tag{11}$$

The general polynomial in u with coefficients which are power-series in ξ subject to the condition

$$u-P_1(\varepsilon_1\xi)\dots\ u-P_\nu(\varepsilon_\nu\xi)=0$$

can then be written in the form

$$R_0(\xi^\nu,\ u)+\xi R_1(\xi^\nu,\ u)+\dots+\xi^{\nu-1}R_{\nu-1}(\xi^\nu,\ u) \tag{12}$$

where $R_0(\xi^\nu, u),\dots, R_{\nu-1}(\xi^\nu, u)$ are each independent and of the general form (10). After the analogy of formula (8) then the number of the conditions imposed on the general function of the form (12) by the order of coincidence $\tau\nu$ with each of the ν branches (11) will be

$$(\tau\nu)\nu-\frac{1}{2}(\mu'\nu)\nu. \tag{13}$$

If now $\tau\nu$ is the order number of the expression (12) when we replace u by $P(\varepsilon_i\xi)$ this will still be the order number when in the expression so obtained we replace ξ by $\varepsilon_j\xi$ where $\varepsilon_i\varepsilon_j=1$. We then have $\tau\nu$ for the order number of

$$(14) \qquad R_0(\xi^\nu, u)+\varepsilon_j\xi R_1(\xi^\nu, u)+ \dots +\varepsilon_j^{\nu-1}\xi^{\nu-1}R_{\nu-1}(\xi^\nu, u)$$

for $u=P(\xi)$ and ε_j equal to any one of the νth roots of unity. It evidently follows that $\tau\nu$ is the order number of each of the elements of the summation in (14) for $u=P(\xi)$.

The order numbers then of

$$(15) \qquad R_0(\xi^\nu, u),\ R_1(\xi^\nu, u), \dots,\ R_{\nu-1}(\xi^\nu, u)$$

respectively for $u=P(\xi)$ are

$$\tau\nu,\ \tau\nu-1, \dots,\ \tau\nu-(\nu-1)$$

and τ being sufficiently great the numbers of the conditions imposed on the several functions in (15) by these respective order numbers will be

$$N,\ N-1, \dots,\ N-(\nu-1).$$

Identifying the sum of these numbers with the expression given in (13) we obtain

$$N\nu-\frac{1}{2}\nu(\nu-1)=\tau\nu^2-\frac{1}{2}\mu'\nu^2$$

whence

$$(16) \qquad N=\tau\nu-\frac{1}{2}(\mu'-1+1/\nu)\nu.$$

This then is the number of the conditions imposed on the general function of the form (9) by the order of coincidence τ with the cycle of order ν.

Imposing in succession the order numbers $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\nu$, assumed to be sufficiently great, on the general polynomial of the form

$$(17) \qquad u^n+Q_1u^{n-1}+ \dots +Q_n$$

where $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ are, to begin with, arbitrary power-series in $z-a$ we first factor this polynomial in the form

$$(18) \qquad (u^{\nu_1}+q_1^{(1)}u^{\nu_1-1}+ \dots +q_{\nu_1}^{(1)})(u^{n-\nu_1}+Q_1^{(1)}u^{n-\nu_1-1}+ \dots +Q_{n-\nu_1}^{(1)})$$

where the coefficients $q^{(1)}$ and $Q^{(1)}$ are power-series in $z-a$ the latter being arbitrary, the former being subjected to those conditions which are necessary in order that the first factor may have for the branches of the cycle of order ν_1 the order number τ_1. The number of these conditions is also the number of the conditions imposed on the polynomial (17) by the order number τ_1, the number of these conditions in analogy with formula (16) being given by the expression

$$(19) \qquad \tau_1\nu_1-\frac{1}{2}(\mu_1'-1+1/\nu_1)\nu_1$$

where μ_1' is the sum of the order numbers of any branch of the cycle of order ν_1 with the remaining ν_1-1 branches. In general we shall employ the symbol μ_s' to designate the sum of the orders of coincidence of a branch of the sth cycle with the remaining branches of the cycle.

Designating by $\mu_s',_t$ the sum of the orders of coincidence of a branch of the sth cycle with the ν_t branches of the tth cycle, the product (18) has with the branches of the cycle of order ν_2 the orders of coincidence $\mu_2',_1$ and the imposition of the order number τ_2 for the second cycle on the product (18) imposes on the second factor the order number $\tau_2-\mu_2',_1$ and therefore on the polynomial (17) additional conditions whose number is

$$(20)\qquad (\tau_2-\mu_2',_1)\nu_2-\frac{1}{2}(\mu_2'-1+1/\nu_2)\nu_2.$$

These conditions factorize the second factor in (18) in the form

$$(21)\qquad (u^{\nu_2}+q_1^{(2)}u^{\nu_2-1}+\ldots.+q_{\nu_2}^{(2)})(u^{n-\nu_1-\nu_2}+Q_1^{(2)}u^{n-\nu_1-\nu_2-1}+\ldots.+Q_{n-\nu_1-\nu_2}^{(2)}).$$

Further imposition on the polynomial (17) of τ_3 as order of coincidence with the cycle of order ν_3 imposes the order of coincidence $\tau_3-\mu_3',_2-\mu_3',_1$ on the second factor in (21) and subjects the coefficients in (17) to additional conditions whose number is

$$(22)\qquad (\tau_3-\mu_3',_2-\mu_3',_1)\nu_3-\frac{1}{2}(\mu_3'-1+1/\nu_3)\nu_3.$$

So proceeding and adding the numbers of the conditions, as given in (19), (20), (22), etc., to which we subject the coefficients in the polynomial (17) when we impose on it in succession the orders of coincidence $\tau_1,\ \tau_2,\ldots.,\ \tau_r$ with the first, second,...., r th cycle, we obtain for the total number of the conditions imposed by order numbers on the polynomial the expression

$$(22)\qquad \sum_{s=1}^{r}\tau_s\nu_s-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}(\mu_s-1+1/\nu_s)\nu_s$$

where we employ μ_s to designate the sume of the orders of coincidence of any one branch of the cycle of order ν_s with the remaining $n-1$ branches of the equation. This is then the number of the conditions imposed by the set of order numbers $\tau_1,\ \tau_2,\ldots.,\ \tau_r$ on a polynomial of degree $n-1$ in u with coefficients which are arbitrary power-series in $z-a$. Such polynomial we shall designate by the notation $((z-a,\ u))$. The formula (22) for the number of the conditions imposed on the coefficients of the polynomial by the set of order numbers $\tau_1,\ \tau_2,\ldots.,\ \tau_r$ has been obtained on the assumption that these order numbers are sufficiently great. For this it will suffice that the order numbers be adjoint, that is to say that they do not fall short of the respective numbers

$$\mu_1-1+1/\nu_1,\ldots.,\ \mu_r-1+1/\nu_r.$$

Evidently any set of order numbers $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ will impose on the coefficients of the general function of the form $(z-a)^{-i}((z-a, u))$ the same number of conditions as are imposed by the set of order numbers $\tau_1+i, \tau_2+i, \ldots, \tau_r+i$ on the general function of the form $((z-a, u))$ where i is any integer and if i has been chosen so great that the latter order numbers are adjoint the number of the conditions in question as given by formula (22) will be

$$ni+\sum_{s=1}^{r}\tau_s\nu_s-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r}(\mu_s-1+1/\nu_s)\nu_s. \tag{23}$$

This holds for any set of order numbers $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_r$ so long as i is chosen sufficiently great and this again evidently holds good so long as $-i$ is equal to or less than the least value which is consistent with the form $(z-a)^{-i}((z-a, u))$ having the order numbers here in question.

While the formula (23) has been derived on the assumption that equation (1) is an integral algebraic equation or at least that it is integral relatively to the element $z-a$, it holds also in the case where the equation is not integral. To show this it is only necessary to go over from a non-integral equation in v to the integral equation in u by a trasformation of the form $u=(z-a)^m v$ on assuming the formula to hold for the integral equation.

R. VAIDYANATHASWAMY (Madras - India)

THE THEORY OF MULTIPLICATIVE ARITHMETIC FUNCTIONS

Abstract ([1]).

I. - An arithmetic Function $f(M_1, M_2, \ldots M_r)$, of r positive integral arguments, is said to be a « Multiplicative » Function, if

$$f(M_1N_1, M_2N_2, \ldots, M_rN_r) = f(M_1, M_2, \ldots, M_r) \times f(N_1, N_2, \ldots N_r), \ldots (1)$$

for all values of the arguments such that the products $M_1M_2 \ldots M_r$, $N_1N_2 \ldots N_r$ are relatively prime. Also, I call f a « linear » function if the equation (1) holds for *all* values of the arguments. If f is a linear function, it is easy to see that we can write; $f(M_1, \ldots, M_r) = \prod_k F_k(M_k)$, where F_k is the linear function of one argument, defined by;

$$F_k(M_k) = f(1, \ldots, 1, M_k, 1, \ldots 1).$$

The two linear functions E, E_0 are defined by:

$$E(M_1, M_2, \ldots M_r) = 1 \text{ for all values of } M_1, M_2, \ldots M_r,$$

$$E_0(M_1, M_2, \ldots M_r) = \begin{cases} 1 \text{ when } M_1 = M_2 = \ldots = M_r = 1 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

These are fundamental, as well as the multiplicative non-linear function E_k (which reduces to E, for $k=1$ and to E_0, for $k=0$) defined by:

$$E_k(M_1, \ldots, M_r) = k^\nu;$$

$\nu =$ number of distinct prime factors of $M_1M_2 \ldots M_r$.

Multiplicative functions are well known, as instances of them occur frequently in Arithmetic; but they have not been systematically studied in themselves. The object of this paper is two-fold, to frame a complete calculus for the study of these functions, and to establish a structural theory in which the linear functions play the role of ultimate elements. The method used is a new one,

---

([1]) The paper in full is under publication in the transactions of the American Mathematical Society.

which I have called « The Method of Generating Series ». The Multiplicative property of $f(M_1, M_2, \ldots M_r)$ implies that the values of f for all arguments can be found by simple multiplication, if the values of $f(p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_r})$ are known, for every prime p, and every set of indices $m_1, m_2, \ldots, m_r$.

We call the latter set of values an *element* of the Multiplicative function f, corresponding to the prime p. With each element of f, we associate the power-series:

$$f_p(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \sum_{m_1, \ldots, m_r} f(p^{m_1}, p^{m_2}, \ldots, p^{m_r}) x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_r^{m_r}.$$

This series is a « Generating Series » of f, corresponding to the prime p. Every multiplicative function must take the value 1 for simultaneous unit values of its arguments; hence every generating series has unity for its constant term. If f is a linear function, each of its generating series is the expansion of a rational function of the form $(1-c_1x_1)^{-1}(1-c_2x_2)^{-1} \ldots (1-c_rx_r)^{-1}$.

The five processes of the calculus.

II. - The five processes to be described are all applicable to non-multiplicative functions, but their importance lies in the fact, that when performed on multiplicative functions they yield only multiplicative functions.

These processes are:

1. *Multiplication of Functions.* Symbol:

$$(f \times \Phi)(M_1, M_2, \ldots M_r) = f(M_1, \ldots M_r) \times \Phi(M_1, \ldots M_r).$$

2. *Convolution of Arguments.*

3. *Composition of Functions.* $f \cdot \Phi$ denotes the composite function of f and Φ. f^2 *never* denotes $f \times f$, but always $f \cdot f$. $f \cdot E$ is termed the *integral* (or the numerical integral) of f.

4. *Inversion of Functions.* f^{-1} denotes the inverse function of f.

5. *Compounding of Functions.* $f + \Phi$ denotes the compound function of f and Φ.

The first four of these processes are known, though (2) and (3) have not received names.

The Arithmetical significance of the processes (3), (4), (5) is simple. The composite is arithmetically defined by:

$$(f \cdot \Phi)(M_1, M_2, \ldots M_r) = \sum f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)\, \Phi\left(\frac{M_1}{\delta_1}, \frac{M_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{M_r}{\delta_r}\right),$$

summed for all divisors $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_r$ of $M_1, M_2, \ldots M_r$ respectively.

The inverse f^{-1}, of a function f, is the unique function determined from $f^{-1} \cdot f = E_0$.

The compound is arithmetically given by:

$$(f+\Phi)(M_1, M_2, \ldots M_r) = \sum f(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)\, \Phi\left(\frac{M_1}{\delta_1}, \frac{M_2}{\delta_2}, \ldots, \frac{M_r}{\delta_r}\right),$$

where the summation is now for all divisors $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_r$ of $M_1, M_2, \ldots M_r$ respectively, such that δ_1 is relatively prime to $\frac{M_1}{\delta_1}$, δ_2 to $\frac{M_2}{\delta_2}$, and so on.

The conjugate of a function is the unique function determined from:

$$f + \mathrm{Conj}\, f = E_0.$$

These processes are equivalent to simple transformations of the generating series. Thus, multiplication of f and Φ amounts to the multiplication of each term in every generating series $f_p(x_1, x_2, \ldots x_r)$ by the coefficient of the corresponding term in Φ_p. Convolution of two or more arguments in a function amounts to the identification of the corresponding variables in its Generating Series. Composition of f and Φ is equivalent to the multiplication of their Generating Series, while the inversion of f is equivalent to replacing each generating series $f_p(x_1, x_2, \ldots x_r)$ by the inverse series $\frac{1}{f_p(x_1, x_2, \ldots x_r)}$. Lastly, compounding of functions amounts to adding the corresponding series, and then replacing the constant term by 1. The mutual relations of the processes (1), (2), (3), (4), (5), are:

1. Multiplication, composition, and compounding are each associative and commutative.

2. Composition, has a restricted distributive property in respect of multiplication; viz., composition distributes multiplication, whenever the multiplier is a « *linear* » function.

3. The Compounding Operation distributes multiplication unconditionally.

4. The Compounding Operation possesses also a quasidistributive property in regard to composition, viz.,

$$f\cdot(\Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_r) = (f\cdot \Phi_1) + \ldots + (f\cdot \Phi_r) + (E_{1-r} \times f),$$

where $E_k(M_1, \ldots M_r)$ is the function already defined.

5. Composition and inversion are permutable; i. e., the inverse of the composite of number of functions is also the composite of their inverses.

6. The Compound of inverses of linear functions of one argument, is equal to the inverse of their compound.

Theory of rational functions.

III. - A function $f(N)$ of one argument will be called « A rational integral function of degree n », if it can be expressed as the composite of n linear functions.

A function f of $r(>1)$ arguments will be called « An elementary rational integral function of degree n », if it can be expressed as the composite of n linear functions of the r arguments. By compounding the inverses of a sufficient number of elementary rational integral functions of degree n, and taking the inverse of the resulting compound, we obtain the general rational integral function of degree n.

The composite $P_r \cdot Q_s^{-1}$ of a rational integral function P_r of degree r, and the inverse of a rational integral function Q_s of degree s, will be called a rational function of degree (r, s). Also, P_r will be called the *integral component*, and Q_s, the *inverse component* of the rational function.

A rational function of degree $(1, 1)$, will be called a *Totient*. The inverse of a rational function of degree (r, s) is a rational function of degree (s, r); in particutar the inverse of a totient in also a totient. More generally:

The five processes of our calculus are all *rational* processes in the sense, that when performed on rational functions they produce only rational functions.

The systematic proof of this for functions of one argument, will be by reducing the question to one of generating series, and utilising the theory of partial fractions and recuring series. Also, the important fact appears in the proof, that when we multiply, compose, or compound two rational functions of one argument, the integral component K of the resulting function is related in a very simple manner to the integral components K_1 and K_2 of the original functions. When we compose or compound, K is simply the composite of K_1 and K_2. For the case of multiplication, we write:

$$K_1 = P_1 \cdot P_2 \dots P_\lambda,$$
$$K_2 = Q_1 \cdot Q_2 \dots Q_\mu,$$
$$P_s \times Q_t = R_{st},$$

where the functions P, Q and therefore also the functions R are linear. *Then* K *is the composite of the* $\lambda\mu$ *linear functions* $\mathrm{R_{st}}$. It is not possible to give an equally simple rule for the inverse component of the product., composite or compound.

A rational function of one argument can be expressed in general as a compound of Totients.

Two cases of multiplication of functions of one argument are noteworthy and have frequent applications. Firstly, it is easy to show that *the product of two Totiens is a Totient.* If the Totients are $P_1 \cdot P_2^{-1}$ and $Q_1 \cdot Q_2^{-1}$, where P_1, P_2 and Q_1, Q_2 are linear functions, then by the above theorem the integral component of the product is $R_{11} = P_1 \times Q_1$.

It is easy to show that the inverse component is given by:

$$\{ R_{21}^{-1} + R_{12}^{-1} + \mathrm{Conj}\ (R_{22}^{-1}) \}^{-1},$$

where $R_{st} = P_s \times Q_t$.

The other case is that of the product of two integral quadratic functions of one argument. For this, we have the result:

$$(P_1 \cdot P_2) \times (Q_1 \cdot Q_2) = R_{11} \cdot R_{12} \cdot R_{21} \cdot R_{22} \cdot K^{-1},$$

where K is an Integral Quadratic Function defined by:

$$K(N) = \begin{Bmatrix} 0, \text{ if } N \text{ ist not a Square,} \\ P_1(\sqrt{N}) \times P_2(\sqrt{N}) \times Q_1(\sqrt{N}) \times Q_2(\sqrt{N}), \text{ if } N \text{ is a Square} \end{Bmatrix}.$$

Two examples of this formula may be mentioned:

1. Writing $P_1 = P_2 = Q_1 = Q_2 = E$, the theorem is equivalent to:

$$E^2 \times E^2 = E^2 \cdot E_2.$$

This is the symbolic form of Liouville's formula:

$$\sum_{d/n} \tau(d)\, \Theta\left(\frac{N}{d}\right) = \{\tau(N)\}^2,$$

where $\tau(N)$ is the number of divisors of N, and $\Theta(N)$ the number of ways of expressing N as the product of two relatively prime factors.

2. Writing $I_a(N) = N^a$, we have as a second example,

$$\sigma_a(N) \times \sigma_b(N) = (I_a \cdot E) \times (I_b \cdot E) = I_{a+b} \cdot I_a \cdot I_b \cdot E \cdot K^{-1},$$

where:

$$K(N) = \begin{Bmatrix} 0 \text{ when } N \text{ is not a Square,} \\ I_{a+b}(\sqrt{N}) \text{ when } N \text{ is a Square} \end{Bmatrix}$$

This proves Ramanujan's formula:

$$\sum_n \frac{\sigma_a(n)\, \sigma_b(n)}{n^s} = \frac{Z(s)Z(s-a)Z(s-b)Z(s-a-b)}{Z(2s-b-a)}.$$

The Symbolic methodes indicated here have numerous applications to the theorems of arithmetic, practically all the functions that occur there being rational functions, composed from certain definite types of elementary linear functions.

The Busche-Ramanujan identity for $\sigma_a(N)$:

IV. - E. BUSCHE (1) proved that the function $\tau(N) = E^2(N)$ or the number of divisors of (N) satisfies the identity

$$\tau(u)\tau(v) = \sum \tau\left(\frac{uv}{\delta^2}\right),$$

summed for the common divisors δ of u and v.

(1) Vide DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, Vol. I, Chapter on sum and number of divisors.

Ramanujam noticed that a similar formula was also valid for $\sigma_a(N)$, the sum of the a^{th} powers of the divisors of N, and utilised the inverse form of the relation; viz.,

$$\sigma_a(uv) = \sum \sigma_a\left(\frac{u}{\delta}\right) \sigma_a\left(\frac{v}{\delta}\right) \delta^a \mu(\delta).$$

The existence of this identity is related to the following general problem:

Il f be a multiplicative function of r arguments, then

$$f(uu', vv', ...) = f(u, v, ...) \times f(u', v', ...),$$

whenever the products $uv....$, $u'v'....$, are relatively prime; if these products are *not* relatively prime, what is the relation between the two functions of $2r$ arguments,

$$f(uu', vv', ...,) \text{ and } f(u, v, ...) \times f(u', v', ...)\ ?$$

Cardinal and principal functions of two sets of arguments:

Let F be a function of two sets of r arguments $(u, v, ...)$, $(u', v', ...)$. On putting $u' = v' = ... = 1$ in F we obtain a multiplicative function $F_1(u, v, ...)$ of r arguments; similarly on putting $u = v = ... = 1$ in F, we obtain another function $F_2(u', v', ...)$. We call F_1 and F_2 the two *derivates* of F. The derivates have an invariant property given by the theorem:

The derivates of functions of two sets of r arguments combine with one another along with their parent functions in multiplication, composition, or compounding. In other words, the derivate of the product, composite or the compound of F and Φ, is respectively the product, composite, compound of the corresponding derivates of F and Φ.

Definition: A function of two sets of arguments will be called a *Cardinal Function*, if each of its derivates is the function E_0. As an alternative definition, a Cardinal Function is one which vanishes whenever the products of its two sets of arguments are relatively prime.

Also if F be an arbitrary function of two sets of r arguments, we shall call the cardinal function which is equal to F when the products of the two sets of arguments are *not* relatively prime, *the Cardinal Function of F*, and denote it by Crd F.

It follows that the inverse of a cardinal function is also a cardinal function. The following theorem corcerning Cardinal Functions is fundamental:

If F, F' be two functions of two sets of r arguments, and if $F = F'$ whenever the products of the two sets of arguments are relatively prime, then:

1. F is the composite of F' with a Cardinal Function C_1,
2. F is the product of F' by the integral of a Cardinal Function C_2,
3. F is the compound of F' and a Cardinal Function C_3.

The proof is immediate by the application of the theorem on Derivates.

Now if f is any multiplicative function of r arguments, then from the multiplicative property,

$$f(uu', vv',....) = f(u, v,....) \times f(u', v',....),$$

whenever the products $uv....$, $u'v'....$ are relatively prime. Hence in the above theorem we can take:

$$F = f(uu', vv',....)$$
$$F' = f(u, v,....) \times f(u', v',....).$$

With this supposition, the functions C_2, C_3 are not capable of simple symbolic expression in terms of f; but it is found that C_1 is the conjugate of the cardinal function of $f^{-1}(uu', vv',....)$, where f^{-1} is the inverse function of f.

This evaluation of C_1 gives the general answer to the question raised by the Busche-Ramanujan Identity. To derive this identity itself from the value of C_1, we require the concept of « Principal Function ».

Consider two sets of r arguments $u, v....$, $u', v'....$ in which each argument of one set is associated with one of the other set; e. g. u with u', v with u', etc.

A function of the two sets of arguments is said to be *a principal function*, if it vanishes whenever two associated arguments are unequal. An interesting property of the principal function is given by the Theorem:

The necessary and sufficient condition that a function of the $2r$ arguments may be a function of the r g. c. d' s only, of the r associated pairs of arguments, is that the function be the integral of a principal function.

Now the condition that an identity of the Busche-Ramanujan type holds for f, is that $C_1 = \text{Conj. Crd } f^{-1}(uu', vv',....)$ be a principal function. It is shown without difficulty that this can only happen when f is an integral quadratic function. We have therefore the result:

We have an identity of the form:

$$f(uu', vv',....) = \sum f\left(\frac{u}{\delta_1}, \frac{v}{\delta_2},....\right) f\left(\frac{u'}{\delta_1}, \frac{v'}{\delta_2},....\right) F(\delta_1, \delta_2,....)$$

where the summation is for common divisors δ_1 of uu', δ_2 of v, v', etc., only when f is an integral quadratic function.

When f is an integral quadratic function of *one* argument, we can determine the function F in the above identity immediately, Viz., if f is the composite of linear functions P_1, P_2, $F(\delta) = P_1(\delta) P_2(\delta) \mu(\delta)$. This gives the following extension of the Busche-Ramanujan Identity for any integral quadratic function of one argument.

Any integral quadratic function $f(u) = (P_1 \cdot P_2)(u)$ satisfies the identity:

$$f(uv) = \sum f\left(\frac{u}{\delta}\right) f\left(\frac{v}{\delta}\right) P_1(\delta) P_2(\delta) \mu(\delta),$$

or in inverse form,

$$f(u)f(v) = \sum f\left(\frac{uv}{\delta^2}\right) P_1(\delta) P_2(\delta),$$

the summation being for common divisors δ of u, v.

As regards the Cardinal Functions C_2, C_3, we have the following results:

1. C_2 can be a principal function only when f is a totient.

2. C_3 can be a principal function only if f is a totient or a rational function of degree (2, 2).

As a verification of (1) we may observe that Euler's Φ-function which is a totient according to our definition, satisfies the relation:

$$\frac{\Phi(MN)}{\Phi(M)\,\Phi(N)} = \text{function of g. c. d. of } M, N, \text{ only.}$$

L. POLETTI ed E. STURANI (Pontremoli - Italia)

LE SERIE DEI NUMERI PRIMI APPARTENENTI ALLE DUE FORME QUADRATICHE $(2n^2+2n-1)$ E $(2n^2+2n+1)$ ENTRO 250 MILIONI

Queste due Serie di N. P. entro 250 milioni (più esattamente, entro 264 milioni, e cioè per tutti i valori della variabile fino 11500) appartenenti alle due forme quadratiche:

$$(C)=(2n^2+2n-1), \qquad (D)=(2n^2+2n+1),$$

che presento anche in nome del mio Collaboratore ing. E. STURANI di Milano, devono considerarsi come lo sviluppo di un programma di investigazioni quadratiche iniziato nel presente anno con una « Memoria » che la R. Accademia Nazionale dei Lincei mi ha fatto l'onore di accogliere, e che è in pubblicazione col titolo: « Le Serie dei N. P. appartenenti alle due forme quadratiche:

$$(A)=(n^2+n-1), \qquad (B)=(n^2+n+1)$$

entro 121 milioni » e cioè per tutti i valori della variabile fino a 11000.

Tale programma, oltre allo scopo generico di arricchire la « Serie naturale » dei N. P. di nuovi e copiosi elementi, si propone anche quello particolare di offrire vasti sussidi empirici alla letteratura delle *Forme Quadratiche* che hanno assunto una sì alta importanza nella Teoria dei numeri.

È noto infatti che la soluzione di diversi problemi che incombono sulla Serie naturale dei N. P., ebbe il suo punto di partenza da alcuni *fatti empirici* verificati sulla serie stessa, sui quali l'Analisi, maneggiata da ingegni superiori, è riuscita, dopo lunghe e straordinarie fatiche, a stabilire rigorose interpretazioni di natura asintotica.

Ma nuovi ed analoghi enigmi si proiettano, con raddoppiata oscurità, sul campo quadratico, ed ecco perchè gli studiosi accoglieranno con interesse il modesto ma sicuro contributo di queste ricerche, condotte coi mezzi più elementari dell'Aritmetica.

Eppure a tutt'oggi è assai limitato il repertorio di tali lavori, che può dirsi quasi interamente rappresentato dall'opera di un genialissimo calcolatore inglese ALLAN CUNNINGHAM. (Binomial factorisations - Francis Hodgson - London).

Ma questa presentazione esige anzitutto una dichiarazione che fissi il valore delle due Serie come documento scientifico che gli studiosi possano consultare in piena fiducia.

In primo luogo esse sono il risultato concorde di due calcolatori che hanno operato in perfetta indipendenza, il sottoscritto e l'ing. STURANI, ai quali è dovuto un altro lavoro analogo recentemente accolto nei « Rendiconti » del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (La Serie dei N. P. entro i primi 100000 n. succ. oltre 100 milioni, e quella dei N. P. da 14285717 a 14299991, Vol. LXI, Fascic. I-V, 1928).

In secondo luogo poi le due Serie furono da noi scomposte *al completo*, inserendo cioè di fronte a ciascun termine *tutti i divisori primi che gli competono compresi entro* $\sqrt{264000000}$, *ed i loro quadrati.*

Questa precauzione mentre esige dal calcolatore una più attiva vigilanza, obbligandolo ad interessarsi diverse volte di un medesimo termine, gli permette in compenso, di limitare le laboriose e frequenti congruenze quadratiche a cui dovrebbe ricorrere se si contentasse di assegnare ad ogni termine il solo *divisore minimo* (come nelle opere di KÜLIK e di LEHMER), e di raccogliere poi, a scomposizione finita, nuovi e ricchi elenchi di N. P. isolabili in seno a certe Serie secondarie che diremo *Serie-Quozienti* perchè si ottengono dalla Serie fondamentale con una semplice divisione, e che si impongono all'attenzione degli studiosi per le loro interessanti proprietà.

Ma ecco alcune osservazioni e richiami che chiariranno meglio il nostro pensiero.

Data la forma quadratica *primitiva* (cioè non trasformabile identicamente in un prodotto di fattori lineari)

$$ax^2+bx+c \tag{1}$$

il cui discriminante è $\Delta=(b^2-4ac)$, le forme lineari dei suoi divisori primi sono espresse da

$$\Delta h+r, \tag{2}$$

dove h assume tutti i valori positivi da 0 a ∞ e dove r è uno dei $\varphi(\Delta)$ resti incongrui a 0 mod. Δ: i numeri r che intervengono nella (2) sono la metà di quelli espressi dalla nota funzione indicatrice di GAUSS, $\varphi(\Delta)$, e si trovano praticamente dividendo per Δ i primi $\frac{\varphi(\Delta)}{2}$ termini della (1), primi con Δ.

Consideriamo ora uno dei divisori della (1), e sia p che supporremo primo.

L'esistenza di tale divisore p implica la possibilità della congruenza

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \text{ mod. } p \tag{3}$$

la quale ammette *due radici distinte* x_1 e x_2 quando p appartiene alle forme lineari $(\Delta h+r)$, ed una sola x quando p è divisore di Δ ([1]).

([1]) La (3) ammette una radice *unica* x_1 anche quando p è divisore di a ma non di Δ, ma questo caso non interessa la nostra trattazione. Si può solo osservare che in questo caso il divisore p può salire ad ogni potenza lungo lo sviluppo della (1), mentre nell'altro caso rimane sempre al primo grado.

È utile, per il fine della scomposizione, stabilire la relazione da cui sono legate fra loro le due radici.

L'esistenza delle due radici x_1 e x_2 implica l'esistenza delle relazioni:

$$ax_1^2+bx_1+c=pq_1$$
$$ax_2^2+bx_2+c=pq_2$$

da cui

$$a(x_2^2-x_1^2)+b(x_2-x_1)=p(q_2-q_1)$$

oppure

$$a(x_2+x_1)(x_2-x_1)+b(x_2-x_1)=p(q_2-q_1)$$

ed anche

$$a(x_2+x_1)+b=p\,\frac{(q_2-q_1)}{(x_2-x_1)}$$

da cui rilevasi:

La differenza fra i due quozienti è divisibile per la differenza fra le due radici.

Poniamo ora

$$\frac{(q_2-q_1)}{(x_2-x_1)}=y,$$

ed otterremo

(4) $$x_2=\frac{py-b}{a}-x_1$$

quando le due radici sono distinte, e

(5) $$x_1=\frac{py-b}{2a}$$

quando la radice è unica: ma in entrambi i casi le soluzioni dipendono dalle due facili congruenze lineari

$$(py-b)\equiv 0 \text{ mod. } a \qquad \text{e} \qquad (py-b)\equiv 0 \text{ mod. } 2a.$$

È noto che ogni divisore p ammesso dalla serie (1) apparisce *due volte* od *una sola volta* entro p termini successivi della serie secondochè esso dà luogo a due radici oppure ad una radice sola; nel primo caso diremo che p è *bicorrente* (perchè a partire dal I° termine divisibile per p, ogni p^0 termine successivo è pure divisibile per p), e nel secondo diremo che p è *monocorrente*, ed osserveremo che i divisori monocorrenti sono sempre in numero *limitato* perchè devono essere divisori del discriminante, mentre i bicorrenti sono sempre in numero *illimitato.*

Sia ora T il I° termine della serie, divisibile per p, e si consideri la serie dei successivi termini ad ogni p^0 posto: essa sarà *compresa* nella (1) e costituita interamente di termini multipli di p: e se x_1 è il valore di x che genera il termine T, sarà facile costruire la forma di detta serie calcolandone i primi tre termini ed applicando ad essi la nota formola di interpolazione. Si otterrà in tal modo la forma:

(6) $$a(x_1+np)x^2+b(x_1+np)x+c$$

dove n varia da 0 a ∞.

Dividiamo ora per p tutti i termini della (6) calcolandone i primi tre termini che si ottengono ponendo successivamente $n=0$, $n=1$, $n=2$, ed applicando ancora la formola interpolatrice.

Otterremo la forma:

$$apx^2+(2ax_1+b)x+q \tag{7}$$

che indicherà la *Serie-Quoziente* mod. p, rispetto alla (1) che diremo *Serie-Generatrice*, notando che il valore q è definito dalla relazione

$$(ax_1^2+bx_1+c)=pq.$$

Una serie-quoziente sarà poi detta *Monogenita* quando p dà luogo ad una sola radice; ma quando le radici sono due, saranno due anche le serie-quozienti e le diremo *Gemelle.*

È facile verificare che ogni serie-quozionte possiede il discriminante uguale a quello della propria generatrice ed è percorsa dai medesimi divisori primi eccetto p nel solo caso in cui la serie-quoziente sia monogenita.

Per la scomposizione delle Serie quadratiche non sempre sono preferibili i metodi generali: anzi, in casi speciali, è più utile adottare artifizi speciali.

Così per la forma (x^2+x+c) si deve sapere che per ogni valore di $x=(c-1+h^2)$ il termine corrispondente *è prodotto di due fattori* di differenza uguale a $2h$, e dei quali uno è termine della serie, di indice $x=h$. Ciò risulta dall'identità:

$$(c-1-h^2)^2+(c-1-h^2)+c=(h^2-h+c)(h^2+h+c). \tag{8}$$

Per la forma (x^2+bx+c) si dimostra che *il prodotto di due termini consecutivi è un termine della serie,* il cui indice x è uguale al termine minore aggiunto al proprio indice, come dice l'identità:

$$(x^2+bx+c)[(x+1)^2+b(x+1)+c]=(x^2+bx+c+x)^2+(x^2+bx+c+x)+c. \tag{9}$$

È noto che date due equazioni di tipo:

$$(ax^2+bx+c)=0$$
$$(cy^2+by+a)=0$$

le radici dell'una sono *reciproche* di quelle dell'altra: analogamente due congruenze di tipo

$$ax^2+bx+c\equiv 0 \text{ mod. } p$$
$$cy^2+by+a\equiv 0 \text{ mod. } p$$

dove p è bicorrente, dànno la relazione:

$$x_1y_1\equiv x_2y_2\equiv 1 \quad \text{oppure} \quad x_1y_2\equiv x_2y_1\equiv 1 \text{ mod. } p. \tag{a}$$

Tali forme che diremo *reciproche* hanno infatti lo stesso discriminante, ed ogni divisore bicorrente p ammesso dall'una è pure ammesso dall'altra. Se (S) è una forma, indicheremo la sua reciproca con $(1/S)$.

Data la forma (ax^2+bx+a) che diremo *auto-reciproca,* per il principio precedente si deduce che $x_1x_2\equiv 1$ mod. p.

Importante è la formula (α) per mezzo della quale, quando sia stata scomposta in precedenza una serie *si può procedere alla scomposizione della sua reciproca col solo uso di congruenze lineari.*

Ecco un esempio:

Nella serie (x^2+2x+2) reciproca della nostra serie $(D)=(2n^2+2n+1)$, per $x=2705$ si ha come termine il numero primo 7322437: si domanda quale sarà il termine della (D) che risulti divisibile per 7322437?

Applicando la formola (α) abbiamo $n_1\,2705\equiv 1$ mod. 7322437, congruenza lineare che risolta colle frazioni continue dà come risultato $n_1=3659865$: infatti questo valore posto nella (D) dà:

$$2\cdot 3659865^2+2\cdot 3659865+1=26789230956181=3658513\cdot 7322437.$$

Questo calcolo che si compie, al massimo, in un quarto d'ora, non potrebbe essere compiuto dal più abile e longevo dei calcolatori spendendovi l'intera esistenza, se si dovesse trascrivere la serie (D) fino al suo 3658513° termine, e dividere quindi ciascun termine per 7322437.

Richiamiamo qui la formola (4) che scriveremo

$$(\beta) \qquad a(x_1+x_2)\equiv -b \text{ mod. } p,$$

ponendole accanto la formola

$$(\gamma) \qquad a(x_1x_2)\equiv c \text{ mod. } p,$$

di facile dimostrazione.

Le tre espressioni (α), (β), (γ) dimostrano ancora una volta quanto sia profonda l'analogia fra le equazioni e le congruenze.

Se x_1, x_2 sono le due radici mod. p di una congruenza quadratica, se X_1, X_2 sono quelle relative ad una gemella, e se Y_1, Y_2 sono quelle dell'altra, ha luogo la congruenza:

$$(\delta) \qquad (x_1+x_2)\equiv(X_1+Y_1)\equiv(X_2+Y_2)$$

oppure

$$(x_1+x_2)\equiv(X_1+Y_2)\equiv(X_2+Y_1) \text{ mod. } p.$$

La coesistenza dei tre enti numerici qui definiti come *Serie generatrice*, *Serie quoziente* e *Serie reciproca*, permette di delineare fra essi molte importanti relazioni ed interferenze particolarmente utili al problema della scomposizione ed alla Teoria dei Numeri: esse scendono direttamente dalla presenza di un *discriminante unico*, e, per esso, da una *massa unica di divisori*, che stabiliscono, diremmo, quasi una intima consanguineità fra gli enti suddetti.

Citiamone due come saggio:

La nostra serie $(D)=(2n^2+2n+1)$ è *monogenita* mod. 2 della propria *reciproca* $(1/D)=(n^2+2n+2)$: infatti

$$2(2n^2+2n+1)=((2n)^2+2(2n)+2)$$

che ha la forma $(1/D)$: da questa relazione risulta inoltre che il doppio di ogni termine della (D) di indice h, è il termine della $(1/D)$ che ha l'indice $2h$.

La serie (n^2+5n+5) è *reciproca* di $(5n^2+5n+1)$ che è *monogenita* di $(A)=(n^2+n-1)$, ed è anche una *trasformata* di questa, ponendo $n=(n+2)$.

Ritorniamo ora alle quattro serie qui trattate:

$$(A)=(n^2+n-1)=n(n+1)-1 \qquad (C)=(2n^2+2n-1)=2n(n+1)-1$$
$$(B)=(n^2+n+1)=n(n+1)+1 \qquad (D)=(2n^2+2n+1)=2n(n+1)+1$$

Applicando ad esse la formola (7) si possono ottenere le forme delle serie-quozienti rispetto ad alcuni valori di p, di cui si possono facilmente calcolare gli elementi. Esse sono:

SERIE MONOGENITE	SERIE GEMELLE	
$A/5=5x^2+5x+1$	$A/11=11x^2+7x+1$,	e $A/11=11x^2+15x+5$
$B/3=3x^2+3x+1$	$B/7=7x^2+5x+1$,	e $B/7=7x^2+9x+3$
$C/3=6x^2+6x+1$	$C/11=22x^2+10x+1$,	e $C/11=22x^2+34x+13$
	ecc.	

nelle quali una notazione come S/p indica la serie-quoziente di mod. p rispetto alla generatrice (S).

Ci resta ora da rendere ragione del seguente enunciato:

« Scomposta » al completo « una serie (S), se si divide ogni termine T di essa per il prodotto dei fattori ad esso inscritti di fronte, il quoziente Q sarà *un numero primo* maggiore di $\sqrt{L}$ » essendo L il limite superiore raggiunto dalla serie (S).

Infatti, per ipotesi, tutti i divisori primi $<\sqrt{L}$, ed i loro quadrati figurano già inscritti, dunque Q sarà $>\sqrt{L}$, e resta perciò solo a dimostrarsi che esso è primo. Ora, se esso fosse composto, presenterebbe *almeno due* divisori primi R ed S i quali, sempre per ipotesi, darebbero $R>\sqrt{L}$ ed $S>\sqrt{L}$, donde $RS>L$: ma ciò è impossibile perchè

$$RS \leqslant T \leqslant L:$$

dunque Q è primo e $>\sqrt{L}$.

Ma una serie-quoziente mod. p nasce dalla divisione per p dei termini della generatrice multipli di esso, e quindi quei termini della generatrice che, a scomposizione ultimata, avranno di fronte il *solo* divisore p alla prima potenza, daranno come quoziente Q un numero primo.

Si possono così ricavare, dalla infinita famiglia della serie-quozienti scaturite da una generatrice, nuove e ricche serie di N. P. non appartenenti alla generatrice stessa.

Per ragioni di spazio non è possibile dare qui *in extenso* le due Serie di N. P. che sono oggetto di questa Relazione, e perciò seguendo l'autorevole esempio dello stesso CUNNINGHAM (v. op. cit.), daremo soltanto i valori della variabile, compresi entro il limite di **11500** che rendono *primo* il termine corrispondente (¹).

Nei due quadri statistici che seguono sono messi in evidenza tre interessanti fenomeni sulla « Totalità relativa di Termini Primi » nelle quattro serie quadratiche (A), (B), (C), (D), e nelle loro serie-quozienti.

È sembrato conveniente introdurre nel primo quadro anche i dati riguardanti la *Serie dispari* $(2n+1)$ non solo per il suo procedere quasi *uniforme* a quello della quadratica (A), ma anche per fissare un primo confronto fra il campo lineare rappresentato dalla detta serie dispari, ed il campo quadratico rappresentato dal gruppo di queste quattro quadratiche elementari.

QUADRO PRIMO

TOTALITÀ DEI TERMINI PRIMI					
fino al termine	generati dalle forme				
	$(2n+1)$	(A)	(B)	(C)	(D)
100°	47	49	33	32	36
500°	169	183	107	131	131
1000°	304	313	190	229	225
2000°	551	549	346	398	419
3000°	784	759	499	562	587
4000°	1008	975	642	735	760
5000°	1230	1185	780	904	911
6000°	1439	1392	902	1052	1061
7000°	1653	1606	1032	1200	1215
8000°	1863	1816	1148	1349	1352
9000°	2065	1995	1277	1495	1506
10000°	2263	2187	1410	1641	1646
11000°	2465	2367	1540	1792	1784
11500°	—	—	—	1864	1852

(¹) Durante la pubblicazione di questi « Atti del Congresso » il R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere ha pubblicato nei propri « Rendiconti » le due presenti Serie di N. P. a fronte della variabile n. (Vol. LXII, fasc. XI-XV, 1929).

Così pure la R. Accademia Nazionale dei Lincei ha edito fra le proprie « Memorie » le due Serie di N. P., appartenenti alle due forme qui citate, $(A)=(n^2+n-1)$ e $(B)=(n^2+n+1)$, sempre colla variabile a fronte di ciascun N. P. (Serie VI. Vol. III, fasc. VII, 1929).

Lo studioso, in ogni caso, può rivolgersi all'autore: L. Poletti, Via Cairoli 1 - Pontremoli (Italia).

Esaminando i dati riguardanti le due Serie (A) e (B) (le quali sono definibili come *prodotto di due numeri successivi meno, o più* 1, e che hanno come rispettivi discriminanti, 5 e 3) risulterebbe la legge empirica:

1°) Le totalità di termini primi generati dal prodotto di due numeri successivi, meno, o più 1, si aggirano nel rapporto approssimativo di 5 : 3.

Invece l'esame delle due Serie (C) e (D), indubbiamente meno semplici delle precedenti, autorizza, e con una precisione quasi matematica, questo interessante enunciato:

2°) Le totalità di termini primi generati dal doppio-prodotto di due numeri successivi, meno, o più 1, sono sensibilmente uguali.

Una precisa elencazione di termini primi da noi eseguita sopra alcune coppie di serie-gemelle, ci permette di presentare il

QUADRO SECONDO

Le Serie-gemelle								
$B/7$	$\begin{cases} 7x^2+5x+1 \\ 7x^2+9x+3 \end{cases}$	dànno	$\begin{cases} 295 \\ 289 \end{cases}$	term.	primi	nei primi	1570	term.
$C/11$	$\begin{cases} 22x^2+10x+1 \\ 22x^2+34x+13 \end{cases}$	»	$\begin{cases} 222 \\ 233 \end{cases}$	»		»	1053	»
$D/13$	$\begin{cases} 26x^2+10x+1 \\ 26x^2+44x+17 \end{cases}$	»	$\begin{cases} 178 \\ 182 \end{cases}$	»		»	854	»

Da questo quadro si rileva che:

3°) Le totalità di termini primi generati da due serie-gemelle mod. p, rispetto alla generatrice sono sensibilmente uguali.

Quest'ultimo risultato che sembra dipendere dal fatto che due serie-gemelle mod. p sono, in sostanza, due serie quadratiche fornite dello stesso discriminante e servite dalla medesima classe di divisori, impone alla nostra attenzione il quesito, qui appena abbozzato, delle serie-quozienti, onde ci sembra opportuno, dedicare ad esse un'ulteriore osservazione conclusiva di questo scritto.

Data la forma quadratica generale:

$$ax^2+bx+c \tag{1}$$

nascono da essa, come abbiam visto sopra, due classi di serie-quozienti: le *monogenite*, in numero *limitato*, perchè generate dal gruppo limitato di divisori che dividono il discriminante ma non dividono il coefficiente a: le *gemelle*, in numero *illimitato* perchè generate dal sistema illimitato di divisori costruibili con forme lineari del discriminante; e che tali divisori sono monocorrenti nel primo caso e bicorrenti nel secondo.

Riprendiamo ora la formola (7) che segna il passaggio dalla (1) alla sua serie-quoziente mod. p.

$$apx^2+(2ax_1+b)x+q \tag{7}$$

dove x_1 e q hanno i noti significati, e facciamo due ipotesi:

Prima ipotesi: p è *monocorrente.* Siccome la (1) e la (7) hanno lo stesso discriminante (del quale p è divisore) e siccome il coefficiente di 2° grado della (7) acquista il divisore p, la congruenza

$$apx^2+(2ax_1+b)x+q \equiv 0 \text{ mod. } p$$

risulta impossibile quindi:

Una serie monogenita mod. p mantiene tutti i divisori della propria generatrice eccetto p.

Seconda ipotesi: p è bicorrente, e si hanno allora due serie gemelle di forma (7): anche qui il divisore p entra nel termine di 2° grado, ma poichè non è divisore del discriminante, sarà divisore *bicorrente* in entrambe le gemelle quindi:

Due serie gemelle mod. p mantengono tutti i divisori della propria generatrice compreso p (bicorrente).

Ne segue che ogni gemella mod. p si può alla sua volta concepire come generatrice di due nuove gemelle mod. p e ciascuna di queste di altre due, e così via: e poichè illimitato è il numero dei moduli bicorrenti di una data forma (1), così potremo immaginare un numero illimitato di sistemi genealogici analoghi al precedente.

Tale è lo sterminato orizzonte che sembra dischiudersi dietro quezta nozione embrionale di serie-quoziente: una famiglia innumerabile di forme quadratiche discendenti da una generatrice unica, dominate dal suo discriminante e percorse da tutti e soli i divisori di questa.

Radici n dei N. P. di Forma $(C)=(2n^2+2n-1)$ entro 250 milioni.

1	93	194	297	443	600	746	894
2	98	198	306	444	603	752	902
3	102	201	309	449	611	764	903
5	104	204	312	455	612	765	908
6	105	207	317	467	620	768	911
9	110	213	324	468	626	770	912
11	113	218	326	471	633	773	929
12	116	221	330	474	639	774	930
14	117	224	335	482	642	776	933
15	119	227	336	483	648	779	935
18	122	231	347	495	653	786	936
20	126	236	353	501	659	791	947
23	128	240	363	506	666	795	950
27	131	243	366	507	672	798	960
32	132	245	369	616	674	803	968
33	137	246	374	531	677	807	975
36	143	248	380	533	681	809	977
38	144	254	390	539	683	834	978
39	146	257	395	540	689	837	999
45	149	260	396	545	698	839	1017
48	152	263	401	549	699	842	19
50	153	267	402	551	708	846	26
51	161	269	413	557	711	848	29
54	165	273	416	560	714	851	37
59	168	275	419	564	726	857	41
71	174	284	423	566	729	864	49
75	176	285	425	572	735	867	50
77	179	287	429	582	737	872	55
78	183	291	432	588	743	881	73
80	185	293	435	590	744	884	82

1092	301	1530	1778	2016	2265	2540	2735
101	305	535	781	22	267	541	739
104	310	536	788	24	271	546	744
118	316	541	791	28	277	547	748
121	319	545	794	40	282	559	753
125	320	554	800	55	288	564	762
127	323	562	808	57	294	580	765
131	329	563	809	60	304	583	768
134	331	565	818	61	316	586	772
140	335	569	821	82	324	592	792
142	341	571	830	91	327	600	795
143	349	572	833	93	328	606	798
149	358	578	838	94	337	607	808
164	359	584	847	99	343	610	810
166	364	602	851	105	363	613	820
170	365	626	868	111	366	622	822
172	374	631	869	117	376	624	831
173	389	632	871	121	382	628	834
175	391	634	875	126	385	633	847
182	415	640	884	130	391	636	852
188	419	643	890	141	393	639	859
194	424	665	898	148	402	645	867
297	430	671	899	150	403	646	870
205	433	676	901	154	421	655	880
208	442	683	913	156	423	658	886
209	448	688	914	160	430	663	892
211	457	697	923	168	438	667	897
214	461	700	929	174	445	679	900
220	463	701	934	178	447	684	913
232	466	703	940	196	451	685	927
235	467	704	946	199	453	688	936
248	479	710	947	207	484	691	837
257	484	715	962	216	489	702	949
266	485	730	964	220	495	705	957
272	494	743	965	228	498	706	958
274	496	754	973	237	501	715	964
275	502	758	976	243	514	723	975
277	505	760	995	255	519	726	976
281	506	766	2001	256	522	727	979
296	518	770	13	258	529	729	988

2991	3233	3474	3708	3920	4137	4379	4625
997	234	477	716	932	140	382	629
3006	237	483	717	942	148	404	634
8	240	491	723	944	152	406	637
17	257	504	732	945	154	409	640
18	261	516	734	950	163	416	659
21	270	525	738	953	169	422	673
30	276	537	740	971	170	427	674
35	278	546	743	974	172	433	676
36	282	549	746	978	176	439	680
42	288	551	767	980	187	448	685
45	296	558	771	981	197	455	686
47	299	567	773	983	202	464	692
57	303	573	776	989	206	466	704
65	305	576	779	993	208	470	712
69	311	578	780	4002	209	491	715
80	318	597	782	7	218	499	719
81	327	600	809	11	230	509	733
86	333	602	822	13	236	514	739
90	342	606	827	16	241	530	742
92	348	608	828	22	250	533	746
95	353	617	831	26	256	535	758
107	356	620	833	29	257	539	763
113	360	624	842	31	260	547	767
116	369	641	846	32	269	559	769
117	372	647	848	41	277	566	772
123	393	650	849	49	280	568	781
125	398	659	851	80	283	569	794
138	402	662	854	82	290	572	797
140	404	666	861	85	293	574	808
156	405	668	866	88	308	577	812
161	417	669	870	91	313	583	821
164	432	672	873	92	316	590	829
168	435	675	875	95	319	592	830
179	443	678	876	101	328	598	836
183	459	689	884	104	329	604	838
195	461	690	887	115	332	608	841
210	464	701	905	119	367	613	847
218	465	702	911	130	374	614	850
227	471	705	915	134	377	616	860

4862	5136	5448	5712	5933	6197	6477	6774
863	141	465	714	940	210	483	776
868	142	472	726	955	216	485	791
869	144	478	735	963	225	497	801
871	159	495	736	966	230	501	809
874	160	498	738	972	240	506	810
884	166	499	745	973	243	522	813
887	168	510	748	978	246	524	818
898	174	514	757	987	258	527	821
904	192	522	765	991	266	537	824
910	202	525	771	994	273	539	825
911	214	544	778	6000	276	549	830
923	220	553	781	2	285	567	845
934	226	564	786	5	291	570	860
937	228	565	790	11	302	576	863
940	241	570	795	18	303	579	867
943	250	571	796	26	320	584	869
955	258	573	807	35	332	585	870
962	262	580	811	42	342	587	875
976	276	589	814	50	345	600	876
977	285	591	820	51	347	603	878
979	292	600	831	77	350	618	884
992	294	604	834	78	353	623	890
995	301	606	855	83	354	626	900
5001	306	619	856	89	363	629	912
15	307	636	859	90	381	642	914
16	327	639	862	93	395	645	935
25	330	642	864	104	396	659	939
27	331	649	870	108	401	669	944
37	342	652	877	123	402	681	947
43	352	655	883	138	405	687	962
55	382	664	885	150	419	693	966
64	400	670	888	152	428	711	968
75	415	681	889	156	440	714	969
88	418	687	895	158	446	722	974
94	421	688	901	159	461	747	975
96	423	693	903	176	462	749	977
108	426	696	913	180	471	752	981
115	427	708	924	182	473	759	984
129	435	709	925	185	474	770	986

7005	7226	7520	7833	8100	8358	8652	8936
10	242	539	835	108	361	655	949
13	247	562	848	111	381	657	955
14	250	566	850	112	382	658	958
16	254	569	853	117	387	661	960
25	260	589	857	118	396	663	963
35	280	599	871	123	400	669	964
38	283	601	874	135	418	672	969
40	298	604	877	144	420	682	975
43	299	607	880	151	426	691	976
46	304	611	890	154	429	699	979
47	307	623	893	162	433	706	982
56	311	628	896	163	438	717	990
58	313	637	905	171	462	733	997
65	319	640	919	174	466	735	999
68	332	649	923	187	469	750	9002
71	343	656	926	189	474	760	3
82	344	670	929	190	475	762	18
83	359	676	935	193	681	811	29
88	368	677	937	202	486	820	47
95	373	683	941	216	496	826	48
100	374	692	949	228	499	832	51
101	377	695	958	229	507	837	75
104	385	698	965	234	514	838	89
113	395	707	968	240	528	856	90
116	397	709	971	244	531	862	92
139	398	715	976	249	535	864	96
142	406	718	989	264	543	867	102
151	410	721	998	268	546	873	107
176	413	722	8004	273	550	876	113
178	419	736	9	277	564	889	120
181	464	742	22	282	565	891	122
182	469	758	31	294	567	892	128
190	472	761	34	304	585	898	129
194	473	794	39	312	594	910	140
199	485	805	61	316	600	915	141
205	491	815	70	319	607	919	153
209	500	824	79	343	633	921	159
211	506	827	84	349	645	928	162
212	514	832	97	355	646	933	164

9167	9423	9714	9999	10266	10556	10809	11039	11336
170	437	720	10004	280	559	812	42	337
177	438	731	16	281	563	817	61	345
179	441	734	17	286	565	835	64	369
185	453	735	20	289	571	842	69	373
188	461	747	50	292	581	845	72	384
191	470	756	59	296	593	847	76	385
192	480	761	64	299	598	853	81	390
200	486	762	68	305	610	856	87	394
207	497	773	80	308	613	857	94	397
210	503	782	82	314	619	860	102	399
213	513	804	85	328	620	862	103	400
227	515	807	86	341	631	868	108	412
228	519	813	98	349	643	871	114	417
233	522	815	101	350	646	883	126	421
236	530	816	115	358	658	893	127	436
239	540	818	124	371	659	899	133	445
255	557	827	137	374	665	910	141	454
261	569	830	143	380	670	926	147	456
287	579	837	154	385	674	932	159	466
291	581	839	158	398	676	934	165	468
293	588	843	163	401	680	940	177	478
296	591	851	173	412	682	943	192	484
300	593	857	176	413	692	952	216	495
309	596	861	178	440	710	865	229	
315	597	867	179	442	712	973	235	
324	608	872	191	446	715	977	246	
326	620	881	197	466	724	985	247	
345	623	912	211	467	731	988	264	
356	629	920	217	472	734	992	265	
362	630	926	218	487	763	995	270	
366	639	929	220	493	769	998	271	
383	642	942	224	517	775	11000	276	
384	645	944	233	420	776	3	280	
389	659	948	236	523	778	7	285	
392	678	951	242	532	787	9	300	
408	690	980	253	533	797	10	306	
411	707	983	257	536	800	25	307	
414	708	986	259	539	805	31	328	
422	713	987	262	542	808	37	334	

Radici n dei N. P. di Forma $(D) = (2n^2 + 2n + 1)$ entro 250 milioni.

0	84	195	324	464	585	732	882
1	85	199	330	467	589	734	885
2	87	202	334	474	590	744	902
4	90	204	342	475	592	747	905
5	97	207	344	477	599	749	915
7	99	212	347	479	602	750	922
9	100	217	349	489	609	757	927
12	102	220	355	490	612	759	929
14	104	222	357	492	620	760	934
17	109	224	369	494	625	765	937
19	110	225	372	495	627	767	949
22	115	229	375	500	632	770	950
24	122	230	389	505	640	772	957
25	130	235	390	512	642	784	967
29	135	259	395	514	649	794	974
30	137	260	399	515	655	799	1000
32	139	264	407	519	657	802	4
34	144	267	409	525	664	807	10
35	149	272	410	527	672	814	17
39	154	279	420	534	674	817	25
42	157	284	427	540	679	819	27
47	160	285	430	545	680	830	32
50	162	287	434	547	694	844	39
60	164	289	437	549	695	845	45
65	167	290	440	555	702	850	62
69	172	297	442	562	705	852	67
70	174	304	450	564	709	854	69
72	185	315	454	575	710	857	72
79	187	319	460	577	719	870	75
82	189	320	462	580	729	874	79

1080	1294	1467	1697	1909	2104	2359	2582
82	295	474	699	912	110	360	592
85	299	475	709	917	112	379	609
87	304	482	714	924	115	385	612
99	305	490	715	925	120	387	620
100	309	500	720	929	132	399	622
119	314	507	729	932	144	400	625
127	317	515	732	937	149	404	634
130	322	517	742	942	150	405	635
134	329	522	745	950	157	412	639
135	330	524	747	954	172	429	640
140	335	529	749	959	174	432	644
142	340	535	750	967	175	435	650
144	345	537	759	969	179	439	655
157	350	547	764	975	180	442	664
160	352	550	769	979	185	450	670
165	355	554	780	990	187	452	682
170	359	559	784	994	217	470	684
174	364	565	785	997	219	474	699
175	365	572	787	2005	222	482	702
187	377	579	792	10	229	489	707
189	382	585	802	14	232	499	712
190	385	595	810	15	239	504	715
194	392	597	827	20	242	507	720
195	394	600	832	24	247	510	735
202	399	602	837	27	255	512	737
212	402	605	844	32	265	515	749
229	407	607	845	37	280	520	757
240	409	617	850	39	292	527	762
252	410	630	852	42	294	530	745
259	415	624	854	44	304	534	769
262	420	630	855	49	307	535	785
269	422	645	857	59	317	542	795
270	424	647	860	60	319	544	799
272	435	657	862	72	325	552	802
274	444	660	875	85	330	554	822
280	447	664	877	92	334	557	825
282	450	670	879	94	344	564	830
290	452	682	892	99	345	569	834
292	462	695	894	100	354	579	837

2839	3099	3305	3527	3719	4000	4302	4575
842	102	309	534	724	2	319	577
847	107	310	535	725	4	322	582
855	110	315	537	737	9	330	584
859	112	319	540	742	15	332	589
867	124	322	544	744	30	337	592
869	137	334	547	747	34	359	595
877	147	347	549	755	37	360	597
880	150	352	550	757	42	364	620
882	157	367	552	770	44	367	627
884	159	370	555	775	55	372	629
885	194	375	557	779	57	374	632
887	165	387	565	794	64	377	642
897	167	392	569	800	65	380	654
902	170	394	574	805	87	384	657
919	175	399	579	815	94	385	659
924	179	400	584	825	115	389	665
925	180	404	589	829	117	390	679
929	184	405	594	830	129	412	680
939	192	414	599	840	130	415	684
955	199	415	600	844	134	420	687
962	209	420	605	847	139	434	692
965	212	422	617	870	152	437	694
970	214	424	619	874	160	454	697
977	229	435	620	875	164	459	699
982	230	449	622	879	180	462	700
989	235	465	630	885	182	470	709
3010	237	467	632	892	190	480	712
14	242	469	634	895	197	484	722
25	249	470	639	904	199	497	737
37	254	475	640	912	204	504	740
40	255	484	649	914	207	510	754
42	272	485	657	922	215	520	759
50	279	487	667	927	219	524	767
69	280	497	669	929	245	525	769
72	272	502	670	930	255	542	772
74	290	505	692	987	257	550	780
77	292	515	697	990	272	554	785
84	294	522	700	995	280	559	789
97	302	524	714	999	289	567	809

4814	5044	5304	5594	5882	6122	6384	6625
815	49	305	595	884	132	387	630
827	62	317	614	885	140	389	650
832	69	329	619	889	142	390	662
835	74	330	622	890	149	392	667
837	75	352	630	897	150	394	669
840	102	355	632	910	152	404	672
844	104	359	640	914	162	407	677
849	109	360	647	915	167	412	680
850	115	369	649	920	180	425	685
854	117	370	664	929	182	427	722
857	122	374	672	932	184	430	724
860	125	387	677	944	192	434	727
875	130	389	679	955	204	440	734
882	135	422	689	962	209	442	735
894	142	425	710	967	210	462	739
895	159	427	720	974	217	474	745
897	160	435	727	975	220	480	747
907	175	440	740	979	234	492	782
910	177	445	747	984	235	494	784
925	180	452	754	997	239	495	790
927	185	455	759	6002	244	499	797
930	207	464	775	5	254	520	799
932	209	474	784	19	259	522	804
934	222	482	792	27	269	535	817
944	230	504	794	35	275	540	820
945	234	505	799	37	282	542	824
952	237	510	805	49	287	547	830
962	244	512	810	54	290	550	832
975	264	519	814	59	292	559	865
990	270	524	822	64	297	569	867
5000	272	532	825	65	322	577	869
5	274	550	829	67	324	590	870
14	282	554	842	77	327	597	882
24	289	560	855	80	345	599	889
27	290	570	859	82	352	600	894
32	294	572	862	84	357	612	899
33	295	577	864	85	365	617	902
35	299	584	877	95	377	622	917
40	300	585	880	119	382	624	919

6920	7144	7445	7742	8039	8352	8585	8834
927	145	449	759	45	355	602	835
930	164	454	764	59	364	607	857
932	174	455	765	60	367	609	885
937	175	462	769	69	384	610	890
947	182	480	782	74	392	620	899
949	187	482	795	79	394	622	904
955	190	487	799	92	397	624	905
960	202	509	805	95	402	635	912
962	205	515	807	104	407	637	917
979	209	530	834	112	410	639	922
985	227	535	852	117	417	645	924
987	234	544	857	134	422	654	925
989	244	545	869	144	424	657	929
999	245	547	882	147	429	664	930
7002	255	570	884	164	435	674	939
25	259	579	887	165	464	682	947
29	275	584	890	172	474	689	950
32	284	604	892	180	477	690	957
39	285	612	900	194	480	709	960
42	289	614	905	197	487	719	962
50	292	617	907	202	490	722	979
52	305	624	909	214	492	723	989
54	315	634	912	224	495	729	990
57	322	640	922	237	507	740	994
62	330	642	930	242	509	742	9007
72	335	645	950	250	520	752	9
79	339	652	955	254	522	754	55
80	340	655	960	259	524	757	62
85	344	657	969	275	535	762	72
89	362	665	972	287	547	779	75
102	364	669	974	292	550	792	79
104	372	675	8002	295	555	794	82
117	389	682	9	299	559	797	87
122	404	687	20	307	560	800	92
124	417	689	22	312	565	802	107
127	427	720	25	320	567	804	109
130	434	727	29	329	572	815	120
132	440	730	32	342	579	820	124
137	442	740	35	345	584	822	125

9130	9455	9724	9962	10230	10590	10867	11154	11435
137	457	727	965	234	602	872	170	439
140	464	732	979	237	604	875	184	445
142	465	749	990	247	607	882	199	452
150	467	750	992	249	612	884	200	457
164	469	755	997	250	615	887	205	470
165	470	757	10004	255	617	892	217	472
187	480	767	10	265	637	900	219	480
189	482	769	27	282	639	902	222	487
195	485	770	30	294	642	905	225	490
199	490	772	45	299	645	915	235	495
200	494	774	52	300	672	927	245	497
202	502	775	55	304	684	939	249	
209	504	779	62	334	695	944	250	
222	514	780	65	339	702	952	254	
244	515	784	67	340	710	955	257	
250	517	807	94	354	715	957	267	
255	519	809	95	362	724	962	284	
264	522	824	97	367	725	964	287	
269	525	837	99	372	732	965	304	
280	535	840	105	395	739	972	309	
282	537	847	110	405	749	979	322	
285	545	850	114	420	752	984	329	
319	554	854	115	422	757	990	335	
325	562	860	117	435	759	994	339	
342	587	862	135	442	760	11002	342	
354	605	865	139	457	764	14	350	
359	620	872	144	464	769	19	360	
365	627	874	149	469	775	32	365	
367	642	875	157	472	785	44	382	
374	647	879	167	484	794	62	384	
380	652	910	179	487	795	67	387	
397	654	919	185	490	810	85	392	
400	655	924	195	494	812	89	397	
405	675	927	197	520	827	92	404	
420	685	932	200	524	829	102	407	
429	689	939	209	534	832	110	409	
447	692	944	212	557	842	129	414	
452	707	954	214	572	847	132	425	
454	714	959	219	577	849	150	432	

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel - Svizzera)

SUR UNE THÉORIE NOUVELLE DES IDÉAUX DE QUATERNIONS COMPLEXES

§ 1. - Introduction.

Liouville s'est occupé de la classe particulière de formes quadratiques quaternaires

$$x_0^2 + n_1 x_1^2 + n_2 x_2^2 + n_1 n_2 x_3^2$$

qui ont suscité d'intéressants travaux. Or, ces formes sont les normes de quaternions complexes

$$\xi_0 + \sqrt{n_1}\,\xi_1 \iota_1 + \sqrt{n_2}\,\xi_2 \iota_2 + \sqrt{n_1 n_2}\,\xi_3 \iota_3, \tag{1}$$

c'est à dire de quaternions dont les quatre coordonnées, au lieu d'être rationnelles, seraient tirées du corps biquadratique

$$K(\sqrt{n_1},\ \sqrt{n_2},\ \sqrt{n_1 n_2}),$$

les unités relatives ι_1, ι_2 et ι_3 étant celles des quaternions hamiltoniens, c'est à dire obéissant au tableau de multiplication suivant:

$$\left\{\begin{array}{ll} \iota_1^2 = -1, & \iota_1\iota_2 = \iota_3 = -\iota_2\iota_1 \\ \iota_2^2 = -1, & \iota_2\iota_3 = \iota_1 = -\iota_3\iota_2 \\ \iota_3^2 = -1, & \iota_3\iota_1 = \iota_2 = -\iota_1\iota_3 \end{array}\right. \tag{2}$$

L'étude de ces quaternions complexes permet de retrouver et de généraliser les résultats de Liouville. À cet effet, il faut d'abord étudier les propriétés du corps primordial $K(\sqrt{a},\ \sqrt{b},\ \sqrt{ab})$ déduit de deux racines carrées, $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$, où a et b représentent des nombres entiers ordinaires, positifs ou négatifs. Tout élément α de ce corps K peut se mettre sous la forme

$$\alpha = a_0 + a_1\sqrt{a} + a_2\sqrt{b} + a_3\sqrt{ab},$$

où les a_r sont des nombres rationnels. Il est avantageux d'avoir des formules plus symétriques. On les obtient en désignant par exemple par q le plus grand commun diviseur de a et de b; q peut être pris positif ou négatif (1), $q \equiv (a \mid b)$, de sorte qu'il vient $a = p \cdot q$, $b = r \cdot q$, où maintenant p, q et r sont premiers entr'eux deux à deux.

(1) Le signe $\equiv$ signifie et se prononce « égal *par définition* à ».

Tout nombre du corps K peut se mettre sous la forme

(3) $$\gamma \equiv c_0 + c_1\sqrt{pq} + c_2\sqrt{qr} + c_3\sqrt{rp},$$

les c_r représentant des nombres rationnels, et les signes des racines carrées étant soumis à la condition

(4) $$\sqrt{pq}\cdot\sqrt{qr}\cdot\sqrt{rp} = p\cdot q\cdot r\,;$$

deux des signes peuvent donc être choisis arbitrairement, le troisième étant déterminé par ce choix.

Ce corps K admet, outre la substitution identique S_1, encore trois substitutions:

S_2 consistant à remplacer $\sqrt{p}$ par $-\sqrt{p}$,
S_3 » » » $\sqrt{q}$ par $-\sqrt{q}$,
S_4 » » » $\sqrt{r}$ par $-\sqrt{r}$.

Les corps de nombres provenant de ces substitutions sont les corps *conjugués* de K. Ce corps K est *normal*, puisqu'il est identique à ses conjugués. Le nombre de ses unités fondamentales est 1 ou 3, suivant qu'une seule des trois racines $\sqrt{pq}$, $\sqrt{qr}$, $\sqrt{rp}$, est réelle, ou que toutes les trois le sont.

§ 2. - Les quaternions complexes.

L'étude des quaternions complexes (1) à coordonnées puisées dans le corps de nombres $K(\sqrt{pq}, \sqrt{qr}, \sqrt{rp})$ nous a conduit à poser une nouvelle définition de l'idéal de quaternions. Elle permet de supprimer les grandes difficultés provenant du fait que la multiplication de quaternions hamiltoniens n'est pas commutative. En partant de cette nouvelle base, on peut ériger une arithnomie qui, en fait de beauté et de simplicité, ne le cède en rien à la théorie classique des nombres.

Définitions et notations. - Nous appellerons *quaternions complexes*, et nous représenterons par des lettres grecques majuscules, A, B, Γ, Δ,...., Ξ,...., les nombres tétracomplexes tels que

(5) $$A \equiv a_0 + a_1\iota_1 + a_2\iota_2 + a_3\iota_3$$

dont les quatre coordonnées a_r sont puisées dans le corps $K(\sqrt{pq}, \sqrt{qr}, \sqrt{rp})$. Nous représenterons par des lettres grecques minuscules, α, β, γ, δ,...., ξ,...., les nombres de ce corps K, et par des lettres latines minuscules, a, b, c, d,...., x,...., les nombres rationnels. On peut calculer avec ces quaternions complexes suivant les règles de l'algèbre classique, en tenant compte toutefois du tableau de multiplication (2); il en résulte en particulier que la multiplication n'est pas commutative en général.

L'ensemble de tous les quaternions complexes (5) possibles constitue un corps de nombres. Nous le désignerons par Ω.

Écrit explicitement, un quaternion complexe a donc la forme suivante:

$$(6)\quad \begin{cases} A \equiv (a_{00}+a_{01}\sqrt{pq}+a_{02}\sqrt{qr}+a_{03}\sqrt{rp})+(a_{10}+a_{11}\sqrt{pq}+a_{12}\sqrt{qr}+a_{13}\sqrt{rp})\cdot\iota_1 \\ \qquad +(a_{20}+a_{21}\sqrt{pq}+a_{22}\sqrt{qr}+a_{23}\sqrt{rp})\cdot\iota_2 \\ \qquad +(a_{30}+a_{31}\sqrt{pq}+a_{32}\sqrt{qr}+a_{33}\sqrt{rp})\cdot\iota_3 . \end{cases}$$

Définition 1. - À tout quaternion complexe $\Gamma\equiv\gamma_0+\gamma_1\iota_1+\gamma_2\iota_2+\gamma_3\iota_3$, on peut faire correspondre un quaternion complexe

$$(7)\quad \overline{\Gamma}\equiv\gamma_0-\gamma_1\iota_1-\gamma_2\iota_2-\gamma_3\iota_3$$

dit « *le conjugué relatif* de Γ »; on vérifie que

$$(8)\quad \Gamma\overline{\Gamma}=\overline{\Gamma}\Gamma=\gamma_0^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2\equiv n(\Gamma).$$

Définition 2. - Cette quantité $n(\Gamma)$, avec le n minuscule, est « *la norme relative* de Γ ».

Appliquons à Γ et à $\overline{\Gamma}$ les substitutions S_2, S_3 et S_4 du § 1. On obtient

$$(9)\quad \begin{cases} \Gamma'\equiv\gamma_0'+\gamma_1'\iota_1+\gamma_2'\iota_2+\gamma_3'\iota_3, & \overline{\Gamma}'\equiv\gamma_0'-\gamma_1'\iota_1-\gamma_2'\iota_2-\gamma_3'\iota_3 \\ \Gamma''\equiv\gamma_0''+\gamma_1''\iota_1+\gamma_2''\iota_2+\gamma_3''\iota_3, & \overline{\Gamma}''\equiv\gamma_0''-\gamma_1''\iota_1-\gamma_2''\iota_2-\gamma_3''\iota_3 \\ \Gamma'''\equiv\gamma_0'''+\gamma_1'''\iota_1+\gamma_2'''\iota_2+\gamma_3'''\iota_3, & \overline{\Gamma}'''\equiv\gamma_0'''-\gamma_1'''\iota_1-\gamma_2'''\iota_2-\gamma_3'''\iota_3. \end{cases}$$

Formons le produit de ces huit quaternions complexes et désignons-le par $No(\Gamma)$, prononcé: « norme de grand gamma »; il vient:

$$(10)\quad \begin{cases} No(\Gamma)\equiv(\Gamma\cdot\overline{\Gamma})\cdot(\Gamma'\cdot\overline{\Gamma}')\cdot(\Gamma''\cdot\overline{\Gamma}'')\cdot(\Gamma'''\cdot\overline{\Gamma}''') \\ =(\gamma_0^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2)\cdot(\gamma_0'^2+\ldots+\gamma_3'^2)\cdot(\gamma_0''^2+\ldots+\gamma_3''^2)\cdot(\gamma_0'''^2+\ldots+\gamma_3'''^2). \end{cases}$$

Dans l'équation (10), formons le produit des sept derniers facteurs; on obtient un quaternion complexe, Γ^*, dit « *le conjugué* de Γ »:

$$(11)\quad \Gamma^*\equiv\overline{\Gamma}\cdot\Gamma'\cdot\overline{\Gamma}'\cdot\Gamma''\cdot\overline{\Gamma}''\cdot\Gamma'''\cdot\overline{\Gamma}'''.$$

Théorème. - Le produit d'un quaternion complexe par son conjugué est univoquement déterminé,

$$\Gamma\cdot\Gamma^*=\Gamma^*\cdot\Gamma.$$

Définition 3. - Ce produit est un nombre rationnel dit « *la norme* du quaternion complexe Γ »:

$$(12)\quad No(\Gamma)\equiv\Gamma\Gamma^*=\Gamma^*\Gamma.$$

Théorème. - La norme d'un produit d'un nombre fini de quaternions complexes est égale au produit des normes des facteurs. En formule:

$$(13)\quad No\Big(\prod_{r=1}^{n}A_r\Big)=\prod_{r=1}^{n}No(A_r).$$

Quaternions complexes entiers.

Si l'on désigne par ω_0, ω_1, ω_2, ω_3, une base du corps K, on pourra mettre un quaternion complexe A sous la forme

(14) $$A = A_0\omega_0 + A_1\omega_1 + A_2\omega_2 + A_3\omega_3,$$

les A_r représentant des quaternions rationnels.

Définition 4. - Ce quaternion A sera dit *entier*, si les A_r sont tous des quaternions rationnels entiers. Or, on a

(15) $$A_r = a_0^{(r)}\cdot\varrho + a_1^{(r)}\cdot\iota_1 + a_2^{(r)}\cdot\iota_2 + a_3^{(r)}\cdot\iota_3, \qquad \text{pour } r = 0, 1, 2, 3,$$

où

(16) $$\varrho \equiv \frac{1}{2}(1 + \iota_1 + \iota_2 + \iota_3).$$

Par suite, le quaternion complexe A devient

$$A = [a_0^{(0)}\varrho + a_1^{(0)}\iota_1 + a_2^{(0)}\iota_2 + a_3^{(0)}\iota_3]\cdot\omega_0 + \dots + [a_0^{(3)}\cdot\varrho + a_1^{(3)}\iota_1 + a_2^{(3)}\iota_2 + a_3^{(3)}\iota_3]\cdot\omega_3,$$

ce qui peut s'écrire:

(17) $$A = \alpha_0\varrho + \alpha_1\iota_1 + \alpha_2\iota_2 + \alpha_3\iota_3,$$

où α_0, α_1, α_2 et α_3 sont des entiers du corps $K(\sqrt{pq}, \sqrt{qr}, \sqrt{rp})$.

Etant donné le quaternion complexe entier (17), on vérifie facilement que pour le « conjugué relatif » de A, on a

(18) $$\bar{A} = \alpha_0\varrho - (\alpha_0 + \alpha_1)\iota_1 - (\alpha_0 + \alpha_2)\iota_2 - (\alpha_0 + \alpha_3)\iota_3,$$

et pour la « norme relative » de A:

(19) $$n(A) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_0(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

L'ensemble de tous les quaternions complexes (14) possibles constitue le corps Ω.

§ 3. - Nouvelle définition des idéaux de quaternions et de leurs produits.

Définition 5. - Soit $\mathfrak{a}$ un idéal du corps primordial K; nous appellerons *idéal du corps* Ω, et nous désignerons par

(20) $$\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\},$$

l'ensemble infini des quaternions complexes (17) dont les coordonnées α_0, α_1, α_2 et α_5 parcourent, indépendamment les unes des autres, tous les nombres de l'idéal $\mathfrak{a}$.

Définition 6. - L'idéal $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$ du corps Ω sera dit un *idéal principal*, si $\mathfrak{a}$ est un idéal principal (α) dans le corps K; et nous écrirons dans ce cas

(21) $$\mathfrak{A} = id\{(\alpha)\}.$$

Tous les quaternions de cet idéal sont de la forme

$$A = \alpha\cdot(\mu_0\varrho + \mu_1\iota_1 + \mu_2\iota_2 + \mu_3\iota_3).$$

Le quaternion entre parenthèses, M, parcourt tous les quaternions entiers de Ω. Il en résulte que tous les quaternions de l'idéal $\mathfrak{A}=id\{(a)\}$ sont, dans le corps Ω, des multiples de a. Nous écrirons, par analogie,

$$\mathfrak{A}=(a). \tag{21'}$$

Définition 7. - Quand un quaternion Γ fait partie d'un idéal $\mathfrak{c}$, nous dirons que Γ est « *congru à zéro modulo* $\mathfrak{c}$ » et nous écrirons:

$$\Gamma \equiv 0 \bmod \mathfrak{c}.$$

Produit de deux idéaux de quaternions complexes.

Définition 8. - Soient deux idéaux du corps Ω,

$$\mathfrak{A}=id\{\mathfrak{a}\} \quad \text{et} \quad \mathfrak{B}=id\{\mathfrak{b}\};$$

nous appellerons « *produit* de ces deux idéaux » l'idéal

$$\mathfrak{C}=id\{\mathfrak{c}\}$$

comprenant tous les quaternions, et ceux-là seulement, dont les quatre coordonnées appartiennent à l'idéal $\mathfrak{c}\equiv\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}$ du corps K.

Corollaire. - On voit que la multiplication des idéaux ainsi définis dans le corps Ω est commutative et associative.

DIVISIBILITÉ. — *Définition* 9. - L'idéal $\mathfrak{A}\equiv id\{\mathfrak{a}\}$ sera dit « *divisible par l'idéal* $\mathfrak{B}\equiv id\{\mathfrak{b}\}$ », s'il existe un idéal $\mathfrak{C}\equiv id\{\mathfrak{c}\}$ tel que $\mathfrak{A}=\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{B}$; on a alors

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{b}.$$

§ 4. - Propriétés des idéaux d'après la nouvelle définition.

THÉORÈME 1. - *La somme et la différence de deux nombres A et B de l'idéal $\mathfrak{A}\equiv id\{\mathfrak{a}\}$ font partie de cet idéal $\mathfrak{A}$.*

En effet, prenons $A\equiv\alpha_0\varrho+\alpha_1\iota_1+\alpha_2\iota_2+\alpha_3\iota_3$ et $B\equiv\beta_0\varrho+\beta_1\iota_1+\beta_2\iota_2+\beta_3\iota_3$; comme, par hypothèse, A et B sont tous les deux contenus dans $\mathfrak{A}$, on a

$$\alpha_r\equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \beta_r\equiv 0 \bmod \mathfrak{a}, \qquad \text{pour } r=0,1,2,3. \tag{22}$$

Or, $A\pm B\equiv(\alpha_0\pm\beta_0)\varrho+(\alpha_1\pm\beta_1)\iota_1+(\alpha_2\pm\beta_2)\iota_2+(\alpha_3\pm\beta_3)\iota_3$ et l'on sait, par la théorie des idéaux dans les corps algébriques, que (22) entraîne

$$\alpha_r\pm\beta_r\equiv 0 \bmod \mathfrak{a};$$

par suite, $A\pm B\equiv 0 \bmod \mathfrak{A}$, ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME 2. - *Si $\Gamma\equiv\gamma_0\varrho+\gamma_1\iota_1+\gamma_2\iota_2+\gamma_3\iota_3$ fait partie de l'idéal $\mathfrak{C}\equiv id\{\mathfrak{c}\}$, les produits à droite $\Gamma\cdot\Delta$, et les produits à gauche $\Delta\cdot\Gamma$, de Γ par un quaternion entier, Δ, quelconque de Ω sont également contenus dans l'idéal $\mathfrak{C}$.*

En effet, $\Gamma \equiv 0 \bmod \mathfrak{C}$ entraîne, en vertu de (5) et de la définition 7,

$$\gamma_r \equiv 0 \bmod \mathfrak{c} \qquad\qquad \text{pour } r=0, 1, 2, 3.$$

Or, les coordonnées des produits $\Gamma \cdot \Delta$ et $\Delta \cdot \Gamma$ sont des combinaisons linéaires des coordonnées γ_0, γ_1, γ_2 et γ_3 avec les coordonnées de Δ. Ces combinaisons sont donc des nombres de $\mathfrak{c}$ (théorème 1); par suite, $\Gamma \cdot \Delta$ et $\Delta \cdot \Gamma$ font partie de l'idéal $\mathfrak{C}$.

On démontrerait avec la même facilité les théorèmes suivants.

THÉORÈME 3. - *Soit $\mathfrak{C} \equiv id\{\mathfrak{c}\}$ un idéal du corps Ω. Si cet idéal $\mathfrak{C}$ contient le quaternion Γ, il contient aussi le conjugué relatif $\overline{\Gamma}$, la norme relative* $\mathrm{n}(\Gamma)$ *et la norme,* $\mathrm{No}(\Gamma)$, *de Γ.*

THÉORÈME 4. - *Tout idéal du corps Ω admet une base, c'est à dire que l'on peut toujours trouver dans l'idéal quatre quaternions Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4, tels que tout autre nombre de l'idéal puisse se mettre sous la forme*

$$X_1 \cdot \Gamma_1 + X_2 \cdot \Gamma_2 + X_3 \cdot \Gamma_3 + X_4 \cdot \Gamma_4,$$

où les $\mathrm{X_r}$ *désignent des quaternions entiers rationnels.*

En outre, si $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$ et si l'on désigne par γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, une base de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans K, *on pourra poser*

$$\Gamma_1 = \gamma_1, \ \Gamma_2 = \gamma_2, \ \Gamma_3 = \gamma_3, \ \Gamma_4 = \gamma_4.$$

THÉORÈME 5. - *Si $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$ est divisible par l'idéal $\mathfrak{B} \equiv id\{\mathfrak{b}\}$, tout entier de $\mathfrak{A}$ fait partie de $\mathfrak{B}$.*

THÉORÈME 6. - *Etant donné un idéal $\mathfrak{A}$ du corps Ω, il existe un idéal $\mathfrak{B}$ tel que le produit $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ soit un idéal principal.*

Pour le démontrer, posons $\mathfrak{A} = id\{\mathfrak{a}\}$. On sait trouver dans K un idéal $\mathfrak{a}^{-1}$ tel que $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a}^{-1} = (a)$; si donc nous posons $\mathfrak{B} \equiv id\{\mathfrak{a}^{-1}\}$, nous aurons:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = id\{(a)\}.$$

Nous écrirons, par analogie, $\mathfrak{A}^{-1} \equiv id\{\mathfrak{a}^{-1}\}$, et l'idéal $\mathfrak{A}^{-1}$ sera dit « *le réciproque* de $\mathfrak{A}$ ».

THÉORÈME 7. - *Un quaternion complexe entier $\Gamma \equiv \gamma_0 \varrho + \gamma_1 \iota_1 + \gamma_2 \iota_2 + \gamma_3 \iota_3$ ne peut être contenu que dans un nombre fini d'idéaux.*

§ 5. - La décomposition multiplicative des quaternions complexes.

THÉORÈME 8. - *Un idéal du corps Ω n'est divisible que par un nombre fini d'idéaux du même corps.*

En effet: Soit $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$ un idéal du corps Ω et $\mathfrak{B} \equiv id\{\mathfrak{b}\}$ un diviseur de $\mathfrak{A}$. Désignons par A un nombre de $\mathfrak{A}$; d'après le théorème 5, on a

$$A \equiv 0 \bmod \mathfrak{B};$$

or, A ne pouvant être contenu que dans un nombre fini d'idéaux, le nombre des idéaux $\mathfrak{B}$ diviseurs de $\mathfrak{A}$ est limité.

THÉORÈME 9. - Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ trois idéaux du corps Ω; l'égalité $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}=\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{C}$ entraîne $\mathfrak{B}=\mathfrak{C}$.

THÉORÈME 10. - *Si tous les nombres d'un idéal* $\mathfrak{A}\equiv id\{\mathfrak{a}\}$ *sont congrus à zéro modulo un idéal* $\mathfrak{B}\equiv id\{\mathfrak{b}\}$, *l'idéal* $\mathfrak{A}$ *est divisible par* $\mathfrak{B}$.

THÉORÈME 11. - *Le plus grand commun diviseur* $\mathfrak{D}$ *de deux idéaux* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *du corps* Ω *est un idéal contenant à la fois tous les nombres de* $\mathfrak{A}$ *et tous ceux de* $\mathfrak{B}$.

Démonstration. - Des théorèmes 5 et 10, il résulte qu'un idéal $\mathfrak{D}$ qui est diviseur commun de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$ contient tous les nombres de $\mathfrak{A}$ et tous ceux de $\mathfrak{B}$ et toutes les sommes de produits de ces nombres-là. Considérons un idéal qui, en plus des nombres de $\mathfrak{A}$ et de ceux de $\mathfrak{B}$, et de leurs sommes et de leurs produits, en contienne encore d'autres. Ce nouvel idéal divisera $\mathfrak{D}$ (théorème 10 et définition 7). Dès lors, par analogie avec l'arithmétique ordinaire, on peut admettre la

Définition 10. - Cet idéal $\mathfrak{D}$ est le plus grand commun diviseur de $\mathfrak{A}$ et de $\mathfrak{B}$; nous l'indiquerons par l'écriture

$$\mathfrak{D}=(\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{B}).$$

THÉORÈME 12. - *Si* $\mathfrak{D}\equiv id\{\mathfrak{d}\}$ *est le plus grand commun diviseur des deux idéaux* $\mathfrak{A}\equiv id\{\mathfrak{a}\}$ *et* $\mathfrak{B}\equiv id\{\mathfrak{b}\}$, *l'idéal* $\mathfrak{d}$ *est, dans le corps* K, *le plus grand commun diviseur des deux idéaux* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$.

Définition 11. - L'idéal unité dans le corps Ω des quaternions complexes est l'idéal $\mathfrak{U}\equiv id\{1\}\equiv(1)$. Cet idéal contient le nombre 1 et par suite tous les nombres entiers du corps Ω.

Définition 12. - Un idéal $\mathfrak{P}$ du corps Ω est dit « un *idéal premier* », si, dans toutes les décompositions possibles de $\mathfrak{P}$ en un produit de deux facteurs idéaux, l'un d'eux est toujours l'idéal unité.

THÉORÈME 13. - *Si le produit* $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ *de deux idéaux* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *du corps* Ω *est divisible par un idéal premier* $\mathfrak{P}$, *l'un au moins des facteurs est divisible par* $\mathfrak{P}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 14. - *Tout idéal* $\mathfrak{A}$ *du corps* Ω *peut être décomposé, et cela d'une seule manière, en un produit d'un nombre fini d'idéaux premiers du corps* Ω.

§ 6. - Les congruences suivant un idéal dans le corps Ω.

Des définitions posées plus haut, il résulte

1°, que tout entier est congru à lui-même suivant un idéal quelconque, puisque tout idéal contient le nombre zéro;

2°, que la congruence $\Gamma \equiv \varDelta$ mod $\mathfrak{A}$ entraîne $\varDelta \equiv \Gamma$ mod $\mathfrak{A}$;

3°, que deux entiers congrus à un même troisième modulo $\mathfrak{A}$ sont congrus entre eux modulo $\mathfrak{A}$.

Ces trois propriétés permettent de répartir tous les quaternions complexes entiers du corps Ω en classes modulo $\mathfrak{A}$, en mettant dans une même classe tous les nombres congrus à un même entier, et par suite congrus entre eux. De cette façon, tout entier du corps Ω se trouve faire partie d'une classe, et d'une seule, suivant le module $\mathfrak{A}$; et l'on peut prendre, pour représenter une classe, un nombre quelconque de cette classe.

Si l'on prend un seul nombre dans chaque classe, on obtient « *un système complet* de restes suivant le module $\mathfrak{A}$ ».

Définition 13. - Le nombre des entiers d'un système complet de restes modulo $\mathfrak{A}$ est dit « *la norme* du module $\mathfrak{A}$ ». On la représente par $No(\mathfrak{A})$.

THÉORÈME 15. - *Pour que deux quaternions complexes entiers*

$$\Gamma \equiv \gamma_0 \varrho + \gamma_1 \iota_1 + \gamma_2 \iota_2 + \gamma_3 \iota_3 \quad \text{et} \quad \varDelta \equiv \delta_0 \varrho + \delta_1 \iota_1 + \delta_2 \iota_2 + \delta_3 \iota_3$$

soient congrus suivant un idéal $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$, *il faut et il suffit que leurs coordonnées correspondantes soient congrues suivant l'idéal* $\mathfrak{a}$ *du corps primordial* K.

THÉORÈME 16. - *Soit donné dans le corps Ω un idéal* $\mathfrak{A} \equiv id\{\mathfrak{a}\}$; *désignons par* $\mathrm{n_k}(\mathfrak{a})$ *la norme de l'idéal* $\mathfrak{a}$ *dans le corps* K, *c'est à dire le nombre des éléments d'un système complet de restes modulo* $\mathfrak{a}$; *je dis qu'un système complet de restes suivant le module* $\mathfrak{A}$ *dans le corps Ω comprend* $[\mathrm{n_k}(\mathfrak{a})]^4$ *nombres.*

C'est la norme $No(\mathfrak{A})$ de l'idéal de quaternions complexes $\mathfrak{A}$; nous écrirons:

$$No(\mathfrak{A}) = [n_k(\mathfrak{a})]^4.$$

Démonstration. - Soit $A \equiv a_0 \varrho + a_1 \iota_1 + a_2 \iota_2 + a_3 \iota_3$ un quaternion entier; faisons parcourir aux coordonnées a_r, indépendamment les unes des autres, les $n_k(\mathfrak{a})$ nombres d'un système complet de restes modulo $\mathfrak{a}$. On obtient ainsi $[n_k(\mathfrak{a})]^4$ quaternions. On démontre facilement qu'ils sont tous incongrus entre eux et, de plus, que tout quaternion entier du corps Ω est congru à l'un d'eux modulo $\mathfrak{A}$.

THÉORÈME 17. - *Pour que l'idéal* $\mathfrak{P} \equiv id\{\mathfrak{p}\}$ *du corps Ω soit premier, il faut et il suffit que* $\mathfrak{p}$ *soit un idéal premier dans le corps* K.

THÉORÈME 18. - *Soit* $\mathrm{n_k}(\mathfrak{p}) = \mathrm{p^e}$, *où* $\mathrm{e}=1$ *ou* $\mathrm{e}=2$ *ou* $\mathrm{e}=4$, *la norme de l'idéal premier* $\mathfrak{p}$ *dans le corps* K; *ou a, dans le corps Ω,*

$$No(\mathfrak{P}) = p^{4e}.$$

THÉORÈME 19. - *Il est permis d'additionner et de multiplier membre à membre, à droite et à gauche, un nombre limité quelconque de congruences suivant un même idéal du corps Ω.*

THÉORÈME 20. - *Quand deux quaternions complexes entiers sont congrus entre eux suivant un idéal* $\mathfrak{C}$, *leurs conjugués relatifs et leurs normes relatives le sont également suivant le même idéal* $\mathfrak{C}$.

THÉORÈME 21. - *Soit la congruence* $A \equiv B$ mod $\mathfrak{A}$. *Si* Γ *est un diviseur (à droite ou à gauche) commun aux deux quaternions complexes entiers* A *et* B, *il est permis de diviser les deux membres de la congruence donnée par* Γ, *à condition que, dans le corps* Ω, *l'idéal principal id* $\{(n[\Gamma])\}$ *soit premier avec* $\mathfrak{A}$.

GÉNÉRALISATION DE L'INDICATEUR D'EULER. — *Définition* 14. - Nous appellerons « *indicateur* de l'idéal $\mathfrak{A}$ » le nombre des éléments d'un système complet de restes suivant $\mathfrak{A}$, éléments dont les normes relatives, considérées comme autant d'idéaux principaux, sont premières avec $\mathfrak{A}$. Nous désignerons cet indicateur de $\mathfrak{A}$ par $\Phi(\mathfrak{A})$.

Le théorème de Fermat généralisé au corps des quaternions complexes.

THÉORÈME 22. - *Si* Γ *est un quaternion complexe entier dont la norme relative,* $\mathrm{n}(\Gamma)$, *est première avec l'idéal* $\mathfrak{A}$, *on a*

$$[n(\Gamma)]^{\Phi(\mathfrak{A})} \equiv 1 \mod \mathfrak{A}.$$

La démonstration se fait facilement à l'aide des théorèmes précédents, si l'on envisage les éléments d'un système complet de restes mod $\mathfrak{A}$. Soient B_1, B_2,...., B_t, où $t \equiv \Phi(\mathfrak{A})$, ceux d'entre eux dont la norme relative est première avec $\mathfrak{A}$. On détermine les quaternions complexes entiers A_r tels que l'on ait

$$\text{(c)} \qquad \Gamma \cdot B_r \equiv A_r \mod \mathfrak{A}, \text{ pour } r=1,\ 2,\ 3,\dots,\ t.$$

On démontre que ces A_r sont incongrus deux à deux modulo $\mathfrak{A}$ et que leurs normes relatives sont premières avec $\mathfrak{A}$. Il suffit alors de prendre les normes des congruences (c) et de multiplier les t congruences ainsi obtenues ; on aboutit presqu'immédiatement au théorème de Fermat généralisé au domaine des quaternions complexes.

R. FUETER (Zürich - Svizzera)

ÜBER FUNKTIONEN EINER QUATERNIONENVARIABLEN

Die in der Ebene uneigentlich diskontinuierliche linearen unimodularen Substitutionsgruppen, die nach POINCARÉ im Raume oder Hyperraume einen Diskontinuitätsbereich besitzen, können sehr einfach durch die linearen Substitutionen von Quaternionenvariablen dargestellt werden. Zu diesen Gruppen lassen sich dann Funktionen einer Quaternionenvariablen aufstellen, die invariant gegenüber den Substitutionen dieser Gruppe sind. Um diese Funktionen auf ihre Eingenschaften zu untersuchen, ist es notwendig, den Begriff der Funktion einer Quaternionenvariablen zu entwickeln. Es besteht der Satz, dass jene Funktionen in Diskontinuitätsbereich jeden Wert einmal and nur einmal annehmen. Dabei wird das Unendliche in dieser Funktionentheorie ebenfalls als Punkt aufgefasst. Damit ist die Grundlage geschaffen zu einer Theorie der Transformatiou dieser Funktionen.

A. SUSCHKEWITSCH (Woronesch - Russia)

UNTERSUCHUNGEN ÜBER VERALLGEMEINERTE SUBSTITUTIONEN

Einleitung.

Im 99. Bande der Mathemat. Annalen habe ich die endlichen associativen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit betrachtet (1); es hat sich als vorteilhaft erwiesen eine konkrete Darstellung solcher verallgemeinerten Gruppen zu haben, un dazu eignen sich sehr die von mir in demselben Aufsatze eingeführten verallgemeinerten Substitutionen, in denen verschiedene Symbole in ein und dasselbe Symbol übergehen können; diese Substitutionen lassen sich wie die gewöhnlichen mit einander komponieren, und diese Komposition ist associativ, nicht aber eindeutig umkehrbar. In einem anderen Aufsatze (2) habe ich bewiesen, dass *jede* endliche abstrakte Gruppe von der von mir betrachteten Art sich als Gruppe dieser verallgemeinerten Substitutionen darstellen lässt. Dieser Satz ist insofern wichtig, dass er die Untersuchung abstrakter Gruppen auf die Untersuchung des konkreten Falles, nämlick, der Substitutionsgruppen zurückführt. In einem weiteren Aufsatze (3) habe ich einige spezielle Fälle dieser Gruppen untersucht. In der vorliegenden Arbeit beabsichtige ich einiges über die Struktur der verallgemeinerten Substitutionen auseinanderzusetzen, noch einen Fall der Substitutionsgruppen zu betrachten, schliesslich, den Zusammenhang meiner Gruppen mit der von Herrn A. LOEWY eingeführten « Mischgruppe » (4) und mit dem von Herrn H. BRANDT eingeführten « Gruppoid » aufzustellen (5). Die Bezeichnungen bleiben dabei dieselben, wie in meiner oben erwähnten Abhandlung in Math. Ann., die ich hier als bekannt voraussetze.

---

(1) « Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit ». Math. Ann., Bd. 99.

(2) « Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrbaren Gruppen mittelst der verallgemeinerten Substitutionen ». Recueil Mathématique de la Soc. Math. de Moscou, t. 34.

(3) « Sur quelques cas des groupes finis sans la loi de l'inversion univoque ». Communiquations de la Soc. Math. de Charkow, 1927.

(4) A. LOEWY: « Über abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppen ». Journ. v. Crelle, Bd. 157.

(5) H. BRANDT: « Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes ». Math. Ann., Bd. 96.

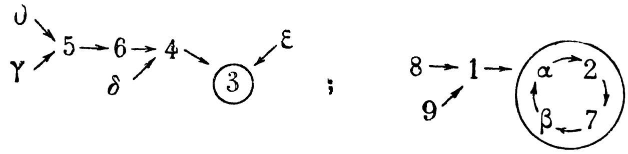
§ 1.

Es ist leicht zu sehen, dass unsere verallgemeinerten Substitutionen sich in Zyklen, wie die gewöhnlichen Substitutionen, zerlegen lassen; nur sind hier die Zyklen insofern komplizierter, dass sie auch Schweife haben können, die manchmal zweigartig sind. Ein Beispiel wird die Sache klar machen. Die Pfeilchen zeigen dabei, wie die Symbole in einander übergeführt werden.

Die Substitution

$$A \simeq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 5 & \alpha & 7 & 3 & 3 & 6 & 4 & \beta & 1 & 1 & 2 & \alpha & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{(1)}$$

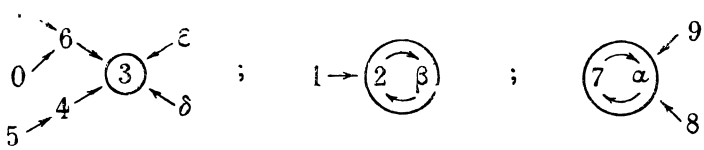
wird folgendermassen in 2 Zyklen zerlegt:



Bilden wir nun die Potenzen von A:

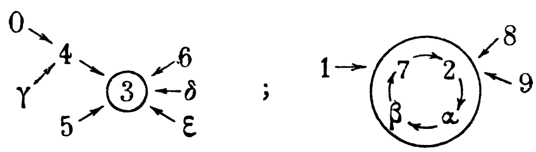
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 6 & 2 & \beta & 3 & 3 & 4 & 3 & \alpha & \alpha & \alpha & 7 & 2 & 6 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

oder, in Zyklen zerlegt:



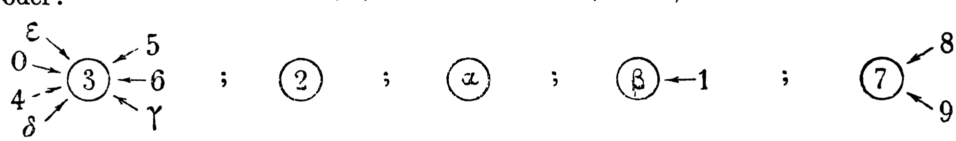
$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 4 & 7 & \alpha & 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & \beta & 7 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

oder:



$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 3 & \beta & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 7 & 7 & 7 & \alpha & \beta & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

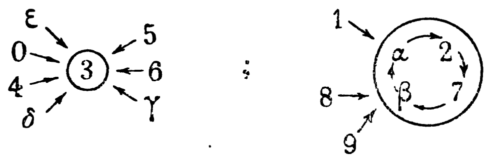
oder:



(1) Das Zeichen $\simeq$ bedeutet, dass man einen komplizierten Ausdruck mit einem blossen Buchstaben bezeichnet.

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \\ 3 & \alpha & 7 & 3 & 3 & 3 & 3 & \beta & \beta & \beta & 2 & \alpha & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

oder:



Aus diesem Beispiele ist nun folgendes ersichtlich:

1). Jede verallgemeinerte Substitution besteht aus 2 Teilen: aus dem « Kern », der gewöhnliche Zyklen darstellt, und aus den Schweifen; die Symbole des Kerns bilden eine gewöhnliche Substitution.

2). Die Ordnung der Substitution ist gleich der Ordnung ihres Kerns.

3). Die Art [1] einer Substitution A ist gleich der Anzahl der Symbole im längsten Schweife von A (die Verzweigungen des Schweifes werden dabei nicht gezählt). Daraus folgt, dass die Substitution, die das Element einer gewöhnlichen Gruppe ist (d. h. deren Art $=1$ ist), nur eingliedrige Schweife haben kann.

§ 2.

Im § 4 von meiner schon zitierten Abh. in Math. Ann. habe ich folgendes gezeigt: ist $\mathfrak{G}$ eine beliebige Gruppe der von mir betrachteten Art, $\mathfrak{K}$ — ihre « Kerngruppe », die den in der Einleitung zu derselben Abh. angegebenen Bau hat, und ist $A_{\varkappa\lambda}$ ein Element aus $\mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$, so haben wir:

$$\mathfrak{G}A_{\varkappa\lambda} = \mathfrak{A}_\varkappa ; \quad A_{\varkappa\lambda}\mathfrak{G} = \mathfrak{B}_\lambda .$$

Ist, also, P ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$, und $E_{\varkappa\lambda}$ die Einheit von $\mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$, so ist:

$$PE_{\varkappa\lambda} \simeq A_{\varkappa\lambda_1} < \mathfrak{A}_\varkappa , \quad E_{\varkappa\lambda}P \simeq B_{\varkappa_1\lambda} < \mathfrak{B}_\lambda , \tag{1}$$

dabei ist $\varkappa_1$ irgend einer der Indices $2, \ldots . \; r$, und λ_1 irgend einer der Indices $1, \ldots . \; s$. Sei, ferner:

$$PE_{\mu\lambda} \simeq A_{\mu\lambda_1'} ; \text{ es ist: } E_{\mu\lambda}E_{\varkappa\lambda} = E_{\varkappa\lambda} ;$$

also:

$$PE_{\mu\lambda}E_{\varkappa\lambda} = A_{\mu\lambda_1'}E_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda_1} ; \tag{2}$$

(2) zeigt, dass $\lambda_1' = \lambda_1$ ist; λ_1 hängt, also, nur von λ, nicht aber von $\varkappa$ ab. Ebenso ist: $E_{\varkappa\nu}E_{\varkappa\lambda} = E_{\varkappa\nu}$;

$$E_{\varkappa\nu}P \simeq B_{\varkappa_1'\nu}' = E_{\varkappa\nu}E_{\varkappa\lambda}P = E_{\varkappa\nu}B_{\varkappa_1\lambda} ;$$

es hängt, also, auch $\varkappa_1$ nur von $\varkappa$, nicht aber von λ ab.

---

[1] s. § 1 meiner Abh. in Math. Ann.

Lassen wir jetzt $\varkappa$ alle Werte von 1 bis r und λ alle Werte von 1 bis s durchlaufen, so bekommen wir 2 Substitutionen der ersten und der zweiten Indices, die wir die « linke » un die « rechte » Substitution des Elementes P nennen und simbolisch mit $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$ und $\binom{\lambda}{\lambda_1}$ bezeichnen; diese Substitutionen können auch verallgemeinert sein.

Seien nun P und Q zwei beliebige Elemente von $\mathfrak{G}$; es ist:

$$E_{\varkappa\lambda}PQ = A_{\varkappa_1\lambda}Q = A_{\varkappa_1\lambda}E_{\varkappa_1\lambda}Q \simeq A_{\varkappa_1\lambda}B_{\varkappa_2\lambda} \simeq C_{\varkappa_2\lambda};$$
$$PQE_{\varkappa\lambda} \simeq PB_{\varkappa\lambda_1}' = PE_{\varkappa\lambda_1}B_{\varkappa\lambda_1}' \simeq A_{\varkappa\lambda_2}'B_{\varkappa\lambda_1}' \simeq C_{\varkappa\lambda_2};$$

das beweist den.

Satz: Die linke Substitution des Produktes ist gleich dem Produkte linker Substitutionen der Faktoren; die rechte Substitution des Produktes ist gleich dem inversen Produkte rechter Substitutionen der Faktoren.

Zusatz: Alle die linken [rechten] Substitutionen aller Elemente von $\mathfrak{G}$ bilden eine Substitutionsgruppe $G_l[G_r]$; dabei ist G_l zu $\mathfrak{G}$ verallgemeinert isomorph; und G_r ist zu $\mathfrak{G}$ verallgemeinert anti-isomorph (1).

Erwähnen wir noch folgende Sätze, die leicht zu beweisen sind:

1). Die Art der linken [rechten] Substitution des Element P ist kleiner oder gleich der Art von P.

2). Die Ordnung der linken [rechten] Substitution von P ist entweder dieselbe wie die Ordnung von P selbst, oder gleich einem Teiler der Ordnung von P.

3). Gehört das Element P dem Kern $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ an, ist, z. B., $P < \mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$, so haben die linke und die rechte Substitution von P folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots r \\ \varkappa & \varkappa \ldots \varkappa \end{pmatrix}, \text{ resp. } \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots s \\ \lambda & \lambda \ldots \lambda \end{pmatrix}.$$

Diese Substitutionen, die, also, dieselben für alle Elemente von $\mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$ sind, biden die Kerne der Gruppen G_l, resp. G_r. Es ist leicht zu sehen, dass diese Kerne erstens « Rechtsgruppen » (2) und zweitens die Kerne der Gruppen *aller* Substitutionen der r resp. s Symbole sind.

4). Gehört nicht das Element P selbst, sondern seine k^{te} Potenz dem Kerne $\mathfrak{K}$, ist, z. B., $P^k < \mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$, so bestehen die linke und die rechte Substitutionen von P aus einem einzigen Zyklus $(\varkappa)$ resp. (λ) mit Schweifen.

5). Ist uns die Gleichung $PE_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda_1}$ bei gegebenen $\varkappa$ und λ behannt, so können wir alle Produkte $PX_{\mu\lambda}$ für jedes Element $X_{\mu\lambda}$ von $\mathfrak{B}_\lambda$ finden. (Die Cayley'sche Tafel des Kernes $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ wird dabei als bekannt vorausgesetzt).

---

(1) D. h. wenn die Substitutionen A und B von G_r den Elementen A resp. B von $\mathfrak{G}$ entsprechen, so entspricht die Substitution AB dem El. BA.

(2) D. h. Gruppen, wo die rechte Seite des Gezetzes der eindeutigen Umkehrbarkeit gilt; analog « Linksgruppen ». Vrgl. meine Abh. in Math. Ann.

Es ist in der Tat:

$$PE_{\mu\lambda} = PE_{\varkappa\lambda}E_{\mu\lambda} = A_{\varkappa\lambda_1}E_{\mu\lambda} \simeq A_{\mu\lambda_1}';$$
$$PX_{\mu\lambda} = PE_{\mu\lambda}X_{\mu\lambda} = A_{\mu\lambda_1}'X_{\mu\lambda} \simeq B_{\mu\lambda_1}.$$

Analog, wenn uns die Gleichung $E_{\varkappa\lambda}P = B_{\mu_1\lambda}$ bei gegebenen $\varkappa$ und λ bekannt ist, so können wir alle Produkte $Y_{\varkappa r}P$ für alle Elemente $Y_{\varkappa r}$ von $\mathfrak{A}_\varkappa$ finden.

§ 3.

Indem wir jetzt zu den Gruppen der verallgemeinerten Substitutionen übergehen, müssen wir zunächst folgende Frage beantworten: wie sind die Substitutionen des Kernes einer solchen Gruppe $\mathfrak{G}$ beschaffen? Im § 6 meiner Abh. in Math. Ann. habe ich gezeigt, dass der Kern von $\mathfrak{G}$ aus allen Substitutionen besteht, die die kleinste Anzahl von Hauptsymbolen haben. Dabei nennen wir « Hauptsymbole » einer Substitution die Symbole, die in der unteren Zeile dieser Substitution vorkommen; alle andere Symbole sollen « Nebensymbole » heissen. Ferner, habe ich in § 6 derselben Abh. ein Verfahren gegeben, um jede Kerngruppe, die uns abstrakt gegeben ist, als Gruppe der verallgemeinerten Substitutionen wirklich zu konstruieren. Es soll jetzt erörtert werden, ob die so konstruierte Gruppe auch den allgemeinsten Typus einer Substitutions-Kerngruppe darstellt. Wir betrachten zunächst spezielle Fälle der Kerngruppen.

1). Damit eine Substitutionsgruppe $\mathfrak{C}$ gewöhnliche Gruppe sei, ist notwendig und hinreichend, dass alle Substitutionen von $\mathfrak{C}$ dieselben Hauptsymbole und dieselben Konjugationen haben (vrgl. § 6 meiner Abh. in Math. Ann). Aus § 1, 3 der vorliegenden Abhandlung folgt weiter, dass die Hauptsymbole einer Substitution von $\mathfrak{C}$ eine gewöhnliche Substitution bilden; und diese gewöhnlichen Substitutionen, die offenbar Kerne (vrgl. § 1, 1) unserer verallgemeinerten Substitutionen sind, bilden, wie leicht zu sehen ist, eine Gruppe, die der $\mathfrak{C}$ einfach isomorph ist. Jedes der Nebensymbole ist mit einem Hauptsymbole konjugiert, mit dem, in das es übergeht in der « identischen » Substitution E von $\mathfrak{C}$.

2). Damit eine Substitutionsgruppe $\mathfrak{A}$ Linksgruppe sei, ist notwendig und hinreichend, dass alle Substitutionen von $\mathfrak{A}$ dieselben Hauptsymbole haben. Bekanntlich besteht $\mathfrak{A}$ aus irgend einer Anzahl s der zu einander einfach isomorphen gewöhnlichen Gruppen (vrgl. § 2 meiner Abh. in Math. Ann.):

$$\mathfrak{A} \simeq \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \dots + \mathfrak{C}_s.$$

Behalten wir die Bezeichnungen des § 3 meiner Abh. in Math. Ann. bei, so ist es leicht folgendes einzusehen:

Die Kerne der Substitutionen verschiedener $\mathfrak{C}_\varkappa$ sind genau dieselben; sie bilden eine Gruppe $\mathfrak{C}$ der gewöhnlichen Substitutionen, die allen $\mathfrak{C}_\varkappa$ einfach isomorph ist. Die Substitutionen verschiedener $\mathfrak{C}_\varkappa$ unterscheiden sich von einander nur durch die Konjugationen der Nebensymbole; diese Koniugationen sind durch die « identischen » Substitutionen E_1, E_2.... E_s gegeben.

3). Damit eine Substitutionsgruppe $\mathfrak{B}$ Rechtsgruppe sei, ist notwendig und hinreichend, dass alle Substitutionen von $\mathfrak{B}$ dieselben Konjugationen haben; daraus folgt, dass die Anzahl der Hauptsymbole in allen Substitutionen von $\mathfrak{B}$ dieselbe ist. $\mathfrak{B}$ besteht auch aus irgend einer Anzahl r der zu einander einfach isomorphen gewöhnlichen Gruppen:

$$\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2 + \dots + \mathfrak{C}_r.$$

Die Substitutionen verschiedener $\mathfrak{C}_\varkappa$ unterscheiden sich von einander durch die Hauptsymbole; wir haben, also, r Systeme von Hauptsymbolen S_1, S_2,... S_r; jedes dieser Systeme enthält eine und dieselbe Anzahl m der Symbole, und zwar bezeichnen wir mit $a_1^{(\varkappa)}$, $a_2^{(\varkappa)}$,.... $a_m^{(\varkappa)}$ die Symbole von $S_\varkappa$. Die Symbole von je zweien unserer Systeme $S_\varkappa$ und S_λ sind mit einander konjugiert, und zwar ist jedes Symbol von $S_\varkappa$ mit einem und nur einem Symbol von S_λ konjugiert und umgekehrt. Wären, nämlich, $a_1^{(\varkappa)}$ und $a_2^{(\varkappa)}$ mit einem und demselben Symbol $a_1^{(\lambda)}$ konjugiert, so würden $a_1^{(\varkappa)}$ und $a_2^{(\varkappa)}$ auch mit einander konjugiert sein, was nicht der Fall ist, da die Symbole eines und desselben Systems mit einander nicht konjugert sind. Sind nun unsere Bezeichnungen so gewählt, dass die Symbole mit einem und demselben unteren Index mit einander konjugiert sind, so bilden die Symbole von $S_\varkappa$ dieselben gewöhnlichen Substitutionen in $\mathfrak{C}_\varkappa$, wie die Symbole von S_λ in $\mathfrak{C}_\lambda$, für alle Paare $\varkappa$ und λ.

4). Gehen wir jetzt zur allgemeinen Kerngruppe $\mathfrak{K}$ über, die den in der Einleitung meiner Abh. in Math. Ann. angegebenen Bau hat, so folgt aus dem vorhergehenden, dass die im § 6 derselben Abh. angegebene Konstruktion der Substitutionen einer Kerngruppe wirklich die allgemeinste ist. Eins muss man jedoch beachten: die Symbole verschiedener Systeme $S_\varkappa$ brauchen nicht im Allgemeinen alle von einander verschieden zu sein. Es bleibt uns, also, zu erörtern, wann können die Symbole verschiedener Systeme einander gleich sein.

Sei (vrgl. meine Abh. in Math. Ann.)

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \dots + \mathfrak{B}_s,$$

wo $\mathfrak{B}_\lambda$ verschiedene Rechtsgruppen sind, aus denen $\mathfrak{K}$ zusammengesetzt ist. Jeder Gruppe $\mathfrak{B}_\lambda$ entspicht ein bestimmtes System der Konjugationen der Symbole; dieses System bezeichnen wir mit T_λ; in T_1 sollen (wie im § 6, 4 meiner Abh. in Math. Ann.) die Symbole mit denselben unteren Indices mit einander konjugiert sein.

Sind nun zwei Symbole mit einander identisch: $a_\alpha^{(\varkappa)} \equiv a_\beta^{(\lambda)}$, so sind sie dadurch um so mehr auch mit einander konjugiert; da aber in T_1 $a_\alpha^{(\varkappa)}$ mit $a_\alpha^{(\lambda)}$ konjugiert ist, so muss in T_1 auch $a_\alpha^{(\lambda)}$ mit $a_\beta^{(\lambda)}$ konjugiert sein, und daraus folgt, dass $\beta = \alpha$ sein muss. Es können, also, bei den von uns eingeführten Bezeichnungen nur zwei Symbole mit gleichen unteren Indices einander gleich sein. Diesen Fall brauchen wir nur zu betrachten. Sei, also, $a_\alpha^{(\varkappa)} \equiv a_\alpha^{(\lambda)}$; das kann offenbar dann und nur dann der Fall sein, wenn $a_\alpha^{(\varkappa)}$ und $a_\alpha^{(\lambda)}$ in *allen* Systemen T_r mit einander konjugiert sind. Das tritt, also, als Ausnahmefall ein.

§ 4.

Sei $\mathfrak{G}$ wieder eine beliebige Gruppe der verallgemeinerten Substitutionen, und P ein beliebiges Element von $\mathfrak{G}$.

SATZ: Die Symbole eines jeden Systems $S_\varkappa$ werden in P nicht von einander getrennt: jedes der Systeme $S_\varkappa$ geht in P in sich selbst oder in ein anderes System S_λ über; verschiedene Symbole von $S_\varkappa$ gehen dabei stets in verschiedene Symbole von S_λ über.

Dieser Satz folgt leicht aus den Gleichungen (1) von § 2.

Es entspricht, also, jeder Substitution P aus $\mathfrak{G}$ eine bestimmte Substitution der Systeme S_1, S_2,.... S_r, die man symbolisch als $\binom{S_\varkappa}{S_{\varkappa_1}}$, oder einfacher, als Substitution der Indices $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$ darstellen kann, und die nichts anderes ist, als die linke Substitution des Elementes P (vrgl. § 2), wie es leicht aus der Formel (1) in § 2, hervorgeht. Ferner, zeigt die erste Formel (1) in § 2, dass die Substitutionen und Transmutationen [1] der Symbole innerhalb der Systeme S_1,.... S_r keine anderen sein können, als die, die in den Elementen des Kernes $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{G}$ vorkommen. Wir wollen nun näher betrachten, wie P, als Substitution der Symbole von S_1, S_2,.... S_r, beschaffen ist.

SATZ: Ist uns die Gleichung $PE_{\varkappa\lambda} = A_{\varkappa\lambda_1}$ bei bestimmten $\varkappa$ ed λ und ausserdem die linke Substitution $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$ des Elementes P bekannt, so ist dadurch P als Substitution der Symbole der Systeme S_1, S_2,.... S_r vollständig bestimmt.

BEWEIS: Die Substitution $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$ gibt uns die Anordnung der Systeme S_1, S_2,.... S_r in der unteren Zeile von P; die Substitutionen $A_{\varkappa\lambda_1}$ und $E_{\varkappa\lambda}$ Geben demnächst die Anordnungen der Symbole innerhalb der Systeme S_1,.... S_r; dadurch wird die untere Zeile von P vollständig definiert.

Bei unseren Bezeichnungen ist es vorteilhaft das Produkt PE_{11} als bekannt vorauszusetzen.

Damit, also, das Element P als Substitution der Symbole der Systeme S_1,.... S_r vollständig bestimmt sei, müssen uns zwei Dinge bekannt sein, nämlich, das Produkt PE_{11}, als Element der Gruppe $\mathfrak{A}_1$, un die linke Substitution $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$ von P. Wir werden sehen, dass diese beiden Bedingungen nicht unabhängig von einander sind.

---

[1] D. h. das Ersetzen der Symbole des einen Systems, z. B. $S_\varkappa$, durch die Symbole eines anderen Systems, z. B. S_λ. Vrgl. A. LOEWY, l. c.

Wir stellen uns folgende Aufgabe: sei eine Kerngruppe $\mathfrak{K}$ gegeben, und zwar sollen die Substitutionen von $\mathfrak{K}$ keine anderen Symbole als die der Systeme $S_1, \ldots S_r$ enthalten. Wir wollen die grösste Substitutionsgruppe $\mathfrak{H}$ mit denselben Symbolen bestimmen, die $\mathfrak{K}$ als Kern enthält. Dazu brauchen wir mittelst des soeben angegebenen Verfahrens alle die möglichen Elemente P zu konstruieren. Doch werden nicht alle die so erhaltenen Elemente der gesuchten Gruppe $\mathfrak{H}$ angehören: nachdem wir P konstruiert haben, bilden wir die Produkte PE_{12}, $PE_{13}, \ldots PE_{1s}$; es ist leicht zu sehen, dass die Hauptsymbole dieser Produkte $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots a_m^{(1)}$ sind und nur die Substitutionen bilden können, die in den Gruppen $\mathfrak{C}_{1\lambda}$ vorkommen; doch können die Konjugationen einiger von diesen Produkten von $T_1, T_2, \ldots T_s$ verschieden sein, so dass das entsprechende Produkt keiner der Gruppen $\mathfrak{C}_{1\lambda}$ angehört. In diesem Falle muss das konstruierte Element P weggeworfen werden, da es nicht der $\mathfrak{H}$ angehört. Es gilt hier der

SATZ: Sind P und Q zwei konstruierte Elemente mit derselben linken Substitution $\binom{\varkappa}{\varkappa_1}$, und gehören $PE_{11} \simeq A_{1\lambda}$ und $QE_{11} \simeq B_{1\lambda}$ einer und derserben Gruppe $\mathfrak{C}_{1\lambda}$ an, so gehören P, Q entweder beide der Gruppe $\mathfrak{H}$, oder keins von ihnen gehört zur $\mathfrak{H}$.

Dieser Satz folgt daraus, dass PE_{1r} und QE_{1r} bei jedem r immer dieselben Konjugationen haben.

Dadurch wird die Anzahl unserer Konstruktionen vermindert: setzen wir $PE_{11} = E_{1\lambda}$ und untersuchen, ob das so erhaltene Element P der Gruppe $\mathfrak{H}$ angehört (d. h. ob alle die Produkte PE_{1r} der Gruppe $\mathfrak{A}_1$ angehören); gehört P zu $\mathfrak{H}$, so folgt daraus, dass alle Elemente Q mit derselben linken Substitution, wie P, auch zu $\mathfrak{H}$ gehören, wenn nur $QE_{11} < \mathfrak{C}_{1\lambda}$ ist; gehört dagegen P nicht zu $\mathfrak{H}$, so gehören auch die Elemente Q nicht zu $\mathfrak{H}$.

Wir müssen noch beweisen, dass alle die so erhaltenen Elemente P, bei denen PE_{1r} immer $< \mathfrak{A}_1$ ist, sammt den Elementen von $\mathfrak{K}$ wirklich eine Gruppe bilden (die eben $\mathfrak{H}$ ist). Seien nun P und Q zwei solche Elemente von $\mathfrak{H}$; es ist zu beweisen, dass $(PQ)E_{\lambda}$ für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots s$ immer zur $\mathfrak{K}$ angehört. Nun ist ja $QE_{1\lambda} \simeq Y_{1r} < \mathfrak{K}$; ferner, ist $PY_{1r} = (PE_{1r})Y_{1r} \simeq X_{1\sigma}Y_{1r} \simeq Z_{1\sigma} < \mathfrak{K}$; daraus folgt, dass $(PQ)E_{1\lambda} = Z_{1\sigma}$ zur $\mathfrak{K}$ gehört.

BEISPIEL: Es sei uns die Kerngruppe $\mathfrak{K}$ gegeben, die aus folgenden 18 Substitutionen besteht:

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 012 & 012 & 012 \end{pmatrix}; \quad A_{11} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 120 & 120 & 120 \end{pmatrix}; \quad B_{11} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 201 & 201 & 201 \end{pmatrix};$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 345 & 345 & 345 \end{pmatrix}; \quad A_{21} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 453 & 453 & 453 \end{pmatrix}; \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 534 & 534 & 534 \end{pmatrix};$$

$$E_{31} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 678 & 678 & 678 \end{pmatrix}; \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 786 & 786 & 786 \end{pmatrix}; \quad B_{31} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 867 & 867 & 867 \end{pmatrix};$$

$$E_{12} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 012 & 201 & 120 \end{pmatrix}; \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 120 & 012 & 201 \end{pmatrix}; \quad B_{12} = \begin{pmatrix} 012 & 345 & 678 \\ 201 & 120 & 012 \end{pmatrix};$$

$$E_{22}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 453 & 345 & 534\end{pmatrix}; \quad A_{22}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 534 & 453 & 345\end{pmatrix}; \quad B_{22}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 345 & 534 & 453\end{pmatrix};$$

$$E_{32}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 867 & 786 & 678\end{pmatrix}; \quad A_{32}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 678 & 867 & 786\end{pmatrix}; \quad B_{32}=\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 786 & 678 & 867\end{pmatrix}.$$

Diese Gruppe ist durch folgende drei Bedingungen definiert (vrgl. meine Abh. in Math. Ann., Einleitung, II):

1). $\mathfrak{C}_{\varkappa\lambda}$ sind zyklische Gruppen 3^{ter} Ordnung.

2). $r=3$, $s=2$.

3). $E_{11}E_{22}=A_{21}$; $E_{11}E_{32}=B_{31}$.

Die linken Substitutionen sind hier Substitutionen von 3 Symbolen; deren gibt es $3^3=27$; doch führt der meiste Teil von ihnen nicht zu den Elementen von $\mathfrak{H}$. Die Gruppe $\mathfrak{H}$ besteht hier ausser den Substitutionen von $\mathfrak{K}$ noch aus folgenden 18 Substitutionen:

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 012 & 345 & 678\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 120 & 453 & 786\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 201 & 534 & 867\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 345 & 678 & 012\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 453 & 786 & 120\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 534 & 867 & 201\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 678 & 012 & 345\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 786 & 120 & 453\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 867 & 201 & 534\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 678 & 534 & 120\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 786 & 345 & 201\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 867 & 453 & 012\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 345 & 201 & 786\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 453 & 012 & 867\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 534 & 120 & 678\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 012 & 867 & 453\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 120 & 678 & 534\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}012 & 345 & 678\\ 201 & 786 & 345\end{pmatrix}.$$

Diese 18 (gewöhnliche) Substitutionen bilden eine gewöhnliche imprimitive Gruppe $\mathfrak{L}$; $\mathfrak{H}=\mathfrak{K}+\mathfrak{L}$; $\mathfrak{H}$ ist die grösste Substitutionsgruppe der 9 Symbole, die $\mathfrak{K}$ zum Kern hat.

Wir erwähnen noch den speziellen Fall, wenn die gegebene Kerngruppe $\mathfrak{K}$ Rechtsgruppe ist, wenn, also, $s=1$ ist. Hier gibt es nur ein Konjugationensystem T_1 und alle die Elemente P, die nach der obigen Methode konstruiert werden können, gehören der Gruppe $\mathfrak{H}$ an. Ist, also, n die Ordnung der gewöhnlichen Gruppen $\mathfrak{C}_{\varkappa 1}$, so ist $\mathfrak{H}$ von der Ordnung $n \cdot r^r$.

§ 5.

Die von Herrn A. LOEWY eingeführte Mischgruppe und das von Herrn H. BRANDT eingeführte Gruppoid hängen eng zusammen mit einem speziellen Falle meiner Gruppen, nämlich mit den Rechtsgruppen. Sei uns eine Rechtsgruppe

$$\mathfrak{B} \simeq \mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_2+\ldots\ldots+\mathfrak{C}_r=\mathfrak{C}_1+\mathfrak{C}_1E_2+\ldots\ldots+\mathfrak{C}_1E_r$$

gegeben, die als Gruppe der verallgemeinerten Substitutionen nach § 3, 3 dargestellt werden kann. Jede Substitution aus $\mathfrak{B}$ enthält in ihrer oberen Zeile r Systeme S_1, S_2,.... S_r von je m Symbolen; in ihrer unteren Zeile enthält sie nur Symbole des einen Systems ($S_\varkappa$, wenn die genommene Substitution der Gruppe $\mathfrak{C}_\varkappa$ angehört); diese Symbole bilden eine bestimmte Permutation, die sich in der unteren Zeile r Mal wiederholt. Die genommene Substitution $X_\varkappa$ zerfällt auf diese Weise in r Transmutationen, deren obere Zeilen bzw. die Systeme S_1, S_2,.... S_r sind; die $\varkappa^{\text{te}}$ von diesen Transmutationen ist eine gewöhnliche Substitution. Bezeichnen wir mit $X_\varkappa^{(\lambda)}$ die λ^{te} Transmutation, aus denen $X_\varkappa$ besteht, so können wir symbolisch schreiben:

$$X_\varkappa = X_\varkappa^{(1)} + X_\varkappa^{(2)} + \dots + X_\varkappa^{(r)}.$$

Nehmen wir nun die *ersten* Transmutationen $X_\varkappa^{(1)}$ aller Substitutionen von $\mathfrak{B}$, so bildet ihre Menge, wie leicht zu sehen ist, eine Mischgruppe von Herrn A. Loewy. Den « Kern » dieser Mischgruppe (im Sinne von Herrn Loewy) bilden die ersten Transmutationen von $\mathfrak{C}_1$ (die hier gewöhnliche Substitutionen sind und eine gewöhnliche Gruppe bilden); die ersten Transmutationen aller übrigen Gruppen $\mathfrak{C}_\varkappa$ bilden « die Schale » der Mischgruppe. Die « reciproken » Elemente für diese Mischgruppe bilden alle übrigen Transmutationen, aus denen die Substitutionen von $\mathfrak{C}_1$ bestehen. Statt der ersten Transmutationen hönnen wir natürlich auch die $\varkappa^{\text{ten}}$ Transmutationen betrachten, aus denen die Substitutionen von $\mathfrak{B}$ bestehen; diese $\varkappa^{\text{ten}}$ Transmutationen bilden auch eine Mischgruppe, die der Mischgruppe der ersten Transmutationen isomorph ist. Im ganzen haben wir $r^2 \cdot n$ Transmutationen, aus denen die Substitutionen unserer Gruppe bestehen (wenn n die Ordnung der Gruppen $\mathfrak{C}_\varkappa$ ist). Und nun bilden *alle* diese Transmutationen ein Gruppoid von Herrn Brandt, wie es aus dem Zusatze von Herrn Loewy am Ende seiner schon zitierten Abhandlung hervorgeht.

Im Beispiel des vorigen Paragraphen bilden die 9 ersten Substitutionen $E_{11} \dots B_{31}$ die Rechtsgruppe $\mathfrak{B}_1$; jede von ihnen besteht aus 3 Transmutationen (eine von denen eine gewöhnliche Substitution ist); im ganzen haben wir, also, 27 Transmutationen, die ein Gruppoid bilden. Die « ersten » Transmutationen von $E_{11} \dots B_{31}$, nämlich

$$\begin{pmatrix}012\\012\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\120\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\201\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\345\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\453\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\534\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\678\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\786\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}012\\867\end{pmatrix}$$

bilden eine Mischgruppe, deren Kern aus 3 ersten von diesen Transmutationen besteht.

Umgekehrt, entspricht einem gegebenen Gruppoid, oder einer gegebenen Mischgruppe eine bestimmte Rechtsgruppe. Zum Beweise schlagen wir einen anderen, abstrakten Weg ein. Sei uns eine Mischgruppe $\mathfrak{B}$ gegeben, deren Kern wir mit $\mathfrak{C}_1$ bezeichnen. Nach § 1, ε) der schon zitierten Abhandlung von Herrn A. Loewy kann $\mathfrak{B}$ folgendermassen dargestellt werden:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_1 E_2 + \dots + \mathfrak{C}_1 E_r,$$

wo $E_2, \ldots E_r$ passend gewählte Elemente aus der Schale von $\mathfrak{B}$ sind. Sei E_1 die Einheit von $\mathfrak{C}_1$; die Elemente von $\mathfrak{C}_\varkappa$ bezeichnen wir mit

$$A_\varkappa,\; B_\varkappa,\; C_\varkappa, \ldots \; (\varkappa = 1,\, 2, \ldots\, r),$$

und zwar sei allgemein: $X_\varkappa = X_1 E_\varkappa$. Unsere Operation ist nicht unbeschränkt anwendbar: von den Produkten $A_\varkappa B_\lambda$ existieren nur die, wo $\varkappa = 1$ ist; es ist:

$$A_1 B_\lambda = A_1 (B_1 E_\lambda) = (A_1 B_1) E_\lambda = C_1 E_\lambda = C_\lambda,$$

wenn $A_1 B_1 = C_1$ ist. Nun *definieren* wir allgemein:

$$A_\varkappa B_\lambda = C_\lambda$$

für alle Indices $\varkappa$ und λ.

Die so erweiterte Operation ist nun unbeschränkt anwendbar in $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{B}$ ist auf diese Weise eine Gruppe geworden, und zwar eine Rechtsgruppe, wie leicht zu sehen ist.

C. L. FORTESCUE e G. CALABRESE

L'APPLICAZIONE DELLE COORDINATE SIMMETRICHE ALLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

La teoria delle coordinate simmetriche, dovuta ad uno degli Autori (1) ha ricevuto, sin dal suo primo apparire, svariate applicazioni (2), limitate comunque al campo dell' Elettrotecnica.

Nelle pagine seguenti, dopo avere esposto alcune proprietà di carattere generale, ne diamo l'applicazione alla risoluzione delle equazioni algebriche.

Il metodo consiste nell' esprimere le radici di un' equazione per mezzo delle loro coordinate simmetriche e nel determinare queste ultime invece delle prime, ciò che, come vedremo, permette sempre di ridurre di uno il grado del problema.

Facciamo però notare subito che esso rientra nell' ambito del teorema di RUFFINI sulla risolubilità delle equazioni algebriche, dato che per equazioni di grado superiore al 4° la sua applicazione, in generale, conduce a sistemi di equazioni molto complessi.

Facciamo osservare ancora che sostanzialmente esso non è nuovo in quanto fu adoperato da LAGRANGE come artificio matematico. Riteniamo però opportuno esporlo perchè, partendo dalle coordinate simmetriche esso perde, per modo di dire, il carattere di artificio e viene, in modo molto semplice, esposto nella sua forma più generale.

Le radici di un' equazione algebrica possono essere reali o complesse e se riferite a un sistema di assi ortogonali nel piano, esse possono essere rappresentate per mezzo di vettori che giacciono sull' asse reale se le radici sono reali. È allora evidente che esse possono trattarsi come entità vettoriali.

Supponiamo ora di avere un sistema di n vettori:

$$r_0, \quad r_1, \quad r_2, \dots, \quad r_{n-1}$$

e

$$r_{00}, \quad r_{01}, \quad r_{02}, \dots, \quad r_{0(n-1)}$$

(1) Vedi: C. L. FORTESCUE, « Method of Symmetrical Coordinates Applied to the solution of Polyphase Networks » Transactions of the American Institute of Electrical Engineers 1918 pag. 1937.

(2) Vedi elenco bibliografico alla fine.

siano le loro coordinate simmetriche quando si prenda r_0 come vettore principale. Sarà:

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
r_0 &= r_{00} + r_{01} + r_{02} + r_{03} + \ldots + r_{0(n-1)} \\
r_1 &= r_{00} + a^{-1} r_{01} + a^{-2} r_{02} + a^{-3} r_{03} + \ldots + a^{-(n-1)} r_{0(n-1)} \\
r_2 &= r_{00} + a^{-2} r_{01} + a^{-4} r_{02} + a^{-6} r_{03} + \ldots + a^{-2(n-1)} r_{0(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_k &= r_{00} + a^{-k} r_{01} + a^{-2k} r_{02} + a^{-3k} r_{03} + \ldots + a^{-k(n-1)} r_{0(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_{n-1} &= r_{00} + a^{-(n-1)} r_{01} + a^{-2(n-1)} r_{02} + a^{-3(n-1)} r_{03} + \ldots + a^{-(n-1)^2} r_{0(n-1)}
\end{aligned}
$$

dove $a = e^{j\frac{2\pi}{n}}$ è il ben noto operatore che imprime una rotazione positiva (in senso contrario alla direzione del moto delle lancette dell'orologio) di $\frac{2\pi}{n}$ al vettore a cui viene applicato. Gli esponenti negativi stanno a indicare rotazioni negative. Introducendo gli operatori di sequenza dalle (1) si ha:

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
S(r_0) &= S^0 r_{00} + S^1 r_{01} + S^2 r_{02} + \ldots + S^{n-1} r_{0(n-1)} \\
S(r_1) &= S^0 r_{00} + a^{-1} S^1 r_{01} + a^{-2} S^2 r_{02} + \ldots + a^{-(n-1)} S^{n-1} r_{0(n-1)} \\
S(r_2) &= S^0 r_{00} + a^{-2} S^1 r_{01} + a^{-4} S^2 r_{02} + \ldots + a^{-2(n-1)} S^{n-1} r_{0(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S(r_k) &= S^0 r_{00} + a^{-k} S^1 r_{01} + a^{-2k} S^2 r_{02} + \ldots + a^{-k(n-1)} S^{n-1} r_{0(n-1)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S(r_{n-1}) &= S^0 r_{00} + a^{-(n-1)} S^1 r_{01} + a^{-2(n-1)} S^2 r_{02} + \ldots + a^{-(n-1)^2} S^{n-1} r_{0(n-1)} .
\end{aligned}
$$

Dove:

$$
\begin{aligned}
S(r_0) &= (r_0,\ r_1,\ r_2, \ldots\ r_{n-1}) \\
S(r_1) &= (r_1,\ r_2,\ r_3, \ldots\ r_{n-1},\ r_0) \\
S(r_2) &= (r_2,\ r_3, \ldots\ r_{n-1},\ r_0,\ r_1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

e:

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
S^0 &= (1,\ 1, \ldots\ 1) \\
S^1 &= (1,\ a^{-1}, \ldots\ a^{-(n-1)}) \\
S^2 &= (1,\ a^{-2}, \ldots\ a^{-2(n-1)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S^k &= (1,\ a^{-k},\ a^{-2k}, \ldots,\ a^{-k(n-1)}) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
S^{(n-1)} &= (1,\ a^{-(n-1)},\ a^{-2(n-1)}, \ldots,\ a^{-(n-1)^2}).
\end{aligned}
$$

Cosicchè $S^0 r_{00}$ rappresenta un sistema di n vettori tutti uguali a r_{00}.

$S^1 r_{01}$ rappresenta un sistema di n vettori aventi tutti lo stesso modulo di r_{01} e spostati di $-\frac{2\pi}{n}$ gradi l'uno dall'altro.

$S^2 r_{02}$ rappresenta un sistema di n vettori aventi tutti lo stesso modulo di r_{02} e spostati di $-2\frac{2\pi}{n}$, ecc.

L'applicazione dell'operatore a^{-k} ad un sistema $S^m r$ sposta tutti i vettori di quest'ultimo di un angolo $-k\frac{2\pi}{n}$.

Nelle pagine seguenti chiameremo le quantità r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03},.... r_{0k}.... e simili che moltiplicano gli operatori S^0, S^1, S^2,...., S^3,...., S^k,...., rispettivamente le coordinate simmetriche zero, prima, seconda, ect.

Ricordiamo ora che il prodotto di 2 sistemi di vettori è un sistema i cui vettori si ottengono moltiplicando i vettori corrispondenti dei sistemi dati.

Così per esempio:

$$S(r_0)S(r_1)=(r_0,\ r_1,\ r_2,....,\ r_{n-1})(r_1,\ r_2,....,\ r_{n-1},\ r_0)=$$
$$=(r_0r_1,\ r_1r_2,....,\ r_{n-1}r_0)=S(r_0r_1).$$

Ricordiamo ancora che se i sistemi dati sono espressi per mezzo delle (2), quando si fa il prodotto, agli operatori di seguenza S^0, S^1,.... si applicano le regole ordinarie degli indici, tenendo naturalmente presente il loro carattere periodico.

Così per esempio:

$$S^0r_{00}S^1r_{01}S^kr_{0k}=S^{0+1+k}r_{00}r_{01}r_{0k}=S^{k+1}r_{00}r_{01}r_{0k}$$
$$S^1r_{01}S^{n-1}r_{0(n-1)}=S^{n-1+1}r_{01}r_{0(n-1)}=S^0r_{01}r_{0(n-1)}.$$

È allora evidente che i prodotti ottenuti moltiplicando fra di loro un numero qualunque delle $S(r)$, conterranno solamente gli operatori S^0, S^1, S^2,.... $S^{(n-1)}$ eventualmente moltiplicati per potenze dell'operatore a. Sommando tutti i termini di ciascuna delle (3) si ha:

$$\begin{aligned}
&1+1+....+1=n\\
&1+a^{-1}+a^{-2}+....+a^{-(n-1)}=0\\
&1+a^{-2}+a^{-4}+....a^{-2(n-1)}=0\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&1+a^{-(n-1)}+a^{-2(n-1)}+....+a^{-(n-1)^2}=0.
\end{aligned}$$

Le stesse relazioni valgono anche se le S sono applicate a un vettore. Così per esempio, la somma di tutti i termini di S^0r_{00} è nr_{00} e la somma di tutti i termini di S^1r_{01} è zero.

Consideriamo ora i sistemi ottenuti moltiplicando le $S(r)$ di (2) 1 a 1, 2 a 2,.... h ad h,.... n ad n, cioè i sistemi:

$S(r_0)$ e simili
$S(r_0r_1)$ e simili
$S(r_0r_1r_2)$ e simili
. . . .
$S(r_0r_1r_2....\ r_{n-1})$ e simili

Se si sommano tutti i termini di ciascun sistema, per quanto detto precedentemente, *ciascuna somma sarà uguale a* n *volte la componente di sequenza zero del sistema in considerazione.*

Nel caso particolare del sistema:

$$S(r_0r_1 \ldots r_{n-1}) = (r_0r_1 \ldots r_{n-1},\ r_1r_2 \ldots r_{n-1}r_0, \ldots r_{n-1}r_0r_2 \ldots r_{n-2}),$$

notando che tutti i suoi termini sono uguali, si vede che il prodotto:

$$S(r_0)S(r_1) \ldots S(r_{n-1})$$

contiene solamente l'operatore di sequenza zero.

Similmente considerando il sistema:

$$S(r_0^m) = (r_0^m,\ r_1^m, \ldots r_{n-1}^m)$$

si conclude che la somma:

$$r_0^m + r_1^m + \ldots + r_{n-1}^m$$

è uguale a n volte la coordinata di sequenza zero di $S(r_0^m)$.

Le precedenti considerazioni sono importanti non solo per le semplificazioni che introducono nei calcoli, ma anche perchè permettono di determinare qual'è il sistema da aggiungere o per cui bisogna moltiplicare un dato sistema, quando si vogliano eliminare tutti gli operatori di sequenza eccettuato quello di sequenza zero.

Così dato il sistema $S(r_0r_2)$ è facile dedurre i sistemi:

$$S(r_0r_2)S(r_1r_3 \ldots r_{n-1}),$$
$$S(r_0r_2) + S(r_1r_3) + S(r_2r_4) + \ldots + S(r_{n-3}r_{n-1}) + S(r_{n-2}r_0) + S(r_{n-1}r_1)$$

che contengono solo l'operatore di sequenza zero.

È evidente poi che la somma:

$$S(r_0r_2) + S(r_1r_3) + \ldots + S(r_{n-2}r_0) + S(r_{n-1}r_1)$$

è n volte il sistema componente di sequenza zero di $S(r_0r_2)$.

Come altro esempio sia dato il sistema $\frac{1}{S(r_0)}$ e si voglia trasformarlo in modo che nel denominatore scompaiano tutti gli operatori eccettuato quello di sequenza zero.

Si ha:

$$\frac{1}{S(r_0)} = \frac{S(r_1r_2 \ldots r_{n-1})}{S(r_0r_1r_2 \ldots r_{n-1})}.$$

Consideriamo di nuovo $S(r_0^m)$ e poniamo:

$$\sum r_p^m = (r_0^m + r_1^m + \ldots + r_{n-1}^m).$$

Da (2) si ha:

$$S(r_0^m) = (S^0r_{00} + S^1r_{01} + \ldots + S^{n-1}r_{0(n-1)})^m$$

cosicchè $\sum r_p^m$ sarà uguale alla somma di tutti i prodotti della forma:

$$r_{oi}r_{ot} \ldots r_{os}$$
$$1, 2, \ldots m$$

per

$$i+t+\ldots.+s=0,\ n \text{ o multiplo di } n$$

e:

$$i,\ t,\ldots.,\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots.,\ n-1.$$

È evidente che

$$\sum r_p = nr_{00}.$$

Per calcolare $\sum r_p^2$ bisogna prendere n volte la coordinata di sequenza zero di $S(r_2^0)$ e cioè basta considerare:

$$(S^0 r_{00}+S^1 r_{01}+S^2 r_{02}+\ldots.+S^{n-1} r_{0(n-1)})(S^0 r_{00}+S^1 r_{01}+S^2 r_{02}+\ldots.+S^{n-1} r_{0(n-1)})$$

e prendere i prodotti:

$$S^i r_{oi} S^t r_{ot}$$

per i quali:

$$i+t=0,\ n \text{ o multiplo di } n.$$

Si avrà:

$$\sum r_p^2 = n(r_{00}^2 + r_{01} r_{0(n-1)} + r_{02} r_{0(n-2)} + \ldots. + r_{0(n-2)} r_{02} + r_{0(n-1)} r_{01})$$

ovvero:

$$\sum r_p^2 = n \sum r_{oi} r_{ot}$$

con

$$i+t=0,\ n \text{ o multiplo di } n$$

e:

$$i=0,\ 1,\ 2,\ldots.\ n-1$$
$$t=0,\ n-1,\ n-2,\ldots.\ 1.$$

Se n è pari si avrà:

$$\sum r_{oi} r_{ot} = r_{00}^2 + r_{0\frac{n}{2}}^2 + 2 \sum r_{ok} r_{os}$$

con

$$k+s=n \text{ o multiplo di } n$$

e

$$k=1,\ 2,\ldots.,\ \left(\frac{n}{2}-1\right)$$
$$s=n-1,\ n-2,\ldots.,\ \left(\frac{n}{2}+1\right).$$

Se n è dispari si avrà:

$$\sum r_{oi} r_{ot} = r_{00}^2 + 2 \sum r_{ok} r_{os}$$

con

$$k+s=n \text{ o multiplo di } n$$

e:

$$k=1,\ 2,\ldots.,\ \frac{n-1}{2}$$
$$s=n-1,\ n-2,\ldots.,\ \frac{n+1}{2}.$$

Cosicchè se il sistema dato è composto di 2 vettori r_0, r_1 solamente si ha:

$$\sum r_p = 2r_{00}$$
$$\sum r_p^2 = 2(r_{00}^2 + r_{01}^2).$$

Se il sistema dato è composto di 3 vettori r_0, r_1, r_2, si ha:

$$\begin{aligned}
\sum r_p &= 3r_{00} \\
\sum r_p^2 &= 3(r_{00}^2 + 2r_{01}r_{02}) \\
\sum r_p^3 &= 3(r_{00}^3 + r_{01}^3 + r_{02}^3 + 6r_{01}r_{02}r_{03}).
\end{aligned}$$

Se il sistema è composto di 4 vettori r_0, r_1, r_2, r_3 si ha:

$$\begin{aligned}
\sum r_p &= 4r_{00} \\
\sum r_p^2 &= 4(r_{00}^2 + r_{02}^2 + 2r_{01}r_{03}) \\
\sum r_p^3 &= 4(r_{00}^3 + 3r_{00}r_{02}^2 + 3r_{01}^2r_{02} + 3r_{02}r_{03}^2 + 6r_{01}r_{02}r_{03}) \\
\sum r_p^4 &= 4(r_{00}^4 + r_{01}^4 + r_{02}^4 + r_{03}^4 + 6(r_{01}^2r_{03}^2 + r_{00}^2r_{02}^2) + \\
&\quad + 12(r_{00}^2r_{01}r_{03} + r_{00}r_{01}^2r_{02} + r_{00}r_{02}r_{03}^2 + r_{01}r_{02}^2r_{03}).
\end{aligned}$$

Quando il sistema è composto di 5 vettori si ha:

$$\begin{aligned}
\sum r_p &= 5r_{00} \\
\sum r_p^2 &= 5(r_{00}^2 + 2r_{01}r_{04} + 2r_{02}r_{03}), \text{ ecc.}
\end{aligned}$$

Applichiamo ora le considerazioni precedenti alla risoluzione delle equazioni algebriche. Il metodo, come detto, consiste nell'esprimere le loro radici per mezzo delle loro coordinate simmetriche e nel determinare queste ultime invece delle prime, applicando teoremi ben noti di Algebra elementare.

$$x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} - A_3x^{n-3} + \ldots + (-1)^nA_n = 0 \tag{4}$$

sia l'equazione generale di grado n, r_0, r_1,.... r_{n-1} le sue radici e r_{00}, r_{01},...., $r_{0(n-1)}$ le loro coordinate simmetriche. Le relazioni che legano le prime alle seconde sono le (1) e le (2).

Dall'algebra elementare abbiamo:

$$\begin{aligned}
&\sum r_p = A_1 \\
&\sum r_pr_q = A_2 \\
&\sum r_pr_qr_m = A_3 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\sum r_0r_1r_2 \ldots r_{n-1} = A_n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Dove p, q, m,.... $=0, 1, 2,...., (n-1)$ e i valori da assegnare ad essi per ottenere gli addendi di ciascuna $\sum$ sono rispettivamente le combinazioni 1 a 1, 2 a 2, ecc. di 0, 1, 2,.... $(n-1)$. Le relazioni che legano le coordinate simmetriche delle radici ai coefficienti dell'equazione data possono dedursi da (5), (1) e (2). La (5) contiene n incognite r_{00}, r_{01}, r_{02},.... $r_{0(n-1)}$; notando però che $\sum r_p = A_1$ si vede che $r_{00} = \frac{A_1}{n}$ e che (5) può perciò facilmente ridursi a un sistema di $(n-1)$ equazioni fra le $(n-1)$ incognite r_{01}, r_{02},.... $r_{0(n-1)}$. Per trovare le relazioni che legano queste n incognite r_{01}, r_{02},.... $r_{0(n-1)}$ ai coefficienti A_1, A_2,.... A_n dell'equazione data è meglio ricorrere alle formule di Newton, cioè a:

$$
\begin{aligned}
&\sum r_p = A_1 \\
&\sum r_p^2 - A_1 \sum r_p = -2A_2 \\
&\sum r_p^3 - A_1 \sum r_p^2 + A_2 \sum r_p = 3A_3 \\
&\sum r_p^4 - A_1 \sum r_p^3 + A_2 \sum r_p^2 = A_3 \sum r_p = -4A_4 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum r_p^{n-1} - A_1 \sum r_p^{n-2} + A_2 \sum r_p^{n-3} - \dots = -(-1)^{n-1}(n-1)A_{n-1} \\
&\sum r_p^n - A_1 \sum r_p^{n-1} + A_2 \sum r_p^{n-2} - \dots = -(-1)^n n A_n.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Dove

$$
\begin{aligned}
&\sum r_p = (r_0 + r_1 \dots + r_{n-1}) \\
&\sum r_p^2 = (r_0^2 + r_1^2 + \dots\ r_{n-1}^2) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\sum r_p^n = (r_0^n + r_1^n + \dots + r_{n-1}^2).
\end{aligned}
$$

Come abbiamo visto, $\sum r_p^m$ è uguale a n volte la coordinata di sequenza zero di $S(r_0^m)$: da (5) e (6) possiamo allora vedere che le somme dei prodotti delle r prese 1 a 1, 2 a 2, ecc., possono esprimersi in funzione delle coordinate di seguenza zero delle potenze di $S(r_0)$.

Dalla (6) si ha pure:

$$
\begin{aligned}
&\sum r_p = A_1 \\
&\sum r_p^2 - A_1^2 = -2A_2 \\
&\sum r_p^3 - A_1^3 + 3A_2A_1 = 3A_3 \\
&\sum r_p^4 - A_1^4 - 4A_3A_1 + 4A_1^2A_2 - 2A_2^2 = -4A_4 \\
&\sum r_p^5 - A_1^5 + 5A_4A_1 - 2A_1^3A_1 - 5A_1^2A_3 - 5A_1A_2^2 + 5A_2A_3 + A_2A_1^3 = 5A_5 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Applichiamo ora le considerazioni precedenti alla risoluzione delle equazioni di 2°, 3° e 4° grado.

1. - Equazione di 2° grado.

Per $n=2$, l'equazione (4) diventa:

$$x^2 - A_1x + A_2 = 0 \tag{8}$$

che è l'equazione generale di 2° grado.

r_0, r_1 siano le sue radici e r_{00}, r_{01} le loro coordinate simmetriche. Sarà:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= r_{00} + r_{01} \\
r_1 &= r_{00} + a^{-1} r_{01}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

dove

$$a = e^{j\pi}$$

Essendo:

$$\sum r_p = 2r_{00}$$
$$\sum r_p^2 = 2(r_{00}^2 + r_{01}^2).$$

Dalla (7) si ricava:

$$2r_{00} = A_1$$
$$2(r_{00}^2 + r_{01}^2) - A_1^2 = -2A_2$$

ovvero:

$$r_{00} = \frac{A_1}{2}$$
$$r_{01} = \pm\sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

e dalla (9):

$$r_0 = \frac{A_1}{2} \pm \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$
$$r_1 = \frac{A_1}{2} \mp \sqrt{\frac{A_1^2}{4} - A_2}$$

che sono le formule ben note.

2. - Equazione di 3° grado.

Per $n=3$ l'equazione (4) diventa:

(10) $$x^3 - A_1x^2 + A_2x - A_3 = 0$$

che è l'equazione generale di 3° grado.

r_0, r_1, r_2 siano le sue radici e r_{00}, r_{01}, r_{02}, le loro coordinate simmetriche.

Da (1) si ha:

(11) $$\begin{aligned} r_0 &= r_{00} + r_{01} + r_{02} \\ r_1 &= r_{00} + a^{-1}r_{01} + a^{-2}r_{02} \\ r_2 &= r_{00} + a^{-2}r_{01} + a^{-4}r_{02}. \end{aligned}$$

Dove:

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}.$$

In questo caso:

$$\sum r_p = 3r_{00}$$
$$\sum r_p^2 = 3(r_{00}^2 + 2r_{01}r_{02})$$
$$\sum r_p^3 = 3(r_{00}^3 + r_{01}^3 + r_{02}^3 + 6r_{00}r_{01}r_{02}).$$

Cosicchè le 3 prime equazioni del sistema (7) diventeranno:

(12) $$\begin{aligned} &(12\,a) && 3r_{00} = A_1 \\ &(12\,b) && 3(r_{00}^2 + 2r_{01}r_{02}) = A_1^2 - 2A_2 \\ &(12\,c) && 3(r_{00}^3 + r_{01}^3 + r_{02}^3 + 6r_{00}r_{01}r_{02}) = A_1^3 - 3A_2A_1 + 3A_3 \end{aligned}$$

ovvero:

$$r_{00} = \frac{A_1}{3}$$
$$3\left(\frac{A_1^2}{9} + 2r_{01}r_{02}\right) = A_1^2 - 2A_2$$
$$3\left(\frac{A_1^3}{27} + r_{01}^3 + r_{02}^3 + 2A_1r_{01}r_{02}\right) = A_1^3 - 3A_2A_1 + 3A_3.$$

Da cui:

$$r_{00}=\frac{A_1}{3}$$

(13)
$$6r_{01}r_{02}=\frac{2}{3}A_1^2-2A_2$$

$$3r_{01}^3+3r_{02}^3+6A_1r_{01}r_{02}=\frac{8}{9}A_1^3-3A_2A_1+3A_3$$

e ponendo:

(14)
$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}A_1^2-2A_2\right)=q_1$$

(15)
$$\frac{2}{27}A_1^3-\frac{A_1A_2}{3}+A_3=s_1$$

dopo alcune trasformazioni si perviene a:

$$r_{01}^3r_{02}^3=\frac{q_1^3}{27}$$

$$r_{01}^3+r_{02}^3=s_1$$

e cioè r_{01}^3 e r_{02}^3 sono le radici dell'equazione di 2° grado:

$$y^2-s_1y+\frac{q_1^3}{27}=0$$

cosicchè:

$$r_{01}^3=\frac{s_1}{2}+\sqrt{\frac{s_1^2}{4}-\frac{q_1^3}{27}}$$

$$r_{02}^3=\frac{s_1}{2}-\sqrt{\frac{s_1^2}{4}-\frac{q_1^3}{27}}$$

$$r_{01}=\pm\sqrt[3]{\frac{s_1}{2}+\sqrt{\frac{s_1^2}{4}-\frac{q_1^3}{27}}}$$

$$r_{02}=\pm\sqrt[3]{\frac{s_1}{2}-\sqrt{\frac{s_1^2}{4}-\frac{q_1^3}{27}}}.$$

Sostituendo in (11) quelli di questi valori di r_{01} e r_{02} che soddisfano la (13), le radici dell'equazione data restano immediatamente determinate.

3. - Equazione di 4° grado.

Per $n=4$ l'equazione (4) diventa:

(16)
$$x^4-A_1x^3+A_2x^2-A_3x+A_4=0$$

che è l'equazione generale di 4° grado.

r_0, r_1, r_1, r_3 siano le sue radici e $r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03}$ le loro coordinate simmetriche.

Da (1) si ha:

(17)
$$\begin{aligned} r_0&=r_{00}+r_{01}+r_{02}+r_{03}\\ r_1&=r_{00}+a^{-1}r_{01}+a^{-2}r_{02}+a^{-3}r_{03}\\ r_2&=r_{00}+a^{-2}r_{01}+a^{-4}r_{02}+a^{-6}r_{03}\\ r_3&=r_{00}+a^{-3}r_{01}+a^{-6}r_{02}+a^{-9}r_{03}.\end{aligned}$$

Dove

$$a=e^{j\frac{\pi}{2}}.$$

In questo caso:

$$\begin{aligned}
&\sum r_p = 4r_{00}\\
&\sum r_p^2 = 4(r_{00}^2 + r_{02}^2 + 2r_{01}r_{03})\\
&\sum r_p^3 = 4(r_{00}^3 + 3r_{00}r_{02}^2 + 3r_{01}^2 r_{02} + 3r_{02}r_{03}^2 + 6r_{01}r_{02}r_{03})\\
&\sum r_p^4 = 4\{r_{00}^4 + r_{01}^4 + r_{02}^4 + r_{03}^4 + 6(r_{01}^2 r_{03}^2 + r_{00}^2 r_{02}^2) +\\
&\qquad + 12(r_{00}^2 r_{01} r_{03} + r_{00} r_{01}^2 r_{02} + r_{00} r_{02} r_{03}^2 + r_{01} r_{02}^2 r_{03})\}.
\end{aligned}$$

Cosicchè le prime 4 equazioni di (7) diventano:

$$(18)\quad \begin{aligned}
&(18\,a) && 4r_{00} = A_1\\
&(18\,b) && 4(r_{00}^2 + r_{02}^2 + 2r_{01}r_{03}) = A_1^2 - 2A_2\\
&(18\,c) && 4(r_{00}^3 + 3r_{00}r_{02}^2 + 3r_{01}^2 r_{02} + 3r_{02}r_{03}^2 + 6r_{01}r_{02}r_{03}) = A_1^3 - 3A_2A_1 + 3A_3\\
&(18\,d) && 4\{r_{00}^4 + r_{01}^4 + r_{02}^4 + r_{03}^4 + 6(r_{01}^2 r_{03}^2 + r_{00}^2 r_{02}^2) +\\
& && + 12(r_{00}^2 r_{01} r_{03} + r_{00} r_{01}^2 r_{02} + r_{00} r_{02} r_{03}^2 + r_{01} r_{02}^2 r_{03})\} =\\
& && = A_1^4 + 4A_3A_1 - 4A_1^2A_2 + 2A_2^2 - 4A_4.
\end{aligned}$$

Da cui:

$$(19)\quad \begin{aligned}
&(19\,a) && 4r_{00} = A_1\\
&(19\,b) && 6r_{00}^2 - 4r_{01}r_{03} - 2r_{02}^2 = A_2\\
&(19\,c) && 4r_{00}^3 - 8r_{00}r_{01}r_{03} - 4r_{00}r_{02}^2 + 4r_{01}^2 r_{02} + 4r_{02}r_{03}^2 = A_3\\
&(19\,d) && r_{00}^4 - r_{01}^4 + r_{02}^4 - r_{03}^4 - 4r_{00}^2 r_{01} r_{03} + 2r_{01}^2 r_{03}^2 - 4r_{02}^2 r_{03} r_{01} -\\
& && - 2r_{00}^2 r_{02}^2 + 4r_{00}(r_{01}^2 r_{02} + r_{02} r_{03}^2) = A_4
\end{aligned}$$

che si sarebbero potute ottenere direttamente da (5) e (17).

Dalla (19 a) si ha:

$$r_{00} = \frac{A_1}{4} \tag{20}$$

che sostituita nella (19 b) ci da:

$$6\frac{A_1^2}{16} - 4r_{01}r_{03} - 2r_{02}^2 = A_2$$

ovvero:

$$-4r_{01}r_{03} - 2r_{02}^2 = A_2 - 3\frac{A_1^2}{8} = A_2'. \tag{21}$$

Da cui:

$$-4r_{01}r_{03} = A_2 - \frac{3}{8}A_1^2 + 2r_{02}^2 = A_2' + 2r_{02}^2. \tag{22}$$

Sostituendo (20) e (22) nella (19 c) si ha:

$$4\frac{A_1^3}{4^3} + \frac{A_1}{2}\left(A_2 - \frac{3}{8}A_1^2 + 2r_{02}^2\right) - A_1 r_{02}^2 + 4r_{01}^2 r_{02} + 4r_{02}r_{03}^2 = A_3$$

ovvero:

$$\frac{A_1^3}{16} + \frac{A_1A_2}{2} - \frac{3A_1^3}{16} + 4r_{01}^2 r_{02} + 4r_{02}r_{03}^2 = A_3.$$

Cioè:

$$4(r_{01}^2 r_{02} + r_{02} r_{03}^2) = A_3 + \frac{A_1^3}{8} - \frac{A_1A_2}{2} = A_3'. \tag{23}$$

Sostituendo (20) e (23) nella (19 *d*) si ha:

$$\frac{A_1^4}{4^4}-r_{01}^4+r_{02}^4-r_{03}^4+\frac{A_1^2}{4^2}\left(A_2-\frac{3}{8}A_1^2+2r_{02}^2\right)+2r_{01}^2r_{03}^2-4r_{02}^2r_{03}r_{01}-$$
$$-2\frac{A_1^2}{4^2}r_{02}^2+\frac{A_1}{4}\left(A_3+\frac{A_1^3}{8}-\frac{A_1A_2}{2}\right)=A_4.$$

Da cui:

$$\frac{A_1^4}{4^4}-r_{01}^4+r_{02}^4-r_{03}^4+\frac{A_1^2}{4^2}A_2-\frac{3}{4^2\cdot 8}A_1^4+\frac{A_1^2}{8}r_{02}^2+2r_{01}^2r_{03}^2-$$
$$-4r_{02}^2r_{03}r_{01}-\frac{A_1^2}{8}r_{02}^2+\frac{A_1A_3}{4}+\frac{A_1^4}{32}-\frac{A_1^2A_2}{8}=A_4$$

ovvero:

$$\frac{3A_1^4}{4^4}-r_{01}^4+r_{02}^4-r_{03}^4-\frac{A_1^2A_2}{4^2}+2r_{01}^2r_{03}^2-4r_{02}^2r_{03}r_{01}+\frac{A_1A_3}{4}=A_4.$$

Da cui:

$$(24)\qquad -r_{01}^4+r_{02}^4-r_{03}^4+2r_{01}^2r_{03}^2-4r_{02}^2r_{03}r_{01}=A_4-\frac{3}{4^4}A_1^4+\frac{A_1^2}{4^2}A_2-\frac{A_2A_3}{4}=A_4'.$$

Per determinare ora r_{01}, r_{02}, r_{03} basta risolvere le equazioni simultanee (21), (23) e (24) e cioè il sistema:

$$(21)\qquad -4r_{01}r_{03}-2r_{02}^2=A_2'$$
$$(23)\qquad 4r_{01}^2r_{02}+4r_{02}r_{03}^2=A_3'$$
$$(24)\qquad -r_{01}^4+r_{02}^4-r_{03}^4+2r_{01}^2r_{03}^2-4r_{02}^2r_{01}r_{03}=A_4'.$$

Dalla (22) innalzando al quadrato si ha:

$$(25)\qquad 16r_{01}^2r_{03}^2=(A_4')^2+4r_{02}^4+4A_2'r_{02}^2.$$

Dalla (23) dividendo per $4r_{02}$:

$$r_{01}^2+r_{03}^2=\frac{A_3'}{4r_{02}}$$

e innalzando al quadrato:

$$r_{01}^4+r_{03}^4+2r_{01}^2r_{03}^2=\frac{(A_3')^2}{16r_{02}^2}$$

ovvero:

$$(26)\qquad -r_{01}^4-r_{03}^4=2r_{01}^2r_{03}^2-\frac{(A_3')^2}{16r_{02}^2}.$$

Sostituendo (26) nella (24) si ha:

$$r_{02}^4+4r_{01}^2r_{03}^2-\frac{(A_3')^2}{16r_{02}^2}-4r_{02}^2r_{01}r_{03}=A_4'$$

e sostituendo ancora (22) e (25):

$$r_{02}^4+\frac{(A_2')^4}{4}+r_{02}^4+A_2'r_{02}^2-\frac{(A_3')^2}{16r_{02}^2}+A_2'r_{02}^2+2r_{02}^4=A_4'$$

e moltiplicando per $\frac{r_{02}^2}{4}$:

$$r_{02}^6+\frac{1}{2}A_2'r_{02}^4+\left(\frac{A_2'}{16}-\frac{A_4'}{4}\right)r_{02}^2-\frac{(A_3')^2}{64}=0$$

da cui ponendo:

$$(27)\qquad r_{02}^2=y$$

si ha:

$$(28)\qquad y^3+\frac{1}{2}A_2'y^2+\left(\frac{A_2'}{16}-\frac{A_4'}{4}\right)y-\frac{(A_3')^2}{64}=0$$

che è un'equazione di 3° grado e può risolversi come detto precedentemente.

Le radici di (28) sostituite nella (27) permetteranno di determinare r_{02}. Sostituendo allora nella (21) e nella (23) si otterrà un sistema di equazioni in r_{01} e r_{03} che si può risolvere facilmente.

Note le r_{01}, r_{02}, r_{03} e conoscendo già r_{00} dalla (20), le r_0, r_1, r_2, r_3 possono determinarsi immediatamente per mezzo della (17).

Naturalmente di tutti i valori trovati per r_{01}, r_{02}, r_{03}, bisogna scegliere quelli che soddisfano le equazioni (21), (22) e (23).

L'applicazione del metodo precedente alle equazioni di grado superiore al 4° mentre riduce di 1 il grado del problema, conduce, in generale, a sistemi di equazioni molto complessi fra le coordinate simmetriche delle radici. RUFFINI ha già dimostrato l'impossibilità di risolvere le equazioni di grado superiore al 4° per mezzo di radicali. Comunque riteniamo interessante esporre alcune considerazioni che potranno riuscire utili a chi si proponga di sviluppare ulteriormente il metodo.

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\dots+A_n=0 \tag{29}$$

sia l'equazione generale di n^{simo} grado.

r_0, r_1,.... r_{n-1} le sue radici e r_{00}, r_{01},.... $r_{0(n-1)}$ le loro coordinate simmetriche. Supponiamo di effettuare la sostituzione

$$x=X+k \tag{30}$$

dove X è una nuova variabile e k una costante qualunque (reale o complessa).

Siano r_0', r_1',.... r_{n-1}' le radici della nuova equazione. Noi sappiamo che queste radici si possono ottenere direttamente dalle radici della (29) sottraendovi k. D'altro canto esprimendo le radici della (29) sotto la forma (1) si vede che la sottrazione di k varia solo la coordinata di sequenza zero r_{00}. Possiamo quindi concludere: « Le radici di tutte le equazioni ricavate dalla (29) per mezzo della sostituzione (30) differiscono solo nella loro coordinata di sequenza zero ».

Ma la coordinata di sequenza zero della (29) è data da:

$$r_{00}=-\frac{A_1}{n}$$

sicchè per trovare le coordinate delle altre sequenze basta sostituire in (29):

$$x=X+r_{00} \tag{31}$$

e risolvere rispetto a X. Per quanto detto, le radici dell'equazione così ottenuta avranno zero come coordinata di sequenza zero; detta equazione non conterrà quindi il termine in X^{n-1} e perciò sarà della forma:

$$X^n+A_2'X^{n-2}+A_3'X^{n-3}+\dots+A_n'=0. \tag{32}$$

I coefficenti A_2'.... A_n' possono ottenersi per esempio per mezzo della formula di TAYLOR.

Le equazioni che legano le coordinate simmetriche delle radici della (32) ai coefficienti della medesima possono ricavarsi immediatamente dalle corrispondenti equazioni date per la (29) ponendo $r_{00}=0$, $A_1=0$ e sostituendo A_2', A_3'.... A_n' al posto di A_2,.... A_n.

Per il caso dell'equazione di 3° grado è evidente che la corrispondente della (32) è:

$$X^3-q_1X-s_1=0$$

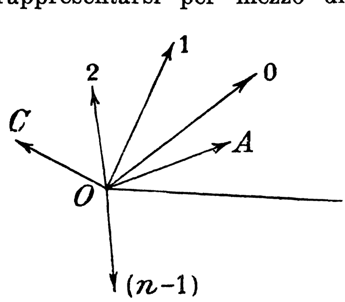
i cui coefficienti q_1, e s_1, sono dati da (14) e (15).

Analogalmente per il caso dell'equazione di 4° grado la corrispondente della (32) è:

$$X^4+A_2'X^2-A_3'X+A_4'=0$$

i cui coefficenti A_2', A_3', A_4' sono stati già determinati direttamente dalle (19).

Le radici r_0, r_1, r_2,...., r_{n-1} di (29) possono rappresentarsi per mezzo di vettori congiungenti l'origine o, di un sistema di coordinate, con n punti: 0, 1, 2,...., $(n-1)$ del piano.



La coordinata di sequenza zero r_{00} sarà allora rappresentata dal vettore che congiunge o col baricentro C del poligono 0, 1,...., $(n-1)$ mentre le coordinate delle altre sequenze saranno le stesse che per il sistema dei vettori che da c come origine terminano ai punti 0, 1, 2...., $(n-1)$.

Ritornando alla (30) supponiamo che k sia rappresentata dal vettore $0A$. La coordinata di sequenza zero delle radici dell'equazione ottenuta sostituendo (30) nella (29) sarà allora rappresentata dal vettore che va da A a C mentre le radici stesse saranno rappresentate dai vettori congiungenti A con 0, 1, 2,.... $(n-1)$.

L'equazione (32) corrisponde al caso in cui A coincide con C.

Consideriamo di nuovo l'equazione (29):

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+ .... +A_n=0. \tag{29}$$

Prendendone la derivata prima e uguagliandola a zero si ha l'equazione:

$$nx^{n-1}+(n-1)A_1x^{(n-2)}+ .... +A_{n-1}=0 \tag{33}$$

la coordinata di sequenza zero delle cui radici è:

$$r_{00}'=-\frac{(n-1)}{n(n-1)}A_1=-\frac{A_1}{n}$$

essa è quindi uguale alla coordinata di sequenza zero delle radici della (29). Prendendo le derivate 2ª, 3ª,.... etc. e eguagliandole a zero è facile vedere che le radici delle equazioni che così si ottengono hanno tutte la stessa coordinata di sequenza zero, possiamo quindi concludere che: *Le radici di un'equazione algebrica e quelle delle sue derivate hanno tutte la stessa coordinata di* *sequenza zero, ovvero riferendoci alla rappresentazione grafica:* C *è il baricentro di tutti i poligoni relativi ai gruppi di punti rappresentanti rispettivamente le radici di un' equazione e quelle delle sue derivate.*

Segue anche che la coordinata di sequenza zero delle radici di un' equazione di grado n è uguale alla radice della sua derivata n^{sime} uguagliata a zero.

Gennaio 1928.

BIBLIOGRAFIA

C. L. FORTESCUE. - « Method of Symmetrical Coordinates Applied to the solution of Polyphase Networks ». Transactions of the American Institute of Eletrical Eugineers 1918 pagina 1037.

E. BOTTANI. - « La Moderna Matematica dei Circuiti trifasi ». Monografia de l'Elettrotecnica.

G. CALABRESE. - « L'applicazione delle coordinate simmetriche allo studio dei circuiti elettrici ». L' Elettrotecnica 25 Aprile 1928.

A. P. MACKERRAS. - « Calculation of single-phase short circuit by the method of symmetrical components ». General Electric Revien Aprile e Luglio 1926.

C. F. WAGNER & R. D. EVANS. - « Symmetrical components ». The Electric Journal, Marzo, Aprile, Maggio e Giugno 1928.

J. FALLON. - « Calcolo dei corti circuiti trifasi ». Bulletin de la Société Française des Électriciens, Settembre 1926.

Ö. Ore (New Haven - U. S. A.)

AN ARITHMETIC THEORY OF GALOIS-FIELDS

The first part of this paper has been published under the title: « Abriss einer arithmetischen Theorie der algebraischen Körper, Erste Mitteilung », in Mathematische Annalen, Vol. 100 (1928), p. 650-673. The second part will appear shortly in the same periodical.

B. MEIDELL (Oslo - Norvegia)

LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES ET LES INÉGALITÉS GÉNÉRALES

Quand on cherche une fonction de plusieurs variables, et que cette fonction se présente par une équation fonctionnelle quelconque, la supposition que la fonction ainsi cherchée soit symétrique par rapport à ses variables, sans être nécessairement algébrique, ne paraît en général faciliter la résolution de l'équation fonctionnelle en question d'aucune façon. Il faut en général procéder à la résolution générale et complète de l'équation fonctionnelle donnée, en utilisant les moyens ordinaires de l'analyse, pour choisir ensuite parmi les solutions ainsi trouvées — s'il y en a plusieurs — celles qui sont symétriques par rapport à leurs variables.

Ce fait nous paraît assez remarquable; la supposition de la symétrie doit être considérée comme une restriction assez grande pour permettre de faire avancer le problème d'une façon directe, et il nous paraît probable qu'il serait possible de dresser des moyens — un certain « Calcul symétrique » — permettant de tirer un tel avantage direct, si petit soit-il, d'une pareille supposition sur la construction d'une fonction cherchée, définie par une équation fonctionnelle.

Il est possible que la question ainsi indiquée présente des difficultés, et l'auteur de ces remarques ne prétend nullement avoir trouvé les moyens pour construire un pareil instrument analytique, mais d'un autre côté, la question n'a peut-être pas assez attiré l'attention des mathématiciens, et aussi l'on peut parfois tirer en effet un certain avantage direct, mêmes des qualités les plus simples des fonctions symétriques, ainsi p. e. dans certaines questions relatives aux inégalités entre les fonctions symétriques et dans la question de maximum et de minimum de ces fonctions.

* * *

Si par O_{x_i} on comprend une opération fonctionelle quelconque O, portant sur la seule variable x_i d'une fonction symétrique $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on a p. e. évidemment

$$(O_{x_1}S)_{x_1=x_2} = (O_{x_2}S)_{x_1=x_2}$$

et de là on trouve p. e. — en repétant — que si dans l'expression

$$\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n}S}{\partial x_1^{a_1}\partial x_2^{a_2}\dots\partial x_n^{a_n}}$$

on pose, après la différentiation, $x_1=x_2=\dots=x_n$, cette expression ne change pas quand on permute les x_i ou les a_i. De là résulte p. e., que, dans le cas de la convergence, *le développement général en série de Taylor d'une fonction symétrique quelconque — transcendante ou algébrique — sera donné par une suite infinie de fonctions homogènes,* avec des coefficients de la forme

$$\frac{1}{a!\;a!\dots\;a_n!}\sum\left(\frac{\partial^{a_1+a_2+\dots+a_n}S}{\partial x_1^{a_1}\partial x_2^{a_2}\dots\partial x_n^{a_n}}\right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=0}$$

* * *

Soient $Z_1(x_1, x_2,\dots, x_n),\dots Z_n(x_1, x_2,\dots, x_n)$, n fonctions arbitraires et uniformes des variables $x_1, x_2,\dots, x_n$, et développons la fonction

$$\psi(t)=F(Z_1+(x_1-Z_1)t,\; Z_2+(x_2-Z_2)t,\dots,\; Z_n+(x_n-Z_n)t)$$

en série de Taylor, et mettons ensuite $t=1$; alors nous aurons:

$$F(x_1, x_2,\dots, x_n)=F[Z_1(x_1, x_2,\dots, x_n),\; Z_2(x_1, x_2,\dots, x_n),\dots,\; Z_n(x_1, x_2,\dots, x_n)]+$$
$$\sum_{\varrho=1}^{m-1}\frac{1}{\varrho!}\left[\frac{\partial F(Z_1, Z_2,\dots, Z_n)}{\partial Z_1}(x_1-Z_1)+\frac{\partial F(Z_1, Z_2,\dots, Z_n)}{\partial Z_2}(x_2-Z_2)+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial F(Z_1, Z_2,\dots, Z_n)}{\partial Z_n}(x_n-Z_n)\right]^{(\varrho)}+R_m,$$

où l'on a

$$R_m=\frac{1}{m!}\left[\frac{\partial F(y_1, y_2,\dots, y_n)}{\partial y_1}(x_1-Z_1)+\dots+\frac{\partial F(y_1, y_2,\dots, y_n)}{\partial y_n}(x_n-Z_n)\right]^{(m)},$$

où pour toutes les y_i on a

$$y_i=Z_i(x_1, x_2,\dots, x_n)+\Theta(x_i-Z_i(x_1, x_2,\dots, x_n))\,;\;\; 0<\Theta<1.$$

C'est une généralisation du développement de la série de Taylor. Toutes les fois que p. e. R_1 garde un signe constant, on a donc là des inégalités entre les deux fonctions $F(x_1, x_2,\dots, x_n)$ et $F(Z_1, Z_2,\dots, Z_n)$.

Soit p. e. le cas très simple où l'on choisit

$$Z_1(x_1, x_2,\dots, x_n)=Z_2(x_1, x_2,\dots, x_n)=\dots=Z_n(x_1, x_2,\dots, x_n),$$

et soit F une fonction symétrique S, alors nous aurons un développement dont les premiers termes seront

$$S(x_1, x_2,\dots, x_n)=S[Z(x_1, x_2,\dots, x_n),\dots\; Z(x_1, x_2,\dots, x_n)]+$$
$$\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)_{x_1=x_2=\dots=Z}\cdot\left(\sum_1^n x_i-nZ\right)+\frac{1}{2!}\left[\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1^2}\right)_{x_1=x_2=\dots=Z}\cdot\sum_1^n(x_i-Z)^2+2\left(\frac{\partial^2 S}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{x_1=x_2=\dots=Z}\cdot\sum(x_i-Z)(x_k-Z)\right]+\dots$$

P. e. on trouve, en prenant $Z=\frac{\Sigma x_i}{n}$, et $S=\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$,

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i-\frac{1}{2}\frac{\sum_{1}^{n}(x_i-Z)^2}{\Sigma x_i}+\dots.$$

Les exemples se multiplient facilement. La quantité R_m doit être étudiée en chaque cas particulier.

On a un autre exemple intéressant en mettant $Z=\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_i$ et $S=\frac{\Sigma\psi(x_i)}{n}$: on trouve alors

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\psi(x_i)}{n}=\psi\left(\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}\right)+\frac{1}{2n}\psi''\left(\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-Z)^2+\dots.$$

Si p. e. ψ est convexe, on voit que R_2 est positif et l'on retrouve ainsi (par une généralisation immédiate) l'inégalité bien connue de HÖLDEN-JENSEN.

$$\frac{\sum_{1}^{n} a_i\psi(x_i)}{\sum_{1}^{n} a_i}>\psi\left(\frac{\sum_{1}^{n} a_i(x_i)}{\sum_{1}^{n} a_i}\right)$$

En prenant $F=\sum_{1}^{n}\psi_i(x_i)$, *on aura, comme on le voit tout de suite, une inégalité bien plus générale encore, si toutes les* ψ_i *sont des fonctions convexes.*

* * *

À l'aide de la symétrie, on peut construire encore une autre source pour former des inégalités génerales. En cherchant le maximum ou le minimum de $S(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ tandis qu'une autre fonction symétrique $Z(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$ reste constante, on trouve facilement qu'il y a une solution (des conditions nécessaires)

$$x_1=x_2=x_3=\dots=x_n=Z^{-1}(Z(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)),$$

où Z^{-1} est une fonction inverse de la fonction $Z(x,\ x,\ x,\dots,\ x)$.

Donc p. e. dans le cas d'un minimum on aura

$$S(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)\geqslant S[Z^{-1}(Z(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)),\dots,\ Z^{-1}(Z(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n))]$$

P. e. pour $S=\frac{\sum_{1}^{n}\psi(x_i)}{n}$ et $Z=\frac{\sum_{1}^{n} x_i}{n}$, on retrouve l'inégalité de HÖLDEN-JENSEN.

Pour savoir s'il y a réellement un maximum ou un minimum ou s'il n'y a ni maximum ni minimum, il faut en chaque cas particulier avoir recours aux conditions suffisantes bien connues qui pourtant se simplifient sensiblement à cause de la symétrie. Une exposition complète en sera donnée dans la *Skandinavisk aktuarietidsskrift* Stockholm, Décembre 1928.

A. CAHEN (Paris - Francia)

CHAÎNES DE FONCTIONS INDÉFINIMENT SUPERPOSÉES, DONT LES NOMBRES GÉNÉRATEURS APPARTIENNENT À UN ENSEMBLE LINÉAIRE

§ 1. - Soit $R(z)$ une fonction positive, croissant indéfiniment avec z. Les nombres $R(1)$, $R(2)$,...., $R(n)$ (n entier) sont dits *parfaits* dans le système R. Posons $R(u)=z$, d'où $u=\varrho(z)$, l'algorithme $\varrho(z)$ est la racine de $R(z)$, qui inversement est appelé *élévateur*.

Soit N un nombre positif. Si N est parfait, $N=R(a_0)$; l'entier a_0 est la racine exacte de N; dans le cas contraire $R(a_0-1)<N<R(a_0)$; alors a_0 est la racine par excès de N à moins d'une unité.

Le résidu de l'opération précédente $r=R(a_0)-N$ est inférieur à

$$\delta_0=R(a_0)-R(a_0-1).$$

On peut donc écrire

$$N=R(a_0)-\frac{R(a_0)-R(a_0-1)}{N_1} \qquad (N_1>1).$$

Si N_1 n'est pas parfait, on opérera sur N_1, comme on l'a fait sur N. On obtient une suite d'égalités de le forme

$$N_k=R(a_k)-\frac{R(a_k)-R(a_k-1)}{N_{k+1}}.$$

Si l'on est amené à rencontrer un quotient complet N_i, qui soit parfait, $N_i=R(a_i)$, l'opération est achevée, d'où la fraction continue $(F\cdot C\cdot R)$

$$N=R(a_0)+\frac{R(a_0)-R(a_0-1)}{-R(a_1)}+\ldots+\frac{R(a_{i-1})-R(a_{i-1}-1)}{-R(a_i)} \tag{1}$$

ou, avec une notation plus concise

$$N=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{i-1},\ a_i]\ (R). \tag{2}$$

Si l'on s'arrêtait à un quotient complet N_k $(k\leqslant i)$, on pourrait écrire

$$N=R(a_0)+\ldots+\frac{R(a_{k-2})-R(a_{k-2}-1)}{-R(a_{k-1})}+\frac{R(a_{k-1})-R(a_{k-1}-1)}{N_k}.$$

Nous emploierons la notation abrégée

$$N=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{k-2},\ a_{k-1},\ (N_k)]\ (R). \tag{3}$$

En particulier au lieu de (2) on pourra écrire

$$N=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_{i-1},\ (N_i)]$$

où $N_i=R(a_i)$.

Exemple. Soit $R(z)=z^2$, $N=\frac{25441}{2934}$.

Ici les nombres parfaits sont 1, 4, 9,...., n^2,....

$$R(a_k)-R(a_{k-1})=k^2-(k-1)^2=2k-1$$

$$\frac{23441}{2934}=3^2-\cfrac{5}{\cfrac{2934}{193}} \qquad N_1=\frac{2934}{193}$$

$$\frac{2934}{193}=4^2-\cfrac{7}{\cfrac{193}{22}} \qquad N_2=\frac{193}{22}$$

$$\frac{193}{22}=3^2-\frac{5}{22} \qquad N_3=22$$

$$22=5^2-\frac{9}{3} \qquad N_4=3$$

arrêtons-nous au quotient complet 3: on pourra utiliser l'une ou l'autre des égalités suivantes:

$$N=3^2+\frac{5}{-4^2}+\frac{7}{-3^2}+\frac{5}{-5^2}+\frac{9}{-3}$$

$$N=[3,\ 4,\ 3,\ 5,\ (3)]$$

$$N=[3,\ 4,\ 3,\ (22)]$$

$$N=\left[3,\ 4,\ \left(\frac{193}{22}\right)\right]$$

$$N=\left[3,\ \left(\frac{2934}{193}\right)\right]$$

§ 2. - Si, quel que soit k, aucun quotient complet N_k n'est parfait, on obtient une fraction continue illimitée et l'on écrit

$$N\backsim[a_0,\ a_1,\ a_2,....,\ a_k,....]\ (R)$$

Le signe $\backsim$ exprime que la valeur de la fraction continue, d'ailleurs convergente, est égale ou non au nombre générateur N, que nous appellerons intégrale de la fraction continue.

Exemple. Les nombres $N(\theta)=\frac{91+432\theta}{4+18\theta}$, où $0<\theta<1$, représentent tous les points d'un segment AB (extrémité A exclue $\theta=0$). Pour $\theta=0$, $N_0=\frac{91}{4}=[5, 2]$. Pour $\theta=1$, $N'=\frac{523}{22}=[5, 3, 2, 2, 2,....]$. Pour $0<\theta<1$, $N(\theta)$ a même développement que $N(1)=\frac{523}{22}$; mais, bien entendu, ce développement égal à $\frac{523}{22}$ diffère de $N(\theta)$. En effet:

$$\frac{91+432\theta}{4+18\theta}=5^2-\cfrac{9}{\cfrac{18\theta+4}{2\theta+1}}$$

$$\frac{18\theta+4}{2\theta+1}=3^2-\frac{5}{2\theta+1}$$

$$2\theta+1=2^2-\cfrac{3}{\left(\cfrac{3}{3-2\theta}\right)}$$

$2\theta+1$ étant compris entre 1 et 3, il en est de même de $\frac{3}{3-2\theta}$ $(0<\theta<1)$; il en résulte que $\frac{3}{3-2\theta}$, étant compris également entre 1 et 3, est de la forme $2^2-\frac{3}{x_1}$, x_1, étant lui-même compris entre 1 et 3 et que par suite

$$\frac{91+432\theta}{4+18\theta} \sim [5, 3, 2, 2, 2, 2, ...] \quad (z^2).$$

§ 3. - Les nombres intégraux d'une même $F \cdot C \cdot R$ sont dits nombres *co-intégraux*. L'ensemble des nombres co-intégraux constitue l'intégrale générale. Ainsi dans l'exemple précedent,

$$N(\theta)=\frac{91+432\theta}{4+18\theta}$$

est l'intégrale générale de $[5, 3, 2, 2, 2, 2, ...]$; mais $N(1)=\frac{523}{22}$ est l'intégrale *exacte*, tandis que $N(0)=\frac{91}{4}$, qui n'est pas intégrale sera dite une *intégrale asymptote.*

Si deux nombres N' et N'' sont co-intégraux, il en est de même pour tous les nombres intermédiaires, mais les quotients complets respectifs $N_k'<N_k<N_k''$ de même rang sont dans l'ordre de grandeur de N', N, N''.

Nous substituerons souvent à un nombre son point représentatif sur une droite; quand le point intégral est unique, on dit que l'intégrale est isolée ou ponctuelle. Dans ce cas le nombre générateur unique est égal à la $F \cdot C \cdot R$.

§ 4. - Soit N une intégrale (non isolée) d'une $F \cdot C \cdot R$. Posons

$$P_n=[a_0, a_1, a_2, ..., a_n]$$

P_n est la réduite d'ordre $(n+1)$. Quel que soit n

$$N<P_n<P_{n-1}<P_{n-2}< .... <P_1<P_0=R(a_0).$$

Les P_n décroissant, tout en restant supérieurs à N tendent vers une limite $l \geqslant N$, l est l'intégrale exacte. Si $l>N$, l, N et tous les nombres intermédiaires sont co-intégraux. Soit l' leur limite inférieure; nous montrerons que l' est un nombre *limité* (à développement limité). Tous les nombres compris entre l' (exclus) et l (inclus) sont co-intégraux. Nous dirons que l' est une intégrale *asymptote* et que l'intégrale générale est linéaire.

En effet $\quad R(a_0-1) \leqslant l'<l<P_n<P_{n-1}< .... <P_1<P_0=R(a_0).$

Si $l'=R(a_0-1)$, l' est limité; sinon $l'>R(a_0-1)$. Soient

$$l_1', \ l_2', \ l_3', ..., \ l_1, \ l_2, \ l_3, ...$$

les quotients complets des développements de l' et l; a_1, a_2, a_3,.... leurs coefficients (communs)

$$R(a_0-1)<l'<l<R(a_0); \quad R(a_k-1)<l_k'<l_k<R(a_k) \quad (0<\theta<1).$$

Posons

$$x_0(\theta)=l'-\theta[l'-R(a_0-1)], \quad x_k(\theta)=l_k'-\theta[l_k'-R(a_k-1)]$$

d'où
$$R(a_0-1)<x_0(\theta)<l', \quad R(a_k-1)<x_k(\theta)<R(a_k).$$

Si l' était illimité, il en serait de même de le suite l_k'. Considerons alors la nouvelle suite

$$\Pi_0(\theta)=x_0, \qquad \Pi_1(\theta)=[a_0,\ (x_1)], \qquad \Pi_2(\theta)=[a_0,\ a_1,\ (x_2)],$$
$$\Pi_3(\theta)=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ (x_3)],\ldots, \qquad \Pi_k(\theta)=[a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_{k-2},\ a_{k-1},\ (x_k)]$$

les $\Pi_k(\theta)$ restent inférieurs à l'; ils forment de plus une suite décroissante. Montrons que
$$\Pi_1(\theta)>\Pi_0(\theta).$$

En posant $\delta_0=R(a_0)-R(a_0-1)$ et supposant $R(a_0-1)\geqslant 1$.

Cela revient à vérifier la suite d'inégalités équivalentes

$$R(a_0)-\frac{\delta_0}{(1-\theta)l_1'+\theta R(a_1-1)}>(1-\theta)R(a_0)-\frac{(1-\theta)\delta_0}{l_1'}+\theta R(a_0-1)$$
$$\frac{\delta_0}{l_1'(1-\theta)+\theta R(a_1-1)}+R(a_0)(1-\theta)+\theta R(a_0-1)<R(a_0)+\frac{\delta_0(1-\theta)}{l_1'}$$
$$\frac{\delta_0}{(1-\theta)l_1'+\theta R(a_1-1)}<\theta\delta_0+\frac{\delta_0(1-\theta)}{l_1'}$$
$$\frac{1}{l_1'-\theta[l_1'-R(a_1-1)]}<\frac{1+\theta(l_1'-1)}{l_1'}$$
$$\frac{l_1'}{1+\theta(l_1'-1)}<l_1'-\theta[l_1'-R(a_1-1)].$$
$$l_1'<l_1'(l_1'-1)\theta+l_1'-(l_1'-1)[l_1'-R(a_1-1)]\theta^2-\theta[l_1'-R(a_1-1)]$$
$$(l_1'-1)(l_1'-R)\theta^2<\theta[l_1'(l_1'-1)-(l_1'-R)]$$

(1) $$\theta[(l_1'-1)(l_1'-R)]<l_1'(l_1'-1)-(l_1'-R).$$

Je dis que

(2) $$(l_1'-1)(l_1'-R)\leqslant l_1'(l_1-1)-(l_1'-R).$$

Cela revient à l'inégalité évidente
$$R(l_1'-1)\geqslant l_1'-R.$$

Donc à *fortiori* l'inégalité (1) sera verifiée; c'est-à-dire que $\Pi_1<\Pi_0$. On démontrerait de même que $\Pi_{k+1}<\Pi_k$ en établissant que
$$R(a_k)-\frac{R(a_k)-R(a_{k-1})}{x_{k+1}}<x_k.$$

Les $\Pi_k(\theta)$ tendent donc vers une limite $\lambda(\theta)\leqslant l'$.

$\lambda(\theta)$ développée en fraction continue aurait comme coefficients
$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n,\ldots$$

c'est-à-dire les mêmes coefficients que la $F\cdot C$ donnée; donc $\lambda(\theta)$ serait une intégrale de la $F\cdot C$ d'où
$$\lambda(\theta)\sim[a_1,\ a_2,\ a_3,\ldots,\ a_n,\ldots]\ (R).$$

§ 5. - Prouvons maintenant que $\lambda(\theta)$ n'est pas égale à l':

$$\lambda(\theta) < l'.$$

En effet supposons pour un instant $\lambda(\theta) = l'$.

Soit $0 < \zeta < \theta < 1$, d'où $x_k(\theta) < x_k(\zeta)$ et

$$R(a_0 - 1) < \lambda(\theta) < \lambda(\zeta) \leqslant l'$$

on aurait, en même temps $\lambda(\zeta) > l'$ et $\lambda(\zeta) \leqslant l'$, ce qui est contradictoire.

Donc $\lambda(\theta) < l'$, et, de ce fait, il existerait une infinité d'intégrales $\lambda(\theta)$ inférieures à l', ce qui est contraire à l'hypothèse que l' est la limite inférieure des intégrales. Donc l' est limitée et, par suite, une intégrale *asymptote*.

Ainsi dans l'exemple du § 2, les nombres

$$N(\theta) = \frac{91 + 432\theta}{4 + 18\theta} (0 < \theta \leqslant 1) \text{ où } R(z) = z^2$$

remplissent un segment AB (A exclus). Ce sont les nombres co-intégraux de la $F \cdot C$ [5, 3, 2, 2, 2,....].

L'intégrale exacte $\frac{523}{22} = [5, 3, 2, 2, 2, ...]$ correspond â $\theta = 1$ (au point B); l'intégrale asymptote ($\theta = 0$) correspond au point A dont l'abscisse est la $F \cdot C$ limitée

$$\frac{9}{4} = 25 - \frac{9}{4} = 5^2 - \frac{2 \times 5 - 1}{2^2} = [5, 2].$$

§ 6. - Soit N un nombre illimité [1]; P_0, P_1,...., P_n les réduites de son développement en $F \cdot C$; l la valeur de la $F \cdot C$. On a

$$P_n = [a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n].$$

Remplaçons dans P_n, a_n par $a_n - 1$; nous poserons

$$Q_n = [a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n - 1].$$

Si, quel que soit n, $R(a_n - 1) \neq 0$, on aura

$$R(a_0 - 1) = Q_0 < Q_1 < .... < Q_{n-1} < Q_n < N \leqslant l < P_n < P_{n-1} < .... < P_0 = R(a_0).$$

Deux cas peuvent se présenter:

a) ou bien la suite Q_n est illimitée; les Q_n tendent vers une limite $l' \leqslant N$. Mais dans ce cas $l' = l$, donc $N = l$; et N est l'intégrale exacte et unique de la $F \cdot C$;

b) ou bien la suite Q_n est limitée; c'est-à-dire qu'il existe un indice k, à partir duquel tous les Q_n sont égaux à Q_k. La condition $Q_{k+1} = Q_k$ ou

$$R(a_k) - \frac{R(a_k) - R(a_k - 1)}{R(a_{k+1} - 1)} = R(a_k - 1)$$

revient à $R(a_{k+1} - 1) = 1$. On aura donc généralement $R(a_{k+p} - 1) = 1$; ce qui

[1] C'est-à-dire à développement illimité.

montre que 1 est un nombre parfait du système (R); c'est-à-dire qu'il existe un entier λ, tel que $R(\lambda)=1$. Dans ces conditions $a_{k+1}=a_{k+2}=\dots=\lambda+1$; à partir d'un certain rang, tous les coefficients a_i deviennent égaux; la fraction continue est *périodique*; nous l'appellerons *monopériodique*, la période ne comprenant qu'un seul coefficient ou *module* de périodicité $\lambda+1$

$$R(\lambda+1)-1=R(\lambda+1)-\frac{R(\lambda+1)-R(\lambda)}{R(\lambda+1)-R(\lambda)}$$

et comme $R(\lambda)=1$

$$R(\lambda+1)-1=R(\lambda+1)-\frac{R(\lambda+1)-1}{R(\lambda+1)-1}$$

ce qui montre que le développement de $R(\lambda+1)-1$ est monopériodique, avec $\lambda+1$ comme module de periodicité. On aura donc

$$l=[a_0,\ a_1,\dots,\ a_{k-2},\ a_{k-1}+1,\ \lambda+1,\ \lambda+1,\ \lambda+1,\dots]$$

qu'on écrira

$$l=[a_0,\ a_1,\dots,\ a_{k-2},\ a_{k-1}+1,\ \overline{\lambda+1}].$$

§ 7. - Conformément à la théorie générale, dans le système précédent, tout nombre limité l' est en même temps, un nombre asymptote. Soit

$$l'=[a_0,\ a_1,\dots,\ a_{k-2},\ a_{k-1}]$$

A son point répresentatif (affixe). Considérons les expressions

$$N_k(\theta)=[a_0,\ a_1,\dots,\ a_{k-2},\ a_{k-1}+1,\ (a_k)]$$

où

$$a_k=1+\theta[R(\lambda+2)-1] \qquad (0<\theta\leqslant 1).$$

Les affixes des $N_k(\theta)$ remplissent un segment AB (A exclu). Si l'on poursuit le développement en $F\cdot C$ de $N_k(\theta)$ au dela de a_k, tous les $N_k(\theta)$ donneront lieu au même développement (seront équidéveloppables), dont la valeur l correspond à $\theta=1$

$$l=N(1)=[a_0,\ a_1,\dots,\ a_{k-2},\ a_{k-1}+1,\ (l_k)]$$

où

$$l_k=R(\lambda+1)-1.$$

Exemple. $R(z)=z^2$. Alors $\lambda=1$

$$R(\lambda+1)=R(2)=4, \qquad a_k=1+2\theta.$$

Soit

$$l'=\frac{317}{5}=8^2-\frac{15}{5^2}=8^2-\frac{2\times 8-1}{5^2}=[8,5]$$

$$l=8^2-\cfrac{15}{6^2-\cfrac{11}{(3)}}=[8,6,(3)]=\frac{6163}{97}$$

$$N(\theta)=8^2-\cfrac{15}{6^2-\cfrac{11}{1+2\theta}}=[8,6,(1+2\theta)]=\frac{1585+4578\theta}{25+72\theta}$$

$l=N(1)$, $l'=N(0)$.

D'ailleurs $1+2\theta$ donne lieu à un développement périodique. L'étude de la périodicité générale fera l'objet d'une autre communication.

Chaînes descendantes de deux séries de fonctions superposées.

§ 8. - Soit $f(z)$ une fonction, dite fondamentale, positive, croissante ainsi que son inverse $\varphi(z)$; $R(z)$ un élévateur et N un nombre positif.

Si $\varphi(N)$ n'est pas un nombre parfait du système R, soit a_0 la racine par excès à une unité près de $\varphi(N)$

$$R(a_0-1)<\varphi(N)<R(a_0)$$

d'où

$$\varphi(N)=R(a_0)-\frac{R(a_0)-R(a_0-1)}{N_1},\quad N=f\left[R(a_0)-\frac{R(a_0)-R(a_0-1)}{N_1}\right]\ (N_1>1)$$

Si $\varphi(N_1)$ n'est pas parfait, nous opérons sur $\varphi(N_1)$ comme sur $\varphi(N)$, d'où une suite d'égalités

$$N_k=f\left[R(a_k)-\frac{R(a_k)-R(a_k-1)}{N_{k+1}}\right].$$

Si $\varphi(N_{k+1})$ est parfait, le développement est limité.

Si dans le suite des opérations, l'on ne rencontre aucun nombre N_i, tel que $\varphi(N_i)$ soit parfait, le développement est illimité, et l'on écrit dans les deux cas

$$N\backsim f\left[R(a_0)-\cfrac{R(a_0)-R(a_0-1)}{f\left[R(a_1)-\cfrac{R(a_1)-R(a_1-1)}{f\left[R(a_2)-\cfrac{R(a_2)-R(a_2-1)}{f-[\ldots.]}\right]}\right]}\right]$$

ou plus simplement

$$N\backsim[a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots.,\ a_k,\ldots.]\ (f,\ R).$$

Nous appellerons les nombres entiers a_i les coefficients du développement et les N_i *quotients complets* généralisés. Le signe $\backsim$ indique que N est tantôt égal au développement, tantôt différent.

Les chaînes limitées

$$P_0=[a_0],\qquad P_1=[a_0,\ a_1],\qquad P_k=[a_0,\ a_1,\ldots.,\ a_k]$$

seront les *réduites* de la chaîne; elles décroissent avec l'indice k et quel que soit k, on a

$$f[R(a_0-1)]<N<P_k<P_{k-1},\ldots.<P_1<P_0=f[R(a_0)].$$

Si la chaîne est illimitée, les P_k tendent vers une limite $l\geqslant N$. La chaîne est donc convergente.

Si $l=N$, N coïncide avec son développement; si $N<l$ il existe une infinité de nombres possédant ce développement; le plus grand est l. Soit l' leur limite inférieure $N>l'$. Tous les nombres compris entre l' (exclus) et l (inclus) ont même développement; l' est une chaîne *limitée* et est une intégrale asymptote.

Daus une autre communication, sur la périodicité, nous étudierons quelques chaînes périodiques de cette espèce.

A. CAHEN (Paris - Francia)

NOMBRES RATIONNELS ET QUADRATIQUES ATTACHÉS À CERTAINES CHAÎNES ILLIMITÉES ET PÉRIODIQUES

§ 1. - Nous utiliserons les notations et les principes introduits dans la communication précédente.

Supposons qu'à partir d'un certaîn coefficient b_1 tous les coefficients forment un groupe $b_1, b_2, \dots, b_k$ qui se répète indéfiniment dans le même ordre; nous dirons que la $F \cdot C$ est périodique d'ordre k. Les b_i sont les *modules* de périodicité. Nous écrirons

$$[a_1, a_2, \dots, a_p; \quad b_1, b_2, \dots, b_k; \quad b_1, b_2, \dots, b_k; \quad b_1, b_2, \dots, b_k, \dots]$$

ou

$$[a_1, a_2, \dots, a_p; \quad \overline{b_1, b_2, \dots, b_k}].$$

Si la périodicité a lieu à partir du premier coefficient, la $F \cdot C$ est dite *immédiatement* périodique ou périodique *simple*. Dans le cas contraire, elle est périodique *mixte* et l'on désigne par *antipériode*, le groupe $a_1, a_2, \dots, a_p$ des coefficients, précédant la période. La $F \cdot C$ est monopériodique, dipériodique, tripériodique, tétrapériodique suivant que $k=1, 2, 3, 4$.

Soit N un nombre périodique. Il convient de noter deux espèces de périodicité:

1) la périodicité *complète*, qui à lieu non seulement entre les coefficients, mais aussi entre les quotients complets de même rang;

2) la périodicité *partielle* qui a lieu entre les coefficients; mais ne s'étend pas aux quotients complets.

Le premier cas se rencontre toujours si N est intégrale exacte [1], le second si N est une intégrale quelconque.

À toute fraction continue périodique est attachée une équation quadratique, dont la plus grande racine (ou la racine double) est l'intégrale exacte.

§ 2. - Soit une $F \cdot C$ périodique simple, de modules de périodicité $b_1, b_2, \dots, b_k$. Les deux racines α et β $(\beta \leqslant \alpha)$ de l'équation

$$x=[b_1, b_2, \dots, b_k, (x)], \tag{1}$$

[1] Dans certains cas cependant l'intégrale peut être non exacte (cf. § 10, page 194).

sont aussi racines de toute les équations

$$x=[\underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{1},\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{2},\ldots,\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{n},\ (x)] \tag{2}$$

quel que soit n.

Comme a est un quotient complet, $a>1$.

Posons

$$\Pi_{nk}=[\underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{1},\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{2},\ldots,\ \underbrace{b_1,\ b_2,\ldots,\ b_k}_{n}]$$

on aura

$$\beta<a<\Pi_{nk}.$$

Si β était l'intégrale exacte, $\Pi_{nk}-\beta$ tendrait vers 0 pour $n=\infty$, ce qui est impossible puisque $\Pi_{nk}-\beta$ reste superieur à $a-\beta$. Donc la plus grande racine a est l'intégrale exacte.

La démonstration précédente dérive immédiatement de notre notion d'intégrale. On pourrait encore établir le résultat soit en s'appuyant sur les travaux bien connus de A. Pringsheim et O. Perron; soit en généralisant un procédé de démonstration, adopté dans un cas très simple par Mathias Lerch ([1]).

En effet, soit

$$x-[a_1,\ a_2,\ldots,\ a_k,\ (x)]\equiv Ax^2-Bx+C=0$$

l'équation quadratique. On trouve facilement entre deux réduites périodiques successives Π_{nk} et $\Pi_{(n-1)k}$ la relation de récurrence

$$A\Pi_{nk}-B\Pi_{(n-1)k}+C=0.$$

Si $a<\beta$, a et β sont les deux pôles d'une substitution hyperbolique qui se ramène à

$$\frac{\Pi_{nk}-a}{\Pi_{nk}-\beta}=\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-1}\frac{\Pi_k-a}{\Pi_k-\beta}.$$

Si $a>\beta$, $\left(\frac{\beta}{a}\right)^{n-1}$ tend vers 0 et par suite il en est de même de $\Pi_{nk}-a$, c'est-à-dire que les réduites Π_{nk} tendent vers a.

Si $a=\beta$, la substitution est parabolique et peut s'écrire

$$\frac{1}{\Pi_{nk}-a}=\frac{n-1}{a}+\frac{1}{\Pi_k-a}.$$

Ce qui montre que a est l'intégrale exacte ([2]).

([1]) Bulletin des Sciences Mathématiques, 1886, p. 45.

([2]) Le cas de la $F\cdot C$ périodique mixte se ramène facilement au précédent, les racines y de l'équation quadratique étant liées aux racines x de la périodique simple par une relation

$$y=\frac{px-q}{p'x-q'} \qquad \text{où} \quad qp'-pq'>0.$$

Monopériodicité.

§ 3. - 1°) Soit $R(1)=1$, $R(2)=A>2$

$$0<\theta_0<1, \quad N=1+\theta_0(A-2)$$

est compris entre 1 et $A-1$. Développons N en $F \cdot C$

$$1+\theta_0(A-2)=A-\frac{A-1}{x_1}$$

d'où

$$x_1=\frac{A-1}{A-1-\theta_0(A-2)} \qquad \begin{cases} \text{pour } \theta=0 & x_1=1 \\ \text{pour } \theta=1 & x_1=A-1. \end{cases}$$

Donc x_1 est compris entre 1 et $A-1$, d'où

$$x_1=1+\theta_1(A-2) \cdot \frac{A-1}{A-1-\theta_0(A-2)}=1+\theta_1(A-2)$$

d'où

$$\theta_1=\frac{\theta_0}{A-1-\theta_0(A-2)} \qquad \frac{\theta_1}{1-\theta_1}=\frac{1}{A-1}\frac{\theta_0}{1-\theta_0}.$$

Plus généralement soit x_n, le quotient complet d'ordre n, on aura

$$\frac{\theta_n}{1-\theta_n}=\frac{1}{A-1}\frac{\theta_{n-1}}{1-\theta_{n-1}}$$

d'où

$$\frac{\theta_n}{1-\theta_n}=\frac{1}{(A-1)^n}\frac{\theta_0}{1-\theta_0}. \qquad \begin{pmatrix} A>2 \\ A-1>1 \end{pmatrix}$$

Quand n croît indéfiniment, $\frac{\theta_n}{1-\theta_n}$ tend vers 0 et les quotients complets, tous différents, tendent vers *un*; mais les coefficients du développement sont tous égaux à 2

$$1+\theta_0(A-2)\sim[\bar{2}].$$

Pour $\theta_0=1$. $N=A-1=[\bar{2}]$ est l'intégrale exacte.

2°) Soit la fraction continue $(0<\theta<1)$

$$F=[a_0,\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_k,\ (2\theta+1)].$$

Elle a mêmes coefficients que la fraction périodique

$$[a_0,\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_k,\ \bar{2}].$$

Son intégrale exacte est le nombre rationnel

$$G=[a_0,\ a_1,\ a_2,\dots,\ a_k,\ (A-1)].$$

Si $F=\frac{p\theta+q}{p'\theta+q'}$, l'intégrale générale comprend tous les nombres compris entre $\frac{q}{q'}$ (exclus) et $\frac{p+q}{p'+q'}=G$.

§ 4. - Inversement, montrons que dans un tel système les nombres rationnels sont ou bien limités ou bien périodiques de période $[\bar{2}]$, c'est-à-dire que la monopériode $[\overline{2}]$ est caractéristique des nombres rationnels à développement illimité. Nous nous bornerons au cas où les nombres parfaits $R(n)$ sont des entiers.

Soit $N_0 > 1$ un nombre rationnel *non* parfait. Posons

$$N_0 = \frac{a_0 + b_0}{a_0} \qquad (a_0,\ b_0 \text{ entiers}).$$

La différence des deux termes de la fraction est b_0. Soit $R(\lambda_0 - 1) < N_0 < (R\lambda_0)$

$$N_0 = R(\lambda_0) - \frac{R(\lambda_0) - R(\lambda_0 - 1)}{N_1},$$

d'où

$$N_1 = \frac{a_0[R(\lambda_0) - R(\lambda_0 - 1)]}{a_0 R(\lambda_0) - a_0 - b_0} = \frac{a_1 + b_1}{a_1}$$

$$b_1 = b_0 - a_0[R(\lambda_0 - 1) - 1].$$

Mais $\lambda_0 \geqslant 2$, d'où $\lambda_0 - 1 \geqslant 1$. Donc $b_1 \leqslant b_0$. Plus généralement N_k et N_{k+1} étant deux quotients complets successifs

$$N_k = \frac{a_{k-1}[R(\lambda_{k-1}) - R(\lambda_{k-1} - 1)]}{a_{k-1}R(\lambda_{k-1}) - a_{k-1} - b_{k-1}} = \frac{a_k + b_k}{a_k}$$

$$N_{k+1} = \frac{a_k[R(\lambda_k) - R(\lambda_k - 1)]}{a_k R(\lambda_k) - a_k - b_k} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{a_{k+1}}$$

d'où

$$b_{k+1} = b_k - a_k[R(\lambda_k - 1) - 1].$$

Or $\lambda_k \geqslant 2$, $b_{k+1} \leqslant b_k$.

Donc les b_i, différences des termes des fractions $N_i = \dfrac{a_i + b_i}{a_i}$ sont stationnaires ou décroissants.

Tout d'abord s'il existe un indice k, tel que

$$b_k - a_k[R(\lambda_k) - 1] = 0,$$

$N_k = \dfrac{a_k + b_k}{a_k}$ est un nombre parfait et la $F \cdot C$ est limitée

$$N_0 = [\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_{k-2},\ \lambda_{k-1},\ \lambda_k].$$

Dans le cas contraire, deux cas peuvent se présenter:

1°) à partir d'un indice k, tous les b_i sont égaux à b_k; la relation

$$b_{n+1} = b_n - a_n[R(\lambda_n - 1) - 1] \qquad n \geqslant k$$

qui se réduit à $b_{n+1} = b_n$, d'où $R(\lambda_n - 1) = 1$, montre que $\lambda_n - 1 = 1$, $\lambda_n = 2$ et que par suite λ_k, λ_{k+1}, $\lambda_{k+2}, \ldots$ sont égaux à 2; et si $R(2) > 2$ le développement est périodique de module 2 et les N_i pour $i \geqslant k$ restent intérieurs à l'intervalle $[1,\ R(2) - 1]$.

2°) les b_i décroissent constamment; pour un certain indice k, on aura $b_k = 1$. Alors

$$N_k = \frac{a_k + 1}{a_k} \leqslant 2.$$

Si $R(2) > 2$, N_k appartient à l'intervalle $[1,\ R(2) - 1]$ et donne lieu à un développement périodique de période $[\overline{2}]$; par suite N_0 est monopériodique de période $[\overline{2}]$.

Si $R(2)=2$,

$$N_k=\frac{p+1}{p}$$

p étant entier

Si $p=1$, $N_k=2$, N_k est un nombre parfait et le développement est limité.

Si $p \geqslant 2$, on est conduit aux quotients complets

$$N_{k+1}=\frac{p}{p-1}, \qquad N_{k+2}=\frac{p-1}{p-2},\dots$$

$$N_{k+p-2}=\frac{p-(p-3)}{p-(p-2)}=\frac{3}{2}, \qquad N_{k+p-1}=\frac{p-(p-2)}{p-(p-1)}=2$$

N_{k+p-1} étant un nombre parfait, la fraction continue est limitée.

§ 5. - *Exemple.* $R(2)>2$, $R(1)=1$. On peut prendre pour $R(z)$:

$$z^2,\ \Gamma(2z+1) \text{ (intégrale Eulérienne)},\ \frac{z(z+1)}{2},\ \frac{z(z+1)(2z+1)}{6},\ \text{etc.}$$

Dans tous ces systèmes, les nombres rationnels sont limités ou monopériodiques de période $[\overline{2}]$ avec $R(2)>2$.

Si $R(2)=2$, on peut prendre $R(z)=\Gamma(z)$ et dans ce système tout nombre rationnel est *limité.*

Remarque. Nous dirons que, dans le système $R(1)=1$, $R(2)>2$, $[\overline{2}]$ est la période *fondamentale* ou période de *rationalité.*

Périodicité générale.

§ 6. - Soit un système (R). S'il existe un période $[\overline{b_1, b_2,\dots, b_k}]$ dite *fondamentale* ou *caractéristique,* telle que tout développement $[a_1, a_2,\dots, a_n;\ \overline{b_1, b_2,\dots, b_k}]$ corresponde aux nombres N d'un segment AB (A exclu et B point intégral exact), nous dirons que le système (R) est périodique d'ordre k. Les segments tels que AB varient avec l'antipériode; mais les points tels que A représentent l'ensemble des nombres rationnels du système (R) à développement limité.

Bornons-nous à établir qu'il existe des nombres di, tri et tétrapériodiques.

Dipériodicité ([1]).

Il existe une infinité de systèmes à dipériode caractéristique. Soit par exemple $R(z)=2z^2$. Les développements suivants s'appliquent au cas

$$R(0)=0, \qquad R(1)=2, \qquad R(2)=8$$

([1]) Une étude complète conduit à la forme

$$R(z)=\frac{t^2-1}{4(t-2)}z^2$$

t étant un nombre rationnel quelconque.

c'est-à-dire au cas plus général où

$$R(z) = 2z^2 + z(z-1)(z-2)f(z)$$

nombres parfaits [0, 2, 8, etc.].

Les nombres $1+\frac{\theta}{2}$ $(0<\theta\leqslant 1)$ compris entre 1 et $\frac{3}{2}$ sont dipériodiques de de même développement.

En effet
$$N = 1+\frac{\theta}{2} = 2-\frac{2}{x_1} \qquad x_1 = \frac{4}{2-\theta}$$

Pour $\theta=0$, $x_1=2$; pour $\theta=1$, $x_1=4$.

Donc x_1 est compris entre 2 et 8

$$x_1 = 8-\frac{6}{x_2} = \frac{4}{2-\theta} \qquad \text{d'où} \qquad x_2 = \frac{3(2-\theta)}{6-4\theta}$$

Pour $\theta=0$, $x_2=1$; pour $\theta=1$, $x_2=\frac{3}{2}$; x_2 étant compris entre 1 et $\frac{3}{2}$ aura même développement que $1+\frac{\theta}{2}$, d'où

$$1+\frac{\theta}{2} \backsim [\overline{1, 2}].$$

Pour que la périodicité soit *complète*, c'est-à-dire s'étende aux quotients complets, il faut que $x_2 = 1+\frac{\theta}{2}$ ou $\frac{3(2-\theta)}{6-4\theta} = 1+\frac{\theta}{2}$ d'où $\theta=1$ et $N=\frac{3}{2}$; alors

$$x_1=4, \qquad x_2=\frac{3}{2},\ldots, \qquad x_{2k+1}=4, \qquad x_{2k+2}=\frac{3}{2},\ldots$$

Il résulte de ce qui précède que les nombres $N'=2+2\theta$ $(0<\theta\leqslant 1)$ ont pour développement $[\overline{2, 1}]$

$$N' = 2+2\theta \backsim [\overline{2, 1}].$$

Inversement on peut démontrer que $[\overline{1, 2}]$ ou $[\overline{2, 1}]$ sont bien périodes de rationalité, c'est-à-dire que tout nombre rationnel autre que les nombres $1+\frac{\theta}{2}$ et $2+2\theta$ $(0<\theta\leqslant 1)$ est soit limité, soit dipériodique mixte de période $[\overline{1, 2}]$ ou ce qui revient au même $[\overline{2, 1}]$. Donc cette dipériodicité est *caractéristique*, et tout développement de la forme $[a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{1, 2}]$ a pour intégrales les points d'un segment AB (A asymptote exclu) et B correspondant à l'intégrale exacte, qui est rationnelle. L'intégrale générale est linéaire.

Dipériodicité singulière.

§ 7. - Il peut arriver que pour certains systèmes, les nombres rationnels soient limités ou dipériodiques, l'intégrale générale du développement étant *ponctuelle*, c'est-à-dire se confondant avec l'intégrale unique (exacte). Par exemple pour

$$R(z) = \frac{z^2}{2},$$

les nombres parfaits sont

0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$	8
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)

Développons le nombre 6, on a $6=8-\frac{7}{2x_1}$

$$x_1=\frac{7}{4}=2-\frac{3}{2x_2}$$

d'où $x_2=6$, par suite $6=[\overline{4,2}]$, 6 est bien égal à son développement; car 6 est la plus grande racine de l'équation

$$x=[4,2,(x)]$$
$$x^2-7x+6=0.$$

Mais 6 est l'intégrale unique ([1]) et par suite tout développement de la forme

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n, \overline{4,2}]$$

a une intégrale unique ponctuelle (rationnelle).

Tripériodicité.

§ 8. - Soit $R(z)=\frac{3Z^2}{2}$; nombres parfaits $0, \frac{3}{2}, 6, \frac{27}{2}, \ldots$

Développons les nombres $\frac{14+\theta}{14}=N(\theta)$ compris entre 1 (exclus) et $\frac{15}{14}$ (inclus)

$$\frac{14+\theta}{14}=\frac{3}{2}-\frac{3}{2x_1} \quad \text{d'où} \quad x_1=\frac{21}{7-\theta}=6-\frac{9}{2x_2}$$
$$x_2=\frac{3(7-\theta)}{2(7-2\theta)}=6-\frac{9}{2x_3} \quad \text{d'où} \quad x_3=\frac{3(7-2\theta)}{7(3-\theta)}.$$

Pour $\theta=0$, $x_3=1$; pour $\theta=1$, $x_3=\frac{15}{4}$; donc les nombres x_3 remplissent le même segment de droite que les $N(\theta)$. On voit donc que le développement est périodique $[\overline{1,2,2}]$. L'intégrale générale linéaire comprend les nombre supérieurs à 1 et inférieurs ou égaux à $\frac{15}{14}$.

Pour que le périodicité soit complète, il faut que $x_3 \doteq x_1$ d'où $\theta=1$. Le nombre $\frac{15}{4}$ est l'intégrale exacte de $[\overline{1,2,2}]$. D'ailleurs l'équation du second degré attachée à $R(z)$

$$x=[1,2,2,(x)]$$
$$14x^2-29x+15=0$$

a pour racines 1 et $\frac{15}{14}$. La plus grande racine $\frac{15}{14}$ est intégrale exacte et 1 est asymptote.

Inversement les nombres rationnels sont limités, ou bien ont $[\overline{1,2,2}]$ pour période fondamentale.

([1]) On peut l'établir en montrant que les nombres infiniment voisins de 6 ont un développement différent de $[\overline{4,2}]$.

Tétrapériodicité.

§ 9. - $R(z)=3z^2$. Nombres parfaits 0, 3, 12, 27,....

Soient les nombres $N(\theta)=3+2\theta$ $(0<\theta\leqslant 1)$. Leur ensemble comprend les nombres supérieurs à 3 qui ne dépassent pas 5.

$$3+2\theta=12-\frac{9}{x_1}$$

$$x_1=\frac{9}{9-2\theta}=3-\frac{3}{x_2}; \qquad x_2=\frac{9-2\theta}{6-2\theta}=3-\frac{3}{x_3}$$

$$x_3=\frac{18-6\theta}{9-4\theta}=3-\frac{3}{x_4}; \qquad x_4=\frac{9-4\theta}{3-2\theta}.$$

Pour $\theta=0$, $x_4=3$; pour $\theta=1$, $x_4=5$; les nombres $x_4(\theta)$ constituent donc le même ensemble que les nombres $N(\theta)$. Il en resulte que $x_4 \backsim N$ et que par suite il y a tétrapériodicité

$$N(\theta)=3+2\theta \backsim [\overline{2, 1, 1, 1}].$$

L'intégrale générale (linéaire) de $[\overline{2, 1, 1, 1}]$ comprend les nombres $N(\theta)$. La périodicité sera complète, si $x_4=N$, d'où $\theta=1$; 5 est l'intégrale exacte. D'ailleurs l'équation quadratique attachée à $R(z)$ est

$$x=[2, 1, 1, 1, (x)]$$

ou

$$x^2-8x+15=0.$$

Ses deux racines sont 5 et 3; l'une 5 intégrale exacte, l'autre est asymptote.

Des remarques analogues aux précédentes s'appliquent aux nombres rationnels du système $R(z)=3z^2$.

Monopériodicité dans les chaînes contenant deux séries de fonctions superposées (¹).

§ 10. - Supposons que pour $z=1$, la fonction $f(z)$, son inverse $\varphi(z)$ et l'élévateur $R(z)$ soient égaux à *un*, et que $R(2)=A>2$.

Si en même temps $\varphi'(1)<A-1$, la chaîne est monopériodique, de période $[\overline{2}]$.

En effet ici $R(2)=A$, $R(2)-R(1)=A-1$.

Écrivons l'équation
$$x=f\left[A-\frac{A-1}{x}\right] \quad \text{d'où} \quad A-\frac{A-1}{x}=\varphi(x).$$

Par suite x est racine de l'équation

$$F(x)\equiv A-1+x[\varphi(x)-A]=0.$$

La dérivée est

$$F'(x)\equiv \varphi(x)-A+x\varphi'(x),$$

$F'(1)<0$. Posons $f(A)=x_0$, d'où $A=\varphi(x_0)$. Entre 1 et x_0, il y a un certain nombre n de racines de l'équation (1), soit: $a_1<a_2<....<a_{n-1}<a_n$.

(¹) Cf. § 8 de la première communication, page 184.

On démontre comme au § 2, que la plus grande $a_n = a$ est l'intégrale exacte. Elle est monopériodique et les quotients complets sont égaux à a (périodicité complète). De plus

(2) $$A - 1 - a[A - \varphi(a)] = 0.$$

Comme $R(1) = 1$, $R(2) = A$, le module de périodicité est 2, d'où $a = [\bar{2}]$. Soit a_i une autre racine. Elle est intégrale (non exacte), monopériodique, de quotients complets tous égaux à a_i, $a_i \backsim [\bar{2}]$ (périodicité complète).

Montrons que tout nombre $\beta \neq a_i$, compris entre 1 et a a même développement que a, avec 2 pour module de périodicité. Toutefois les quotients complets successifs diffèrent entre eux (périodicité partielle). En effet le premier quotient complet ξ de β vérifie

(3) $$A - 1 - \xi[A - \varphi(\beta)] = 0.$$

Comme $\varphi(\beta) < \varphi(a)$, il résulte de la comparaison de (2) et (3) que $\xi < a$; $\varphi(\xi)$ est donc compris entre 1 et A et par suite le développement de ξ aura 2, pour premier coefficient, puisque $R(2) = A$; et un quotient complet ξ', tel que $1 < \varphi(\xi') < A$ et ainsi de suite. On retrouve donc indéfiniment le module 2.

§ 11. - *Exemples.* 1°) $f(z) = e^{z-1}$ $\quad \varphi(z) = 1 + \log_e z$, $\quad$ (condition $A > 2$);
2°) $f(z) = 1 + \log_e z$ $\quad \varphi(z) = e^{z-1}$, $\quad$ (condition $A > 2$);
3°) $f(z) = 1 + \log_{10} z$ $\quad \varphi(z) = 10^{z-1}$, $\quad \left(\text{condition } \frac{1}{\log_{10} e} < A - 1\right)$.
Soit par exemple $R(z) = 444z^2 - 443$, $R(1) = 1$, $R(2) = A = 1333$

$$4 = 1 + \log_{10}\left[1333 - \frac{1332}{1 + \log_{10}\left[1333 - \frac{1332}{1 + \log_{10}[....]}\right]}\right] \backsim (1 + 3\theta).$$

L'équation en x est ici

$$x = 1 + \log_{10}\left(1333 - \frac{1332}{x}\right)$$
$$10^{x-1} = 1333 - \frac{1332}{x}$$
$$10^x - 1333x + 1332 = 0$$

qui admet les deux racines 1 et 4.

4°) $f(z) = \sqrt[m]{z}$, $\varphi(z) = Z^m$, $A > m + 1$; on obtient des radicaux d'ordre m superposés.

5°) $f(z) = \sqrt{z}$, $\varphi(z) = z^2$, $A > 3$. Soit $R(z) = 10z^2 - 9$, $A = R(2) = 31$

$$30 = \sqrt{31 - \frac{30}{\sqrt{31 - \frac{30}{\sqrt{31 - ....}}}}} \backsim 1 + 29\theta.$$

d'où
$$x^2 - 31x + 30 = 0,$$

L'équation en x est
$$x=\sqrt{31-\frac{30}{x}}$$
ayant pour racines 1 et 30.

6°) $f(z)=z^m$, $\varphi(z)=\sqrt[m]{z}$, $A>1+\frac{1}{m}$ on obtient des puissance d'ordre m superposées.

7°) $f(z)=z^2$, $\varphi(z)=\sqrt{z}$, $A>1+\frac{1}{2}$.

Soit $R(z)=2z^2-1$, $A=R(2)=7$.

$$24+6\sqrt{15}=\left[7-\frac{6}{\left[7-\frac{6}{\left[7-\frac{6}{[7\,....]}\right]^2}\right]^2}\right]^2$$

carrés superposés.

L'équation en x est $x=\left(7-\frac{6}{x}\right)^2$

$$x^3-49x^2+84x-36=(x-1)[x-(24-6\sqrt{15})][x-(24+6\sqrt{5})]$$

$x=24+6\sqrt{5}$ est la seule racine supérieure à un; c'est celle qui convient [1].

Irrationalité essentielle (R).

§ 12. - Pour simplifier, nous supposerons $R(z)=z^2$:

1°) une $F\cdot C$ de période $[\bar{2}]$ est égale à un nombre rationnel ϱ, qui en est l'intégrale exacte; l'intégrale générale (linéaire) comprend tous les points d'abscisses rationnelles ou irrationnelles d'un segment S d'extremité supérieure ϱ. Par exemple a étant un entier quelconque, les nombres N tels que

$$a^2<N\leqslant a^2+\frac{2(2a+1)}{3}$$

constituent l'intégrale générale du développement $[a+1,\ \bar{2}]$, dont l'intégrale exacte est

$$\varrho=[a+1,\ \bar{2}]=a^2+\frac{2(2a+1)}{3};$$

2°) une $F\cdot C$ monopériodique de période autre que $[\bar{2}]$, ou une $F\cdot C$ polypériodique quelconque est égale à un nombre quadratique I_R, qui en est l'intégrale unique, ponctuelle et exacte. Nous dirons que I_R est *essentiellement quadratique* dans le système (R), afin de le distinguer des nombres quadratiques usuels, appartenant à des segments tels que S.

Deux nombres essentiellement quadratiques I_R et I_R' ont nécessairement des développements différents; s'il en était autrement, le développement commun appartiendrait aux nombres rationnels intermédiaires, qui, on le sait, sont limités ou périodiques de période $[\bar{2}]$

$$I_R=\frac{p+q\sqrt{H}}{r}$$

---

[1] Dans tous les exemples précédents, 1 est une intégrale asymptote.

contient un radical spécial $\sqrt{H}$. Mais inversement tout nombre quadratique Q contenant $\sqrt{H}$ n'est pas toujours essentiellement quadratique.

Limitons-nous à la monopériode $[\bar{a}]$ $(a \neq 2)$. Soit ω_a le nombre périodique simple de période a. ω_a est le plus grande racine de $x = a^2 - \frac{2a-1}{x}$

$$x^2 - a^2 x + 2a - 1 = 0$$

$$\omega_a = \frac{a^2 + \sqrt{a^4 - 8a + 4}}{2}.$$

Ici le radical spécial est $\sqrt{H} = \sqrt{a^4 - 8a + 4}$.

Les nombres I_R, (ici I_{z^2}) sont des fonctions linéaires (fractionnaires) particulières de $\sqrt{H}$.

Soit
$$\frac{A_k}{B_k} = [a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_k]\ (z^2)$$

une $F \cdot C$ limitée quelconque.

La forme le plus générale des I_{z^2} est

$$I' = [a_0,\ a_1, \ldots,\ a_k,\ (\omega_a)]$$

ou

$$I' = \frac{A_k \omega_a - (2a_k - 1) A_{k-1}}{B_k \omega_a - (2a_k - 1) B_{k-1}}$$

fonction linéaire où $\frac{A_{k-1}}{B_{k-1}}$ et $\frac{A_k}{B_k}$ répresentent deux réduites successives d'une $F \cdot C$ du système (Z^2).

Mais inversement une fonction linéaire quelconque de ω_a ne représente pas nécessairement un nombre essentiellement quadratique. Soit n le plus grand entier contenu dans I'

$$n < I' < n + 1.$$

Considérons $\frac{I'}{n}$

$$1 < \frac{I'}{n} < \frac{n+1}{n};$$

I' est un nombre quadratique *non essentiel*, car il appartient à l'intervalle (1, 3), dont tous les nombres ont pour développement $[\bar{2}]$; $\frac{I'}{n}$ n'est donc pas *essentiel*.

Ainsi soit $a = 3$

$$I = \frac{9 + \sqrt{61}}{2}$$

est essentiellement quadratique $I = [\bar{3}]$.

Mais $9 + \sqrt{61}$ n'est pas essentiel; il en effet compris entre 16 et 22, et les nombres compris entre 16 (exclus) et 22 (compris), ont un même développement, dont 22 est l'intégrale exacte

$$22 = 25 - \frac{9}{3},\quad 22 = [5,\ (3)]$$

$$22 = [5,\ \bar{2}]$$

$9 + \sqrt{61}$ est développable en fraction périodique mixte de période $[\bar{2}]$, qui est égale au nombre rationnel 22.

BIBLIOGRAPHIE

M. PAUL APPELL a signalé des développements analogues aux précédents soit par excès, soit par défaut dans le cas particulier où $R(z)=z^n$. Étant alors très occupé, l'illustre géomètre a jugé à propos de poser, sans les résoudre, des questions concernant la périodicité dans $R(z)=z^2$. Dans la notice sur ses travaux personnels, publiée au tome 45 des « Acta Mathematica », on lit page 181: « J'ai été amené à généraliser des développements en fraction continue se rapportant à la racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre à une unité près. Ces recherches ont été étendues et complétées par M. ARMAND CAHEN »; et plus loin, page 270, dans la liste des travaux de M. Appell, classés par ordre de matières, on lit encore:

§ 137. *Sur un mode nouveau de développement d'un nombre en fraction continue* (publié dans le « Bulletin des Sciences Mathématiques », 1914, tome 38). (Voir les Notes de M. Cahen dans les « Comptes Rendus », 1923 et 1924).

Voici les Notes dont il s'agit:

Tome 177, page 934; tome 178, page 2230; tome 179, page 932; tome 180, page 2004.

Ces notes renferment des fautes d'impression et quelques erreurs, relevées ultérieurement.

Citons encore un article de M. Appell dans l'« Intermédiaire des Mathématiciens », tome 20, page 169.

Le question des développements par défaut, dont l'étude est très-avancée et qui présente des difficultés d'un autre ordre, sera traitée dans nn autre recueil.

F. LA MENZA (Buenos Aires - Argentina)

LOS SISTEMAS DE INECUACIONES LINEALES Y LA DIVISIÓN DEL HIPERESPACIO [1]

1. - Se comprende fácilmente que el estudio de los sistemas de inecuaciones lineales y el problema de la división del hiperespacio por hiperplanos, son una misma cosa.

Dado un sistema de m inecuaciones lineales con n incógnitas, multiplicando por la unidad negativa las inecuaciones negativas y cambiándolas, al mismo tiempo, de sentido, se obtiene un sistema equivalente cuyas inecuaciones tienen todas el sentido positivo. Un tal sistema lo llamaremos *normal* y lo indicaremos brevemente con la notación $S(m, n)$. Si en el $S(m, n)$ dado, se anulan sucesivamente uno, dos,.... $s < m$ polinomios, conservando las demás inecuaciones, habremos formado sistemas *mixtos* del sistema dado que llamaremos de 1°, 2°,.... s° orden respectivamente. Un sistema se llama *parcial* de otro si está formado solamente por inecuaciones de aquél pero no por todas. Son inmediatas las propiedades siguientes:

I). *Un sistema parcial tiene todas las soluciones del sistema total.*

II). *Sistemas parciales de sistemas compatibles son compatibles.*

III). *Dado un* S(m, n), *el sistema* S′ *formado por todas las inecuaciones del* S *y cualquier otra inecuación que sea combinación lineal, con números positivos de algunas o de todas las de éste, es equivalente al sistema dado.*

2. - Los polinomios lineales que forman los primeros miembros de las inecuaciones de un sistema $S(m, n)$:

$$\sum a_{ij}x_j + k_i > 0 \qquad \begin{cases} i = (1, 2 .... m) \\ j = (1, 2 .... n) \end{cases} \tag{1}$$

los indicaremos, para abreviar, con la notación $P_i(x_j)$.

Se tiene entonces:

I). *Todo sistema compatible tiene una infinidad de soluciones.*

Sea el sistema (1) y (x_j^0) una solución del mismo. Mediante la sustitución

$$x_j = x_j^0 - x_j'$$

[1] Resumen de un trabajo hecho en el Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias de Buenos Aires bajo la direción del prof. dott. Julio Rey Pastor.

en los polinomios $P_i(x_j)$ del sistema resulta

$$P_i(x_j^0)-(a_{i1}x_1'+ .... + a_{ij}x_j'+ .... + a_{in}x_n')>0.$$

Sea ahora, $P_\mu(x_j^0)$ el menor de todos los $P_i(x_j^0)$ y M, un número positivo no menor que ningún coeficiente de todos los polinomios del sistema. El conjunto de valores (x_j') tales que

$$P_\mu(x_j^0)>M\sum_{j=1}^{n}|x_j'|$$

satisface también al sistema puesto que se tiene

$$P_i(x_i^0)-\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j')\geqslant P_\mu(x_i^0)-M\sum_{j=1}^{n}|x_j'|>0.$$

II). *Si* (x_j^0) *y* (x_j^1) *son soluciones del sistema, todos los valores* x_j *de dicho intervalo son también soluciones,* pues mediante la sustitución

$$x_j=x_j^0+\lambda(x_j^1-x_j^0) \qquad 0\leqslant\lambda\leqslant1 \qquad (j=1, 2.... n)$$

en los polinomios del sistema resulta

$$P_i(x_j)=P_i(x_j^0)+\lambda P_i(x_j^1)-\lambda P_i(x_j^0).$$

Expresión positiva para $\lambda=0$, $\lambda=1$ y para $0<\lambda<1$ es siempre

$$\lambda P_i(x_j^0)<P_i(x_j^0)$$

luego

$$P_i(x_j)>0.$$

En todo lo que sigue supondremos que no todos los polinomios del sistema se reducen a constantes positivas, pues un tal sistema se verifica idénticamente.

III). *En todo* S(m, n) *compatible, hay, por lo menos, un sistema mixto de primer orden o de orden superior también compatible.*

Sea (x_j^0) una de sus soluciones. Consideremos un cero de uno de sus polinomios P_1. Si este cero anula a todos los demás del sistema, ello no puede suceder para n ceros independientes de P_1, de lo contrario, como es sabido, los coeficientes y términos independientes de cada uno de ellos serían proporcionales a los de éste y el sistema se reduciría a una sola inecuación. Hay pues un cero (x_j^1) de P_1 que no anula a todos los restantes. Si para este cero todos los demás polinomios son positivos, o lo son solamente algunos y nulos los demás, el teorema está demostrado. Si en cambio hay algunos negativos para el punto (x_j^1), en el intervalo (x_j^0, x_j^1), dado por

$$x_j=x_j^0+\lambda(x_j^1-x_j^0) \qquad 0<\lambda<1$$

se anulan todos ellos mientras son positivos los restantes. Entre los valores de $\lambda=\lambda_r$ para los cuales se anulan dichos polinomios hay uno mínimo, luego para este punto del intervalo considerado hay por lo menos un cero de un polinomio que hace positivos a todos los demás, es decir el sistema mixto formado anulando este polinomio y conservando las demás inecuaciones, es compatible. Si dicho cero anula a más de un polinomio, el sistema mixto correspondiente es de orden superior.

Si h es la característica de un $S(m, n)$, llamaremos *determinantes orlados* del sistema a todos los determinantes de orden $h+1$ que se obtienen de orlar un mismo determinante de orden h con la columna de términos independientes de las inecuaciones del sistema y cada una de las restantes filas de su matriz.

IV). *En todo* S(m, n) *compatible, de característica* h$<$m, *hay por lo menos, un sistema mixto compatible de orden no inferior a* h *o a* h$-$1, *según que sus determinantes orlados no son todos nulos o lo son respectivamente.*

Sean

$$P_i(x_j) < 0 \qquad (i=1, 2.... m)$$

las inecuaciones del sistema. Hay en él (2, III) un sistema mixto compatible que es por lo menos, de primer orden. Si es de orden h o $h-1$ el teorema está demostrado. Sea

$$\begin{cases} P_1(x_j)=0 \\ P_i(x_j)>0 \end{cases} \qquad (i=2.... m)$$

dicho sistema. Como no todos los coeficientes de P_1 son nulos, de lo contrario carecería de ceros, sea $a_{11} \neq 0$; el sistema anterior se puede escribir

$$\begin{cases} x_1=R_1(x_2 .... x_n) \\ P_{i2}(x_2 .... x_n)>0 \end{cases} \qquad (a)$$

siendo R_1 y P_{i2} polinomios lineales con una variable menos. Aplicando al sistema (a) de inecuaciones, también compatible, el mismo teorema, después de h procesos análogos o de $h-1$, según que los determinantes orlados no son todos nulos o lo son, se encuentran h o $h-1$ polinomios, por lo menos, que cumplen la condición porque dicho proceso no es otra cosa que la solución del sistema

$$\begin{cases} P_1= 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ P_s= 0 \\ P_m>0 \quad s\geqslant h \quad ;\ s<m \text{ en el primer caso} \\ P_m>0 \quad s\geqslant h-1;\ s<m \text{ » » segundo ».} \end{cases}$$

A los h polinomios en el primer caso, y a los $h-1$ en el segundo, que cumplen las condiciones del teorema anterior, los llamaremos *polinomios principales del sistema* y *determinante principal* al determinante de la matriz de sus coeficientes. Si hay más de h o $h-1$ de los mencionados polinomios, se tomarán entre ellos, arbitrariamente h o $h-1$, en cada caso, como *principales.*

3. - Indicando con X_i una indeterminada positiva, podemos escribir todo $S(m, n)$ en la forma

$$\sum a_{ij}x_j + k_i = X_i \qquad \begin{matrix} i=(1, 2.... m) \\ j=(1, 2.... n) \end{matrix} \tag{2}$$

que considerado como un sistema de ecuaciones de incógnitas (x_j) tiene la misma característica que el sistema dado. Resulta immediatamente que:

I). *El sistema* (2) *de ecuaciones y el* S(m, n) *correspondiente son simultáneamente compatibles o simultáneamente incompatibles.*

Estudiemos, por consiguiente la compatibilidad del sistema (2) considerando como únicas incógnitas las (x_j). Habrá que distinguir dos casos;

A) Si la característica h del sistema es igual al número de inecuaciones, el problema es trivial y se reduce a la solución del sistema (2) obteniéndose todos los valores de (x_j) en función de las $n-h$ incógnitas no principales arbitrarias y de las m indeterminadas positivas X_i. El sistema en este caso es pues siempre compatible.

B) La característica h del sistema es menor que el número de sus inecuaciones. En este caso, elijamos en el sistema (2), h incógnitas principales, pasando todas las demás al segundo miembro en cada ecuación y aplicando el teorema de Rouché-Frobenius, a fin de que sea compatible, obtendremos las relaciones a las cuales deben satisfacer las indeterminadas X_i que resuelven la cuestión. Se tiene pues:

$$\begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1h} & X_1 - k_1 - a_{1,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{h1} \ldots a_{hh} & X_h - k_h - a_{h,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{hn}x_n \\ a_{h+r,1} \ldots a_{h+r,h} & X_{h+r} - k_{h+r} - a_{h+r,h+1}x_{h+1} - \ldots - a_{h+r,n}x_n \end{vmatrix} = 0 \quad (r=1, 2.... m-h)$$

Desarrollando respecto de la última columna, recordando que los determinantes de orden $h+1$ de la matriz del sistema son todos nulos, e indicando con α_{ir} el adjunto del elemento X_i en el determinante orlado con la fila $h+r$, con Δ_r el orlado con dicha fila y los términos independientes de las inecuaciones del sistema y con δ un determinante de orden h distinto de cero de su matriz, se tendrá

$$\delta X_{h+r} + \alpha_{hr}X_h + \ldots + \alpha_{1r}X_1 = \Delta_r \qquad (r=1, 2.... m-h). \tag{3}$$

Sistema de $m-h$ ecuaciones en las incógnitas positivas (X_i) que llamaremos *resolvente del* $S(m, n)$ dado. Este sistema es, en realidad, un sistema mixto compuesto de m inecuaciones $X_i > 0$ y de $m-h$ ecuaciones. Veamos cómo mediante él logramos resolver completamente la cuestión, empezando por establecer las condiciones de compatibilidad del $S(m, n)$.

Observemos que la matriz del sistema resolvente está formada por los determinantes α_{ir} definidos más arriba, todos ellos también de orden h. Demostraremos que:

II). *La condición necesaria y suficiente para que un* S(m,n) *de característica* h<m *sea compatible, es que algún determinante* δ *de orden* h *de su matriz tenga el mismo signo que todos sus orlados, y si algunos o todos éstos son nulos, la condición es que los determinantes de orden* h *elementos de una misma columna en la matriz de su resolvente, respecto de* δ, *tengan signo opuesto a* δ.

La condición es necesaria, en efecto, si el sistema es compatible, hay en él (2, IV) h o $h-1$, por lo menos, polinomios principales, tomando un resolvente del sistema que los contenga e indicando con δ su determinante principal, tendremos:

(4) $$\delta X_{h+r} + a_{hr} X_h + \dots + a_{1r} X_1 = \Delta_r \qquad (r=1, 2 \dots m-h).$$

Si todos los determinantes orlados de δ son diferentes de cero como para

$$X_1 = X_2 = \dots = X_h = 0$$

es (2, IV), $X_{h+r} > 0$ resulta

$$\delta \cdot X_{h+r} = \Delta_r$$

luego

$$\mathrm{Sg} \cdot \delta = \mathrm{Sg} \cdot \Delta_r \qquad (r=1, 2 \dots m-h).$$

Si todos los Δ_r orlados son nulos, para el cero común a $h-1$ polinomios principales es también $X_{h+r} > 0$ de donde

$$\mathrm{Sg} \cdot \delta = -\mathrm{Sg} \cdot a_{hr} \qquad (r=1, 2 \dots m-h).$$

Si solamente son nulos algunos determinantes orlados, el cero común a $h-1$ principales satisface a las demás inecuaciones y por lo tanto en las ecuaciones del resolvente cuyo segundo miembro es nulo se tendrá $\mathrm{Sg} \cdot \delta = -\mathrm{Sg} \cdot a_{hs}$ para todos los s tales que $\Delta_s = 0$ y para el cero común a los h polinomios principales resultará como en el primer caso $\mathrm{Sg} \cdot \delta = \mathrm{Sg} \cdot \Delta_r$.

La condición es también suficiente, pues escribiendo las ecuaciones en la forma

$$\delta X_{h+r} = \Delta_r - (a_{hr} X_h + \dots + a_{1r} X_1)$$

resulta:

Si los orlados Δ_r de δ son todos diferentes de cero, siendo por hipótesis $\mathrm{Sg} \cdot \delta = \mathrm{Sg} \cdot \Delta_r$ para $(r=1, 2 \dots m-h)$, existen valores positivos suficientemente pequeños de las incógnitas X_1, $X_2, \dots X_h$, para los cuales el segundo miembro toma el signo de su primer término, y por lo tanto, resulta también $X_{h+r} > 0$. Si todos, o solamente algunos de las determinantes orlados son nulos, siendo, por hipótesis, en las ecuaciones del resolvente donde se tiene $\Delta_s = 0$, $\mathrm{Sg} \cdot \delta = -\mathrm{Sg} \cdot a_{hs}$, para valores positivos de las restantes $h-1$ incógnitas X_i, el segundo miembro tiene el signo de su primer término, luego eligiendo convenientemente los valores de la otra incógnita, resultará también:

$$X_{h+r} > 0.$$

Por consiguiente el sistema es compatible.

Como todo $S(m, n)$ de característica h tiene en general $\binom{m}{h}$ resolventes y no todos ellos satisfacen a las condiciones del teorema anterior, llamaremos *resolventes esenciales del sistema* a los que las cumplen.

La condición de compatibilidad del sistema se enuncia entonces brevemente diciendo:

III). *Condición necesaria y suficiente para que un sistema* S(m, n) *sea compatible es que admita, por lo menos, un resolvente esencial.*

Del mismo modo resulta como corolario la

IV). *Condición necesaria y suficiente para que un sistema mixto de ecuaciones e inecuaciones lineales sea compatible es que admita, por lo menos, un resolvente esencial entre cuyos polinomios principales figuren todos los de las ecuaciones del sistema.*

4. - Puede suceder que un sistema tenga inecuaciones *sobrantes*, es decir, inecuaciones que pueden suprimirse sin alterarlo. Daremos un criterio general para reconocerlas.

I). *Si un* S(m, n) *compatible, tiene un polinomio, ninguno de cuyos ceros satisface al sistema* S′ *formado con los demás, este sistema es equivalente al dado y la inecuación correspondiente a dicho polinomio es sobrante.*

Pues toda solución (x_j^1) de S es también de S' (1, I).

Recíprocamente, toda solución (x_j^2) de S' es también del S. Sea $P_r(x_j)$ el polinomio cuyos ceros no satisfacen a S'. Si para (x_j^2) fuese $P_r(x_j^2)<0$ tendría $P_r(x_j)$ un cero (x_j^0) en el intervalo (x_j^1, x_j^2); pero este cero de $P_r(x_j)$ sería también solución de S' contra lo supuesto, luego es también $P_r(x_j^2)>0$.

El teorema recíproco es también inmediato.

II). *La condición necesaria y suficiente para que una inecuación de un* S(m, n) *de característica* h *sea sobrante, es que algún determinante de orden* h *de su matriz tenga el mismo signo que su orlado con los coeficientes de dicha inecuación, y todos los demás de orden* h *de este orlado formados por sus columnas (excepto la de términos independientes) tengan signo opuesto al primero; si dicho orlado es nulo la condición es que se verifique solamente esta última relación.*

En efecto, el sistema parcial de orden $h+1$ formado con las $h+1$ inecuaciones cuyos coeficientes corresponden a los determinantes mencionados es también compatible (1, II) y su resolvente es

$$\delta X_{h+1} + a_{h+1,\,h}\, X_h + \dots + a_{h+1,\,1}\, X_1 = \Delta_1 . \tag{5}$$

De aquí resulta que sea o no cero el determinante Δ_1 ningún cero del polinomio X_{h+1} satisface al sistema porque, por hipótesis, los determinantes $a_{h+1,\,p}$ son todos de signo contrario a δ, luego (4, I) la inecuación correspondiente es sobrante. Recíprocamente, si el polinomio correspondiente a dicha inecuación tuviese un cero que satisficiese a todos los sistemas parciales de orden $h+1$ del sistema dado, satisfaría al sistema y por lo tanto no sería sobrante, luego entre todos los sistemas parciales de $h+1$ inecuaciones del sistema dado que contienen la inecuación considerada, hay, por lo menos uno, que no se satisface para ningún cero del polinomio correspondiente a la tal inecuación, suponiendo que dicho sistema es el $(X_1 X_2 .... X_h)$ y X_{h+1} la inecuación sobrante en el sistema total, su resolvente es el (5). Como ningún cero de X_{h+1} lo satisface, si es $\Delta_1 \neq 0$, anulando sucesivamente X_{h+1}, con otros $h-1$ polinomios en este resolvente, se obtiene

$$\mathrm{Sg} \cdot a_{h+1,p} \neq \mathrm{Sg} \cdot \Delta_1 \qquad (p=1, 2 .... h).$$

Pero este sistema parcial (1, II) es también compatible, luego se debe tener (3, II) necesariamente $\mathrm{Sg} \cdot \delta = \mathrm{Sg} \cdot \Delta_1$, o sea $\mathrm{Sg} \cdot a_{h+1,p} \neq \mathrm{Sg} \cdot \delta$.

Si fuese $\Delta_1 = 0$, por la misma razón, no todos sus coeficientes pueden tener signos iguales; sea $a_{h+1,1}$ el que tiene signo contrario a todos los demás, entonces se tendría

$$\delta X_{h+1} + a_{h+1,h} X_h + ... + a_{h+1,2} X_2 = -a_{h+1,1} X_1$$

y habría, por lo tanto, ceros de X_{h+1} que satisfarían a este sistema, luego los coeficientes $a_{h+1,p}$ tienen todos el mismo signo opuesto al signo de δ, de lo contrario este sistema parcial (3, II) no sería compatible.

El teorema está pues demostrado porque dichos coeficientes son los determinantes mencionados [1].

5. - Veamos ahora cómo pueden obtenerse soluciones de un $S(m, n)$. Para el caso de la característica h igual al número de inecuaciones, hemos visto que la solución es immediata y se obtienen todas en forma paramétrica. Veamos el caso general.

Sea $S(m, n)$ un sistema con característica $h < m$ y (4) uno de sus resolventes esenciales. Demos valores positivos arbitrarios

$$X_1^0, \; X_2^0 .... \; X_h^0$$

---

[1] Esta propriedad permite reducir las inecuaciones de un sistema a las absolutamente necesarias. Se encuentra una útil aplicación a la suma de las series divergentes para la determinación del polígono de sumación cuando se conocen los puntos singulares. Pues si $(a_1, a_2, ... a_m)$ son dichos puntos, el polígono mencionado está dado por el sistema de inecuaciones

$$R \cdot \frac{z}{a_i} < 1 \qquad (i=1, 2, ... m)$$

donde R indica la parte real del complejo $\frac{z}{a_i}$. Aplicando el teorema anterior se legra obtener el número mínimo de puntos singulares que definen efectivamente el polígono de sumabilidad de la serie.

a las h incógnitas comunes de éste y pongamos la substitución

$$X_1=\lambda X_1^0; \quad X_2=\lambda X_2^0; \dots \quad X_h=\lambda X_h^0$$

para $\lambda>0$.

En las ecuaciones del resolvente tendremos

$$\delta X_{h+r}+\lambda P_{h+r}^0=\Delta_r$$

siendo

$$P_{h+r}^0=a_{hr}X_h^0+\dots+a_{1r}X_1^0.$$

De donde

$$\delta X_{h+r}=\Delta_r-\lambda P_{h+r}^0 \qquad (r=1, 2 \dots m-h). \tag{6}$$

Si los signos de los polinomios P_{h+r}^0, son todos opuestos a los de los determinantes orlados, el resolvente y, por lo tanto, el sistema, admite todas las soluciones que se obtienen haciendo $\lambda>0$; el sistema dado define, entonces, una región infinita.

Si los determinantes orlados no son nulos y los signos de los polinomios P_{h+r}^0, no son todos opuestos a los de los determinantes orlados, determinemos λ de manera que anule al segundo miembro de cada ecuación (6) donde P_{h+r}^0 tenga signo opuesto al de su primer término. Entre esos valores de λ, hay uno mínimo, el cual no es ni negativo ni cero; indicando este mínimo con λ_μ, para todo otro valor de λ tal que $0<\lambda<\lambda_\mu$ los segundos miembros de (6) tienen el signo de su primer término, y por lo tanto, resulta también $X_{h+r}>0$. En forma completamente análoga se pueden estudiar los demás casos. En resumen, se obtendrán infinitas soluciones del sistema para cada conjunto de valores asignados a las h incógnitas positivas X_j. No se obtiene como en el caso anterior de $h=m$ una fórmula paramétrica para calcular todas las soluciones del sistema, lo que nos parece posible solamente en casos particulares, sino una expresión que permite obtener cuantas soluciones se quieran.

6. - División del hiperespacio por hiperplanos.

Dados m polinomios lineales, se pueden formar con ellos 2^m sistemas de inecuaciones variando con repetición hasta m los signos $>$, $<$. Diremos que todos ellos pertenecen a una *misma clase* $C(m)$ definida por los m polinomios dados. Matriz de la clase es la matriz de los coeficientes de sus polinomios y característica de la clase es la característica de su matriz. Supondremos todos los sistemas de la clase escritos es su forma normal. Son inmediatas las propiedades siguientes:

I). *Todos los sistemas de una misma clase pueden formarse partiendo de uno cualquiera de ellos*, bastará cambiar, de todas las maneras posibles, los signos de sus inecuaciones.

II). *Dos sistemas de una misma clase carecen de soluciones comunes.*

III). *En toda clase hay un solo sistema que admite una solución arbitrariamente dada siempre que no anule a ningún polinomio de la clase.*

IV). *Dos sistemas compatibles de una misma clase no pueden tener un resolvente esencial con el mismo determinante principal*, pues, como difieren, por lo menos, en el signo de una inecuación, sus determinantes orlados, o los de orden h de una misma columna de la matriz del resolvente, si son todos nulos los orlados, no pueden tener en ambos sistemas, (6, I) los mismos signos, luego si en uno de ellos es esencial, no lo es en el otro.

V). *Si un* S(m, n) *de característica* h *es compatible, son también compatibles todos los sistemas de su clase que provienen de variar, con repetición hasta* h, *o* h$-$1, *los signos de* h *o* h$-$1 *inecuaciones principales, según que el sistema no tenga orlados nulos o tenga todos sus orlado nulos, respectivamente.*

Considerando en ambos casos un resolvente esencial respecto de los polinomios principales (4), éste sigue siendo esencial puesto que su determinante principal cambia o no simultáneamente de signo con sus orlados en el primer caso, y con los de orden h en el segundo, por lo tanto (3, III), los nuevos sistemas obtenidos son también compatibles.

Consideremos ahora una clase $C(p)$ parcial de otra $C(m)$, es decir formada por $p<m$ polinomios de ésta. En virtud de las relaciones entre los sistemas parciales de un sistema se tiene:

VI). *Todo sistema compatible en la clase total tiene un correspondiente también compatible en la clase parcial.*

VII). *Todo sistema incompatible en la clase parcial tiene un sistema correspondiente también incompatible en la clase total.*

El número de regiones en que queda dividido el hiperespacio por m hiperplanos se reduce a determinar el número de sistemas compatibles contenidos en la clase $C(m)$ definida por los polinomios de las ecuaciones de los m hiperplanos dados. Habrá que distinguir diversos casos.

Sea h la característica de la clase $C(m)$. Si es $h=m$, todos los sistemas son compatibles (3, A). Los m hiperplanos dividen al hiperespacio en 2^m regiones infinitas.

Estudiemos el caso $h<m$. Supongamos primero, que todos los determinantes de orden h de la matriz de la clase son diferentes de cero, esta clase la llamaremos *completa*, demostraremos que:

VIII). *El número de sistemas compatibles de una clase completa de característica* h, *sin orlados nulos, es igual a la suma de todos los números combinatorios de clase* m *y órdenes sucesivos desde cero a* h.

Hay (6, III) en la clase un sistema compatible. Elijámoslo como sistema inicial. Si uno cualquiera de los otros sistemas de $C(m)$ que tiene $r\leqslant h$ inecuaciones cambiadas de signo respecto del inicial es incompatible, entre todos sus $\binom{m}{h}$

resolventes-pues todos los determinantes de orden h son, por hipótesis, diferentes de cero-consideremos el que tiene las mismas r filas correspondientes a dichas inecuaciones, cambiadas de signo. Puesto que no es esencial (3, II) alguno de sus determinantes orlados con las filas restantes, no cambiadas de signo, tienen signo opuesto al determinante principal de dicho resolvente; cambiando el signo a las tales filas orlantes, el sistema correspondiente resulta compatible (3, II), y como r puede tomar todos los valores desde cero a h resulta que dicho número es:

$$N=\sum_{i=0}^{h}\binom{m}{i}$$

IX). *El número de sistemas compatibles de una clase* C(m) *completa de característica* h *con todos sus determinantes orlados nulos, es igual al duplo de la suma de todos los números combinatorios de clase* m — 1 *y de órdenes sucesivos desde cero a* h — 1.

En este caso, repitiendo la demostración precedente y dejando fija la inecuación no principal cuyos coeficientes forman parte del determinante de orden h del resolvente esencial considerado, resultan en virtud de lo anterior $\sum_{i=0}^{h-1}\binom{m-1}{i}$, sistemas compatibles. Dejándola fija con el signo opuesto, resultan del mismo modo, otros $\sum_{i=0}^{h-1}\binom{m-1}{i}$ sistemas también compatibles, y por lo tanto:

$$N'=2\sum_{i=0}^{h-1}\binom{m-1}{i}.$$

Vamos a demostrar ahora que, tanto en un caso, como en el otro, no hay más sistemas compatibles en la clase. En efecto, como todos los sistemas de la clase pueden obtenerse (6, I) de uno mismo inicial, bastará probar que el número r no puede superar, en el primer caso a h y a $h-1$ en el segundo, pues si en ambos casos r superase a tales valores habría en la clase dos sistemas compatibles que tendrían un resolvente esencial con el mismo determinante principal lo cual (6, IV) no es posible.

En forma análoga es también fácil obtener el número de regiones infinitas y finitas determinadas en el hiperespacio por m hiperplanos, pues se demuestra que:

X). *El número de regiones infinitas de una clase completa,* C(m) *de característica* h, *sin orlados nulos, es el mismo que el de la clase homogénea correspondiente,* llamando clase homogénea correspondiente de otra a la clase definida por los mismos polinomios sin términos independientes; pero el número de ésta es el mismo que el de la clase completa con determinantes orlados todos nulos, luego el número de regiones infinitas es $2\sum_{i=0}^{h-1}\binom{m-1}{i}$. y el de regiones finitas de una clase completa sin orlados nulos y de característica h es la diferencia, o sea:

$$N_f = \sum_{i=0}^{h} \binom{m}{i} - 2 \sum_{i=0}^{h-1} \binom{m-1}{i} = \binom{m-1}{h}.$$

Los casos particulares que provienen de la anulación de uno o varios determinantes de orden h, o de algunos determinantes orlados, no entrañan dificultades mayores, bastará considerar las clases parciales formadas por los polinomios correspondientes y en virtud de sus relaciones con la clase total establecidas en (6) se calcula fácilmente el número de regiones correspondientes.

Agosto de 1928.

G. KOLOVRAT (Paris - Francia)

SUR LA CONTRACTION ET L'EXTENSION DES NOMBRES ENTIERS

Les deux opérations dont je vais parler ici sont fondées sur la décomposition des nombres entiers en sommes de puissances de 2, ou, plus précisément, sur ce qu'on pourrait appeler « le calcul des puissances et des racines partielles ».

Soit u un nombre qui se décompose en une somme de puissances de 2

$$a+b+c+d+ .... +l.$$

La somme

$$a^m+b^m+c^m+d^m+ .... +l^m$$

sera alors la « m-ème puissance partielle de u » et s'écrira $u^{(m)}$.

Par exemple, puisque

$$1051=2^{10}+2^4+2^3+2^1+2^0=1024+16+8+2+1,$$

« le cube partiel » de 1051 sera égal à

$$1024^3+16^3+8^3+2^3+1^3=1073741824+4096+512+8+1=1073746441.$$

Inversement, si un nombre n est une m-ème puissance partielle, c'est-à-dire une somme de différentes puissances de 2^m, par « m-ème racine partielle de n » on entendra la somme des valeurs absolues des racines m-èmes des puissances de 2^m constituant le nombre n. Ainsi la racine carrée partielle de 20 (ou $16+4$) est

$$\text{mod } \sqrt{16}+\text{mod } \sqrt{4}=4+2=6.$$

Maintenant passons à la définition de la *contraction* et de l'*extension* des Nombres. La « contraction des nombres » permet de substituer à une succession de nombres entiers $u_1, u_2, ..., u_m$ un seul nombre entier U tel que, inversement, en connaissant U, avec l'opération inverse dite « extension des nombres », on puisse retrouver les éléments $u_1, u_2, ..., u_m$ et leur ordre respectif.

Les deux opérations sont définies par la formule générale

$$U=2^{m-2}\cdot[1+\sum_{x=1}^{x=m}(u_x^{(m)}\cdot 2^x)], \tag{1}$$

laquelle, après élimination du signe (m), devient

$$U=2^{m-2}\cdot\left\{1+\sum_{x=1}^{x=m}[(a_x^m+b_x^m+ .... +l_x^m)\cdot 2^x]\right\}. \tag{2}$$

Pratiquement, l'exposant m sert à indiquer le nombre des éléments de la succession; c'est un nombre entier au moins égal à 2. Ainsi $2^0=1$ signifie qu'il y a deux éléments; $2^2=4$, qu'il y en a quatre; $2^3=8$, qu'il y en a cinq etc.

Examinons deux cas particuliers: $m=2$ et $m=3$.

Si l'on a $m=2$, x varie de 1 à 2, de sorte que

(3) $$U=1+2u_1^{(2)}+4u_2^{(2)},$$

c'est-à-dire

(4) $$U=1+2(a_1^2+b_1^2+ \dots +l_1^2)+4(a_2^2+b_2^2+ \dots +l_2^2).$$

Exemple. Supposons qu'il s'agisse de « contracter » la succession 21, 14. Puisque 21 se décompose en $16+4+1$ et 14 en $8+4+2$, on a, d'une part,

$$a_1=16, \quad b_1=4, \quad c_1=1,$$

et, d'autre part,

$$a_2=8, \quad b_2=4, \quad c_2=2.$$

Par conséquent, le résultat de la contraction sera

$$U=1+2\cdot(16^2+4^2+1^2)+4\cdot(8^2+4^2+2^2)=1+2\cdot273+4\cdot84=883.$$

Si l'on a $m=3$, x varie de 1 à 3, de sorte que

(5) $$U=2\cdot(1+2u_1^{(3)}+4u_2^{(3)}+8u_3^{(3)}),$$

c'est-à-dire

(6) $$U=2+4(a_1^3+b_1^3+ \dots +l_1^3)+8(a_2^3+b_2^3+ \dots +l_2^3)+16(a_3^3+b_3^3+ \dots +l_3^3).$$

Exemple. Supposons qu'il s'agisse de « contracter » la succession 11, 3, 27. Puisque 11 se décompose en $8+2+1$, 3 en $2+1$ et 27 en $16+8+2+1$, on aura

$$a_1=8, \quad b_1=2, \quad c_1=1,$$
$$a_2=2, \quad b_2=1,$$

et

$$a_3=16, \quad b_3=8, \quad c_3=2 \quad d_3=1.$$

Par conséquent, le résultat de la contraction sera

$$U=2+4\cdot(8^3+2^3+1^3)+8\cdot(2^3+1^3)+16\cdot(16^3+8^3+2^3+1^3)=76030.$$

Problème inverse. Il s'agit d'*étendre* le nombre 9048.

1) Eliminons le facteur pair. Il vient

$$9048=8\cdot1131=2^3\cdot1131.$$

Par conséquent, $m=3+2=5$.

2) Extrayons l'unité; nous aurons $1131-1=1130$.

3) Le reste se décomposera en une somme de puissances de 2 classées en m catégories:

$$\text{type } 2^{mN_0+1}, \text{ type } 2^{mN_0+2}, \dots, \text{ type } 2^{mN_0+m}=2^{mN_1}.$$

On obtiendra

$$1130=(2^1+2^6)+0+2^3+0+(2^5+2^{10}).$$

4) Divisons les puissances de la première catégorie par 2^1, celles de la deuxième catégorie par 2^2, celles de la troisième par 2^3 etc.,

$$2^0+2^5 \qquad 0 \qquad 2^0 \qquad 0 \qquad 2^0+2^5.$$

5) De chacune des sommes obtenues extrayons la racine m-ème partielle:

$$u_1=2^0+2^1=3, \qquad u_2=0, \qquad u_3=2^0=1, \qquad u_4=4, \qquad u_5=2^0+2^1=3.$$

Résultat: succession 3, 0, 1, 0, 3.

Il est aisé de se rendre compte que, quel que soit le nombre des éléments constitutifs, on pourra toujours remonter à la succession primitive et c'est justement en cette réversibilité que consiste l'intérêt théorique et pratique des nouvelles opérations.

Sezione Prima B

H. HAHN (Wien - Austria)

ÜBER STETIGE STRECKENBILDER

Eine uralte Definition des Begriffes « Kurve » lautet: Kurven sind jene geometrischen Gebilde, die durch stetige Bewegung eines Punktes erzeugt werden; oder etwas präziser formuliert: Eine Kurve ist eine Punktmenge, die von einem sich stetig bewegenden Punkte in einem abgeschlossenen endlichen Zeitintervalle durchlaufen werden kann. Es ist nur ein andrer Wortlaut, wenn wir statt dessen sagen: Kurven sind die stetigen Bilder abgeschlossener Strecken. Nun weiss man seit PEANO, dass unter diese Definition Punktmengen fallen, die niemand wird als Kurven bezeichnen wollen, wie z. B. die Fläche eines Quadrates. Man hat daher die in Rede stehende Kurvendefinition verlassen und definiert heute die Kurven durch ihre Eindimensionalität im Sinne von MENGER und URYSOHN. Doch verliert dadurch die Frage nach einer topologischen Charakterisierung der stetigen Streckenbilder, also derjenigen Punktmengen, die von einem sich stetig bewegenden Punkte in einem abgeschlossenen endlichen Zeitintervalle durchlaufen werden können, nichts von ihrem Interesse. Diese Frage haben im Jahre 1913 gleichzeitig und unabhängig beantwortet Herr MAZURKIEWICZ und ich ([1]). Die Antwort lautet: Damit eine Punktmenge stetiges Streckenbild sei, ist nothwendig und hinreichend, dass sie in sich kompakt, zusammenhängend und lokal zusammenhängend sei. Dabei heisst eine Punktmenge in sich kompakt, wenn jeder ihrer unendlichen Teile einen zu ihr gehörigen Häufungspunkt hat; der Begriff « zusammenhängend » ist im Sinne der bekannten HAUSDORFF'schen Definition ([2]) zu verstehen; und eine Menge E heisst im Punkte a von E lokal zusammenhängend, wenn es zu jeder Umgebung U von a eine Umgebung U' von a gibt, so dass jeder in U' liegende Punkt b von E einem auch a enthaltenden und ganz in U liegenden zusammenhängenden Teile von E angehört; die Menge E heisst lokal zusammenhängend, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal zusammenhängend ist.

Dass diese Bedingungen *notwendig* sind, liegt auf der Hand; schwieriger

---

([1]) ST. MAZURKIEWICZ, Compt. r. Varsovie (III) 6 (1913), 305; Fund. math. 1 (1920), 191; H. HAHN Jahresber. Math. V. 23 (1914), 319; Wien. Ber. 123 (1914), 2433.

([2]) Siehe z. B. F. HAUSDORFF Mengenlehre (2 Aufl.), 150.

ist der Nachweis, dass sie *hinreichend* sind; hiefür soll ein neuer Beweis angegeben werden, der — wie mir scheint — nicht nur die ursprünglichen Beweise von Herrn MAZURKIEWICZ und mir, sondern auch die zeither von verschiedenen Seiten mitgeteilten Beweise an Einfachheit und Durchsichtigkeit übertrifft, indem er die Behauptung als unmittelbare Folge bekannter, mit elementaren Mitteln beweisbarer Sätze aufweist. Es sind dies die folgenden Sätze:

I. *Jede in sich kompakte Menge ist stetiges Bild jedes dyadischen Diskontinuums.*

II. *Ist die Menge* M *in sich kompakt, zusammenhängend und lokal zusammenhängend, so sind je zwei Punkte* a *und* b *von* M *verbunden durch ein zu* M *gehöriges stetiges Streckenbild* M′ (1).

III. *Ist die Menge* M *in sich kompakt, zusammenhängend und lokal zusammenhängend, so gehört zu jedem* $\varrho > 0$ *ein* $\sigma > 0$ *von folgender Eigenschaft: je zwei Punkte von* M *deren Abstand* $< \sigma$ *ist, sind verbunden durch ein zu* M *gehöriges stetiges Streckenbild, dessen Durchmesser* $< \varrho$ *ist.*

Satz II und III findet man bewiesen in meiner oben zitierten Abhandlung (2). Einen Beweis von Satz I findet man in der zweiten Auflage von Hausdorff's Mengenlehre (3); er sei hier kurz in etwas vereinfachter Form skizziert.

Wir nennen ein System endlich vieler Zahlen $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ einen *dyadischen Komplex*, wenn jede seiner « Stellen » k_i einen der beiden Werte 0, 1, hat; ebenso nennen wir $k_1, k_2, \ldots, k_r, \ldots$ eine *dyadische Folge*, wenn jede ihrer Stellen k_r einen der Werte 0, 1 hat. Sei nun jedem dyadischen Komplexe $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ eine Menge $A_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ zugeordnet; die Mengen mit n Indices nennen wir *Mengen n-ter Stufe.* Wir sagen, diese Mengen bilden ein *dyadischen Schema*, wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Menge $A_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ ist in sich kompakt.

2. Es ist stels $A_{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}}$ Teil von $A_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$.

3. Ist d_n der grösste unter den Durchmessern der Mengen n-ter Stufe, so gilt $d_n \to 0$.

Für jede dyadische Falge $k_1, k_2, \ldots, k_r, \ldots$ besteht der Durchschnitt $A_{k_1}, A_{k_1 k_2}, \ldots, A_{k_1 k_2, \ldots, k_r}, \ldots$ aus genau einem Punkte. Die Menge aller dieser Punkte (für alle möglichen dyadischen Folgen) heisst die durch unser Schema dargestellte *dyadische Menge.* Jede dyadische Folge liefert also genau einen Punkt der dyadischen Menge, doch können verschiedene dyadische Folgen denselben Punkt liefern. Sind aber je zwei Mengen n-ter Stufe des dyadischen Schemas fremd, so liefern verschiedene dyadische Folgen auch verschiedene Punkte; die dyadische Menge

(1) D. h. M' ist stetiges Bild einer Strecke $[p, q]$, wobei a und b die Bilder von p und q sind.

(2) H. HAHN Wien. Ber. 123 (1914), 2436, 2439, (Satz II und III).

(3) F. HAUSDORFF, Mengenlehre (2 Aufl.), 131, 197.

heisst dann ein *dyadisches Diskontinuum*. Das bekannteste Beispiel ist das *Cantorsche Diskontinuum*; es entsteht, indem man für A_0, A_1, die Intervalle $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ wählt, für $A_{00}, A_{01}, A_{10}, A_{11}$ die Intervalle $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9}, 1\right]$ usf.

Sei nun durch ein erstes dyadisches Schema eine beliebige dyadische Menge A gegeben, durch ein zweites dyadisches Schema ein dyadisches Diskontinuum D. Jeder Punkt von D wird geliefert durch genau eine dyadische Folge, die ihrerseits genau einen Punkt von A liefert; dadurch ist eine Abbildung von D auf A gegeben, die offenbar stetig ist. Also: *Jede dyadische Menge ist stetiges Bild jedes dyadischen Diskontinuums.*

Um I zu beweisen, ist also nur zu zeigen: *Jede in sich kompakte Menge* A *ist eine dyadische Menge.* Um dies einzusehen, beachte man, dass A, weil in sich kompakt, überdeckbar ist durch endlich viele Kugeln vom Radius 1; indem man eventuell eine solche Kugel mehrmals anschreibt, kann man immer annehmen, ihre Anzahl sei eine Potenz von 2, etwa 2^{n_1}. Die Durchschnitte dieser Kugeln mit A seien $K_1, K_2, \ldots, K_{2^{n_1}}$; wir machen sie zu den Mengen n_1-ter Stufe eines dyadischen Schemas, dessen Mengen niedrigerer Stufe alle die Menge A selbst seien. Jede Menge K_i ist wieder überdeckbar durch endlich viele Kugeln vom Radius $\frac{1}{2}$; wir können ohneweiteres annehmen, die Anzahl dieser überdeckenden Kugeln sei für jedes K_i dieselbe, und zwar eine Potenz 2^{n_2} von 2. Die Durchschnitte dieser $2^{n_1+n_2}$ Kugeln mit A machen wir zu den Mengen (n_1+n_2)-ter Stufe unsres dyadischen Schemas, während für $n_1 < n < n_1+n_2$ als Mengen n-ter Stufe in leicht ersichtlicher Weise die Mengen $K_1, K_2, \ldots, K_{2^{n_1}}$ gewählt werden. In dieser Weise fortfahrend erhält man tatsächlich ein die Menge A darstellendes dyadisches Schema, und I ist bewiesen.

Nun zeigen wir, wie aus I, II und III die Behauptung folgt:

Jede in sich kompakte, zusammenhängende und lokal zusammenhängende Menge M *ist ein stetiges Streckenbild.*

Nach I gibt es eine stetige Abbildung des Cantorschen Diskontinuums C auf M; es handelt sich noch darum, diese Abbildung zu einer stetigen Abbildung der Strecke [0, 1] auf M zu ergänzen. Das Komplement von C zu [0, 1] besteht aus abzählbar vielen zu je zweien fremden, offenen Intervallen (p_r, q_r) $(r=1, 2, \ldots)$. Da p_r und q_r zu C gehören, haben sie in M je einen Bildpunkt a_r bzw. b_r. Nach II sind a_r und b_r verbunden durch ein zu M gehöriges Streckenbild M_r, und nach III kann angenommen werden, dass für den Durchmesser d_r von M_r gilt: $d_r \to 0$. Weil M_r ein a_r und b_r verbindendes Streckenbild ist, können wir $[p_r, q_r]$ stetig so auf M_r abbilden, dass a_r Bild von p_r und b_r Bild von q_r ist. Dadurch ist die Abbildung von C auf M ergänzt zu einer Abbildung von [0, 1] auf M, die wegen $d_r \to 0$ offenbar stetig ist.

Wählen wir insbesondere für M die Fläche eines Quadrates und verstehen unter M_r die Verbindungsstrecke von a_r und b_r, so erhalten wir eine Abbildung der Strecke aufs Quadrat, die zuerst von H. LEBESGUE angegeben wurde (1). Während die stetige Abbildung einer Strecke auf eine in sich kompakte, zusammenhängende und lokal zusammenhängende Menge, die ich in der oben zitierten Abhandlung durchführte, eine Verallgemeinerung von PEANOS Abbildung der Strecke aufs Quadrat war, ist also die hier angegebene Abbildung eine Verallgemeinerung von LEBESGUES Abbildung der Strecke aufs Quadrat.

(1) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 44. Vgl. auch H. HAHN « Ann. di Mat. » (3), 21, (1913), 51; *Theorie der reellen Funktionen*, 150.

B. Knaster (Warszawa - Polonia)

DECOMPOSIZIONI CONTINUE E SEMI-CONTINUE NELL'ANALYSIS SITUS

Il metodo delle cosidette decomposizioni semi-continue, introdotto nell'Analysis Situs (o, per precisare, nella Topologia appoggiata sulla Teoria degli Insiemi) da R. L. Moore [1] è strettamente legato ai procedimenti analitici universalmente noti, come quello di trasformazione d'un insieme di punti in un altro (ad es. curva in curva) per mezzo di una funzione continua.

Sia E un insieme compatto, x una variabile percorrente gli elementi di E, $y=f(x)$ una funzione continua definita su E e H l'insieme dei valori y di $f(x)$. Dato un valore y_0 di $f(x)$, l'insieme dei valori di x soddisfacenti all'equazione $y_0=f(x)$ viene chiamato uno *strato* di E (« tranche ») ed indicato con T_{y_0}. *L'insieme* (non la somma) *degli strati, ossia la funzione plurivalente inversa di* $f(x)$, sia definito come *decomposizione semi-continua* (*o stratificatione*) *di* E prodotta dalla funzione $f(x)$. Tale insieme, corrispondente quindi elemento per elemento all'imagine H di E, può essere al punto di vista topologico identificato con H e considerato come uno *spazio*, chiamato l'*iperspazio* H della suddetta decomposizione di E.

Lo stesso concetto di decomposizione semi-continua può però essere definito con mezzi topologici *direttamente*, cioè senza l'intervento della funzione $f(x)$, chiamando *semi-continua* ogni decomposizione di un insieme compatto E in una famiglia H di insiemi anch'essi compatti T_y senza elementi comuni e tale che per ogni successione convergente degli insiemi appartenenti alla H esista nella H un insieme contenente il limite della successione stessa.

La decomposizione *continua* ne è il caso particolare, quando per ogni successione convergente degli insiemi di H esiste nella H un insieme-limite della medesima successione.

Come esempi delle decomposizioni semi-continue si possono citare, oltre alcuni triviali (in singoli elementi o in un solo strato, identico con E intero), la decomposizione di qualsiasi insieme compatto nei suoi *componenti* (Brouwer), del quadrato in segmenti verticali (decomposizione continua), della superficie sferica

[1] R. L. Moore, *Concerning upper semi-continuous collections....* Proc. Nat. Acad. of Sc. 10 (1924), p. 356 e Trans. of the Amer. Math. Soc. 27 (1925), p. 416.

in una lemniscata, quando siano presi tre punti rispettivamente nelle regioni determinate da questa curva sulla superficie considerata e tre famiglie di curve chiuse semplici, contornanti i tre punti scelti ed approssimanti le frontiere delle regioni che li contengono. L'iperspazio di quest'ultima decomposizione è una Y, di cui il punto di biforcazione corrisponde alla lemniscata.

KURATOWSKI [1] ha dimostrato l'equivalenza delle due definizioni di decomposizione semi-continua date qui sopra. Il teorema che assicura per ogni stratificazione, data nella seconda definizione, l'esistenza di una funzione continua considerata nella definizione prima e determinante *la stessa* stratificazione, stabilisce alla sua volta una *metrizzazione* dell'iperspazio. È da notare che l'iperspazio H può essere quanto si vuole diverso dall'insieme E inquanto riguarda il numero delle dimensioni. Ciò è una conseguenza del fatto che si trova sempre una funzione di PEANO « generalizzata » che trasforma in modo continuo l'insieme lineare non-denso e perfetto di CANTOR in qualsiasi spazio metrico compatto (ALEXANDROFF).

Un esame sistematico delle proprietà, sopratutto degli *invarianti* più importanti delle decomposizioni semi-continue, è stato sviluppato da KURATOWSKI (loc. cit.). Fra tali invarianti sono da notare: il continuo di JORDAN [2], l'insieme chiuso e aperto, la connessità, il continuo irriducibile [3], il continuo indecomponibile [4], la uni-coerenza, cioè la proprietà di E secondo la quale il prodotto di ogni due continui, di cui E è la somma, è un continuo, ecc. Il metodo delle decomposizioni semi-continue fu applicato da numerosi altri autori ai diversi problemi di Topologia e di Teoria delle dimensioni e li ha condotti alla scoperta di teoremi notevolissimi (R. L. MOORE, VIETORIS, ALEXANDROFF, TUMARKIN; HUREWICZ esaminò la dipendenza fra il numero delle dimensioni di H e quello di E ed i suoi strati).

Secondo il teorema di MOORE (loc. cit.), la decomposizione semi-continua della superficie sferica E in continui che non la dividono ha per iperspazio H sempre una superficie sferica (da ciò risulta che la uni-coerenza è un invariante di questa operazione). Il problema ancora aperto è quello di vedere, se è possibile tale decomposizione colla condizione supplementare che nessuno dei continui-strati si riduca ad un solo punto.

Il teorema di VIETORIS [5] riguarda specialmente le decomposizioni della stessa superficie 1-*dimensionali*, cioè aventi per iperspazio una curva. Essa è

---

(1) C. KURATOWSKI, *Sur les décompositions semi-continues....* Fundamenta Mathematicae XI, p. 169.

(2) O *continuo localmente connesso*: imagine continua del segmento rettilineo.

(3) Contenente due punti non contenuti in alcun suo continuo parziale.

(4) Che non è somma di due continui diversi da esso.

(5) L. VIETORIS, *Ueber stetige Abbildungen einer Kugelflache,* Proc. K. Akad. Wet. Amsterdam 29 (1927), p. 443.

sempre una *dendrite*, cioè una curva di JORDAN non contenente alcuna curva semplicemente chiusa. Inversamente: ogni dendrite è un iperspazio di una conveniente decomposizione semi-continua (oppure continua) della superficie sferica in continui che non la dividono. Lo abbiamo già visto per la dendrite Y.

Il dominio però, dove il metodo delle decomposizioni semi-continue ha condotto alla soluzione più completa di un problema trattato prima con successo soltanto parziale, è lo studio della *struttura dei continui irriducibili fra due punti* e di quella *delle frontiere comuni di due o più regioni piane.* Dato che la risposta al problema di ordinare i punti del continuo irriducibile in modo analogo a quello dell'arco semplice (problema di ZORETTI) è nel caso generale negativa, vi era da cercare il modo più naturale, cioè *lineare*, di ordinarli per gruppi che possano essere formati anche da più d'un punto (l'ordine topologicamente analogo nelle frontiere di regioni sarebbe quindi *ciclico*).

Ebbene, quest'ordine si trova realizzato (con l'eccezione di un tipo, in cui i cosidetti continui indecomponibili sono d'importanza decisiva) per mezzo della decomposizione semi-continua *lineare*, cioè tale da avere $E=\Sigma T_x$ con iperspazio $0 \leqslant x \leqslant 1$, designando T_x gli strati, e le condizioni seguenti essendo soddisfatte: si abbia $\lim T_{x_n} \subset T_x$ ognivolta che $x=\lim x_n$ (condizione di semi-continuità) ed inoltre T_0 e T_1 contengano rispettivamente i due punti fra i quali il continuo E è irriducibile. Si dimostra che fra tutte le decomposizioni semi-continue di tal continuo ne esiste una (la più sottile) o, per precisare, quella di cui gli strati non possono essere cambiati, se non aumentandoli (KURATOWSKI) ([1]). Ogni T_x è un continuo, può quindi essere costituito anche da un solo punto.

Se con $x=\lim x_n$ si ha $T_x=T_{x_n}$, T_x si chiama lo *strato di continuità.* L'esempio banale è quello di decomposizione dell'arco semplice in punti singoli che rappresentano allora tutti quanti gli strati di continuità: c'è dunque una decomposizione continua. W. A. WILSON ([2]) ha posto il problema dell'esistenza sul piano di un continuo irriducibile fra due punti dotato di tale decomposizione continua in istrati non riducentisi ai singoli punti. La soluzione positiva di questo problema è fornita da un mio esempio ([3]). Esso è composto da due tipi degli strati: un'infinità, avente la potenza del continuo, di archi semplici ed una infinità numerabile densa di curve omeomorfe alla $y=\sin\frac{\pi}{x}$ presa col suo continuo di convergenza $x=0$, $-1=y=+1$. Se si richiede inoltre che ogni strato sia un arco semplice, il problema rimane aperto; non mi pare che tale costruzione sia realizzabile, almeno nel piano.

([1]) C. KURATOWSKI, *Théorie des continus irréductibles.....*, Fundamenta Mathematicae X, p. 225.

([2]) W. A. WILSON, *On the structure of a continuus....*, Amer. Journ. of Math. XLVIII (1926), p. 147.

([3]) Da pubblicarsi *ibidem*.

Per ciò che riguarda le frontiere di regioni piane, ogni frontiera comune a più di due regioni è un continuo indecomponibile o somma di due tali continui (KURATOWSKI) (1). Che una decomposizione semi-continua lineare o ciclica del continuo indecomponibile non sia possibile (ciò che L. E. J. BROUWER fu il primo ad osservare), risulta già dall'invarianza dell'« indecomponibilità » rispetto a questa operazione. D'altra parte, ogni frontiera decomponibile, comune almeno a due regioni del piano, è costituita, secondo i risultati recenti di KURATOWSKI e di W. A. WILSON, da due continui irriducibili fra gli stessi punti e viceversa. In tal modo, eccetti i tipi ben definiti, legati ai continui indecomponibili, le decomposizioni semi-continue lineari dei due continui, componenti la frontiera considerata, forniscono la richiesta stratificazione ciclica della frontiera stessa.

Se la frontiera E di almeno due regioni P e Q della superficie sferica si trova decomposta in istrati T_x coll'indice x percorrente, come si può assumere, l'equatore H (iperspazio), la condizione « $x = f(p)$ per ogni punto p di $T_{f(p)}$ » definisce una tale funzione continua $f(p)$ soltanto per i valori-limiti delle regioni P e Q, dando così luogo al « problema-limite » cioè quello dell'estensione della definizione di $f(p)$ alla superficie intera. Questo problema si risolve in modo positivo: la definizione di $f(p)$ si estende infatti in tal maniera che le regioni P e Q si trasformano rispettivamente nelle due metà (aperte) della superficie, determinatevi dall'equatore H (KURATOWSKI) (1). Questa trasformazione di P e Q è inoltre continua nei due sensi.

Il tipo già accennato, escluso rispetto alla stratificazione lineare o ciclica, è quello del continuo E *monostratico* (composto al di più d'una infinità enumerabile di continui indecomponibili e di continui non-densi in E). Una frontiera non-monostratica delle regioni piane è sempre multi-coerente, cioè tale che il prodotto di due continui qualsiansi, dei quali essa è la somma, non è mai un continuo: il fatto fondamentale nella dimostrazione del KURATOWSKI sta nella struttura ciclica di tale frontiera. A questo proposito posso segnalare un mio risultato recente: nello spazio 3-dimensionale esistono continui non-monostratici multi-coerenti, ma non prestantisi ad alcuna stratificazione ciclica.

Nella comunicazione che segue verrà esposta una applicazione molto semplice del metodo qui descritto ad un problema della Teoria delle curve di K. MENGER.

---

(1) C. KURATOWSKI, *Sur la structure des frontières communes à deux régions*, Fundamenta Mathematicae XII, p. 20.

B. KNASTER (Warszawa - Polonia)

SUI PUNTI REGOLARI NELLE CURVE DI JORDAN

Un punto a di una curva E si chiama, secondo K. MENGER [1], *regolare*, se esiste in ogni insieme A, aperto rispetto ad E e contenente il punto medesimo, un insieme *finito* D dividente [2] E fra a ed $E-A$. Se per ogni tale A contornante il punto fisso a esiste un D costituito esattamente di n punti, il punto regolare a viene chiamato *di ordine* n; altrimenti esso si chiama *regolare d'ordine crescente* [1].

Gli stessi termini e definizioni si potrebbero enunciare per un continuo E qualsiasi.

Se tutti i punti di E sono regolari, E è una curva (continuo 1-dimensionale) e si chiama pure « curva regolare ». Ogni curva regolare è un continuo di JORDAN (imagine continua del segmento rettilineo).

MENGER ha posto [1] e poi risolto [3] il seguente problema: *Se in ogni curva regolare* E, *un punto arbitrario* a *è sempre una estremità comune di archi semplici indipendenti* (cioè senz'altri punti comuni) *contenuti in* E, *il numero di questi archi è uguale a* n *o infinito, a secondo che il punto* a *è di ordine* n *o crescente; in quest'ultimo caso il diametro degli archi tende allo zero.*

La risposta al problema è positiva. Rimane da sapere se essa sussiste tale nel caso generale, cioè supponendo che E sia un qualsiasi continuo di JORDAN. Sia (M) il teorema di MENGER generalizzato così.

Consideriamo ora il seguente teorema, segnalato nel 1927 dal N. E. RUTT [4]: *Essendo* a *e* b *due punti* (distinti) *di qualsiasi continuo di* JORDAN E *e* n *il massimo numero di archi semplici indipendenti esistenti in* E *fra* a *e* b, *esiste in* E *un insieme* D *costituito esattamente da* n *punti e dividente* E *fra* a *e* b.

---

(1) K. MENGER, *Grundzuege einer Theorie der Kurven*, Math. Ann. 95, p. 277.

(2) Cioè: $E-D=M+N$, M non contiene punti-limiti di N nè N quelli di M, M contiene a e N contiene $E-A$.

(3) K. MENGER, *Zur allgemeinen Kurventheorie*, Fundamenta Mathematicae, X, p. 96.

(4) N. E. RUTT, Bull. of the Amer. Math. Soc. 33 (1927), p. 411 (abstract).

Non è pervenuta finora alla mia conoscenza la dimostrazione completa (per gli spazî $m \geqslant 2$-dimensionali) dell'autore del suo teorema, riferito però recentemente dal J. R. KLINE nella sua interessantissima memoria: « *Separation theorems and their relation to recent developments in Analysis situs* » (1). Il teorema di N. E. RUTT vi è qualificato « un complemento interessante al risultato di MENGER ».

Mi propongo di dimostrare qui che, precisamente, *il teorema* (M) *risulta da quello di* N. E. RUTT; la dimostrazione può farsi appunto mediante una delle più facili applicazioni del procedimento di decomposizioni semi-continue, trattato nella precedente comunicazione.

Sia infatti a un punto di un continuo di JORDAN E ed A un contorno aperto di a, abbastanza piccolo affinchè ogni insieme D dividente E fra a ed $E-A$ contenga almeno n suoi punti (se un tale A non vi fosse, l'ordine del punto a sarebbe inferiore ad n). Dimostreremo allora che:

(P) *il punto* a *è un'estremità comune di almeno* n *archi semplici indipendenti con estremità opposte giacenti sulla frontiera di tale insieme* A *e, salvo esse, contenuti in* A.

Supponiamo il contrario, cioè che non esista più di $k<n$ tali archi; per altro c'è da osservare che in ogni caso ne esiste almeno *uno*, poichè E è un continuo di JORDAN e contiene in seguito a ciò un arco semplice fra ogni due suoi punti, sia fra a ed un punto di $E-A$: basta dunque prendere la porzione di tale arco da a fino alla frontiera di A, ch'esso deve attraversare.

Consideriamo la decomposizione di E in insieme chiuso $E-A$, preso integralmente, ed in insiemi costituiti da tutti i singoli punti di A. Questa decomposizione di E è semi-continua; inoltre essa trasforma A per omeomorfia.

Indicando b l'elemento dell'iperspazio H che corrisponde a $E-A$, l'insieme H è un continuo di JORDAN e contiene, secondo la supposizione nostra, *esattamente* k archi indipendenti fra (a) e b poichè le proprietà « continuo di JORDAN » ed « indipendenza » sono invarianti rispetto alle decomposizioni semi-continue ed « arco semplice » è un invariante dell'omeomorfia.

Secondo il teorema di RUTT vi sono dunque in $H-((a)+b)$, cioè pure nell'imagine di A, $k<n$ elementi, il cui insieme divide H fra (a) e b. Pertanto lo insieme D dei k punti corrispondenti in E divide E fra a ed $E-A$, essendo la divisione pure un invariante dell'omeomorfia.

Ciò contradice le ipotesi ammesse da noi su A. La proposizione (P) si trova quindi dimostrata; il teorema (M) ne segue quasi immediatamente.

Osserviamo da ultimo che non essendo nel ragionamento nostro la regolarità del punto a in alcun modo presunta dall'ipotesi « almeno di ordine n », la

(1) Ibid. 34 (1928), p. 155.

tesi del teorema (M) rimane valida anche per i punti non-regolari di un continuo di JORDAN E; tuttavia il teorema in generale non si estende oltre i continui di JORDAN, sia pure sui punti regolari, come lo dimostrano opportuni esempii ([1]).

([1]) Una modificazione (riduzione al singolo punto del primo strato) del continuo irriducibile fra i punti (0, 0) e (1, 0) costruito da me e descritto dal KURATOWSKI, Fund Math. X, p. 260.

STANISŁAWA NIKODYM (Kraków - Polonia)

SUR UNE PROPRIÉTÉ TOPOLOGIQUE DU PLAN EUCLIDIEN

Dans mon travail publié dans le XII tome des « Fund. Math. » (1) j'ai démontré un lemme qui peut être regardé comme analogue au théorème suivant très élémentaire.

« Si p_1, $p_2, \dots p_n, \dots$ est une suite de nombres réels différents tendant vers p, on en peut extraire une suite partielle qui converge vers p d'une manière monotone ».

Le lemme dont je parle exprime une propriété du plan et, au fond, il est contenu dans une méthode de M. R. L. MOORE employée par des topologues américains pour traiter des différentes questions concernant les continus jordaniens.

Pour donner l'énoncé précis du lemme, commençons par les définitions suivantes.

Disons — avec M. ZARANKIEWICZ (2) — qu'une suite de continus K_1, $K_2, \dots$ possède K comme continu de convergence, si:

1°) $K_n \cdot K_m = 0 \ (n \neq m)$;

2°) $K \cdot \sum\limits_n K_n = 0$;

3°) $K = \lim K_n$; c'est-à-dire K est à la fois l'ensemble limite et l'ensemble d'accumulation pour $\{K_n\}$ si l'on emploi la terminologie de JANISZEWSKI (3).

En simplifiant convenablement la notion introduite dans mon travail cité, disons qu'un point p est *un point de convergence monotone pour la suite infinie de continus (plans)* K_1, $K_2, \dots$, si:

1°) $\{K_n\}$ possède un continu de convergence auquel appartient p;

2°) il existe un $\varepsilon > 0$ tel que si $x \varepsilon K_n$, tout continu reliant p avec x et contenu dans $\mathcal{S}(p, \varepsilon)$ coupe K_{n+1}.

Les définitions posées, passons au l'énoncé du lemme.

---

(1) *Sur une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-continu d'un continu jordanien et plan soit lui-même jordanien*, pag. 169 (et 168).

(2) *Sur les points de division dans les ensembles connexes.* « Fund. Math. », IX, p. 127.

(3) *Thèse* (Paris 1911) p. 15 et 16.

LEMME. - Si E_1, E_2.... est une suite infinie de continus possédant le continu de convergence E, il existe une suite partielle

$$E_{v_1},\ E_{v_2},\ldots,\ E_{v_m},\ldots,$$

une suite de leurs sous-continus respectifs

$$L_1,\ L_2,\ldots\ L_m,\ldots$$

et un point p de E tels que p est un point de convergence monotone pour la suite $\{L_m\}$.

La propriété ne subsiste pas pour l'espace à 3-dimensions.

C'est au moyen de cette notion de convergence monotone que j'ai démontré dans le XII tome des « Fund. Math. » un théorème exprimant une condition nécessaire et suffisante pour qu'un sous-continu d'un continu jordanien et plan soit lui-même jordanien (1). Au moyen d'une notion, un peu différente, j'ai trouvé recemment avec M. OTTON NIKODYM une condition nécessaire et suffisante (2) qui doit être satisfaite par un continu jordanien et plan J, pour que la propriété d'être jordanien pour un sous-continu C quelconque de J, soit équivalente à la propriété connue, trouvée par M. R. W. MOORE pour le complémentaire relatif $J-C$.

Soit maintenant C_1, C_2,...., C_n,.... une suite infinie de continus (dans le plan Euclidien), possédant un continu de convergence C.

Disons qu'un point p de C est *un point d'accumulation monotone pour* $\{C_n\}$, s'il existe une suite de sous-continus respectifs: L_1, L_2,...., L_n,.... telle que p représente un point de la convergence monotone pour $\{L_n\}$.

Or, la propriété du plan dont j'ai parlé, peut être énoncée de la manière suivante:

Si C *est un continu de convergence pour la suite* $\{\mathrm{C_n}\}$ *de continus, il existe sur* C *au moins un point d'accumulation monotone pour* $\{\mathrm{C_n}\}$.

Or, il est très probable que tous les points de C (peut-être excepté deux points au plus) sont des points d'accumulation monotone pour $\{C_n\}$. Ce serait une propriété plus forte qu'une propriété analogue démontrée par M. ZARANKIEWICZ (3).

On pourrait poser une foule de problèmes intéressants concernants la monotonie de convergence.

La notion de la convergence monotone semble être importante non seulement pour les différentes questions concernant les continus jordaniens, plongés dans l'espace euclidien, mais elle (peut-être convenablement modifiée) semble être

(1) l. c. « Fund. Math. », XII, p. 161 et 162.

(2) Pas encore publié.

(3) *Über eine topologische Eigenschaft der Ebene.* « Fund Math. » XI. Satz 2, p. 25.

très avantageuse pour caractériser d'une manière purement topologique des espaces réguliers considérés par M. BROUWER: les espaces triangulables (simplicifiables).

Pour mieux expliquer cette idée, considérons une variété jordanienne V, c'est-à-dire:

1°) D-complète (selon la terminologie de M. FRÉCHET);

2°) séparable;

3°) connexe;

4°) telle que, quel que soit le point $p \varepsilon V$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que tout point de $\mathfrak{S}(p, \delta)$ (¹) peut être relié avec p par un arc simple contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$.

Disons qu'une suite de points: $p_1, p_2, \ldots p_n, \ldots$ *tend d'une manière monotone vers p,* si:

1°) $p_n \neq p_m$ pour $m \neq n$;

2°) $\lim p_n = p$;

3°) il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, si $p_n \varepsilon \mathfrak{S}(p, \varepsilon)$, tout continu reliant p_n avec p et contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$, passe par p_{n+1}.

On voit que cette notion est d'accord avec la notion ordinaire de monotonie de convergence pour une suite de nombres.

Soit p un point de la variété V. Disons que p possède relativement à V *l'ordre de monotonie au moins égal à r* s'il existe r suites infinies de points:

$$\begin{array}{l} p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, \ldots, p_n^{(1)}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_1^{(r)}, p_2^{(r)}, \ldots, p_n^{(r)}, \ldots \end{array}$$

telles que:

1°) chacune d'elles tend d'une manière monotone vers p;

2°) quel que soit $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que, si $p_n^{(\alpha)} \varepsilon \mathfrak{S}(p, \delta)$, il existe toujours un arc simple reliant p avec $p_n^{(\alpha)}$, contenu dans $S(p, \varepsilon)$ et ne passant par *aucun* point $p_m^{(\beta)}$, où $\beta \neq \alpha$, $m = 1, 2 \ldots$

Si un point p de la variété V possède l'ordre de monotonie au moins égal à r et ne possède pas l'ordre de monotonie au moins égal à $r+1$, on dit que p possède *l'ordre de monotonie r.* L'ordre sera 0, s'il n'existe aucune suite de points qui convergerait d'une manière monotone vers p.

Cette définition admise, on voit tout de suite que *si la variété* V *est homéomorphe avec une droite ou un cercle, tout point possède l'ordre de monotonie* $=2$ *et ensuite, si* $\mathrm{p_n} \to \mathrm{p}$, *les points* $\mathrm{p_n}$ *étant différents deux-à-deux, on en peut extraire une suite partielle convergente vers* p *d'une manière monotone.*

(¹) $\mathfrak{S}(p, \delta)$ c'est l'ensemble de tous les points q de V tels que la distance $|p, q| < \delta$.

Or, il est remarquable qu'on peut démontrer la réciprocité.

Si V *est une variété jordanienne et si, quel que soit le point* p:

1°) *Pour toute suite infinie de points différents et convergents vers* p, p *est un point d'accumulation monotone,*

2°) *l'ordre de monotonie de* p *est* 2,

alors V *est homéomorphe soit à une droite illimitée, soit à un cercle.*

Pour démontrer cela établissons d'abord un lemme. Soient L et M deux arcs simples aboutissant à p et contenus dans V. Déterminons sur L et M la direction des parcours telle que p soit le point dernier. Supposons d'abord, qu'à partir d'un certain point, les arcs L et M ne sont pas identiques, mais qu'ils aient des points communs $\neq p$ dans tout entourage de p. Nous allons démontrer l'existence d'une suite de points qui converge vers p, mais qui ne contient aucune suite partielle convergente vers p d'une manière monotone.

Soit $\delta_1 > 0$. Il existe un point p_1 de $M \cdot \mathfrak{S}(p, \delta_1)$ n'appartenant pas à L. En vertu de l'hypothèse l'arc $M(p_1, p)$ coupe L nécessairement.

Soit q_1 le premier point de $M\ (p_1, p)$ et appartenant à L; $M(p_1, q_1)$ n'a avec L qu'un seul point commun, à savoir q_1. Supposons qu'on ait ainsi trouvé les points:

$$p_1,\ q_1,\ p_2,\ q_2, \dots\ p_n,\ q_n$$

et les nombres $\delta_1,\ \delta_2, \dots, \delta_n$.

Soit ε_n tel que $\varepsilon_n < \delta_n$ et plus petit que toutes les distances du point p aux arcs $M(p_1, q_1), \dots M(p_n, q_n)$. Trouvons un δ_{n+1} tel que, quel que soit $x \varepsilon \mathfrak{S}(p, \delta_{n+1})$, l'arc $L(p, x)$ se trouve entièrement dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon_n)$ et quel que soit $y \varepsilon \mathfrak{S}(p_{n+1})$, l'arc $M(p, y)$ se trouve contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon_n)$. Il existe, en vertu de l'hypothèse, un point $p_{n+1} \varepsilon M \cdot \mathfrak{S}(p, \delta_{n+1})$ tel que p_{n+1} non εL. Soit q_{n+1}, le premier point de $M(p_{n+1}, p)$ appartenant à L. On voit aisément que l'arc

$$M(p_n, q_n) + L(q_n, p)$$

ne contient aucun point p_m, où $m \neq n$ $(m, n = 1, 2, \dots)$. La suite $p_1, p_2, \dots p_k, \dots$ ne contient aucune suite partielle qui convergerait vers p d'une manière monotone. Cela étant posé, démontrons que tout point de V est un point de ramification d'ordre fini selon la terminologie de JANISZEWSKI [1].

En effet, supposons qu'un point p ne soit pas un point de ramification d'ordre fini.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un $\delta > 0$ et $< \varepsilon$ que tout point de $\mathfrak{S}(p, \delta)$ peut être relié avec p par un arc simple contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$. Soit $p_1 \varepsilon \mathfrak{S}(p, \delta)$ et envisageons un tel arc simple $L_1(p, p_1) \subset \mathfrak{S}(p, \varepsilon)$. Choisissons un nombre $0 < \varepsilon_1 < \delta$ et trouvons un δ_1, où $0 < \delta_1 < \varepsilon$, tel que tout point de $\mathfrak{S}(p, \delta_1)$ puisse être relié avec p par un arc simple contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon_1)$. En vertu de l'hypotèse, il existe un point p_2

---

[1] *Thèse* (Paris, 1911), p. 63 et 71.

tel que p_2 non $\varepsilon L_1(p, p_1)$, $p_2 \varepsilon \mathfrak{S}(p, \varepsilon_1)$. Choisissons un arc L_2 reliant p_2 avec p et se trouvant dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon_1)$. Comme nous avons démontré auparavant, il est impossible que L_1 et L_2 aient des points communs dans tout entourage de p sans être identique dans la proximité de p. Il existe donc un $\sigma_1 > 0$ tel que ou

$$L_1 \cdot \mathfrak{S}(p, \sigma_1) = L_2 \cdot \mathfrak{S}(p, \sigma_1),$$

ou bien

$$L_1 \cdot L_2 \cdot \mathfrak{S}(p, \sigma_1) = (p).$$

Choisissons un nombre ε_2 plus petit que δ_1 et σ_1 et trouvons un δ_2 d'une manière analogue qu'auparavant nous avons trouvé δ_1 pour le nombre ε_1. Il existe un point $p_3 \varepsilon \mathfrak{S}(p, \delta_2)$ tel que

$$p_3 \text{ non } \varepsilon L_1 + L_2.$$

Joignons ce point avec p par un arc L_3 contenu tout entièrement dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon_2)$. Nous pouvons trouver un nombre σ_2 tel que ou L_3 coincide dans la σ_2—proximité de p soit avec L_1 soit avec L_2, ou bien les ensembles L_3, et $L_1 + L_2$ n'ont pas dans $\mathfrak{S}(p, \sigma_2)$ que le seul point p commun.

On voit aisément comment arranger le procédé d'induction qui sera facilité, si l'on range, outre les nombres positifs d'un part, aussi tout les arcs simples d'autre part, dans une suite transfinie bien ordonnée.

On voit aisément que

$$p_1, \; p_2, \ldots, \; p_n, \ldots$$

ne possède aucune suite partielle qui convergerait d'une manière monotone vers p, quoique $\lim p_n = p$. En effet, il suffit de remarquer que l'arc L_n ne passe par aucun de points p_{n+1}, $p_{n+2}, \ldots$ et cela quel que soit $n = 1, 2, \ldots$

Nous avons ainsi démontré que tout point p de la variété doit nécessairement être un point de la ramification finie. Mais on voit tout de suite que l'ordre de la ramification ne peut être ni >2 ni <2. Par conséquent l'ordre de ramification est $=2$.

On en déduit, en vertu des théorèmes de JANISZEWSKI [1] que la variété est homéomorphe avec une droite ou avec un cercle.

Les remarques que nous avons faites se prètent aux généralisations pour le cas de dimension >1. V étant une variété jordanienne, disons qu'un point p de V *possède l'ordre de monotonie au plus égal à* r s'il existe r suites de continus

$$\begin{array}{l} C_1^{(1)}, \; C_2^{(1)}, \ldots, \; C_n^{(1)}, \ldots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_1^{(r)}, \; C_2^{(r)}, \ldots, \; C_n^{(r)}, \ldots \end{array}$$

telles que:

1°) elles possèdent le même continu de convergence auquel appartient p;

---

(1) *Thèse* (Paris, 1911), p. 70, 71.

2°) p est un point de convergence monotone (dans le sens ci-dessus) pour chacune de ces suites;

3°) quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, si $x \varepsilon C_n^{(\alpha)} \cdot \mathfrak{S}(p, \varepsilon)$, il existe un continu reliant p avec x, contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$ et n'ayant aucun point commun avec $C_m^{(\beta)}$, où $m = 1, 2, \ldots, \beta \neq \alpha$.

Il est très probable que tout point d'une variété triangulable de M. BROUWER de 2 dimensions est dans tout son point doublement monotone dans le sens spécifié ci-dessus.

Cela doit être en liaison avec un théorème (concernant le plan) mentionné par M. KNASTER pendant le *Congrès des Mathém. Polonais à Lwów* en 1927.

Il serait très intéressant d'examiner que c'est qu'on doit ajouter à cette propriété et à celle dont j'ai parlé au commencement de ma communication, pour que les variétés de M. BROUWER à 2 dimensions soient caractérisées d'une manière précise.

D'une manière analogue on peut introduire la notion de convergence monotone pour l'espace a trois dimensions. On doit envisager des suites de continus $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ possédant un continu de convergence et supposer qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que tout entourage du point p contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$ soit divisé par tous les C_n à partir d'un certain indice.

Ajoutons une remarque qui me semble être importante. Il est très vraisemblable qu'on peut (d'une manière inductive) au moyen de la notion de monotonie de convergence, définir des variétés simplifiables de M. BROUWER. En employant des suites monotones de points, on obtient des courbes simples, c'est-à-dire des variétés à une dimension. En employant des suites monotones des variétés à une dimension définies ainsi, on peut définir des variétés simplifiables à 2 dimensions et ainsi de suite.

Remarquons qu'on pourrait envisager une notion de monotonie un peu différente de celle que nous avons introduite.

Soit V une variété et $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ une suite de continus ou points telles que E_n divise V entre E_{n-1} et E_{n+1}. Dans ces conditions disons que $\{E_n\}$ est *une suite monotone dans V.* Disons qu'un point p est *un point de convergence monotone stricte pour la suite des ensembles* $\{E_n\}$, si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un domaine D ouvert et connexe, contenu dans $\mathfrak{S}(p, \varepsilon)$, contenant p, et tel que:

1°) $E_n \cdot \overline{D} = \mathfrak{L}_s[E_n \cdot \overline{D}, \overline{D}]$;

2°) il existe un n_0 tel que la suite $E_{n_0} \cdot D, E_{n_0+1} \cdot D, \ldots$ est une suite monotone relative a D.

On définit de la même manière que plus haut, ce qu'on doit entendre par un *point d'accumulation monotone stricte pour une suite de continus* $\{E_n\}$.

$\mathfrak{L}_s(A, B)$ désigne le plus grand continu (ou point) contenant A et contenu dans B.

Or, il est intéressant que, si dans le plan on a une suite de continus C_1, C_2,..., C_n,... possédant un continu de convergence C, C peut contenir une infinité *non dénombrable* de points qui ne sont pas des points d'accumulation monotone stricte pour $\{C_n\}$. Or, on peut construire un exemple qui montre en même temps que les notions de monotonie ordinaire et stricte sont differéntes. Je dois cet exemple à M. O. NIKODYM.

W. SIERPIŃSKI (Warszawa - Polonia)

SUR LES FAMILLES INDUCTIVES ET PROJECTIVES D'ENSEMBLES

Dans la Communication que j'ai faite au dernier Congrès, j'ai donné quelques exemples d'opérations simples sur les ensembles élémentaires, conduisant aux ensembles plus ou moins compliqués, et j'insistai sur l'importance d'une étude systématique et détaillée d'opérations sur les ensembles.

Pendant ces quatre ans plusieurs recherches ont été faites dans cet ordre d'idées, et surtout M. LUSIN a obtenu des beaux résultats. Il a montré que simplement les opérations de faire la projection d'un ensemble et de prendre le complémentaire d'un ensemble, effectuées un nombre *fini* de fois à partir des ensembles élémentaires, conduisent aux ensembles de nature très compliquée, et imposent des problèmes très difficiles qui ne sont pas encore résolus et qui ne seront, peut être, jamais résolus.

La théorie des ensembles projectifs est encore peu developpée. Cependant plusieurs méthodes employées par M. LUSIN dans la théorie des ensembles analytiques sont susceptibles d'une extension aux ensembles projectifs.

Je veux aborder aujourdhui ces questions de façon que ce soit compréhensible sans aucune connaissance des théories spéciales, même celle des ensembles mesurables B.

Considérons des familles, formées d'ensembles de points d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions, mais pas nécessairement le même pour tous les ensembles de la famille considérée.

Une famille F d'ensembles sera dite *inductive* si elle contient les intervalles (à un nombre fini quelconque de dimensions) et si elle contient les sommes et les produits d'une infinité dénombrable d'ensembles de F (appertenant au même espace à un nombre fini quelconque de dimensions).

On démontre sans peine que parmi les familles inductives d'ensemble il y a une qui est contenue dans toute autre famille inductive d'ensembles, c'est-à-dire qu'il existe une *plus petite* famille inductive d'ensembles: c'est précisément la famille de tous les ensembles mesurables B.

Je donnerai encore un autre exemple d'une famille inductive. Soit X un ensemble donné quelconque de points. Il existe une plus petite famille inductive d'ensembles contenant X, et on démontre que c'est la famille de tous les ensembles de la forme $PX+Q$, où P et Q sont des ensembles quelconques mesurables B.

F étant une famille donnée d'ensembles, nous désignerons par $C(F)$ la famille de tous les ensembles complémentaires aux ensembles de la famille F (le complémentaire de chacun ensemble pris par rapport à l'espace dans lequel il est situé). On démontre sans peine que:

Si la famille F *est inductive, la famille* C(F) *l'est aussi.*

Nous désignerons par R_m l'espace euclidien à m dimensions, c'est-à-dire l'ensemble de tous les systèmes $(x_1, x_2, ..., x_m)$ de m nombres réel $x_1, x_2, ..., x_m$.

E étant un ensemble suité dans R_m, nous appellerons *projection* de E (sur R_{m-1}) et désignerons par $P(E)$ l'ensemble de tous les points $(x_1, x_2, ..., x_{m-1})$ (de R_{m-1}), pour lesquels il existe au moins un nombre réel x, tel que le point $(x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x)$ appartient à E. Or, nous désignerons par $Q(E)$ l'ensemble de tous les points $(x, x_1, x_2, ..., x_m)$ de R_{m+1}, tels que le point $(x_1, x_2, ..., x_m)$ appartient à E. (L'opération Q est donc en quelque sorte *inverse* d'opération P: on obtient l'ensemble $Q(E)$ en menant par tous les point de E des droites parallèles à un axe).

F étant une famille donnée d'ensembles, nous désignerons par $P(F)$, resp. par $Q(F)$ la famille de tous les ensembles $P(E)$, resp. $Q(E)$, où E appartient à F. Ces symboles, si simples qu'ils sont, sont fort utiles.

P. e. si l'on désigne par Φ la famille de tous les ensembles fermés, le produit

$$PCP(\Phi) \cdot CPCP(\Phi)$$

est la famille de tous les ensembles mesurables B.

Naturellement sous cette forme si simple sont cachés des théorémes profonds, dont la démonstration est parfois difficile et exige des méthodes spéciales. P. e. ce que j'ai dit tout de suite — c'est précisément le théoréme de MICHEL SOUSLIN, exprimant, sans utitiser des nombres transfinis, la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble soit mesurable B.

Le premier facteur de notre produit, c'est-à-dire la famille

$$PCP(\Phi)$$

est la famille de tous les ensemble (A) (analytiques) de MM. SOUSLIN et LUSIN.

Quant aux ensembles de la famille $CPCP(\Phi)$, on sait, d'après M. LUSIN, qu'ils sont mesurables (L) et qu'ils satisfont à la condition de Baire, mais on ne sait pas si tout ensemble non dénombrable de cette famille contient un sous-ensemble parfait. Or, on ne sait pas si tout ensemble de la famille

$$PCPCP(\Phi)$$

est mesurable L. Quant à la puissance des ensembles de cette famille, on sait seulement qu'elle ne peut être plus grande que $\aleph_1$ et en même temps plus petite que celle du continu. Or, on ne sait rien du tout sur la puissance des ensembles de la famille

$$CPCPCP(\Phi).$$

Les ensembles qu'on obtient en partant des ensembles fermés et en appliquant un nombre fini de fois les opérations P et C sont précisément les ensembles *projectifs* de M. LUSIN.

J'appellerai une famille F d'ensembles: famille *projective*, si les familles $P(F)$ et $Q(F)$ sont contenues dans la famille F, c'est-à-dire, si

$$P(F) \subset F \text{ et } Q(F) \subset F.$$

On démontre sans peine que parmi les familles inductives et en même temps projectives d'ensembles il y a une qui est la plus petite: c'est la famille de tous les ensembles analytiques de M. LUSIN.

Si F est une famille projective, $C(F)$ peut ne l'être pas, p. e. si F est la famille de tous les ensemble analytiques. Or, on a le suivant

THÉORÈME. - *Si* F *est une famille inductive et projective, la famille* PC(F) *l'est aussi.*

L'énoncé de ce théorème est simple, mais sa démonstration est compliquée [1]: elle est basée sur une méthode qui été employée par M. LUSIN pour démontrer quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques.

Or, le théorème est fort: comme cas particuliers on en obtient des propriétés des ensembles projectifs, dont la démonstration présentait depuis longtemps des difficultés.

Je n'ai pas de temps de parler d'autres théorèmes de ce genre; j'en ai choisi un, pour montrer que les problèmes de la théorie des ensembles projectives se posent tout naturellement quand on veut étudier systématiquement les opérations les plus simples sur les ensembles élémentaires.

---

[1] Elle paraîtra dans le t. XIII du journal « Fundamenta Mathematicae ».

S. MAZURKIEWICZ (Warszawa - Polonia)

SUR LES ENSEMBLES DE DIMENSION FAIBLE

J'ai démontré, pour tout n naturel l'*existence d'ensembles de dimension* n *faible* (un ensemble étant de dimension n faible, si l'ensemble de points où il est de dimension n est de dimension $n-1$) ([1]). Pour le cas $n=1$ le problème a été résolu en 1921 par M. SIERPIŃSKI ([2]). Le procédé de construction, que j'ai donné est une généralisation de celui de M. SIERPIŃSKI. La démonstration, que l'ensemble construit est de dimension n, est basée sur le théorème suivant: Si G est un domaine connexe de l'espace euclidien à n dimensions et A est un ensemble de dimension $\leqslant n-2$, alors $G-A$ est semicontinu.

Une démonstration détaillée à été publiée dans « Fund. Math. », T. XIII, 1929.

([1]) MENGER: *Akad. Anzeiger d. Akademie d. Wissenschaften*, N.º 1, 1928, Wien.

([2]) « Fund. Math. », II, p. 81-88.

A. TARSKI (Warszawa - Polonia)

ÜBER ÄQUIVALENZ DER MENGEN IN BEZUG AUF EINE BELIEBIGE KLASSE VON ABBILDUNGEN

Im Verlaufe der letzten Jahre wurden im Gebiete der abstrakten Mengenlehre Untersuchungen durchgeführt, die man im Allgemeinen folgendermassen charakterisieren kann: auf dem Wege der Analyse von Beweisen verschiedener, manchmal sogar ganz besonderer Sätze aus der Theorie der Gleichmächtigkeit und der Arithmetik der Kardinalzahlen, gelangte man zu allgemeineren, zur Theorie der Abbildungen (im weitesten Sinne des Ausdruckes) gehörenden Ergebnissen, die sowohl in anderen Teilen der Mengenlehre, wie auch in einigen verwandten Gebieten der Mathematik Anwendung finden. Die Anregung zu diesen Untersuchungen ist den Herren KÖNIG und BANACH zuzuschreiben, deren Berichte anzuführen ich unten Gelegenheit haben werde; das Resultat dieser Untersuchungen bilden unter anderem auch diejenigen Ergebnisse, über die ich in meinem Vortrage berichten werde.

Ehe ich an meine eigentliche Aufgabe herantrete, muss ich noch folgendes bemerken. Wegen der eingeschränkten Zeit dieses Vortrages bin ich gezwungen alle Beweise der angefürten Sätze zu unterlassen. Die Resultate, welche ich, ohne den Verfasser anzuführen, angeben werde, wurden von mir selbst und teilweise vom Herrn LINDENBAUM gefunden. Im übrigen wird die, in Einzelheiten manchmal ziemlich komplizierte, Verfasserfrage gänzlich in Berichten aufgeklärt, die in einem der nächsten Bände der Zeitschrift « Fundamenta Mathematicae » erscheinen und die einen eingehenden Vortrag und Beweise der erwähnten Ergebnisse enthalten werden; einige von diesen Ergebnissen (in ein wenig veränderter Form) wurden schon vorher im gemeinsamen Bericht von Herrn LINDENBAUM und mir: *Communication sur les recherches de la Théorie des Ensembles* veröffentlicht (1). Die bibliographischen Nachweise von manchen schon vorher veröffentlichten Resultaten anderer Verfasser, die ich zunächst erwähnen werde, kann man in dem bekannten Bericht von SCHÖNFLIES (2) finden.

(1) Comptes Rendus des Séances de la Soc. des Sc. et des Lettres à Varsovie, XIX, Classe III, S. 316-319; ich werde unten diesen Bericht als *Communication* anführen.

(2) *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen,* Leipzig und Berlin, 1913.

Die Hauptaufgabe des vorliegenden Berichtes ist die Einführung und die Feststellung der Grundeigenschaften des Begriffes: *Äquivalenz der Mengen in bezug auf eine beliebige Klasse von Abbildungen.* Dieser Begriff, der bis jetzt in seiner ganzen Ausdehnung nicht erörtert und sogar keiner Betrachtung unterworfen wurde, verdient schon aus dem Grunde eingehend untersucht zu werden, dass er als besondere Fälle eine Reihe von Begriffen umfasst, welche eine hervorragende Rolle in der Mengenlehre und in einigen verwandten mathematischen Wissenschaften, hauptsächlich in der Topologie und in der Geometrie spielen; unter diesen Begriffen genügt es die Gleichmächtgkeit beliebiger Mengen, weiter die Homöomorphie, topologische Äquivalenz, Kollineation, Ähnlichkeit (im geometrischen Sinne) und die Kongruenz der Punktmengen zu erwähnen.

Man sagt von den Mengen A *und* B, *dass sie in bezug auf die Klasse* K *von Funktionen* (*Abbildungen*) *äquivalent sind, in Formel* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{B}$, *wenn es eine Funktion* f *gibt, welche der Klasse* K *angehört und welche die Menge* A *auf die Menge* B *abbildet.*

Zwecks Vermeidung der Missverständnisse muss man hier den Sinn des Ausdruckes « Funktion f, die die Menge A auf die Menge B abbildet », der in der vorherigen Definition auftritt, genau erklären. Das Bild der Menge A in bezug auf die Funktion f, in Zeichen $\bar{f}(A)$, nennt man die Menge aller Werte $f(x)$, die die Funktion f annimmt, wenn das Argument x alle möglichen Elemente der Menge A durchläuft. Wir sagen, dass die Funktion f die Menge A auf die Menge B abbildet, wenn diese Funktion in der ganzen Menge A definiert ist und wenn dabei $\bar{f}(A)=B$.

Wenn wir mit dem Zeichen K die Klasse aller möglichen eineindeutigen (schlichten) Funktionen benennen, drückt die Formel $A \underset{K}{\sim} B$ einfach aus, dass die Mengen A und B gleichmächtig sind. Es ist leicht sich zu orientieren, welche Bedeutung man dem Zeichen K beimessen soll, damit die Relation $A \underset{K}{\sim} B$ mit den anderen vorher erwähnten Relationen — der Ähnlichkeit der geordneten Mengen, Homöomorphie oder Kongruenz der Punktmengen usw. - übereinstimme.

Im weiteren Verlaufe dieser Erörterungen werde ich stets stillschweigend voraussetzen, dass die Klasse K, in bezug auf welche die betrachteten Mengen äquivalent sind, lediglich aus eineindeutigen Funktionen besteht. Diese Beschränkung, die übrigens in Anwendung auf einige unten zu erörtende Ergebnisse nicht wesentlich ist, hat keine wichtigere Bedeutung vom Standpunkte der aktuellen Anwendungen des untersuchten Begriffs.

Ohne etwas weiteres hinsichtlich der Klasse K anzunehmen, kann man schon eine Reihe von Sätzen aus der Theorie der Äquivalenz der Mengen feststellen und zwar sowohl elementare Sätze, als auch tiefergehende Ergebnisse. Beispielsweise werde ich gleich einige dieser Sätze explicite anführen.

Satz 1. - *Die Nullmenge* 0 *ist sich selbst in bezug auf eine beliebige nicht eere Klasse* K *äquivalent*: $0 \underset{\mathrm{K}}{\sim} 0$; *umgekehrt, wenn* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} 0$, *dann* $A=0$.

Satz 2. - *Wenn* $\sum_{i \varepsilon N} A_i \underset{K}{\sim} B$, *dann besteht eine Zellegung der Menge* B:

$$B = \sum_{i \varepsilon N} B_i,$$

die der Bedingung: $A_i \underset{K}{\sim} B_i$ *für ein beliebiges Element* i *der Menge* N *genügt*.

Es sei hier ausdrüklich betont, dass wir uns der Zeichen $+$ und $\sum$ bei jetzigen Betrachtungen lediglich für die Bezeichnung der Summe von disjunkten (paarweise fremden) Mengen bedienen.

Eine unmittelbare Konsequenz des S. 2 ist folgender

Satz 2ª. - *Wenn* $A \underset{K}{\sim} B$, *dann entspricht jeder Untermenge* A_1 *der Menge* A *eine soche Untermenge* B_1 *der Menge* B, *dass* $A_1 \underset{K}{\sim} B_1$.

Dem S. 2 ist inhaltlich verwandt, bedarf jedoch eines viel tieferen Beweises der

Satz 3. - *Wenn* $\sum_{i \varepsilon N} A_i + B \underset{K}{\sim} B$, *dann besteht eine solche Zerlegung der Menge* B: $B = \sum_{i \varepsilon N} B_i$, *dass* $A_i + B_i \underset{K}{\sim} B_i$ *für beliebiges* $i \varepsilon N$.

Satz 3ª. - *Wenn* $A + B \underset{K}{\sim} B$, *dann entspricht jeder Untermenge* A_1 *der Menge* A *eine solche Untermenge* B_1 *der Menge* B, *dass* $A_1 + B_1 \underset{K}{\sim} B_1$.

Satz 4. - *Wenn* $A \underset{K}{\sim} B_1 \subset B$ *und* $B \underset{K}{\sim} A_1 \subset A$, *dann gibt es eine derartige Zerlegung der Mengen* A *und* B: $A = C_1 + C_2$, $B = D_1 + D_2$, *dass gleichzeitig* $C_1 \underset{K}{\sim} D_1$ *und* $D_2 \underset{K}{\sim} C_2$; *auf analoge Weise lassen sich die Mengen* A_1 *und* B_1 *zerlegen.*

Für Klassen der eineindeutigen Abbildungen erhielt den obigen Satz Herr BANACH mittelst der Analyse des Beweises für den berühmten CANTOR--BERNSTEIN'schen Äquivalenzsatz (1); in letzter Zeit gelang es Herrn KNASTER und mir desen Satz auf Abbildungsklassen vom ganz beliebigen Charakter auszudehnen.

Unter den Abbildungsklassen sondert sich auf eine ganz natürliche Weise eine besonders wichtige Kategorie dieser Klassen aus, nämlich die *Gruppen.*

Die Klasse K *der eineindeutigen Funktionen nenne ich eine Transformationsgruppe oder einfach Gruppe, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt*: *mitsamt der beliebigen Funktion* f, *welche der Klasse* K *angehört, gehört die inverse Funktion* f^{-1} *auch* K *an*; *mit zwei beliebigen Funktionen* f *und* g, *welche* K *angehören, gehört die zusammengesetzte Funktion* h *mit der Formel*: $h(x) = f(g(x))$ *auch der Klasse* K *an* (2).

Das System aller Transformationsgruppen werde ich mit dem Symbol $\mathfrak{G}$ bezeichnen; die Formel $K \varepsilon \mathfrak{G}$ wird demnach besagen, dass die Klasse K eine Gruppe ist.

---

(1) Vgl. « Fund. Math. », VI, S. 236-239.

(2) Es ist leicht ersichtlich, dass ich den Ausdruck « Gruppe » hier in einigermassen breiterer Bedeutung gebrauche, als es sonst in der Theorie der Transformationsgruppen zu geschehen pflegt.

Zu der Kategorie der Gruppen gehören bekanntlich mehrere Abbildungsklassen, die in verschiedenen Teilen der Mathematik eine hervorragende Rolle spielen. Es genügt hier auf Klassen hinzuweisen, die ich schon vorher erwähnt habe: auf die Klasse aller möglichen schlichten Abbildungen, weiter auf die Klasse aller eineindeutigen und umkehrbarstetigen Abbildungen, endlich auf die Klasse aller isometrischen (entfernungstreuen) Abbildungen.

Bei der Voraussetzung, dass die Klasse K eine Gruppe ist, hat die Mengenrelation, durch die Formel $A \underset{K}{\sim} B$ ausgedrückt, einige elementare, jedoch sehr wichtige Eigenschaften: sie ist symmetrisch, transitiv und reflexiv. Diese Tatsache stellen folgende Sätze fest:

Satz 5. - *Sei* $\mathrm{K} \varepsilon \mathfrak{G}$, *dann sind die Bedingungen:* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{B}$ *und* $\mathrm{B} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{A}$ *gleichwertig.*

Satz 6. - *Sei* $\mathrm{K} \varepsilon \mathfrak{G}$, $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{B}$ *und* $\mathrm{B} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{C}$, *dann ist* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{C}$.

Eine unmittelbare Konsequenz dieser beiden Sätze ist der

Satz 7. - *Wenn* $\mathrm{K} \varepsilon \mathfrak{G}$ *und wenn es eine solche Menge* B *gibt, das* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{B}$ *oder* $\mathrm{B} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{A}$, *dann ist* $\mathrm{A} \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{A}$.

Als Beispiel tieferliegenden Sätze, welche die Äquivalenz der Mengen in bezug auf die Gruppen von Abbildungen betreffen, werde ich folgendes anführen:

Satz 8. - *Sei* $\mathrm{K} \varepsilon \mathfrak{G}$, n — *eine beliebige natürliche Zahl,* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i \underset{\mathrm{K}}{\sim} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{B}_i$, *wobei* $\mathrm{A}_1 \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{A}_i$ *und* $\mathrm{B}_1 \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{B}_i$ *für* $1 \leqslant i \leqslant n$; *dann kann man eine jede Menge* A_1 *und* B_1 *in* n^2 *Summanden auf die Weise zerlegen:*

$$\mathrm{A}_1 = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{C}_i, \quad \mathrm{B}_1 = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{D}_i,$$

dass die Bedingung: $\mathrm{C}_i \underset{\mathrm{K}}{\sim} \mathrm{D}_i$ *für beliebiges* i, $1 \leqslant i \leqslant n^2$, *erfüllt ist.*

Den obigen Satz hat im Fall: $n=2$ Herr KURATOWSKI (1) und im allgemeinen Fall Herr D. KÖNIG (2) bewiesen. In beiden Beweisen spielt das Auswahlaxiom eine wesentliche Rolle. Ohne dieses Axiom lässt sich ein logisch schwächerer Satz beweisen, dessen Voraussetzungen sich von denen des S. 8 nicht unterscheiden, die These jedoch deutet auf die Zerlegung beider Mengen A_1 und B_1 nicht in n^2, sondern in abzählbar viele Summanden, die in bezug auf die Klasse K entsprechend äquivalent sind.

Zwecks Erlangung einer Reihe weiterer Sätze aus der Theorie der Äquivalenz der Mengen, die sich vorteilhaft von einigen vorher dargestellten Resultaten durch die logische Einfachheit ihres Aufbaues unterscheiden, muss man die Funktionen-

(1) « Fund. Math. », IV, S. 240-243.

(2) Vgl. « Fund. Math. », VIII, S. 131; in demselben Bericht sind auch die früheren Arbeiten des Herr D. KÖNIG zitiert.

klassen einer weiteren Spezialisierung unterwerfen, und zwar zwei Kategorien unter denselben hervorheben, nämlich die *endlich-additiven* und *abzählbar-additiven Funktionenklassen.* Leider wird diese Spezialisierung eine ansehnliche Beschränkung des Anwendungsgebietes von festgestellten Ergebnissen zur Folge haben.

Die Klasse K *der eineindeutigen Funktionen werde ich endlich-additiv nennen, wenn sie folgender Bedingung genügt*: f_1 *und* f_2 *seien zwei beliebige, zu* K *gehörende Funktionen, und* A_1 *und* A_2 *zwei disjunkte Mengen, und zwar solche, deren Bilder in bezug auf* f_1 *und* f_2 *auch disjunkt sind* $(\mathrm{A}_1 \cdot \mathrm{A}_2 = 0 = \overline{\mathrm{f}}_1(\mathrm{A}_1) \cdot \overline{\mathrm{f}}_2(\mathrm{A}_2))$; *dann gehört die Funktion* g, *auf folgende Weise definiert*: $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = \begin{cases} \mathrm{f}_1(\mathrm{x}) & \textit{für } \mathrm{x} \varepsilon \mathrm{A}_1 \\ \mathrm{f}_2(\mathrm{x}) & \textit{für } \mathrm{x} \varepsilon \mathrm{A}_2 \end{cases}$, *ebenfalls der Klasse* K *an.*

Es ist leicht die oben dargestellte Definition so zu modifizieren, um zum Begriff der *abzählbar-additiven Funktionenklasse* zu gelangen: statt zweier Funktionen und zweier Mengen müsste man zu diesem Zwecke die unendlichen Folgen der Funktionen und der Mengen betrachten.

Das System aller endlich-additiven Funktionenklassen werde ich mit $\mathfrak{A}$ und der abzählbar-additiven mit $\mathfrak{A}^*$ bezeichnen; infolgedessen werden die Formeln $K \varepsilon \mathfrak{A}$, bzw. $K \varepsilon \mathfrak{A}^*$ bedeuten, dass K eine endlich-, resp. abzählbar-additive Klasse ist.

Nur wenige Beispiele könnte man für Klassen von Funktionen finden, die einer der zuletzt abgesonderten Kategorien angehören und gleichzeitig eine wichtigere Rolle in der gegenwärtigen Mathematik spielen; als die wichtigste unter denselben ist die Klasse aller möglichen eineindeutigen Abbildungen zu nennen, die selbstverständlich nicht nur endlich-, sondern auch abzählbar additiv ist. Ohne andere Beispiele, die von geringerer Bedeutung sind, und die ebenfalls aus der abstrakten Mengenlehre entnommen sind, anzuführen, lohnt es sich zu bemerken, dass eine gewisse einheitliche Methode besteht, die die Konstruktion einer Reihe von neuen endlich-, bzw. abzählbar-additiven Klassen ermöglicht, die sich in den mathematischen Untersuchungen nützlich erweisen können. Vermittelst dieser Methode kann man nämlich einer jeden vorgegebenen Klasse L von eineindeutigen Funktionen die kleinste endlich- oder abzählbar-additive Klasse K, die die Klasse L enthält, zuordnen. Nimmt man z. B. als Ausgangspunkt die Klasse L aller isometrischen Funktionen an, die in einem gewissen metrischen Raum, z. B. im gewöhnlichen Euklidischen Raum, definiert sind, die also in desem Raume gelegenen Punktmengen auf kongruente Mengen abbilden, so gelangt man zur Klasse K, welche schon eine gewisse Rolle in den geometrischen Betrachtungen gespielt hat: die Relation, durch die Formel $A \underset{K}{\sim} B$ ausgedrückt, stimmt nämlich, wie man es sich leicht vergegenwärtigen kann, mit endlichen, bzw. abzählbaren Zerlegungsgleichheit der Punktmengen A und B überein (¹).

(¹) Diese beiden Begriffe sind u. a. eingehend in einer gemeinsamen Arbeit vom Herrn BANACH und mir. « Fund. Math. », VI, S. 244-277, untersucht worden.

Ich berichte jetzt über einige wichtigere, die Äquivalenz der Mengen in bezug auf die endlich-additiven Abbildungsklassen betreffenden Ergebnisse; als Ausgangspunkt nehme ich einen elementaren, jedoch eine charakteristische Eigenschaft des untersuchten Begriffs ausdrückenden Satz:

Satz 9. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{A}$, n — *eine beliebige natürliche Zahl,* $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$ *und* $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$, *wobei* $A_i \underset{K}{\sim} B_i$, *für* $1 \leqslant i \leqslant n$; *dann* $A \underset{K}{\sim} B$.

Satz 10. - *Wenn* $K \varepsilon \mathfrak{A}$, $A \underset{K}{\sim} B_1 \subset B$ *und* $A \supset A_1 \underset{K}{\sim} B$, *dann* $A \underset{K}{\sim} B$ *und* $A_1 \underset{K}{\sim} B_1$.

Das ist die schon von Herrn BANACH im zitierten Artikel festgestellte Verallgemeinerung des bekannten CANTOR-BERNSTEIN'schen Äquivalenzsatzes.

Dem obigen Satze zufolge sind in Anwendung auf die endlich-additiven Klassen folgende zwei Bedingungen gleichwertig: $(\alpha) A \underset{K}{\sim} B$; (β) *es gibt solche Mengen* A_1 *und* B_1, *dass* $A \supset A_1 \underset{K}{\sim} B$ *und* $A \underset{K}{\sim} B_1 \subset B$. Dabei muss man bemerken, dass in Hinsicht auf die Klassen der schlichten Abbildungen vom beliebigen Charakter die Gleichwertigkeit der Bedingungen (α) und (β) verschwindet: die erste Bedingung ist im allgemeinen logisch stärker, als die zweite. Von den Mengen A und B, welche der Bedingung (β) genügen, hönnte man sagen, dass sie die *gleiche Homöie in bezug auf die Abbildungsklasse K* haben, was man mit der Formel $A \underset{K}{\approx} B$ ausdrücken könnte; einige einzelne Fälle des obigen Begriffs sind schon bekanntlich der mathematischen Behandlung unterzogen worden.

Eine unmittelbare Konsequenz des S. 10. bildet der Satz

Satz 10[a]. - *Wenn* $K \varepsilon \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}$, $A \subset B \subset C$ *und* $A \underset{K}{\sim} C$, *dann* $A \underset{K}{\sim} B \underset{K}{\sim} C$.

Satz 11. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}$, n *eine beliebige natürliche Zahl und* $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, *dann ist dafür, dass* $A + B \underset{K}{\sim} B$, *notwendig und hinreichend, dass* $A_i + B \underset{K}{\sim} B$ *für beliebiges* i, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Satz 12. - *Wenn* $K \varepsilon \mathfrak{A}$, $A \subset C$, $A_1 \subset C_1$, $A \underset{K}{\sim} A_1$ *und* $C \underset{K}{\sim} C_1$, *dann entspricht jeder Menge* B, *so dass* $A \subset B \subset C$, *eine solche Menge* B_1, *dass* $A_1 \subset B_1 \subset C_1$ *und* $B \underset{K}{\sim} B_1$.

Diesen Satz könnt man den MITTELWERTSATZ nennen.

Weitere Sätze sind manchmal ziemlich weitgehende Konsequenzen der Ergebnisse vom Herr D. KÖNIG, welche in seiner vorher zitierten Arbeit enthalten sind.

Satz 13. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{A}$, n — *eine beliebige natürliche Zahl,* $\sum_{i=1}^{n} A_i \underset{K}{\sim} \sum_{i=1}^{n} B_i$ *und dabei* $A_1 \underset{K}{\sim} A_i$ *und* $B_1 \underset{K}{\sim} B_i$, *wo* $1 \leqslant i \leqslant n$; *so erhält man* $A_1 \underset{K}{\sim} B_1$.

Das ist die Verallgemeinerung des bekannten Satzes aus der Theorie der Kardinalzahlen: *wenn* n *eine natürliche Zahl ist und* $n \cdot \mathfrak{p} = n \cdot \mathfrak{q}$, *dann* $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Dieser Satz, vom Herr F. BERSTEIN in seiner These vorgeschlagen und daselbst im

Falle $n=2$ bewiesen, wurde erst in den letzten Jahren vom Herrn LINDENBAUM in seiner ganzen Ausdehnung ohne Auswahlaxiom begründet ([1]).

Zwei Folgerungen aus dem Satz 13 werde ich hier angeben, ohne sie sonst in der allgemeinsten der mir bekannten Gestalten zu formulieren.

Satz 13ᵃ. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}$, n — *eine beliebige natürliche Zahl,*

$$\sum_{i=1}^{n} A + C \underset{K}{\sim} \sum_{i=1}^{n} B_i + C,$$

wobei $A_1 \underset{K}{\sim} A_1 \underset{K}{\sim}$ *und* $B_1 \underset{K}{\sim} B_i$ *für* $1 \leqslant i \leqslant n$; *dann* $A_1 + C \underset{K}{\sim} B_1 + C$.

Satz 13ᵇ. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}$, p — *eine naturliche Zahl,* $A + \sum_{i=1}^{p} C_i \underset{K}{\sim} B + \sum_{i=1}^{p} C_i$, *wobei* $C_1 \underset{K}{\sim} C_i$ *für* $1 \leqslant i \leqslant p$; *dann erhält man* $A + C_1 \underset{K}{\sim} B + C_1$.

Mit Bezugnahme auf den S. 10, darf man folgenden Satz als Verstärkung des S. 13 betrachten:

Satz 14. - *Wenn* $K \varepsilon \mathfrak{A}\cdot\mathfrak{G}$, n *eine natürliche Zahl ist, wenn es weiter eine solche Menge* D *gibt, dass* $\sum_{i=1}^{n} A_i \underset{K}{\sim} D \subset \sum_{i=1}^{n} B_i$, *und wenn ausserdem* $A_1 \underset{K}{\sim} A_i$ *und* $B_1 \underset{K}{\sim} B_i$, *wo* $1 \leqslant i \leqslant n$, *dann gibt es eine solche Menge* D_1, *dass* $A_1 \underset{K}{\sim} D_1 \subset B_1$.

Die Folgerungen des obigen Satzes, welche den Sätzen 13ᵃ und 13ᵇ analog sind, werde ich hier nicht explicite formulieren.

Satz 15. - *Sei* $K \varepsilon \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}$, n *und* p *natürliche teilerfremde Zahlen, sei ferner* $\sum_{i=1}^{n} A_i \underset{K}{\sim} \sum_{j=1}^{p} B_j$, *wobei* $A_1 \underset{K}{\sim} A_i$ *und* $B_1 \underset{K}{\sim} B_j$ *für* $1 \leqslant i \leqslant n$ *und* $1 \leqslant j \leqslant p$; *dann gibt es eine solche Zerlegung der Mengen* A_1 *and* B_1:

$$A_1 = \sum_{j=1}^{p} C_j, \quad B_1 = \sum_{i=1}^{n} D_i,$$

dass $C_j \underset{K}{\sim} D_i$, *wenn nur* $1 \leqslant j \leqslant p$ *und* $1 \leqslant i \leqslant n$.

Den obigen Satz darf man als ein Analogon und sogar eine Verallgemeinerug des s. g. Fundamentalsatzes der Arithmetik (des Satzes von EUKLIDES) betrachten.

In den Beweisen der S. 13-15 spielt eine wesentliche Rolle das Auswahlaxiom. Es ist angemessen hier zu bemerken, dass man die genannten Sätze ohne dieses Axiom begründen kann, wenn man nur ihre Hypothesen verstärkt, indem man nämlich voraussetzt, dass K eine abzählbar-additive Klasse ist.

Die weiteren Resultate betreffen eben die Äquivalenz der Mengen in bezug auf die abzählbar-additiven Klassen. Mit den Analogen der vorher angegebenen S. 9 und 11 fange ich an.

([1]) Vgl. *Communication*, S. 305.

Satz 16. - *Wenn* $K\varepsilon\mathfrak{A}$, $A=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, $B=\sum_{i=1}^{\infty} B_i$, *wobei* $A_i \underset{K}{\sim} B_i$ *für eine beliebige natürliche Zahl* i, *dann* $A \underset{K}{\sim} B$.

Satz 17. - *Bei den Voraussetzungen*: $K\varepsilon\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}^*$ *und* $A=\sum_{i=1}^{\infty} A_i$, *damit* $A+B \underset{K}{\sim} B$, *ist es notwendig und hinreichend, dass* $A_i+B \underset{K}{\sim} B$ *fur jede beliebige Zahl* i.

Das ist die Verallgemeinerung eines Satzes vom Herrn ZERMELO aus der Theorie der Kardinalzahlen: $\sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{m}_i+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ *ist notwendig und hinreichend, damit* $\mathfrak{m}_i+\mathfrak{p}=\mathfrak{p}$ *für jede beliebige natürliche Zahl* i.

Im Gegensatz zu den weiteren Ergebnissen fordert der Beweis der beiden letzten S. 15 und 16 die Anwendung des Auswahlaxioms.

Satz 18. - *Wenn* $K\varepsilon\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}^*$, $A_1\subset A$, $B_1\subset B$, $A \underset{K}{\sim} B$ *und* $A_1 \underset{K}{\sim} B_1$, *dann kann man die Mengen* $A-A_1$ *und* $B-B_1$ *auf die Weise zerlegen*: $A-A_1=C+C_1$, $B-B_1=D+D_1$, *dass* $C \underset{K}{\sim} D$, $A_1+C_1 \underset{K}{\sim} C_1$ *und* $B_1+D_1 \underset{K}{\sim} D_1$.

Als eine der mehreren Konsequenzen deses Satzes führe ich den S. 18ª an:

Satz 18ª. - *Wenn* $K\varepsilon\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}^*$, p *eine beliebige natürliche Zahl ist, wenn es weiter eine solche Menge* D *gibt, dass* $A+\sum_{i=1}^{p} C_i \underset{K}{\sim} D\subset B+\sum_{i=0}^{p} C_i$, *wobei* $C_0 \underset{K}{\sim} C_i$ *für* $0 \underset{K}{\leqslant} i \underset{K}{\leqslant} p$, *dann gibt es auch eine solche Menge* D_0, *dass* $A \underset{K}{\sim} D_0\subset B+C_0$.

Eine weitere Folgerung des S. 18 bildet der

Satz 19. - *Sei* $K\varepsilon\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{A}^*$, n — *eine beliebige natürliche Zahl und*

$$\sum_{i=1} A_i \underset{K}{\sim} \sum_{i=1} A_i+B;$$

es gibt dann eine Zerlegung der Menge B: $B=\sum_{i=1}^{n} B_i$, *welche die Bedingug*: $A_i \underset{K}{\sim} A_i+B_i$, *wenn* $1\leqslant i\leqslant n$, *erfüllt.*

Dabei muss ich bemerken, dass es unmöglich ist den obigen Satz weder auf abzählbare Anzahl der Summanden, noch auf endlich-additive Gruppen auszudehnen.

Wie ich schon vorher erwähnt habe, bildet die Klasse aller moglichen eineindeutigen Funktionen das wichtigste Beispiel von der Abbildungsklasse, die eine Gruppe und zugleich eine endlich- und abzählbar-additive Klasse ist. Auch habe ich schon unterstrichen, dass die Relation der Äquivalenz der Mengen in bezug auf diese besondere Klasse mit der gewöhnlichen Relation der Gleichmächtigkeit identisch ist. Dank diesen Umständen umfassen alle in meinem Bericht dargestellten Ergebnisse, als spezielle Fälle, gewisse Sätze aus der Theorie der Gleichmächtigkeit (was schon mehrmals deutlich betont wurde). Es ist leicht festzustellen, dass alle erwähnten Sätze folgende charakteristische Eigenschaften besitzen: 1°) ihre Begründung fordert im allgemeinen nicht die Anwendung des Auswahlaxioms, und keineswegs des Wohlordnungssatzes von Herrn ZERMELO;

2°) bei der Formulierung dieser Sätze treten, ausser des Begriffes der Gleichmächtigkeit, ausschliesslich die Begriffe aus der s. g. Algebra der Logik (Algebra der Mengen) auf. Ich vermute, dass die hier bemerkte Erscheinung keinen zufälligen Charakter trägt, dass vielmehr alle Sätze aus der Theorie der Gleichmächtigkeit, die den vorher aufgezählten Bedingungen genügen, ziemlich spezielle Folgerungen viel allgemeinerer Tatsachen bilden, die die Äquivalenz der Mengen in bezug auf beliebige Abbildungsklassen betreffen. Ich wäre natürlich nicht imstande diese Vermutung auf ganz genaue Weise zu begründen, nichtdestoweniger stellt sie nicht bloss das Produkt loser, oberflächlicher Beobachtungen dar. Ich möchte noch bemerken, dass mann unter den Sätzen aus der Theorie der Gleichmächtigkeit, die als spezielle Fälle der in meinem Berichte angeführten Resultate erlangt werden können, auch neue Ergebnisse aus diesem Gebiete finden kann — in diesem wenigstens Sinne, dass sie zum ersten ohne das Auswahlaxiom bewiesen sind; ich denke hier u. a. an die unmittelbaren Folgerungen der Sätze 12-15 und 18-19.

Zum Schluss dieses Berichtes erübrigt es sich zu bemerken, dass man auf ähnliche Weise, wie die Sätze aus der Theorie der Gleichmächtigkeit, auch die zur Arithmetik der Kardinalzahlen gehörenden Ergebnisse verallgemeinern kann. Zu diesem Zweck soll man den Begriff des *Typus der gegebenen Abbildungsklasse K* einführen; es ist ein derartiger allgemeiner Begriff, welcher als spezielle Fälle die bekannten Begriffe der Kardinalzahl, des Ordnungstypus, des topologischen Typus und m. a. umfasst. Zwecks Vereinfachung der Betrachtungen beschränke ich mich hier auf den Fall, wo die Abbildungsklasse K eine Gruppe ist. Da bei der obigen Voraussetzung, wie wir schon wissen, die Relation $\underset{K}{\sim}$ symmetrisch und transitiv ist, kann man alle Mengen, zwischen denen sie eintritt, und welche demzufolge dem Felde dieser Relation angehören (wie man es in der Logik der Relationen zu sagen pflegt), in disjunkte Klassen einteilen, indem man einer und derselben Klasse zwei Mengen A und B dann und nur dann zuteilt, wenn $A \underset{K}{\sim} B$. Die auf dem Wege der beschriebenen Einteilung erlangten Klassen von Mengen werden eben die *Typen der gegebenen Abbildungskasse K* genannt. Die allgemein in der Arithmetik der Kardinalzahlen vorkommenden Definitionen nachahmend, definieren wir fur auf diese Weise angeführten Typen die Relationen « kleiner als » und « grösser als » und die Verknüpfungen: Addition einer endlichen oder abzählbaren Anzahl der Summanden, Substraktion und Multiplikation mit einer natürlichen Zahl oder $\aleph_0$. Wenn man sich auf diese Definitionen stützt und die Voraussetzung, die Klasse K betreffend, je nach dem Bedürfniss spezialisiert (indem man nämlich fordert, dass K eine endlich- oder abzählbar-additive Gruppe sei), kann man eine ganze Arithmetik der Typen entwickeln, die eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik der Kardinalzahlen sein wird. Dabei zeigt es sich, dass alle bekannten Sätze über die Kardinalzahlen, die ausschliesslich vermittelst der genannten Begriffe: « kleiner als », der Addition u. s. w. formuliert sind und deren Beweise die Anwendung des Auswahlaxioms nicht erfordern, sich im Ganzen auf das Gebiet der Typenarithmetik übertragen lassen ([1]).

Wie ich schon am Anfang bemerkt kabe, war der Hauptzweck meines Berichtes den Augenmerk auf gewisse Begriffe von sehr allgemeiner Natur zu richten, welche nie vorher in ihrer ganzen Ausdehnung untersucht worden sind und die mir wichtig und näherer Kenntnis würdig zu sein scheinen. Ich bin dessen gänzlich bewusst, dass auch heute diese Begriffe nicht in erschöpfender Weise erforscht sind: auffallend ist der eintönige und ziemlich spezielle Charakter der in diesem Gebiete erreichten Ergebnisse. Dieser Sachverhalt lässt sich einigermassen durch die spezifische Entstehungsweise und die Neuheit der eingeleiteten Untersuchungen rechtfertigen; man darf vermuten, das weitere Arbeiten auf diesem Gebiete neue Fragen auf die Tagesordnung bringen und die für uns hier interessanten Begriffe von neuem Standpunkt aus aufklären werden.

([1]) Einige Einzelheiten, diese Angelegenheit betreffend, kann man in *Communication*, S. 319, finden.

S. SAKS (Warszawa - Polonia)

SUR LA CONDITION (N) DE M. LUSIN ET L'INTÉGRALE DE M. DENJOY

On dit qu'une fonction $y = F(x)$ satisfait dans un intervalle (a, b) à la condition (N) de M. LUSIN, lorsque elle fait correspondre à tout ensemble de mesure nulle agrégé à cet intervalle, l'ensemble de valeurs y de la même mesure.

On sait que, si une fonction $F(x)$ est une intégrale indéfinie au sens de M. LEBESGUE (c'est-à-dire est absolument continue), ou, plus généralement, au sens de M. DENJOY, elle satisfait nécésairement à la condition (N). La réciproque n'est pas évidemment vraie. On prouve cependant [1] que, si un nombre dérivé (médian) d'une fonction continue jouissant de la propriété (N), est sommable, cette fonction est nécéssairement absolument continue.

On peut donner à ce théorème l'extension suivante valable pour les fonctions intégrables au sens de MM. DENJOY-PERRON (c'est-à-dire totalisables complètement, d'après la terminologie employée par M. DENJOY):

THÉORÈME 1. - *Si pour une fonction continue* F(x) *jouissant de la propriété* (N), *on a presque partout*

$$\underline{F}(x) \leqslant u(x),$$

[*où* $\underline{\mathrm{F}}(\mathrm{x})$ *désigne la dérivée inférieure* [2] *de* F(x) *et* u(x) *une fonction quelconque intégrable au sens de MM. Denjoy-Perron*] F(x) *est une intégrale indéfinie au même sens.*

Cette proposition peut être déduite de la suivante qui est un peu plus générale:

THÉORÈME 2. - *Si la dérivée inférieure d'une fonction continue* F(x) *jouissant de la propriété* (N) *possède une majorante* [3] *au sens de M. Perron,* F(x) *est une intégrale indéfinie de MM. Denjoy-Perron.*

Le théorème 1 peut être étendu, au moins partiellement, à l'intégrale de

---

(1) Voir: MENCHOFF, *Sur la représentation conforme*, « Math. Ann. », t. 95, (1926); SAKS, *Sur une certaine classe de fonctions d'ensemble*, « Bull. de l'Ac. Polonaise » (A), (1926).

(2) C'est-à-dire le plus petit de quatre nombres dérivés de DINI de $F(x)$.

(3) Une fonction continue $M(x)$ est dite *majorante* (au sens de M. PERRON) d'une fonction $f(x)$ lorsqu'en tout point

$$\underline{M}(x) > -\infty \quad \text{et} \quad \underline{M}(x) \geqslant f(x),$$

où $\underline{M}(x)$ désigne la dérivée inférieure de $M(x)$.

MM. DENJOY-KHINTCHINE (*totale*, d'après la terminologie de M. DENJOY), à l'aide des notions de dérivation aproximative. Le théorème suivant a lieu:

THÉORÈME 3. - *Si pour une fonction continue* F(x), *jouissant de la propriété* (N), *on a presque partout*

$$\underline{F_a}(x) \leqslant u(x),$$

où $\underline{\mathrm{F_a}}(\mathrm{x})$ *désigne la dérivée inférieure aproximative de* F(x) (1) *et* u(x) *une fonction quelconque intégrable au sens de MM. Denjoy-Khintchine, alors* F(x) *est une intégrale indéfinie au même sens.*

Appelons un nombre λ un *nombre dérivé fort* d'une fonction mesurable $F(x)$ au point x_0, s'il existe un ensemble E de densité non-nulle au point x_0 et tel que

$$\lim \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lambda,$$

lorsque x tend vers x_0 en parcourant les points de E.

On démontre que *si une fonction* F(x) *admet en chaque point d'un intervalle* (*excepté au plus, une infinité dénombrable de points*) *un dérivé fort fini,* F(x) *vérifie dans cet intervalle la condition* (*N*) (2). Il s'en suit, en vertu du théorème 3, le suivant

THÉORÈME 4. - *Si une fonction continue* F(x) *admet en tout point d'un intervalle* (a, b) (*excepté, au plus, un ensemble dénombrable de points*) *un dérivé fort* λ(x) *fini et intégrable au sens de MM. Denjoy-Khintchine, on a alors*

$$F(b)-F(a)=\int_a^b \lambda(x)dx,$$

où l'intégrale est prise au même sens.

Cette proposition est évidemment analogue au théorème connu qu'on obtient en y remplaçant le terme « *un dérivé fort* » par « *un dérivé médian quelconque, mais d'un côté fixe* », et la notion de l'intégrale de MM. DENJOY-KHINTCHINE par celle de MM. DENJOY-PERRON.

Les démonstrations complètes de la plupart des résultats précédents paraîtront dans le vol. 13 du recueil polonais « Fundamenta Mathematicae ».

---

(1) C'est-à-dire la borne inférieure de tous les nombres l pour lesquels l'ensemble de points y

$$E_y\left[\frac{F(y)-F(x)}{y-x}<l\right]$$

est de densité non-nulle au point x.

(2) Plus généralement, une fonction $F(x)$ vérifie la condition (N), lorsqu'on peut faire correspondre à chaque point x un nombre *fini* $k(x)$ tel que l'ensemble de valeurs y pour lesquelles

$$|F(y)-F(x)| \leqslant k(x)\cdot|y-x|$$

est de densité (supérieure) non-nulle au point x.

A. FRAENKEL (Kiel - Germania)

GELÖSTE UND UNGELÖSTE PROBLEME IM UMKREIS DES AUSWAHLPRINZIPS

Das Auswahlprinzip, dessen Väter BEPPO LEVI und ERNST ZERMELO wir auf diesem Kongress unter uns zu sehen die Freude haben, hat nach einem zeitweiligen Rückgang seiner Beachtung erst im letzten Jahrzehnt wieder erhöht die Aufmerksamkeit der Mathematiker (und Philosophen) auf sich gezogen. Über die Beziehungen des Prinzips zu Problemen der Analysis existiert eine ausführliche Literatur, von der die Arbeiten der Herren SIERPIŃSKI und LUSIN hervorgehoben seien ([1]). Von den gleichfalls nicht wenigen Problemen anderer Art, die innig mit dem Auswahlprinzip verknüpft sind und für die namentlich neuere Arbeiten der Herren TARSKI und LINDENBAUM zu nennen sind, will ich hier nur drei anführen, die untereinander sehr verschieden und, wie mir scheint, in gewissem Sinne charakteristisch sind.

Das Auswahlprinzip werde in folgender Form zugrunde gelegt: Ist eine Menge $S=A+B+C+....$ in paarweise fremde Summanden A, B, C,.... zerlegt, so existiert, falls die Summanden sämtlich von der Nullmenge verschieden sind, unter den Teilmengen von S mindestens eine $\{a, b, c,....\}$, die mit jedem Summanden genau ein einziges Element gemein hat und als eine zur Summandenmenge $M=\{A, B, C,....\}$ gehörige Auswahlmenge bezeichnet wird.

I. - Mit Recht hat Herr ZERMELO vor 20 Jahren auf dem römischen Kongress gefordert, zur Begründung der Theorie der *endlichen Mengen und natürlichen Zahlen* solle man keinesfalls das Unendliche heranziehen. Aber auch das Auswahlprinzip, das ZERMELO damals benutzt hat, wird man auszuschalten versuchen in der Erwägung, dass im Fall einer endlichen Summandenmenge M die Existenz der Auswahlmengen ohne Auswahlprinzip gesichert werden kann (dass sie nämlich auf der üblichen axiomatischen Grundlage mittels vollständiger Induktion beweisbar ist). Indes hängt es von der zugrunde gelegten Definition der Endlichkeit ab, ob und in welchem Masse die Theorie der endlichen Mengen sich auch ohne Auswahlprinzip (etwa mittels der ersten fünf Axiome ZERMELOS) aufbauen lässt.

([1]) Hierzu wie auch zur weiteren Literatur über den ganzen Gegenstand vergleiche man die ausführlichen Literaturangaben in der 3. Auflage (Berlin 1928) meiner « Einleitung in die Mengenlehre » (besonders § 16).

Eine Reihe von Definitionen der Endlichkeit sind bekannt. Am anschaulichsten erscheinen diejenigen, die Begriffe wie den der Ordnung (« doppelt wohlgeordnete Menge », WEBER-STÄCKEL) oder der eineindeutigen Zuordnung (ZERMELO) verwenden; vom axiomatischen Standpunkt aus, der die Zurückführung dieser Begriffe auf die Grundbegriffe der Axiomatik fordert, sind einfacher andere Definitionen, die direkt aus dem Mengenbegriff erwachsen, wie etwa die sich auf vollständige Induktion stützenden oder die von TARSKI in den *Fundamenta Mathematicae* T. 6 angeführten Definitionen. Von all diesen und anderen damit verwandten Definitionen, die als « elementar » bezeichnet seien, unterscheidet sich die bekannte Definition DEDEKINDS (endlich=keiner echten Teilmenge äquivalent) wie übrigens auch andere Definitionen von ähnlich negativem Charakter durch folgenden Umstand: Jede im Sinne einer elementaren Definition endliche Menge lässt sich ohne Auswahlprinzip als endlich auch im Sinne DEDEKINDS erweisen; die Umkehrung dagegen ist ohne Auswahlprinzip bisher nicht gelungen. Daher muss man bekanntlich, wenn man auf das Auswahlprinzip verzichtet, einstweilen die Möglichkeit von Mengen zulassen, die « weder endlich noch unendlich » sind (nicht-induktive und gleichzeitig nicht-reflexive Mengen nach RUSSELL). Übrigens begegnet es, wie nebenbei bemerkt sei, auffallenderweise auch bei Heranziehung des Auswahlprinzips offenbar merklichen Schwierigkeiten, ausgehend von der Definition DEDEKINDS einen Satz wie: « die Potenzmenge einer endlichen Menge ist wiederum endlich » zu beweisen, ohne den Umweg über die vollständige Induktion dabei explizit oder implizit zu machen.

Ein Überblick über die vorliegenden Definitionen, wie ihn TARSKI in der erwähnten aufschlussreichen Arbeit gibt, führt nun dazu (vgl. den Anhang jener Arbeit), folgendes allgemeine und von seiner Lösung noch weit entfernte Problem zu stellen: Die verschiedenen Definitionen der Endlichkeit sollen auf eine Folge von Klassen derart verteilt werden, dass:

A) jede im Sinne einer gewissen Definition endliche Menge sich ohne Auswahlprinzip als endlich im Sinne jeder Definition der *nämlichen* oder irgend einer *nachfolgenden* Klasse erweisen lässt;

B) zum Nachweis der Endlichkeit im Sinne einer Definition einer *vorangehenden* Klasse die Hinzunahme des Auswahlprinzips oder eventuell eines anderen schwächeren Axioms erforderlich ist.

Für eine solche Klasseneinteilung scheint *zwischen* die Klasse der elementaren Definitionen und diejenige, welche die DEDEKINDsche Definition enthält, zum Beispiel die folgende Definition zu fallen: Eine Menge ist endlich, wenn ihre Potenzmenge keiner echten Teilmenge von sich äquivalent ist.

II. - Ein tatsächlicher Nachweis der Unmöglichkeit, von der DEDEKINDschen Definition der Endlichkeit ohne Auswahlprinzip zu einer der elementaren Definitionen zu gelangen, würde die *Unabhängigkeit des Auswahlprinzips* zeigen.

In der Tat konnte ich 1922 die Unabhängigkeit von den übrigen Axiomen der ZERMELOschen Mengenlehre zeigen. Zum Verständnis des Grundgedankens dieses Beweises kann man auf die Bemerkung RUSSELLS verweisen, wonach sich ohne Benutzung des Auswahlprinzips zu einer abzählbar unendlichen Menge von Paaren die Existenz einer Auswahlmenge zwar dann sichern lässt, wenn es sich um Stiefelpaare handelt, sodass man z. B. sämtliche rechten Stiefel aussondern kann; augenscheinlich aber nicht, sobald Strumpfpaare vorliegen, bei denen jeweils beide Strümpfe gleich hergestellt sind. Nimmt man ein Modell dieser abzählbaren Strumpfpaarmenge $M = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ zu den Mengen hinzu, die sich aus der Nullmenge und der ZERMELOschen abzählbaren Menge (im wesentlichen der Menge der natürlichen Zahlen) mittels Anwendung der Axiome II-V von ZERMELO (Axiome der Elementarmengen, der Vereinigung, der Potenzmenge und der Aussonderung) ergeben, so lässt sich in der Tat zeigen, dass man dabei niemals eine Auswahlmenge von M erhalten kann. Die Schwierigkeit hierbei liegt nur in dem Nachweis, dass auch eine beliebig oftmalige Anwendung des Aussondernngsaxioms keinesfalls zu einer derartigen Auswahlmenge führt; zu diesem Nachweis ist eine Verschärfung des ZERMELOschen Aussonderungsaxioms anscheinend unentbehrlich.

Mit diesem Beweis ist indes das Unabhängigkeitsproblem noch keineswegs voll erledigt; auch dann nicht, wenn man von dem Zusammenhang des obigen Beweises mit der noch umstrittenen Möglichkeit eines « Beschränktheitsaxioms » für die Mengenlehre absieht und wenn man andererseits die Erwägungen ausser acht lässt, die sich bei der logistischen Auffassung des Problems ergeben (vgl. neuere Aufsätze von CHWISTEK und RAMSEY). Offen bleibt nämlich jedenfalls noch die Unabhängigkeitsfrage in folgendem engeren Sinne: Wenn man, auf eine unnötig weite Ausdehnung des Feldes der Mathematik verzichtend, solche vermeidbare Mengen wie die obige Menge von abzählbar unendlich vielen Paaren ausschliesst — d. h. schärfer: wenn man, von der Nullmenge und ZERMELOS abzählbarer Menge ausgehend, nur diejenigen Mengen in Betracht zieht, die von diesem Ausgangspunkt aus mittels der ZERMELOschen Axiome II-V (und evtl. des « Ersetzungsaxioms ») gesichert werden können, erweist sich etwa auch dann noch das Auswahlprinzip als ein unabhängiges Axiom? Wenn diese tiefliegende Frage zu bejahen sein sollte, was noch nicht völlig sicher erscheint, so wird sich wohl schon eine gewisse Zerlegung einer Menge von der Mächtigkeit des Kontinuums in fremde Summanden als beweiskräftiges Beispiel anführen lassen.

III. - Die Aussage, dass jede Menge M geordnet werden kann, d. h. dass zu M stets Teilmengen der Potenzmenge $\mathfrak{U}M$ mit den charakteristischen von HESSENBERG angegebenen, von Herrn KURATOWSKI vereinfachten Eigenschaften existieren, werde als *Ordnungssatz* bezeichnet. Zum Beweise des Ordnungssatzes pflegt man sich auf den Wohlordnungssatz — m. a. W. auf das Auswahlprinzip — zu berufen, der ja den Ordnungssatz enthält. Indes legen Beispiele wie das geordnete Linearkontinuum, dessen Wohlordnung so unüberwindlichen Schwierigkeiten begegnet, wenigstens die Vermutung nahe, dass der Weg zum Ordnungssatz über den Wohlordnunssatz ein Umweg sei. *A priori* sind nun im Sinne einer vollständigen Disjunktion nur die folgenden drei Fälle möglich:

A) Der Ordnungssatz lässt sich ohne Auswahlprinzip aus den übrigen Axiomen herleiten.

B) Aus der Annahme des Ordnungssatzes lässt sich das Auswahlprinzip bezw. der Wohlordnungssatz und damit die allgemeine Vergleichbarkeit (unter Heranziehung der übrigen Axiome) ableiten, m. a. W. der Ordnungssatz ist dem Wohlordnungssatz gleichwertig. — Ein Beweis dieser (aus den oben erwähnten Gründen freilich wenig wahrscheinlichen) Annahme würde u. a. Hinweise darauf bieten, ob etwa die axiomatische Zugrundelegung des Ordnungssatzes anstelle des Auswahlprinzips Vorteile bietet.

C) Der Ordnungssatz ist zwar unabhängig von den übrigen Axiomen, aber nicht hinreichend zum Beweis des Auswahlprinzips. — In diesem (sehr wahrscheinlichen) Fall hätte man im Ordnungssatz eine wesentliche Spezialisierung des allgemeinen Auswahlprinzips; damit würde u. a. die Frage nahe gelegt, wie weit man Mengenlehre treiben kann, wenn anstelle des Auswahlprinzips der Ordnungssatz axiomatisch zugrunde gelegt wird.

Von diesen drei Möglichkeiten lässt sich nun wenigstens die erste bindend ausschliessen. Dazu bedenke man zunächst, dass die möglichen Spezialisierungen des Auswahlprinzips nach der Mächtigkeit der Summandenmenge M und den Mächtigkeiten der Summanden selbst als denkbar einfachsten Spezialfall denjenigen bieten, wo M abzählbar unendlich ist und die Summanden sämtlich Paare sind; denn der Fall einer nur endlichen Summandenmenge ist (vgl. I) ohne das Auswahlprinzip zu erledigen. Nun zeigt mein unter II erwähnter Beweis der Unabhängigkeit des Auswahlprinzips sogar schon die Unabhängigkeit dieses einfachsten Spezialfalles (der übrigens heine merkliche Veränderung erfährt, wenn man die Summanden statt als Paare vielmehr als irgendwelche endliche Mengen annimmt). Nach einer Bemerkung KURATOWSKIS, die in dem erwähnten Aufsatze von TARSKI wiedergegeben ist, folgt aber aus dem Ordnungssatz jedenfalls die Richtigkeit des Auswahlprinzips für den Fall endlicher Summanden. In der Tat: Es sei der Ordnungssatz richtig. Dann lässt sich die Vereinigungsmenge $\mathfrak{S}M$ der unter II eingeführten Menge M von Paaren, die übrigens zunächst nicht als abzählbar zu erweisen ist, jedenfalls ordnen, womit auch die Teilmengen von $\mathfrak{S}M$ geordnet werden. Die Paare A_1, A_2, A_3 u. s. w. werden damit zu geordneten Paaren und besitzen gleich jeder geordneten endlichen Menge jeweils ein erstes Element. Die durch das Aussonderungsaxiom gesicherte Teilmenge von $\mathfrak{S}M$, die von jedem Paar das erste Element enthält, ist dann aber eine Auswahlmenge von M. Der Ordnungssatz garantiert also die Existenz einer Auswahlmenge von M, während sich bei blosser Verwendung der Axiome II-V eine solche nicht sichern lässt; *der Ordnungssatz ist somit unabhängig von diesen Axiomen.*

Offen bleibt hiernach die Entscheidung zwischen den Möglichkeiten *B*) und *C*) sowie auch die Klärung der Frage, ob der bei endlichen Summanden sich ergebende Spezialfall des Auswahlprinzips unwahrscheinlicherweise etwa schon gleichwertig sein sollte mit dem allgemeinen Prinzip. Der wahrscheinliche, aber seinem Nachweis noch erhebliche Schwierigkeiten bietende Sachverhalt ist wohl der, dass die erwähnte Spezialisierung des Auswahlprinzips schwächer ist als der Ordnungssatz, dieser wiederum schwächer als das allgemeine Auswahlprinzip.

O. ONICESCU (Bucuresti - Romania)

LA NOTION DE SATURATION ET LE PROBLÈME DE DIRICHLET

1. - Dans un travail publié dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (t. 184, p. 733) j'ai introduit la notion d'*ensemble de saturation* relatif à une fonction $\varphi(M; P)$ par les caractères suivants:

1°) Les fonctions $\varphi(M; P_\varepsilon)$ ou P_ε est un point quelconque de l'ensemble de saturation que nous désignons par ε, sont linéairement indépendantes entre elles;

2°) toute fonction $\varphi(M; P_{\varepsilon'})$, ou $P_{\varepsilon'}$ est un point quelconque de l'ensemble ε' complémentaire de ε dans le domaine d'existence de $\varphi(M; P)$, est une fonctionnelle linéaire de $\varphi(M; P_\varepsilon)$.

La fonctionnelle linéaire définie par $\varphi(M; P)$ sera complètement déterminée par

$$\int_\varepsilon \varphi(M; P)d\lambda(P)=f_\lambda(M). \tag{1}$$

L'introduction de cette notion nous permet de reprendre les équations de FREDHOLM de première espèce et de leur rendre la signification qu'elles doivent avoir: dépendance fonctionnelle biunivoque entre $\lambda(P)$ et $f(M)$ avec le problème corrélatif de trouver la fonctionnelle qui nous fait passer de $f(M)$ à $\lambda(P)$. Il nous faut encore introduire l'ensemble ∂_M de saturation du nuclée $X(Q; M)$ de la résolvante. Nous dirons que ∂_M est l'ensemble de détermination de $f(M)$.

2. - Prenons pour fonction génératrice

$$\varphi(M; P)=\frac{1}{r_{MP}}$$

où M est un point quelconque d'un domaine limité et simplement connexe de de l'espace et P un point quelconque de sa frontière.

La fonctionnelle générée par $\frac{1}{r_{MP}}$ a toujours un sens précisé (eventuellement comme limite de fonctionnelles simples, si nous considérons la frontière comme limites de frontières simples). L'ensemble de saturation de la résolvante $X(Q; M)$ (ou, comme nous l'avons encore appelé, l'ensemble de détermination de $f(M)$) est formé par la frontière entière ou par une partie de cette frontière; il est identique à ce que l'on appelle la partie propre de la frontière.

NINA BARY (Moscou - U. R. S. S.)

SUR LA STRUCTURE ANALYTIQUE D'UNE FONCTION CONTINUE ARBITRAIRE

On sait que CAMILLE JORDAN a introduit dans la science la notion importante de fonction *à variation bornée.* Il a démontré qu'une telle fonction est la somme d'une fonction *croissante* et d'une fonction *décroissante*, donc son allure se compose de deux allures monotones.

D'autre part, on sait que parmi les fonctions à variation bornée les fonctions *absolument continues* sont les plus remarquables, car chaque fonction absolument continue est une intégrale indéfinie au sens de M. LEBESQUE et réciproquement.

La question se pose naturellement de savoir quelle est la classe des fonctions qu'on peut obtenir par une combinaison *finie* de fonctions absolument continues. La reponse peu attendue est la suivante:

THÉORÈME. *Toute fonction continue* $F(x)$ *d'une variable réelle est la somme de trois fonctions absolument continues de fonctions absolument continues*

$$F(x)=f_1[\varphi_1(x)]+f_2[\varphi_2(x)]+f_3[\varphi_3(x)];$$

d'ailleurs, les fonctions extérieures f_i peuvent être supposées essentiellement croissantes et les fonctions intérieures φ_i à nombres dérivés bornés.

Ainsi l'allure d'une fonctions continue arbitraire se compose de 9 allures monotones et absolument continues.

La nature des fonction composantes de la forme $f[\varphi(x)]$, f et φ étant absolument continue, est caractérisée par le théorème suivant (1):

Pour qu'une fonction continue $F(x)$ soit de la forme $f[\varphi(x)]$, f et φ étant absolument continues, il faut et il suffit que l'ensemble des valeurs de $F(x)$ aux points où sa dérivée $F'(x)$ n'existe pas ou n'est pas finie soit de mesure nulle.

Une propriété équivalente est due à MM. BANACH et SAKS (2).

(1) Voir N. BARY et D. MENCHOFF: *Sur l'intégrale de Lebesgue-Stieltjes et les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.* (Annali di Matematica, Serie 4e, t. 5, p. 43, 1927-28).

(2) MM. BANACH et SAKS: *Sur les fonctions absolument continues de fonctions absolument continues.* (Fundam. Math., t. 11, p. 113).

Chaque fonction continue $F(x)$ est donc la somme d'au plus trois fonctions dont la structure géométrique est complètement connue.

Il est naturel d'introduire ici une notion nouvelle, celle de *rang* d'une fonction. Appelons *rang* d'une fonction continue le nombre *minimum* des termes dans la représentation de la fonction donnée sous la forme d'une somme de fonctions $f_i[\varphi_i(x)]$, les f_i et φ_i étant absolument continues.

D'après la proposition énoncée, *toute fonction continue est de rang inférieur ou égal à trois.*

Nous omettons la démonstration de ce théorème qui est un peu longue et compliquée.

Mais ce qui est important, c'est qu'*il existe des fonctions de rang précisément égal* à 1, à 2 et à 3.

La structure géométrique des fonctions de rang 1 est caractérisée par le théorème déjà indiqué ([1]).

Quant aux fonctions de rang 2, nous n'avons jusqu'à présent que des résultats fort partiels. Par exemple, on peut démontrer qu'une fonction continue est de rang 2 si elle possède une dérivée quasi-partout (on dit qu'une propriété a lieu *quasi-partout* dans un intervalle (a, b) si elle a lieu sur un ensemble E de mesure positive dans chaque portion de cet intervalle). Mais il existe des fonctions de rang 2 qui ne possèdent de dérivée que sur un ensemble de mesure nulle.

Cependant il existe des fonctions continues dont le rang est précisément égal à trois. Tel est le cas des *fonctions ridées.*

Nous dirons qu'une fonction continue $F(x)$ est une fonction *ridée* si elle jouit de la propriété suivante: quelque soit l'ensemble E de mesure *positive* dans le domaine de la définition de $F(x)$ il existe un ensemble E_1 de mesure nulle contenu das E tel que $F(x)$ est *monotone* sur E_1 et l'ensemble des valeurs de $F(x)$ sur E_1 est de mesure positive.

Pour demontrer l'existence des fonctions ridées on se sert des courbes de M. Peano. Une courbe de M. Peano qui remplit le carré est donnée par deux équations

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t),$$

φ et ψ étant des fonctions continues du paramètre t. Il est très probable que pour toute courbe de M. Peano chacune de ces deux fonctions est une fonction ridée. Toutefois on peut le démontrer pour une courbe de M. Peano particulièrement choisie. Je ne m'arrête pas sur les détails de la construction de cette courbe et je passe à la démonstration du fait qu'une fonction ridée est toujours de rang 3.

([1]) Voir la note (1) à la page précédente.

En effet, une fonction de rang 2 est la somme de deux fonctions composantes dont chacune est de rang 1. On déduit facilement du théorème qui caractérise les fonctions de rang 1 qu'une fonction $\mathrm{F}(x)$ de rang inférieur ou égal à 2 jouit de la propriété suivante: quelque soit un intervalle δ contenu dans l'intervalle (a, b) de la définition de $\mathrm{F}(x)$, il existe dans δ un ensemble parfeit P de mesure positive et une fonction absolument continue $\psi(x)$ tels que pour la différence

$$\mathfrak{F}(x) = \mathrm{F}(x) - \psi(x)$$

on a mes $\mathfrak{F}(P)=0$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{F}(x)$ sur P est de mesure nulle ([1]).

Or, une fonction ridée ne peut pas vérifier cette condition. En effet, supposons le contraire, c'est à dire supposons qu'il existe pour une fonction ridée $F(x)$ une fonction absolument continue $\psi(x)$ et un ensemble parfait P, mes $P>0$, tels que pour la différence $\mathfrak{F}(x)=F(x)-\psi(x)$ on a mes $\mathfrak{F}(P)=0$. Mais, d'après la définition même des fonctions ridées, il existe sur P un ensemble π, mes $\pi=0$ tel que $F(x)$ est monotone sur π et mes $F(\pi)>0$. On peut, sans restreindre la généralité, supposer que l'ensemble π est parfait.

Soit maintenant $F_1(x)$ la fonction égale à $F(x)$ sur π et interpolée linéairement dans les intervalles contigus à π et soit

$$\mathfrak{F}_1(x) = F_1(x) - \psi(x).$$

La fonction $\mathfrak{F}_1(x)$ est monotone, $\psi(x)$ absolument continue, donc $\mathfrak{F}_1(x)$ est une fonction à variation bornée. D'ailleurs on a sur l'ensemble π l'égalité

$$\mathfrak{F}_1(x) \equiv \mathfrak{F}(x),$$

donc

$$\text{mes } \mathfrak{F}_1(\pi) = \text{mes } \mathfrak{F}(\pi) = 0,$$

puisque π est contenu dans P et mes $\mathfrak{F}(P)=0$.

On en déduit que $\mathfrak{F}_1(x)$ est absolument continue et il en est de même pour $F_1(x)=\mathfrak{F}_1(x)+\psi(x)$. Mais ceci est impossible car si $F_1(x)$ était absolument continue, en vertu de mes $\pi=0$ on aurait aussi mes $F_1(\pi)=0$, mais $F_1(x)=F(x)$ sur π et mes $F(\pi)>0$ d'après la définition même de l'ensemble π. Cette contradiction nous montre que la fonction ridée $F(x)$ n'est pas une fonction de rang 2 au plus, donc elle est précisément de rang 3.

([1]) Nous désignons généralement par $f(e)$ l'ensemble des valeurs d'une fonction $f(x)$ sur un ensemble e.

S. Bernstein (Kharkow - U. R. S. S.)

SUR LES FONCTIONS RÉGULIÈREMENT MONOTONES

1. - Au point de vue pratique la propriété qualitative la plus importante d'une fonction reelle dans le voisinage d'un point donné est le sens de sa variation correspondant à une variation suffisamment petite de la variable.

Il est vrai que l'analyse moderne construit aisément des fonctions $\varphi(x)$ qui en aucun intervalle, quel que petit qu'il soit, ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Cependant, en général, ce ne sont pas les valeurs $\varphi(x)$ elles mêmes, supposées positives pour fixer les idées, que nous observons, mais des moyennes de ces valeurs correspondant à un très grand nombre de valeurs voisines des x. Ainsi, par exemple, en admettant la loi des erreurs de Gauss avec le paramètre de précision σ, la fonction observable $f(x)$ au lieu de $\varphi(x)$ serait de la forme

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+\frac{xy}{\sigma^2}}dy,$$

donc analytique, et se présenterait par conséquent comme le produit de la fonction exponentielle de Gauss par une fonction absolument convexe, c'est à dire telle que toutes ses dérivées d'ordre pair sont positives.

D'autre part, plusieurs des fonctions usuelles, et en particulier les polynomes, qui servent des base à toute la théorie des fonctions, jouissent manifestement de la propriété que l'axe réel peut être décomposé en intervalles fixes, où toutes les dérivées restent monotones.

Telles sont les raisons principales qui montrent l'interêt d'une étude systématique des propriétés d'une fonction réelle dont les différences finies successives d'ordre $h+1$ gardent des signes invariables dans un intervalle donné. Il est aisé de montrer qu'une telle fonction admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre $h-1$ inclusivement et des dérivées à droite et à gauche d'ordre h qui sont toutes monotones. Dans mes « Leçons sur les propriétés extrémales etc. » j'ai démontré que pour h infini la fonction est analytique à l'intérieur de l'intervalle considéré et j'ai nommé les fonctions de cette nature *régulièrement monotones*. Je rappellerai qu'il est établi au même endroit que, si une fonction admet une infinité de dérivées monotones dont les ordres ne croissent pas plus rapidement que les termes d'une progression arithmétique, la fonction est également analytique, et de plus, quelle que soit la croissance des ordres considérés, la fonction appartient en tout cas à la classe de fonctions quasi analytiques P qui présente, comme on sait, des analogies remarquables avec les fonctions analytiques.

2. - Mais aujourd'hui je ne vais pas m'occuper de ces fonctions plus générales et je me bornerai à exposer brièvement les points essentiels de la théorie des fonctions régulièrement monotones.

La base algebrique de la théorie est formée par l'étude des propriètés extrémales des polynomes dont un certain nombre de dérivées successives admettent dans un intervalle fixe des signes donnés. Vient ensuite la partie analytique traitant les problèmes de convergence, de représentations analytiques, de la nature des singularités etc. Et comme une des applications importantes de la théorie, je signalerai encore le problème de la sommation des séries de TAYLOR de rayon nul par la condition que la fonction soit régulièrement monotone, au voisinage du point considéré.

Les fonctions régulièrement monotones qui ont plusieures propriétés communes se distinguent essentiellement par le type, auquel elles appartiennent.

3. - Le cas à plusieurs égards le plus important est celui des fonctions *absolument monotones*, dont toutes les dérivées sont de même signe, auquel on ramène aussi par le changement de x en $-x$ celui, où les dérivées sont de signes alternés.

Ce type est le seul, pour lequel la monotonie régulière peut s'étendre jusqu'à l'infini. Il est presque évident que l'extremité droite b du segment ab de monotonie absolue de la fonction $f(x)$ est un point singulier de $f(x)$, tandis que le rayon de convergence en a est égal au segment entier ab. Par consequent, si le segment de monotonie absolue s'étend jusqu'à $+\infty$, la fonction est entière; si, au contraire, c'est seulement l'extrémité gauche a qui s'en va à $-\infty$, $f(x)$ est holomorphe sur le demi plan situé à gauche de la perpendiculaire à l'axe réel au point b. Ce dernier cas est le seul, où les polynomes algébriques ne sont d'aucun secours. Sans entrer dans des détails, que ceux d'entre vous qui s'y intéressent trouveront dans mon Mémoire des Acta Mathematica t. 52, je remarquerai que les polynômes exponentiels à coefficients et exposants positifs jouent ici un role fondamental, car tous les problèmes d'extremum relatifs aux fonctions absolument monotones sur le demi axe négatif ont pour solutions de tels polynomes.

Ainsi, par exemple, si on a un nombre pair $2h$, pour fixer les idées, de constantes positives données $f(0)$, $f'(0)$,...., $f^{(2h-1)}(0)$, *la condition nécessaire et* *suffisante pour qu'il existe une fonction absolument monotone jusqu'à* $-\infty$ *avec ces valeurs initiales, est que les Wronskiens*

$$(1) \quad A_{2k}(0)=\begin{vmatrix} f(0) & f'(0) \dots & f^{(k)}(0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ f^{(k)}(0) & f^{(k+1)}(0) \dots & f^{(2k)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0, \quad A_{2k+1}(0)=\begin{vmatrix} f'(0) \dots & f^{(k+1)}(0) \\ f''(0) \dots & \\ \dots & \dots \\ f^{(k+1)}(0) \dots & f^{(2k+1)}(0) \end{vmatrix} \geqslant 0$$

soient non négatifs, quel que soit $\mathrm{k}<\mathrm{h}$, *et que, si* $\mathrm{A_n}=0$, *alors on ait aussi* $\mathrm{A_{n'}}=0$ *pour* $\mathrm{n'}>\mathrm{n}$.

Ces conditions sont précisément celles qui expriment que l'équation différentielle $A_{2h}(x)=0$, dont l'intégrale générale est un polynome exponentiel, admet comme solution particulière, prenant les valeurs initiales données, un polynome exponentiel $\varphi_{2h}(x)$ à coefficients et exposants positifs. *Ce polynome* $\varphi_{2\mathrm{h}}(\mathrm{x})$ *jouit de la propriété remarquable d'être pour toutes valeurs de* $\mathrm{x}\gtrless 0$ *le plus petit parmi toutes les fonctions absolument monotones jusqu'à* $-\infty$ *correspondant aux mêmes valeurs initiales. Et c'est la fonction absolument monotone unique, lorsque* $\mathrm{A_{2h-1}}=0$, c'est à dire *si le remplacement de* $\mathrm{f'(0)}$ *par* $\mathrm{f'(0)}-\varepsilon$ *détruit les inégalités* (1), *quelque petit que soit* $\varepsilon>0$.

La conclusion subsiste, si h *croit indéfiniment.*

Et on voit facilement que, quelles que soient les données qui satisfont à l'infinité d'inégalités (1), la fonction absolument monotone possédant les dérivées données existe. De plus, en choisissant $f'(0)$ de la sorte, que $f'(0)-\varepsilon$ ne satisfasse plus à ces inégalités, si petit que soit ε, cet ensemble de données détermine la fonction absolument monotone sans ambiguité, quoique la croissance des dérivées successives $f^{(n)}(0)$ peut être aussi rapide qu'on veut.

4. - Si les valeurs $f(0), \dots, f^{(n)}(0), \dots$ ne satisfont pas aux inégalités indiquées, il est toujours possible (et d'une infinité de manières) de choisir $F_1^{(n)}(0)$ et $F_2^{(n)}(0)$ qui, satisfaisant respectivement aux conditions de monotonie absolue jusqu'à $-\infty$, vérifient les égalités $F_1^{(n)}(0)-F_2^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$.

Ainsi, puisque les polynomes exponentiels considerés plus haut ont pour limite des intégrales de STIELTJES

$$\int_0^\infty e^{zx}d\psi(z),$$

où $\psi(z)$ est une fonction monotone, une série de TAYLOR de rayon fini ou nul peut être toujours donnée par une intégrale de même forme, où $\psi(z)$ serait une fonction à variation bornée. Pour rendre le problème déterminé, on peut chercher à minimer une somme de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k F_1^{(k)}(0)$, où les constantes positives a_k sont, par exemple, supérieures à $\frac{1}{k^{2k}}$; si ce minimum, ainsi que $\Sigma a_k f^{(k)}(0)$, tend vers une limite, lorsque n croit indéfiniment, on obtient ainsi une fonction bien déterminée $F_1(x)-F_2(x)$ qui ne dépend pas des constantes a_k.

5. - Sans m'arreter sur les rapports des problèmes mentionnés avec celui des moments et d'autres questions d'analyse, je voudrais dire encore quelques mots des fonctions *absolument monotones sur un segment fini.* En remplaçant x par log (x_1+c), on déduit immediatement de (1) des conditions nécessaires et suffisantes pour que les valeurs des dérivées données à l'origine puissent correspondre à un polynome de la forme $\Sigma A_i(a+c)^{\alpha_i}$, où $A_i \geqslant 0$ et $\alpha_i \geqslant 0$; mais pour que la fonction soit absolument monotone sur le segment $-c$, 0, il faut et il suffit qu'en outre les nombres α_i soient entiers. Ainsi apparait *la nature arithmétique* du problème.

Dans le Memoire cité j'ai donné un algorithme n'éxigeant que des opérations arithmétiques qui permet dans chaque cas particulier de décider de proche en proche si l'introduction de la dérivée suivante est acceptable, et de déterminer en même temps le polynome qui résout le problème d'extremum correspondant. J'y ai donné également une méthode pour déterminer le segment maximum, où la fonction peut être absolument monotone. Il est curieux de noter que, tandis que pour $c=\infty$ la détermination complète des coefficients et exposants des polynomes exponentiels, dont nous avons parlé plus haut, conduit à des équations algébriques de degrés croissants; pour c fini, nous n'avons qu'à résoudre certains systèmes d'équations linéaires, et l'on pourrait les utiliser pour la solution approximative des équations algébriques de degrés supérieurs correspondant à $c=\infty$.

6. - Je signalerai encore dans un ordre d'idées analogue un cycle de problèmes algébriques; c'est celui des propriétés extrémales des polynomes *multiplement monotones d'ordre* $h+1$, c'est à dire tels que leurs dérivées des $h+1$ premiers ordres sont positives.

Il était intéressant, par exemple, de construire les polynomes de la forme

$$x^n+p_1x^{n-1}+ \dots +p_n$$

multiplement monotones d'ordre $h+1$ qui s'écartent le moins possible de zéro. Après avoir résolu et discuté la solution de ce problème qui pour $h=0$ avait déjà était étudié par TCHEBYSCHEFF, j'ai recherché la relation entre le maximum M du polynome et celui N de sa derivée (1); j'ai trouvé, en particulier, que $\frac{N}{M}=O\left(\frac{n^2}{h}\right)$. Les polynomes de JACOBI interviennent d'une façon remarquable dans la solution de ces questions, et mes éléves MM. BŘECKA et GUERONIMUS ont appliqué avec succès mes méthodes à d'autres problèmes de même nature (2).

(1) Comptes Rendus, t. 185, p. 247, t. 186, p. 1187.

(2) Mathemat. Zeitschrift, Bd. 30, p. 357.

7. - Dans le cas général, une fonction régulièrement monotone sur ab est caractérisée par l'infinité de *nombres typiques* positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, jouissant de la propriété que

$$f^{(i-1)}(x) \cdot f^{(i)}(x) \geqslant 0, \qquad \text{si } i \leqslant \lambda_1,$$
$$f^{(i-1)}(x) \cdot f^{(i)}(x) \leqslant 0, \qquad \text{si } \lambda_1 < i \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 = \sigma_2$$

et ainsi de suite. Le groupement, où les derivées successives sont de même signe, est nommé « *permanence* », et le groupement où les dérivées sont de signes alternés est nommé « *alternance* ». Ainsi, les dérivées d'une permanence sont croissantes en valeur absolue de gauche à droite, tandis que la valeur absolue des dérivées d'une alternance est décroissante.

En posant

$$P_{2k-1} = P_{2k} = \lambda_1 + \lambda_3 + \ldots + \lambda_{2k-1},$$
$$Q_{2k} = Q_{2k+1} = \lambda_2 + \lambda_4 + \ldots + \lambda_{2k},$$

de sorte que

$$P_m + Q_m = \sigma_m = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m,$$

quelque soit m, on démontre par des considérations élémentaires que

$$(2) \qquad |f^{(\sigma_m)}(x)| < \frac{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_m!}{(x-a)^{P_m}(b-x)^{Q_m}}\,|f(x)|.$$

Ces inégalités ne concernent que les dérivées des ordres σ_m qui occupent la première place dans une permanence ou alternance. On a pour les dérivées des ordres différents des inégalités analogues: si $n = \sigma_m + k$, où $0 < k < \lambda_{m+1}$.

$$(2') \qquad |f^{(n)}(a)| < \frac{\lambda_1!\,\lambda_2!\ldots\lambda_m!\,k!}{(y-a)^{P_m}(b-y)^{Q_m}(y-x)^k}\,|f(y)|$$

où y peut être pris arbitrairement dans l'intervalle (a, x) ou (x, b) suivant que $f^{(n)}(x)$ appartient à une alternance ou à une permanence. Il en résulte que *la fonction régulièrement monotone sur le segment* (ab) *est non seulement analytique sur ce segment, mais elle représente même une fonction entière, si la croissance des nombres* λ_m *n'est pas trop rapide et, en particulier, il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que* [1] $\frac{\lambda_n}{\sigma_n} \to 0$.

8. - L'inspection de l'inégalité (2) fait prévoir que le type de monotonie qui limite le plus la croissance des dérivées successives de la fonction est celui où tous les $\lambda_i = 1$. Dans ce cas, où la périodicité des signes des dérivées successives est la même que pour sinx dans l'intervalle de 0 à $\frac{\pi}{2}$, les inégalités complementaires (2′) deviennent superflues. Nous reviendrons plus loin sur une étude plus precise de cette classe de fonctions que j'appelle *cycliquement monotones*, qui, étant en quelque sorte l'antipode de celle des fonctions absolument monotones, ne

[1] Comptes Rendus, t. 186, p. 1266. Communications de la Soc. Mathémat. de Kharkow série 4, t. 2.

contient que des fonctions entieres de genre non supérieur à 1, et où la solution des problèmes d'extremum les plus importants est fournie par les fonctions trigonométriques. Mais auparavant, je veux indiquer quelques résultats généraux relatifs à la disposition des singularités d'une fonction régulièrement monotone quelconque. D'abord *une fonction régulièrement monotone sur* ab *est, quelque soit son type, holomorphe à l'intérieur du cercle ayant* ab *comme diamètre.*

Cette affirmation est une conséquence d'un théorème plus général, dans l'énoncé duquel intervient une notion fondamentale dans la théorie générale des séries de Taylor que je dois rappeler d'abord.

D'apres un théorème classique de M. Hadamard, le rayon de convergence $R(x)$ au point x de la fonction $f(x)$ est donné par la formule

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\left|\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

On dit que les dérivées $f^{(p_n)}(x)$ forment une suite caracteristique, si

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[p_n]{\left|\frac{f^{(p_n)}(x)}{p_n!}\right|} = \frac{1}{R(x)}.$$

Ceci posé, en utilisant simultanément une formule (1) de la théorie de la meilleure approximation, analogue à celle de M. Hadamard indiquée plus haut, et une inégalité relative à la meilleure approximation par des polynomes de degré n d'une fonction dont la dérivée d'ordre $n+1$ garde un signe invariable (2), on obtient sans difficulté le théorème suivant:

Théorème. *Si on peut former au point* x *une suite caractéristique au moyen de dérivées appartenant à des permanences, le cercle de convergence en ce point contient un point singulier réel* $z \geqslant b$ *de* f(x); *si on peut former une suite caractéristique ne contenant que des dérivées appartenant à des alternances, le cercle de convergence au point* x *passe par le point singulier réel* $z_1 \leqslant a$.

Ainsi, dans tous les cas où la fonction régulièrement monotone sur un segment donné n'est pas entière, elle possede au moins un point singulier réel. Il existe alors toujours un point ξ du segment ab tel que son cercle de convergence C

(1) Il s'agit ici de la formule

$$\overline{\lim} \sqrt[n+1]{E_n f(x)} = \frac{b-a}{\varrho},$$

où ϱ est la somme des axes de l'ellipse, ayant les extrémités b et a pour foyers, passant par le point singulier de $f(x)$ le plus rapproché. (Voir mon livre cité p. 113).

(2) Il s'agit de l'inégalité

$$\frac{2N}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} < E_n f(x) < \frac{2M}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}, \quad \text{où } 0 < N < f^{(n+1)}(x) < M$$ sur ab (Ibid. p. 10).

contient à son intérieur les cercles de convergence relatifs à tous les points de ab. Si ξ est un point intérieur, la fonction possède necessairement deux points singuliers réels.

Il est évident de plus que la monotonie régulière de $f(x)$ pourra ne pas être modifiée par l'addition de n'importe quelle singularité extérieure au cercle de convergence maximum C que nous venons de définir, on ne peut donc rien dire au sujet des singularités extérieures à ce cercle. Je remarquerai encore que l'extremité droite b du segment de monotonie ne saurait être un point singulier que dans le cas, où les permanences deviendraient tellement longues que

$$\overline{\lim}\ \frac{\lambda_{2k+1}}{\sigma_{k2+1}}=1, \tag{3}$$

et de même le point a ne pourra être singulier que lorsque

$$\overline{\lim}\ \frac{\lambda_{2k}}{\sigma_{2k}}=1. \tag{3'}$$

On voit ainsi que, *sauf le cas des fonctions absolument monotones examiné au début, les types de monotonie régulière possible dans le voisinage d'un point singulier sont fort restreints; et, si pour fixer les idées, c'est le point* b *qui est singulier, les signes des dérivées successives doivent satisfaire à la loi* (3), *pour que le problème de sommation de la série divergente correspondante de Taylor par une fonction régulièrement monotone puisse avoir une solution.* D'ailleurs, dans ce cas de monotonie presqu'absolue, la sommation, lorsqu'elle est possible, se fait par un simple groupement de termes, consistant à réunir en groupes les termes de la série de TAYLOR au point b, de sorte que chaque groupe commence par un terme d'une alternance.

Dans ces conditions, en employant le reste $R(x)$ sous la forme de LAGRANGE, on voit que s'il existe une fonction régulièrement monotone sur (ab), on a, après le groupement,

$$|R(x)|<\frac{(b-x)^n}{n!}|f^{(n)}(x)|<\frac{(b-x)^n}{n!}\left|f^{(n)}\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|,$$

de sorte que ce reste tend vers zéro pour $\frac{a+b}{2}<x<b$, et la série converge dans cet intervalle ainsi que toutes ses dérivées. Il est manifeste qu'il ne peut y avoir dans ce cas plus d'une fonction régulièrement monotone admettant les dérivées données au point b; d'ailleurs il y a lieu de signaler que la fonction est quasi analytique (P) sur tout la segment (ab) extremités comprises.

9. - Avant de terminer ma communication, je voudrais m'arrêter encore sur quelques problèmes typiques d'extremum qui se rattachent à notre théorie.

Considérons d'abord les deux problèmes algébriques suivants de nature opposée admettant comme solution les mêmes polynômes qui sont analogues à ceux de BERNOULLI et EULER et ont pour limites les fonctions trigonométriques.

1) *Déterminer le polynôme*

$$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}+p_1x^{n-1}+\dots+p_n \tag{4}$$

qui s'écarte le plus possible de zéro sur le segment 01, *s'il s'annulle au moins une fois, ainsi que chacune de ses dérivées jusqu'à l'ordre* $(n-1)$ *inclusivement, sur ce segment.*

2) *Déterminer le polinôme cycliquement monotone de la forme* (4) *sur le segment* 01 *qui s'écarte le moins possible de zéro sur ce segment.*

On reconnait sans peine que les polynômes résolvant les deux problèmes sont identiques, car ils sont tous les deux déterminés par la propriété que leurs dérivées successives s'annullent alternativement aux extrémités 0 et 1 du segment; de sorte que c'est un polynôme cycliquement monotone qu'on trouve aussi comme solution du premier problème.

Par conséquent, les polynômes cherchés sont

$$P_1(x)=x, \quad P_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}$$

et en général,

$$P_{2k}(x)=\int_1^x P_{2k-1}(x)dx, \quad P_{2k+1}(x)=\int_0^x P_{2k}(x)dx.$$

On en conclut aisément que

$$P_n(x)=\frac{x^n}{n!}+\dots+\frac{x^hE_{n-h}}{h!\,(n-h)!}+\dots+\frac{E_n}{n!}=\frac{1}{n!}(x+E)^{(n)},$$

où E_n sont les nombres d'Euler qui sont nuls pour n impair, de sorte que P_n est toujours une fonction paire où impaire.

Pour n pair $n=2k$, l'écart maximum cherché est

$$L_n=\left|\frac{E_{2k}}{2k!}\right|\sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}.$$

Je rémarquerai que les polynômes trouvés sont simplement liés a ceux d'Euler, car ils satisfont à l'équation

$$\frac{1}{2}[P_n(x+1)+P_n(x-1)]=\frac{x^n}{n!},$$

de sorte que les polynômes d'Euler $E_n(x)$ sont donnés par la formule

$$E_n(x)=\frac{n!}{2^n}P_n(2x-1).$$

Pour $n=2k+1$, on a

$$L_n=\frac{1}{(2k+1)!}(1+E)^{(2k+1)}=\frac{E_{2k}}{2k!}+\frac{E_{2k-2}}{3!\,(2k-2)!}+\dots$$
$$\sim 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2k+1}\left[1-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\dots\right]=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}.$$

10. - Les polynômes $P_n(x)$ nous permetteront à présent de résoudre des problèmes analogues d'extremum, relatifs, non plus à des polynômes, mais à des fonctions quelconques.

Ainsi on peut démontrer les théorèmes suivants: *Si une fonction s'anullant au moins une fois sur le segment* 01 *ainsi que toutes ses dérivées, atteint sur ce segment la valeur* 1, *sa dérivée d'un ordre* m *donné atteint nécessairement la valeur absolue* $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\mathrm{m}}$, *et ne dépasse pas cette valeur seulement dans le cas des fonctions* $\sin\frac{\pi}{2}\mathrm{x}$ *et* $\cos\frac{\pi}{2}\mathrm{x}$.

Et, d'autre part, *si une fonction cycliquement monotone ne dépasse pas* 1 *sur ce segment, ses dérivées d'ordre* $\mathrm{m}=2\mathrm{k}-1$ *impair, pour fixer les idées, ne dépassent pas* $\frac{(\mathrm{m}+1)!}{2^{\mathrm{m}+1}}$, *et cette valeur* $\left(\text{qui asymptotiquement est égale } \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+2}\right)$ *sera atteinte effectivement, si* $\mathrm{f(x)}=\mathrm{P}_{\mathrm{m}+1}(\mathrm{x})$ $\left(\text{pour } \sin\frac{\pi}{2}x \text{ cette valeur est seulement } \left(\frac{\pi}{2}\right)^m = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{m+2}\cdot\frac{8}{\pi^2}\right)$.

Ainsi nous voyons à présent de la façon la plus nette que *la monotonie cyclique est de tous les types de monotonie régulière celle qui impose les limites minimes aux modules des dérivées successives*; et le dernier résultat a pour conséquence qu'*une fonction cycliquement monotone sur un segment de longueur* 1 *est entière de degré non supérieur à* $\frac{\mathrm{e}\pi}{2}$. D'ailleurs, il est aisé de montrer que toute fonction entiére de degré p est susceptible d'être présentée comme la différence de deux fonctions cycliquement monotones sur tout segment inferieur à $\frac{2p}{e\pi}$ et ne peut pas être mise sous cette forme sur un segment supérieur. J'ajouterai, en terminant, que la notion de type en un point donné, introduite plus haut, joue un rôle essentiel dans le cas également, où il n'y a pas d'intervalle fixe de monotonie régulière: l'ensemble des zéros des dérivées successives admettant le point considéré pour limite. La condensation des zéros de cet ensemble qui croit en même temps que les modules maxima des dérivées successives, dépend également de leurs signes, et cette condensation diminue, lorsque les nombres typiques λ_n croissent.

P. LÉVY (Paris - Francia)

FONCTIONS À CROISSANCE RÉGULIÈRE ET ITÉRATION D'ORDRE FRACTIONNAIRE

1. - Une fonction telle que $e^x + e^{-x} \sin \log x$, malgré la lenteur et la petitesse de ses oscillations, nous apparaît comme irrégulière, parce qu'elle oscille entre deux fonctions, 2 ch x et 2 sh x, qui sont plus régulières qu'elle; d'exemples de cette nature résulte la notion intuitive, mais jusqu'ici peu précise, de fonction *parfaitement régulière*, ou plus simplement *régulière*, d'une variable x indéfiniment croissante. Je me propose d'exposer le résultat de recherches que j'ai entreprises pour préciser cette notion (1); je me suis laissé guider dans ces recherches par des considérations intuitives. Aussi, à côté de résultats précis et démontrés, il m'arrivera d'énoncer des résultats plus généraux, que je ne peux donner que comme probables; mais précisément à cause de cela mes recherches posent de nouveaux problèmes, sur lesquels je désire appeler l'attention.

Les considérations intuitives dont je viens de parler m'ont d'abord conduit à cette idée qu'il était possible de donner une définition de la régularité vérifiant les conditions suivantes:

1°) Les fonctions régulières constituent une *échelle complète de croissance*, c'est-à-dire que d'une part, si deux fonctions sont régulières, leur différence est différente de zéro et d'un signe bien déterminé pour x assez grand; d'autre part, si une fonction $g(x)$ n'est pas régulière, on peut trouver une fonction régulière $f(x)$ telle que la différence $f(x)-g(x)$ change de signe une infinité de fois.

2°) Les fonctions régulières sont continues et monotones pour x assez grand; il en est de même de toutes leurs dérivées; il est à noter qu'une fonction comme e^{-x^2} est régulière, bien que la valeur à partir de laquelle sa $n^{\text{ième}}$ dérivée est monotone augmente indéfiniment avec n.

3°) Certaines opérations analytiques, que nous appellerons *opérations régulières*, ne peuvent donner que des fonctions régulières si on les effectue sur des fonctions régulières. Ces opérations comprennent *au moins* la dérivation, l'intégration, les opérations élémentaires de l'algèbre, et, dans le cas d'une fonction

(1) Quelques indications sur ces recherches ont déjà paru dans des notes présentées à l'Académie des Sciences de l'Institut de France en 1926 et 1927.

régulière $f(x)$ indéfiniment croissante, la formation de la fonction inverse et celle des fonctions régulières de $f(x)$.

Par ces opérations régulières, on peut former des ensembles étendus de fonctions régulières; ainsi toute détermination, réelle pour x assez grand, d'une fonction algébrique de x, e^x, ou log x, est régulière. Mais on ne peut arriver ainsi à former une échelle complète de croissance. Il faut introduire une opération d'une nature essentiellement différente: *l'itération régulière.*

2. - Considérons une fonction $f(x)$ continue, croissante, et supérieure à x pour $x>a$. Le problème de l'itération consiste dans la recherche d'une fonction $f_\alpha(x)$, continue et croissante aussi bien par rapport à α que par rapport à x, telle que $f_1(x)=f(x)$ et

(1) $$f_{\alpha+\beta}(x)=f_\beta[f_\alpha(x)];$$

cette fonction doit être bien définie, d'abord pour $\alpha>0$ et $x>a$, ensuite pour

$$\alpha'=-\alpha \text{ et } x>f_\alpha(a).$$

Les itérées d'ordre entier se déduisent sans difficulté de la formule de récurrence

$$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)],$$

cas particulier de (1). Pour définir $f_\alpha(x)$, nous choisirons d'abord une valeur ξ de x, et prendrons pour $f_\alpha(\xi)=\varphi(\alpha)$, α variant de 0 à 1, une fonction croissant d'une manière continue de

$$\varphi(0)=\xi \text{ à } \varphi(1)=f(\xi),$$

à cela près quelconque. La fonction $\varphi(\alpha)$ est alors bien définie, pour α quelconque, par la formule

$$\varphi(\alpha)=f_{n+\alpha'}(x_0)=f_n[\varphi(\alpha')],$$

n étant la partie entière de α, de sorte que $\alpha'=\alpha-n$ est compris entre 0 et 1. Cette fonction $\varphi(\alpha)$ varie en croissant de ξ à l'infini, de sorte que, si $x>\xi$, l'équation

$$f_\alpha(\xi)=\varphi(\alpha)=x$$

a une racine positive $\alpha=\lambda(x)$ bien déterminée. La formule

$$\varphi(\alpha+\beta)=f_\beta[f_\alpha(\xi)]=f_\beta(x)$$

définit alors la fonction itérée pour des valeurs quelconques de β et x. En particulier la fonction initiale $f(x)$ peut, par cette formule, se retrouver en partant de $\varphi(\alpha)$; il y a lieu de remarquer que, si on ne connaît pas $f(x)$, on peut prendre pour $\varphi(\alpha)$ une fonction croissant d'une manière continue de ξ à l'infini quand α varie de zéro à l'infini, à cela près quelconque.

Il est commode d'introduire *l'indice d'itération* ou *logarithme d'itération* $\alpha=\lambda_x(y)$, racine de l'équation $f_\alpha(x)=y$; avec cette notation la relation fonctionnelle (1) prend la forme

(2) $$\lambda_x(y)=\lambda(y)-\lambda(x),$$

$\lambda(x)$ désignant, comme ci-dessus, la fonction inverse de $x=\varphi(\alpha)=f_\alpha(\xi)$, c'est-à-dire le logarithme d'itération par rapport à ξ. Au lieu de choisir arbitrairement $\varphi(\alpha)$ de 0 à 1, on peut choisir $\lambda(x)$ de ξ à $f(\xi)$.

La détermination de la fonction itérée introduit donc une fonction arbitraire; deux déterminations différentes $f_\alpha(x)$ et $\mathfrak{F}_\alpha(x)$ étant égales pour toutes les valeurs entières de α, l'une au plus de ces fonctions est régulière, et les autres ont par rapport à elle des oscillations périodiques, la différence

$$\lambda[\mathfrak{F}_\alpha(\xi)]-\lambda[f_\alpha(\xi)]=\lambda[\mathfrak{F}_\alpha(\xi)]-\alpha$$

étant une fonction périodique de α. Précisons bien que, si l'on peut choisir pour $\varphi(\alpha)=f_\alpha(\xi)$ une fonction régulière de α, la détermination de $f_\alpha(x)$ qui en résulte par les formules indiquées ci-dessus est régulière, aussi bien par rapport à α pour x quelconque que par rapport à x; on l'établit en n'utilisant qu'une partie des conditions imposées au N° 1 à la définition de la régularité, à savoir qu'elle se conserve par l'addition d'une constante, la formation des fonctions inverses, et celle des fonctions de fonctions. En particulier, pour $\alpha=1$, on voit que $f(x)$ est une fonction régulière. La condition nécessaire pour l'existence d'une fonction itérée régulière est donc la régularité de $f(x)$. Cette condition semble aussi suffisante; si je n'ai pu établir ce résultat rigoureusement, des considérations intuitives sur lesquelles je ne peux insister ici font que je ne peux guère douter de son exactitude.

C'est la formation de cette itérée régulière qui constitue ce que j'appelle l'itération régulière. Il reste à la définir, en partant de $f(x)$, par des formules permettant un calcul précis et ne supposant pas acquise une définition préalable de la régularité; c'est que nous allons faire maintenant, ces formules étant applicables, non seulement aux fonctions parfaitement régulières, mais aussi à des fonctions vérifiant des conditions de régularité beaucoup moins restrictives. Ces formules reposent sur le fait que l'on a nécessairement

$$\lambda_x(y)=\lambda(y)-\lambda(x)=\lambda(y_n)-\lambda(x_n), \tag{3}$$

x_n et y_n désignant les nombres itérés $x_n=f_n(x)$ et $y_n=f_n(y)$.

3. - Supposons d'abord que $f(x)$ soit, pour x infini, équivalent à x. On démontre aisément dans ces conditions, si cette fonction est régulière, que l'itérée régulière est caractérisée par la condition

$$f_\alpha(x)-x\sim\alpha[f(x)-x], \tag{4}$$

de sorte que l'on peut déterminer $\alpha=\lambda_x(y)$ par la formule

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n-x_n}{x_{n+1}-x_n}; \tag{5}$$

on connaît ainsi l'indice d'itération, et par suite l'itérée régulière $f_\alpha(x)$. D'ailleurs la formule (5) converge, et conduit à une définition de la fonction itérée $f_a(x)$ vérifiant la relation asymptotique (4), toutes les fois que l'on prend pour $f(x)$ une fonction continue à dérivée monotone tendant vers l'unité; l'itération régulière est bien définie pour ces fonctions. Pour toute autre itérée $\mathfrak{F}_a(x)$, le rapport

$$\frac{\mathfrak{F}_a(x)-x}{f(x)-x}$$

ne tendra pas vers a, mais oscillera indéfiniment entre deux valeurs distinctes; d'une manière précise, il sera de la forme

$$P[\lambda(x)]+\varepsilon,\ P[....]$$

désignant une fonction périodique et ε tendant vers zéro.

Le problème de l'itération n'est pas changé si l'on effectue un même changement sur x et $f(x)$. Il en résulte que le problème de l'itération régulière se ramène au précédent pour les fonctions croissant plus vite que x mais moins vite qu'une certaine puissance de x; en effet dans ces cas

$$\frac{\log y}{\log x} \text{ ou } \frac{\log\log y}{\log\log x}$$

tendent vers l'unité. L'itération régulière est alors résolue par des formules élémentaires.

Pour les fonctions croissant plus rapidement, e^x par exemple, des formules de cette nature ne s'appliquent pas. Il faut alors introduire la notion de *fonctions équivalentes au point de vue de l'itération.* Considérons deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, continues, monotones, et telles que $g(x)>f(x)>x$. Elles sont équivalentes au point de vue de l'itération si $g(x)$ est de la forme $f_{1+\varepsilon}(x)$, ε tendant vers zéro; cela revient à dire que

$$\lambda[g(x)]-\lambda]f(x)]$$

tend vers zéro; contrairement à ce qu'on pourrait penser, c'est là une propriété indépendante du choix de la fonction itérée $f_a(x)$. D'ailleurs, indépendamment de toute détermination de cette fonction, on peut former une condition nécessaire, qui est aussi suffisante sauf pour certaines fonctions manifestement irrégulières, pour que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ soient équivalentes au point de vue de l'itération. C'est que $g(x)$ soit de la forme $\varphi[f(x)]$, $\varphi(x)$ désignant une fonction dont toutes les itérées d'ordre entier croissent moins vite que $f(x)$: au lieu de $\varphi[f(x)]$ on peut aussi écrire $f[\varphi(x)]$.

Cette condition étant réalisée, il existe entre les fonctions itérées $f_a(x)$ et $g_a(x)$ une relation telle qu'à toute détermination d'une de ces fonctions, $f_a(x)$ par exemple, corresponde une détermination de l'autre, et une seule, de la forme $g_a(x)=f_{a+\varepsilon}(x)$, ε tendant vers zéro pour x infini. L'itération régulière d'une de ces fonctions entraîne alors celle de l'autre. La formule établissant cette relation et permettant de déterminer en fonction de $\lambda(x)$ le logarithme d'itération $\mu(x)$ relatif à la fonction $g(x)$ est

$$\mu(y)-\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\{\lambda[g_n(y)]-\lambda[g_n(x)]\}. \tag{6}$$

Cette formule converge bien, et donne une détermination acceptable de $\mu(x)$, non seulement pour les fonctions parfaitement régulières, mais toutes les fois que, $f(x)$ et $g(x)$ étant continus, monotones, et supérieurs à x, $\lambda[g(x)]-\lambda[f(x)]$ tend vers zéro d'une manière monotone.

Le cas des fonctions $f(x)$ dont la dérivée reste finie étant déjà résolu, nous supposerons $f'(x)$ monotone et augmentant indéfiniment; nous pouvons alors faire n'importe quel changement linéaire, soit sur la variable, soit sur la fonction; toutes les fonctions obtenues sont équivalentes à $f(x)$ au point de vue de l'itération. Nous prendrons en particulier

$$g(x)=\frac{f(x+t)-f(t)}{f'(t)},$$

t étant au moins égal à la plus grande racine de $f''(x)$. Alors les fonctions itérées de $g(t)$ d'ordres négatifs très grands tendent vers zéro, et en posant

$$x_n'=g_{-n}(x),\quad y_n'=g_{-n}(y),$$

on obtient une itérée bien déterminée de $g(x)$, définie par la formule

$$\mu(g)-\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n'-x_n'}{g(x_n')-x_n'} \tag{7}$$

analogue à la formule (5).

Pour des raisons intuitives, on peut penser, si $f(x)$ et par suite $g(x)$ sont des fonctions parfaitement régulières, que l'itérée régulière $g_\alpha(x)$ de $g(x)$ est régulière de zéro à l'infini; la formule (7), qui définit la fonction itérée régulière à l'origine, définit alors aussi celle qu'il faut considérer comme régulière à l'infini; on en déduit $\lambda(x)$, et par suite $f_\alpha(x)$, par la formule

$$\lambda(y)-\lambda(x)=\lim_{n\to\infty}\{\mu[f_n(y)]-\mu[f_n(x)]\},$$

déduite de (6) en intervertissant les rôles de $f(x)$ et $g(x)$.

L'itération régulière est ainsi définie dans tous les cas, et cela donne de nouveaux procédés pour former des fonctions régulières.

Mais ce qui précède nous donne tout autre chose qu'un procédé qui, indéfiniment répété, ferait connaître des ensembles de plus en plus étendus de fonctions régulières. Nous avons obtenu une fonction $\lambda(x, t)$ dont la définition dépend du paramètre t, et il est essentiel dans la théorie qui précède d'admettre qu'en réalité, si la fonction $f(x)$ est parfaitement régulière, $\lambda(x, t)$ ne dépend pas de t. Il est facile démontrer qu'il en est bien ainsi dans le cas de fonctions $f(x)$ simples comme e^x ou ax^2+bx+c. D'autre part l'étude générale des diverses circonstances possibles montre que, si la fonction $\lambda(x, t)$ dépend effectivement de t, elle ne peut pas être régulière; une opération régulière ne pouvant pas introduire d'irrégularité, il faut admettre dans ce cas que la fonction initiale $f(x)$ est irrégulière.

Ces considérations conduisent à penser qu'on peut définir la régularité de $f(x)$, dans le cas où $f'(x)$ augmente indéfiniment, par le fait que $\lambda(x, t)$ ne dépende pas de t, et dans tous les autres cas par des règles faciles à déduire de la précédente. Il s'agit alors de montrer que les fonctions régulières ainsi définies vérifient bien les conditions générales indiquées au N° 1. Le problème est très difficile, mais l'importance de la question me paraît justifier de nouvelles recherches, que je serais heureux de provoquer.

J'indique en terminant, qu'un exposé plus complet des considérations que je viens de résumer et des applications possibles à la sommation des séries divergentes et à l'inversion des relations fonctionelles, paraîtra ultérieurement dans les Annali di Matematica.

H. BOHR (Kopenhagen - Danimarca)

BERICHT ÜBER DIE THEORIE DER FASTPERIODISCHEN FUNKTIONEN

Zunächst muss ich um Entschuldigung bitten, dass der Inhalt meines Vortrages sich nicht mit dem angegebenen Titel deckt. Es war ursprünglich meine Absicht einen allgemeinen Bericht über die Theorie der fastperiodischen Funktionen zu geben. Bei der Ausarbeitung fühlte ich jedoch alsbald, dass diese Aufgabe in der beschränkten mir zur Verfügung stehenden Zeit schwerlich gelingen konnte. Ich habe daher vorgezogen, nur von einer einzigen Seite dieser Theorie zu sprechen, und zwar von den verschiedenen *Verallgemeinerungen* der fastperiodischen Funktionen, wie sie von einer Reihe von Mathematikern in mehreren interessanten Arbeiten eingeführt sind. Dabei werde ich mich überdies auf Funktionen von nur *einer* Variablen, und zvar einer *reellen* Variabeln beschränken.

Zur Einführung in das Thema werde ich zunächst mit einigen Worten an einige Hauptresultate aus der Theorie der eigentlichen fastperiodischen Funktionen errinnern, wie sie von dem Vortragenden in einigen Arbeiten in den Acta Mathematica (Bd. 45, 46, 47) entwickelt wurde.

Die Theorie ist aus dem folgenden allgemeinen Problem entstanden: *Welche Funktionen* $f(x)=u(x)+iv(x)$ *lassen sich, un zwar im ganzen unendlichen Intervalle* $-\infty<x<\infty$ *in reinen Schwingungen, d. h. in Schwingungen der Form* $ae^{i\lambda x}$ *auflösen,* wobei die *λ's* ganz beliebige (nicht etwa vorgegebene) reelle Zahlen bedeuten. In dieser allgemeinen Formulierung hat unser Problem aber zunächst keinen ganz präzisen Sinn, weil wir nicht genau definiert haben, was wir unter dem Worte « auflösen » verstehen wollen, und die Definition hiervon ist natürlich im gewissen Grade unserem Wilkür überlassen. Eine erste und primitivste Weise das Wort « auflösen » zu interpretieren wäre vielleicht die, nur solche Funktionen als auflösbar anzuerkennen, welche als *Summen von endlich vielen Schwingungen*

$$s(x)=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu x}$$

dargestellt werden können. Die Klasse aller solchen endlichen Summen $s(x)$ — wir wollen sie Exponentialpolynome nennen — wollen wir im Folgenden mit E bezeichnen. Schon bei einem ersten Versuch eine Theorie der Funktionen dieser Klasse E zu entwickeln ersehen wir aber, dass unsere Definition zu eng ist, weil die Klasse E nicht abgeschlossen ist, und daher jede durch Grenzprozesse bedingte Operation, auf Funktionen der Klasse E ausgeübt, aus dieser Klasse führen wird. Wir müssen also die Klasse E abschliessen, d. h. sie zu einer umfassenderen Klasse $H(E)$, der *abgeschlossenen Hülle von E* erweitern, die aus der Klasse E entsteht, wenn sie durch Hinzufügung aller Funktionen $f(x)$ erweitert wird, die Grenzfunktionen von Funktionen $s(x)$ der Klasse E sind. Aber auch diese Definition ist zunächst keine präzise; der Umfang dieser abgeschlossenen Hülle $H(E)$ hängt ja davon ab, durch welchen Grenzprozess wir die abgeschlossene Hülle bilden. In der Theorie der eigentlichen fastperiodischen Funktionen, wie sie vom Vortragenden entwickelt wurde, war der zu grunde gelegte Grenzprozess der prinzipiell einfachste und engste, nämlich *die im ganzen Intervalle* $-\infty < x < \infty$ *überall gleichmässige Konvergenz.* Das Hauptergebniss der Theorie war, dass die somit durch *Schwingungseigenschaften,* als abgeschlossene Hülle von endlichen Summen reiner Schwingungen, definierte Funktionenklasse $H(E)$ auch in einfacher Weise durch Eigenschaften ganz anderer Art charakterisiert werden konnte, nämlich durch *Verschiebungseigenschaften* (Periodizitätseigenschaften) als fastperiodische Funktionen.

Hierbei ist unter einer *fastperiodischen* Funktion $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ eine stetige Funktion $f(x)$ mit der folgenden Eigenschaft zu verstehen: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine relativ dicht liegende Menge von Zahlen (Verschiebungszahlen) $\tau = \tau(\varepsilon)$ mit

$$|f(x+\tau)-f(x)| < \varepsilon \qquad (-\infty < x < \infty),$$

wobei die Worte « relativ dicht « bedeuten sollen, dass in jedem Intervall einer gewissen Länge $l = l(\varepsilon)$ mindestens eine der Zahlen τ vorhanden ist. Der oben angegebene Hauptsatz unserer Theorie (der Approximationssatz) besagt also, dass die Menge F aller fastperiodischen Funktionen $f(x)$ mit der obigen abgeschlossenen Hülle $H(E)$ genau übereinstimmt,

$$F = H(E).$$

Der Beweis dieses, dem klassischen Weierstrass'schen Approximationssatz für den Spezialfall harmonischer Swingungen e^{inx} entsprechenden, Satzes für beliebige reine Schwingungen $e^{i\lambda x}$ wird mit Hülfe einer Theorie der *Fourierreihen* fastperiodischer Funktionen geführt. Von dem Begriff der Fourierreihe soll hier nur erwähnt werden, dass jeder fastperiodischen Funktion $f(x)$ eine gewisse unendliche Reihe der Form $\Sigma A_n e^{i\Lambda_n x}$ als ihre Fourierreihe zugeordnet wird, welche Reihe ihrerseits — und dieser Nachweis ist die Hauptschwierigkeit der Theorie — die Funktion $f(x)$ *eindeutig* bestimmt, so dass die Fourierreihe ein vollgültiger Repräsentant der Funktion ist, von welcher aus es prinzipiell möglich ist, alle Eigenschaften der Funktion abzulesen. Wir fügen hinzu, dass es BOCHNER gelungen ist, den berühmten FEJÉR'schen Summationssatz Fourierreihen reinperiodischer Funktionen auf fastperiodische Funktionen zu übertragen und dadurch zu einem einfachen *Algorithmus* zu gelangen, welcher von der Fourierreihe einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ aus zu Exponentialpolynomen $s(x)$ führt, die die Funktion $f(x)$ gleichmässig approximieren.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen komme ich nun zu meinem eigentlichen Thema, den *Verallgemeinerungen der Klasse der fastperiodischen Funktionen.* Die ersten solchen Verallgemeinerungen rühren von STEPANOFF her; unabhängig von ihm wurde auch WIENER bei seinen bedeutsamen Untersuchungen über Fourierintegrale auf eine der Stepanoffschen Funktionenklassen geführt. Eine sehr weitgehende Verallgemeinerung, welche zu dem Analogon des RIESZ-FISCHERschen Satzes führte, wurde nachher von BESICOVITCH angegeben. Schliesslich hat WEYL am Ende seiner sehr interessanten Arbeit « Integralgleichungen und fastperiodische Funktionen », in welcher eine neue Begründung der Hauptsätze der Theorie der eigentlichen fastperiodischen Funktionen gegeben wurde, eine Verallgemeinerung des Begriffes der Fastperiodizität aufgestellt, welche zu einer Funktionenklasse führt, die die Stepanoffschen Funktionen enthällt aber nicht so umfassend wie die Besicovitsche Klasse ist. Ferner sind einige interessante Beiträge zur Theorie der Verallgemeinerungen von R. SCHMIDT, KOWANKO und FRANKLIN zu erwähnen.

Diese verschiedenen Verallgemeinerungen und andere damit zusammenhängenden sind neuerdings von Herrn BESICOVITSCH und mir einer eingehenden Untersuchung unterworfen. Es sind die allgemeinen Gesichtspunkte, die wir dabei zu Grunde legen um zu einer einheitlichen Behandlung des ganzen Fragenkomplexes zu gelangen, welche ich heute kurz besprechen möchte.

Bei der Aufgabe, die Theorie der fastperiodischen Funktionen zu verallgemeinern, wird es sich vor allem darum handeln, den Approximationssatz, d. h. die obige Gleichung

$$F=H(E)$$

zu verallgemeinern. Dabei kann man in zwei verschiedenen Weisen vorgehen.

Entweder kann man von der linken Seite der Gleichung ausgehen, d. h. direkt versuchen, die Definition der Fastperiodizität zu erweitern, vor allem dadurch dass man die Forderung der Stetigkeit aufgibt und zu Funktionen übergeht, die nur solchen Bedingungen unterworfen sind wie etwa der der Messbarkeit im LEBESGUE'schen Sinne. So ist ursprünglich STEPANOFF vorgegangen. Die Aufgabe wird dann sein die Schwingungseigenschaften der so definierten verallgemeinerten fastperiodischen Funktionen zu studieren.

Oder man kann umgekehrt von der rechten Seite der Gleichung $F=H(E)$ (also von den Schwingungseigenschaften) ausgehen, indem man den Begriff der abgeschlossenen Hülle der Klasse E verallgemeinert, d. h. einen andern Limesbegriff als den der überall gleichmässigen Konvergenz zugrunde legt. Man wird hier vor die umgekehrte Aufgabe gestellt, nämlich, für die so definierte abgeschlossene Hülle der Menge aller Exponentialpolynome die zugehörigen verallgemeinerten fastperiodischen Eigenschaften zu erforschen.

Für eine systematische Behandlung der Theorie der Verallgemeinerungen fastperiodischer Funktionen bietet sich, unserer Ansicht nach, der letzte Gesichtspunkt als der natürlichere dar. Die Aufgabe ist hier eine ganz klare und eindeutige; man betrachte nach und nach verschiedene Grenzprozesse G, bilde jedesmal die entsprechende abgeschlossene Hülle $H_G(E)$ und suche danach diese Funktionenklasse durch Periodizitätseigenschaften zu charakterisieren.

Im folgenden werde ich mich, der Kürze halber, auf Funktionen der Klasse L beschränken, d. h. der Klasse aller Funktionen $f(x)$ die in jedem endlichen Intervall im LEBESGUE'schen Sinne integrierbar sind. BESICOVITSCH und ich haben übrigens alle Klassen L^p, wo p eine beliebige Zahl $\geqq 1$ ist, untersucht.

In der Theorie der *reinperiodischen* Funktionen der Klasse L, wo es sich um ein *endliches* Intervall handelt, wird bekanntlich der folgende Limesbegriff zugrunde gelegt: Es soll $\lim f_n(x) = f(x)$ bedeuten, dass der Mittelwert

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,dx$$

für $n \to \infty$ gegen 0 strebt. Oder anders ausgedrückt, indem wir in der bekannten Weise einen Entfernungsbegriff zweier Funktionen einführen: Es wird die Entfernung (Distanz) von $f(x)$ und $g(x)$ durch

$$D[f(x),\, g(x)] = \frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

definiert, und danach der Limesbegriff $\lim f_n(x) = f(x)$ durch

$$D[f(x),\, f_n(x)] \to 0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

erklärt.

In der Theorie der *fastperiodischen* Funktionen handelt es sich prinzipiell um ein *unendliches* Intervall $-\infty < x < \infty$. Wenn man den obigen Limesbegriff, oder besser den obigen Entfernungsbegriff, von einem endlichen auf ein unendliches Intervall übertragen wünscht, wir man vor die Wahl mehrerer verschiedenen Möglichkeiten gestellt, von denen jede ihre besondere Eigenthümlichkeiten und ihr besonderes Interesse darbietet. Wir führen drei solche Entfernungsbegriffe ein, die wir mit $D_S[f(x), g(x)]$, $D_B[f(x), g(x)]$ und $D_W[f(x), g(x)]$ bezeichnen, weil sie auf das engste mit den Verallgemeinerungen der fastperiodischen Funktionen von STEPANOFF, BESICOVITSCH und WEYL verknüpft sind.

Der *Stepanoffsche Entfernungsbegriff* ist durch

$$D_S[f(x),\, g(x)] = \underset{-\infty<x<\infty}{\text{Ob. Gr.}}\ \frac{1}{L}\int_x^{x+L} |f(\xi)-g(\xi)|\,d\xi$$

gegeben. Hierbei ist L eine feste positive Zahl; ihr Wert ist gleichgültig (sie kann z. B. gleich 1 angenommen werden), weil der Grenzbegriff, welcher durch diesen Entfernungsbegriff festgelegt wird, wie leicht zu sehen, von dem speziellen Werte von L nicht abhängt.

Bei dem *Besicovitchschen Entfernungsbegriff* wird der Mittelwert sogleich über das ganze Intervall $-\infty < x < \infty$ erstreckt:

$$D_B[f(x),\, g(x)] = \limsup_{\tau \to \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |\, f(x) - g(x) \,|\, dx.$$

Der *Weylsche Entfernungsbegriff* ist schliesslich ein « Mitteldding » zwischen den beiden obigen; es wird hier zunächst, wie bei STEPANOFF, eine feste Länge L betrachtet, die man aber danach über alle Grenzen wachsen lässt:

$$D_W[f(x),\, g(x)] = \lim_{L \to \infty} \underset{-\infty < x < \infty}{\text{Ob. Gr.}} \frac{1}{L} \int_{x}^{x+L} |\, f(\xi) - g(\xi) \,|\, d\xi.$$

Bei jedem der drei Entfernungsbegriffe wird der entsprechende Limesbegriff

$$S-\lim f_n(x) = f(x), \qquad B-\lim f_n(x) = f(x), \qquad W-\lim f_n(x) = f(x)$$

durch die Relation

$$D_S[f(x),\, f_n(x)] \to 0, \qquad D_B[f(x),\, f_n(x)] \to 0, \qquad D_W[f(x),\, f_n(x)] \to 0$$

erklärt. Und jedesmal wird mit Hülfe des zugrundelegten Limesbegriffes die abgeschlossene Hülle der Menge E gebildet, also beziehungsweise

$$H_S(E), \qquad H_B(E), \qquad H_W(E).$$

Hierbei ist, wie leicht zu sehen

$$H_S(E) < H_W(E) < H_B(E).$$

Unsere Aufgabe ist nun, die somit definierten drei Funktionenklassen

$$H_S(E), \qquad H_B(E), \qquad H_W(E)$$

durch Periodizitätseigenschaften zu charakterisieren, also genau dieselbe Aufgabe, welche für die mit Hülfe gleichmässiger Konvergenz abgeschlossene Hülle $H(E)$ durch die Gleichung

$$H(E) = F$$

gelöst wurde.

Durch eine äusserst einfache, aber prinzipiell wichtige Betrachtung führen BESICOVITCH und ich dieses Problem auf das entsprechende, durch die Gleichung $H(E) = F$ gelöste Problem in der ursprünglichen Theorie zurück. Indem wir die Tatsache berücksichtigen, dass die gleichmässige Konvergenz der engste aller betrachteten Grenzprozesse ist — d. h. dass die mit Hilfe gleichmässiger Konvergenz abgeschlossene Hülle $H(E)$ die engste aller Hüllen $H(E)$ ist — können wir nämlich den Approximationsatz der ursprünglichen Theorie beim Aufbau der verallgemeinerten Theorien als fertiges Resultat benutzen, ohne auf den Beweis dieses Satzes zurüchzukommen. Aus der Ungleichung

$$E < H(E) < H_G(E),$$

wo G irgendeinen der drei obigen Grenzprozesse, $S-$, $B-$, oder $W-$lim bedeutet, folgt nämlich unmittelbar

$$H_G(E) = H_G(H(E)),$$

also wegen $H(E) = F$,

$$H_G(E) = H_G(F).$$

Hiermit ist aber gezeigt, *dass das Problem der fastperiodischen Charakterisierung der Funktionenklasse* $\mathrm{H_G(E)}$ *einfach damit gleichbedeutend ist, die Wirkung zu untersuchen, welche der betrachtete Grenzprozess* G *hervorbringt, wenn er auf die eigentlichen fastperiodischen Funktionen der ursprünglichen Klasse* F *ausgeübt wird.* Wir brauchen uns also gar nicht mehr mit der Klasse E, d. h. mit der Theorie der Schwingungen zu befassen; die Verbindung zwischen Schwingungen und Periodizitätseigenschaften ist ein für allemal durch die ursprüngliche Gleichung $F = H(E)$ zustande gebracht; was zu untersuchen übrig bleibt, hat nur noch mit reinen Verschiebungseigenschaften zu tun.

Mit diesen kurzen Andeutungen muss ich mich leider hier begnügen. Was die nähere Ausbildung der Methoden sowie die (zum Theil schon durch die frühere Literatur bekannten) Resultate anbelangt, muss ich auf eine demnächst erscheinende ausführliche Arbeit von BESICOVITCH und mir in den Acta Mathematica verweisen. Es soll hier nur noch erwähnt werden, dass auch bei den verallgemeinerten fasperiodischen Funktionen die Fourierreihen in dem Mittelpunkt der Betrachtungen steht, und dass der oben erwähnte Bochnersche Summationssatz sich auf alle die von BESICOVITCH und mir untersuchten verallgemeinerten Funktionenklassen übertragen lässt; er führt bei jeder dieser Verallgemeinerungen zu Exponentialpolynomen der gewünschten Art, d. h. zu solchen, die gegen die Funktion im Sinne des gerade zugrunde gelegten Entfernungsbegriffes konvergieren.

A. WALTHER (Darmstadt - Germania)

FASTPERIODISCHE FOLGEN UND IHRE FOURIERSCHE ANALYSE

Eine Art Seitenstück zu Harald Bohrs fastperiodischen Funktionen bilden die *fastperiodischen Folgen*. Von ihnen soll hier die Rede sein.

Eine beiderseits endlose Folge ...., $a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2$,.... von reellen oder komplexen Zahlen heisst *fastperiodisch*, wenn sie bei Abänderung aller Indizes um gewisse, nicht zu dünn gesäte *Verschiebungsindizes* t « beinahe » in sich übergeht, genauer: wenn zu beliebig vorgegebenem positivem ε unter einer von ε abhängigen Anzahl $l=l(\varepsilon)$ aufeinanderfolgender Indizes immer wenigstens ein zu ε gehöriger Verschiebungsindex $t=t(\varepsilon)$ vorkommt, der für alle ν

$$|a_{\nu+t}-a_\nu|\leqq\varepsilon \quad \text{macht.}$$

Dass wir die Folge beiderseits endlos annehmen, ist keine Einschränkung der Allgemeinheit, weil sich z. B. eine nur nach rechts ins Unendliche fortlaufende Folge a_0, a_1, a_2,.... mit entsprechender Fastperiodizitätsforderung leicht zu einer fastperiodischen Folge in unserem Sinne ergänzen lässt.

Fastperiodische Folgen sind *beschränkt*, d. h. es bleibt $|a_\nu|\leqq G$ für alle ν und festes G. Ferner sind die elementaren Rechenoperationen der *gliedweisen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division* zweier fastperiodischer Folgen a_ν und b_ν ($\nu=0, \pm 1, \pm 2$,....) erlaubt und liefern wieder eine fastperiodische Folge — bei der Division darf allerdings die Nennerfolge nicht beliebig nahe an 0 herankommen, sondern muss eine von 0 verschiedene untere Grenze für die Absolutbeträge ihrer Glieder haben. Schliesslich ergeben die *Absolutbeträge* der Zahlen einer fastperiodischen Folge wieder eine fastperiodische Folge.

Die Beweise für diese Tatsachen verlaufen nach dem Muster Bohrscher Überlegungen für fastperiodische Funktionen; die — allein tieferliegende — Untersuchung der gliedweisen Addition zweier fastperiodischer Folgen gestaltet sich sogar etwas einfacher als die entsprechende Untersuchung für die Summe zweier fastperiodischer Funktionen, weil man die nötigen Schubfachbetrachtungen von vornherein für ganze Zahlen statt für Intervalle anstellen kann.

Ausser dieser mehr formalen Analogie besteht aber noch eine weit bedeutsamere *wechselseitige Beziehung zwischen fastperiodischen Folgen und Funktionen.*

Einerseits können wir nämlich *von der Funktion zur Folge* gehen durch die Bemerkung, dass die Werte $a_\nu = f(x_0 + \nu\omega)$ einer Bohrschen fastperiodischen Funktion $f(x)$ für äquidistante, von x_0 aus mit der « Spanne » ω aufgereihte Argumente $x_0 + \nu\omega$ $(\nu = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ eine fastperiodische Folge bilden. Denn nach Bohr finden sich in jedem Intervall einer passenden, von ε und ω abhängigen Länge Verschiebungszahlen (Fastperioden) $\tau = \tau(\varepsilon)$ für $f(x)$, welche Vielfache $t\omega$ von ω sind; die Faktoren t eignen sich als Verschiebungsindizes für die Folge der a_ν. (Insbesondere liefern die Werte $e^{i\lambda(x_0+\nu\omega)}$ der Exponentialfunktion $e^{i\lambda x}$ mit reellem λ eine fastperiodische Folge).

Andererseits öffnet sich der Weg *von der Folge zur Funktion* durch *lineares Interpolieren.* Wir tragen die Zahlen a_ν als Ordinaten zu den ganzen Zahlen ν als Abszissen auf und verbinden geradlinig; der entstehende Streckenzug definiert eine Bohrsche fastperiodische Funktion $f(x)$ mit $f(\nu) = a_\nu$ für die ganzen Zahlen $x = \nu$ und mit den Verschiebungsindizes t der a_ν als Verschiebungszahlen. Es ist ja

$$f(x) = a_\nu + \vartheta(a_{\nu+1} - a_\nu) \quad \text{für } x = \nu + \vartheta \text{ mit } 0 \leqq \vartheta \leqq 1$$

und bei ganzzahligem t

$$f(x+t) = a_{\nu+t} + \vartheta(a_{\nu+t+1} - a_{\nu+t}).$$

Somit

$$f(x+t) - f(x) = \vartheta(a_{\nu+t+1} - a_{\nu+1}) + (1-\vartheta)(a_{\nu+t} - a_\nu)$$

und, wenn t ein Verschiebungsindex der a_ν, also $|a_{\nu+t} - a_\nu| \leqq \varepsilon$ für alle ν ist,

$$|f(x+t) - f(x)| \leqq \vartheta\varepsilon + (1-\vartheta)\varepsilon = \varepsilon.$$

Sind die a_ν von vornherein als Werte $f(\nu) = f(x_0 + \nu\omega)$ mit $x_0 = 0$ und $\omega = 1$ einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ gegeben, so wird die geradlinig interpolierende fastperiodische Funktion in der Regel nicht mit der Ausgangsfunktion übereinstimmen. Es lohnt sich vielleicht, diese Andeutung weiterzuverfolgen. Denn z. B. bei beschränkten Fourierexponenten der Ausgangsfunktion ist diese durchweg beliebig oft differenzierbar, also sicher von der Interpolationsfunktion mit ihrer gebrochenen Kurve verschieden; andererseits erweist sich eine fastperiodische Funktion mit beschränkten Fourierexponenten vom Absolutbetrage $< \pi$ als völlig bestimmt durch ihre Werte in den ganzen Zahlen.

Wie nützlich die Übergänge von der Funktion zur Folge und umgekehrt sind, möchte ich an drei Dingen erläutern, die ich durch die Schlagworte:

1. *Summatorische Folge und Differenzengleichung;* (1)
2. *Mittelwert und Potenzreihe mit fastperiodischen Koeffizienten;* (2)

---

(1) Vgl. A. WALTHER. *Über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite.* Gött. Nachr. 1927, S. 196-216.

(2) Vgl. A. WALTHER. *Fastperiodische Folgen und Potenzreihen mit fastperiodischen Koeffizienten.* Abh. Math. Sem. Hamburg 6 (1928), S. 217-234.

3. *Fouriersche Analyse und Vollständigkeitsrelation*

kennzeichne; gleichzeitig setze ich dabei die Aufzählung der Eigenschaften fastperiodischer Folgen fort.

1. - Die *summatorische Folge*

$$A_n=\sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu \text{ für } n=1, 2,\dots; \; A_0=0; \; A_n=-\sum_{\nu=n}^{-1} a_\nu \text{ für } n=-1, -2,\dots$$

$$(\Delta A_n=A_{n+1}-A_n=a_n)$$

einer fastperiodischen Folge a_ν ist, wie man in Parallele zum Satze von Bohr über die Integration einer fastperiodischen Funktion beweist, ***genau dann wieder fastperiodisch, wenn sie beschränkt bleibt.***

Dieses Ergebnis ermöglicht z. B. für die aus einer stetigen reinperiodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode 1 herausgezogene fastperiodische Folge $f(\nu\omega)$ bei irrationalem ω eine Verschärfung gewisser Aussagen über die Gleichverteilung der Vielfachen $\nu\omega$ von ω mod 1: die bekannte Summe $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu\omega)$, welche durch n dividiert für $n\to\infty$ gegen $\int_0^1 f(x)dx$ strebt, wird bei Voraussetzung ihrer Beschränktheit durch nicht zu spärlich aufeinanderfolgende obere Summationsgrenzen beliebig nahe an 0 herangebracht.

In unserem Zusammenhange noch wesentlicher ist der Gebrauch des Satzes von der summatorischen Folge beim Studium der *Differenzengleichung*

$$\underset{\omega}{\Delta} F(x)=\frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega}=f(x) \tag{1}$$

des « Summationsproblems »: Nörlundsche Differenz $\underset{\omega}{\Delta} F(x)$ einer gesuchten Funktion $F(x)$ gleich einer gegebenen Funktion $f(x)$, also des « finiten » Gegenstückes zur Differentialgleichung $F'(x)=f(x)$ des Integrationsproblems: Ableitung $F'(x)$ von $F(x)$ gleich $f(x)$. Bekanntlich verschafft man sich in der allgemeinen Theorie durch Aufschreiben der Gleichung (1) für $x=x_0,\ x_0+\omega,\dots,\ x_0+(n-1)\omega$ und Aufaddieren zunächst die Beziehung

$$F(x_0+n\omega)-F(x_0)=\omega\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_0+\nu\omega).$$

Bei fastperiodischem $f(x)$ werden wir demnach geradezu zwangsläufig auf die fastperiodische Folge $f(x_0+\nu\omega)$ und ihre summatorische Folge $\sum_{\nu=0}^{n-1} f(x_0+\nu\omega)$ geführt. Zum anderen erscheint links gerade die Differenz $F(x_0+n\omega)-F(x_0)$, deren Kleinwerden über die allenfalls vorhandene Fastperiodizität einer aus der Lösung $F(x)$ herausgegriffenen Folge $F(x_0+\nu\omega)$ entscheidet. In der Tat verknüpft auch die Differenzengleichung (1) die Werte von $F(x)$ an sich nur für die Punkte einer äquidistanten Punktfolge $x_0+\nu\omega$ mit festem x_0, während die Werte auf den Punktfolgen für verschiedene x_0 unmittelbar nichts miteinander zu tun haben und erst z. B. durch die Forderung der Stetigkeit von $F(x)$ zusammengeschweisst werden.

Man spielt also die naturgemäss zu stellende Frage nach der Fastperiodizität von $F(x)$ in (1) bei gegebenem fastperiodischem $f(x)$ zunächst auf die Frage nach der Fastperiodizität der summatorischen Folge einer fastperiodischen Folge hinaus. Für diese ist, wie gesagt, die Beschränktheit der summatorischen Folge hinreichend und notwendig. Fordern wir die Beschränktheit der ganzen Lösung $F(x)$, so kann also jedenfalls Fastperiodizität aller aus ihr entstammenden Folgen $F(x_0+\nu\omega)$ bei beliebigem x_0 erwartet werden. Nehmen wir noch die Forderung der gleichmässigen Stetigkeit von $F(x)$ hinzu, so fügen sich wunschgemäss alle fastperiodischen Folgen $F(x_0+\nu\omega)$ zu einer fastperiodischen Funktion $F(x)$, welche ja stetig, sogar gleichmässig stetig sein muss, zusammen, und wir haben den Satz:

Für die Fastperiodizität einer gleichmässig stetigen Lösung $F(x)$ der Differenzengleichung (1) *mit fastperiodischem $f(x)$ ist notwendig und hinreichend, dass $F(x)$ beschränkt bleibt.*

Bei zweimal differenzierbarem $f(x)$ mit fastperiodischer zweiter Ableitung darf übrigens das Wort « gleichmässig » fortgelassen werden, ebenso bei beschränkten Fourierexponenten Λ_s von $f(x)$ mit $|\Lambda_s|<K$ für genügend kleines ω, nämlich für $|\omega|<\frac{2\pi}{K}$. Auch lassen sich über die Fourierreihe der Lösung $F(x)$ und über den Grenzübergang $\omega\to 0$ interessante Angaben machen.

2. - Ähnlich wie bei einer fastperiodischen Funktion $f(x)$ der Mittelwert

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$$

stets vorhanden ist, existiert auch für eine fastperiodische Folge $a_\nu(\nu=0,\pm1,\pm2,...)$ der *Mittelwert*

$$\mathfrak{M}\{a_\nu\}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu$$

der Zahlen a_0, a_1, a_2,...., ebenso (und genau so gross) der Mittelwert, bei dem die Summe statt von 0 bis $n-1$ über irgendwelche n aufeinanderfolgende (z. B. negative) Indizes erstreckt wird.

Angewandt auf die fastperiodische Produktfolge $a_\nu e^{-i\nu\varphi}$ bildet dieser Existenzsatz den Ausgangspunkt für die Fouriersche Analyse fastperiodischer Folgen vermittels Exponentialfolgen; darauf kommen wir unter 3. zu sprechen.

Denken wir uns die a_ν als Werte $f(x_0+\nu\omega)$ einer Bohrschen fastperiodischen Funktion $f(x)$, so erhebt sich die Frage nach dem gegenseitigen Verhältnis des

« stetigen » Bohrschen Mittelwertes $M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$, welcher den Gesamtverlauf von $f(x)$ berücksichtigt und durch Nichtverschwinden für $\lambda = \Lambda_s$ die Fourierkoeffizienten A_s in $f(x) \sim \sum A_s e^{i\Lambda_s x}$ festlegt, und des « unstetigen » Mittelwertes $\mathfrak{M}\{f(x_0+\nu\omega)e^{-i\lambda(x_0+\nu\omega)}\}$, in welchen nur abzählbar viele Werte von $f(x)$ für äquidistante x eingehen.

Kommen zunächst unter den Fourierexponenten Λ_s von $f(x)$ keine zwei um ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{2\pi}{\omega}$ unterschiedenen (mod $\frac{2\pi}{\omega}$ *kongruenten*) *vor, so stimmen für $\lambda \not\equiv$ allen Λ_s* $\left(\text{mod } \frac{2\pi}{\omega}\right)$ *und für $\lambda = \Lambda_s$ « unstetiger » und « stetiger » Mittelwert überein: $\mathfrak{M}$ verschwindet unabhängig von x_0 für $\lambda \not\equiv \Lambda_s$ und ist für $\lambda = \Lambda_s$ gleich dem Fourierkoeffizienten A_s zu Λ_s. Hingegen zeigt sich für $\lambda \equiv \Lambda_s$* $\left(\text{mod } \frac{2\pi}{\omega}\right)$, *$\lambda \neq \Lambda_s$ eine Abweichung; ist etwa $\lambda = \Lambda_s + k\frac{2\pi}{\omega}$* ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$), *so wird $\mathfrak{M}$ gleich A_s multipliziert mit $e^{-ik\frac{2\pi}{\omega}x_0}$.* In Formeln

$$(2)\qquad \mathfrak{M}\{f(x_0+\nu\omega)e^{-i\lambda(x_0+\nu\omega)}\} = \begin{cases} M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \not\equiv \text{allen } \Lambda_s \left(\text{mod } \frac{2\pi}{\omega}\right), \\ A_s \text{ für } \lambda = \Lambda_s, \end{cases} \\ A_s e^{-ik\frac{2\pi}{\omega}x_0} \text{ für } \lambda = \Lambda_s + k\frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Hieraus geht hervor, dass *bei* mod $\frac{2\pi}{\omega}$ *inkongruenten Fourierexponenten Λ_s* diese und die Fourierkoeffizienten A_s, damit auch die *fastperiodische Funktion $f(x)$ « im wesentlichen » schon durch die Werte von $f(x)$ auf einer äquidistanten Punktfolge $x_0, x_0+\omega, x_0+2\omega, \ldots$ festgelegt* sind. Bei Beschränktheit der Fourierexponenten, etwa bei $|\Lambda_s| < K$, können wir uns sogar (wie bereits früher erwähnt) für genügend kleines ω, nämlich für $|\omega| < \frac{\pi}{K}$, das lästige « im wesentlichen » sparen. *Bei beliebigen* (aber immer noch mod $\frac{2\pi}{\omega}$ inkongruenten) *Fourierexponenten* lässt sich die *vollständige Bestimmtheit* dadurch erzielen, dass man die *Werte von $f(x)$ auf einer zweiten äquidistanten Punktfolge $x_0', x_0'+\omega, x_0'+2\omega, \ldots$ mit einer zu ω inkommensurablen Differenz $x_0' - x_0$ hinzunimmt.*

Bequemer schreibt man statt (2)

$$(3)\qquad \mathfrak{M}\{f(x_0+\nu\omega)e^{-i\lambda\nu\omega}\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \not\equiv \text{allen } \Lambda_s \left(\text{mod } \frac{2\pi}{\omega}\right), \\ A_s e^{i\Lambda_s x_0} \text{ für } \lambda \equiv \Lambda_s \left(\text{mod } \frac{2\pi}{\omega}\right): \end{cases}$$

Jenachdem λ mod $\frac{2\pi}{\omega}$ *keinem Fourierexponenten von $f(x)$ oder dem Fourierexponenten Λ_s kongruent ist, verschwindet der Mittelwert* (3) *oder liefert das zu Λ_s gehörige Glied $A_s e^{i\Lambda_s x_0}$ der Fourierentwicklung von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$.*

Trifft unsere Voraussetzung der Inkongruenz aller Fourierexponenten mod $\frac{2\pi}{\omega}$ nicht zu, so erscheint in (3) *für ein λ, das einer Gruppe von endlich vielen* *untereinander kongruenten Fourierexponenten kongruent ist,* statt des bisherigen Einzelgliedes $A_s e^{i\Lambda_s x_0}$ die *Summe* $\sum A_k e^{i\Lambda_k x_0}$ *aus den Gliedern der Fourierreihe von* $f(x)$ *mit diesen kongruenten Fourierexponenten.* Sogar, wenn die *Gruppe unendlich viele kongruente Fourierexponenten* umfasst, bleibt es bei zweckmässiger Ausdeutung so: Die alsdann auftretende *Summe* $\sum A_k e^{i\Lambda_k x_0}$ bzw. $\sum A_k e^{i\Lambda_k x}$ *von unendlich vielen Gliedern der Fourierreihe bestimmt,* selbst als Fourierreihe aufgefasst, nach Bochner *als zugehörige Funktion das Produkt* $e^{i\Lambda x}g(x)$ *einer Exponentialfunktion* $e^{i\Lambda x}$ *und einer stetigen reinperiodischen Funktion* $g(x)$ *mit der Periode* ω. Der Mittelwert (3) beträgt daher in diesem Falle $e^{i\Lambda x_0}g(x_0)$.

Die Ergebnisse gestatten, recht genau zu beschreiben, wie sich die im Einheitskreise $|z|<1$ konvergente *Potenzreihe*

$$F(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} f(x_0+\nu\omega)z^{\nu} \tag{4}$$

mit fastperiodischem $f(x)$, festem x_0 und ω bei Annäherung an den Konvergenzkreis von innen her verhält. Allgemein zieht bei einer für $|z|<1$ konvergenten Potenzreihe $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu z^\nu$ das Vorhandensein des Mittelwertes $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{\nu=0}^{n-1} c_\nu = c$ die Gleichung $\lim\limits_{r\to 1-0}(1-r)\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} c_\nu r^\nu = c$ nach sich. Daher wird durch die Beziehung (3) samt ihren Ergänzungen die Frage nach Existenz und Grösse des Grenzwertes

$$\lim_{r\to 1-0}(1-r)F(re^{-i\lambda\omega}) \tag{5}$$

für die « *erzeugende Funktion* » (4) der fastperiodischen Folge $f(x_0+\nu\omega)$ bei radialer Annäherung an den Punkt $z=e^{-i\lambda\omega}$ auf dem Einheitskreise erledigt: *Der Grenzwert* (5) *ist gleich* 0, *wenn der Punkt* $e^{-i\lambda\omega}$ *in keinen der Punkte* $e^{-i\Lambda_s\omega}$ *für einen Fourierexponenten* Λ_s *von* $f(x)$ *fällt, hingegen gleich dem Gliede* $A_s e^{i\Lambda_s x_0}$ *der Fourierentwicklung von* $f(x)$ *an der Stelle* $x=x_0$ *oder gleich einer Summe* $\sum A_k e^{i\Lambda_k x_0}$ *solcher Glieder, wenn es sich um den Punkt* $e^{-i\Lambda_s\omega}$ *für einen Fourierexponenten* Λ_s *oder für eine Gruppe* mod $\frac{2\pi}{\omega}$ *kongruenter* (zum selben Punkte führender) *Fourierexponenten* Λ_k *handelt; eine Summe* $\sum A_k e^{i\Lambda_k x_0}$ *von unendlich vielen* $A_k e^{i\Lambda_k x_0}$ *mit* mod $\frac{2\pi}{\omega}$ *kongruenten* Λ_k *ist dabei wie vorhin zu* $e^{i\Lambda x_0}g(x_0)$ *zusammenzuziehen.*

Liegen die Λ_s überall dicht mod $\frac{2\pi}{\omega}$ (z. B. für stetiges reinperiodisches $f(x)$ von der Periode 1 bei irrationalem ω), so hat die erzeugende Funktion (4) den Einheitskreis zur natürlichen Grenze.

3. - Die *Fouriersche Analyse* einer fastperiodischen Folge a_ν ($\nu=0,\pm1,\pm2,\dots$) vermittels Exponentialfolgen $e^{i\nu\varphi}$ besteht darin, die Zahlen a_ν in passender Weise

durch eine lineare Verbindung $\sum_{m=1}^{M} b_m e^{i\nu\varphi_m}$ von Zahlen $e^{i\nu\varphi_m}$ $(m=1, 2, \ldots, M)$ anzunähern, wobei die φ_m (der neue Buchstabe φ statt λ zur Vermeidung von Verwechslungen) untereinander verschiedene reelle, die b_m beliebige komplexe Zahlen sein sollen. Wir wollen fordern, dass das « mittlere Fehlerquadrat »

$$\mu^2 = \mathfrak{M}\{|a_\nu - \sum_{m=1}^{M} b_m e^{i\nu\varphi_m}|^2\}$$

(in der geschweiften Klammer steht eine fastperiodische Folge) möglichst klein ausfällt. Es ist zu vermuten, dass analog zum Bohrschen Mittelwerte

$$M\{f(x)e^{-i\lambda x}\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)e^{-i\lambda x}dx,$$

der durch Nichtverschwinden die Fourierexponenten $\lambda = \Lambda_s$ von $f(x)$ kennzeichnet und alsdann die Fourierkoeffizienten A_s liefert, hier der Mittelwert

$$\mathfrak{M}\{a_\nu e^{-i\nu\varphi}\} = a(\varphi)$$

eine Rolle spielen wird. Wirklich rechnet man leicht aus

$$\mu^2 = \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} - \sum_{m=1}^{M} |a(\varphi_m)|^2 + \sum_{m=1}^{M} |b_m - a(\varphi_m)|^2,$$

vorausgesetzt allerdings, dass $\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2} \equiv 0 \pmod{2\pi}$ nur für $\varphi_{m_1} - \varphi_{m_2} = 0$, d. h. für $m_1 = m_2$ werden kann, dass also *keine zwei* φ_m *kongruent* mod 2π sind (sonst würden ja auch die Zahlen $e^{i\nu\varphi_{m_1}}$ durchweg gleich den Zahlen $e^{i\nu\varphi_{m_2}}$ sein). Unter dieser Einschränkung, der sich z. B. dadurch genügen lässt, dass man die φ_m in das Intervall $0 \leqq \varphi_m < 2\pi$ einsperrt, tritt das kleinste mittlere Fehlerquadrat und damit die beste Annäherung offenbar für $b_m = a(\varphi_m)$ ein. Dann wird

kleinstes $$\mu^2 = \mathfrak{M}\{|a_\nu - \sum_{m=1}^{M} a(\varphi_m)e^{i\nu\varphi_m}|^2\} = \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} - \sum_{m=1}^{M} |a(\varphi_m)|^2$$

und, weil hierin die linke Seite nichtnegativ ist,

$$\sum_{m=1}^{M} |a(\varphi_m)|^2 \leqq \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\}.$$

Diese Ungleichung lehrt, dass es *höchstens abzählbar unendlich viele, voneinander nicht um ganzzahlige Vielfache von* 2π *unterschiedene* φ *mit* $a(\varphi) \neq 0$ geben kann. Diese φ in irgendeiner Anordnung sollen die *Fourierexponenten* oder *Eigenwinkel* $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, die zugehörigen

$$a(\Phi_1) = \mathfrak{M}\{a_\nu e^{-i\nu\Phi_1}\} = \mathrm{A}_1, \quad a(\Phi_2) = \mathfrak{M}\{a_\nu e^{-i\nu\Phi_2}\} = \mathrm{A}_2, \ldots$$

die *Fourierkoeffizienten* oder *Eigenwerte* (bzw. *charakteristischen Zahlen*) der fastperiodischen Folge a_ν heissen. Aus der « *Besselschen Ungleichung* »

$$(6) \qquad \sum_{m=1}^{M} |\mathrm{A}_m|^2 \leqq \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\}$$

erschliessen wir die *Konvergenz der Reihe* $\sum_{m=1}^{\infty}|\mathrm{A}_m|^2$ *aus den Quadraten der Absolutbeträge der Fourierkoeffizienten* A_m.

Gilt bei Berücksichtigung aller Fourierexponenten Φ_m in der Besselschen Ungleichung das Gleichheitszeichen, besteht also die *Vollständigkeitsrelation* (Parsevalsche Gleichung)

$$(7) \qquad \sum_{m=1}^{\infty}|\mathrm{A}_m|^2 = \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} \text{ bzw. } \mathfrak{M}\{|a_\nu - \sum \mathrm{A}_m e^{i\nu\Phi_m}|^2\} = 0,$$

sodass a_ν « im Mittel » durch $\sum \mathrm{A}_m e^{i\nu\Phi_m}$ genau dargestellt wird? In ihrer Göttinger Dissertation greift Frl. Inge Seynsche diese Frage mit bejahender Antwort unmittelbar an durch Untersuchung gewisser unendlicher Gleichungssysteme, genauer « finiter » Mittelwertgleichungen, welche den Integralgleichungen bzw. Integralmittelwertgleichungen im Weylschen Ansatze für den Beweis der Vollständigkeitsrelation (des Bohrschen Fundamentalsatzes) bei der Fourierreihe fastperiodischer Funktionen entsprechen. Hier soll der Beweis unter Heranziehung des Zusammenhanges der fastperiodischen Folgen mit fastperiodischen Funktionen und gestützt auf deren Theorie erbracht werden.

Wir denken uns die a_ν als Werte $f(\nu)$ einer z. B. durch lineares Interpolieren gewonnenen Bohrschen fastperiodischen Funktion $f(x) \sim \sum A_s e^{i\Lambda_s x}$ mit den Fourierexponenten Λ_s und den Fourierkoeffizienten A_s. Man nehme in (3) und in den Zusatzbemerkungen zu (3) $x_0 = 0$, $\omega = 1$ und erhält

$$(8) \qquad \mathfrak{M}\{a_\nu e^{-i\lambda\nu}\} = \begin{cases} 0 \text{ für } \lambda \not\equiv \text{allen } \Lambda_s, \\ A_s \text{ für } \lambda \equiv \text{einem einzelnstehenden } \Lambda_s, \\ \sum A_k \text{ für } \lambda \equiv \text{einer Gruppe endlich vieler kongruenter } \Lambda_k, \\ g(0) \sim \sum A_k \text{ für } \lambda \equiv \text{einer Gruppe unendlich vieler kongruenter } \Lambda_k; \end{cases}$$

dabei sind die Kongruenzen mod 2π zu verstehen, und $g(x)$ bedeutet die stetige reinperiodische Funktion von der Periode 1, deren Fourierentwicklung bis auf einen Exponentialfaktor $e^{i\Lambda x}$ gerade $\sum A_k e^{i\Lambda_k x}$ mit der Gruppe unendlich vieler mod 2π kongruenter Fourierexponenten lautet.

Zu den Fourierexponenten Φ_m *der fastperiodischen Folge* a_ν *kommt man hiernach, wenn man aus jeder Gruppe* mod 2π *kongruenter Fourierexponenten* Λ_s *der zugeordneten fastperiodischen Funktion* $f(x)$ *je einen Vertreter* (oder eine zu ihm mod 2π kongruente, etwa im Intervall 0 einschl. bis 2π ausschl. gelegene Zahl) *herausgreift*. Nie sind zwei Fourierexponenten der Folge einander mod 2π kongruent; diese « Eindeutigkeit » erweist sich oft als sehr angenehm. Die *Fourierkoeffizienten* werden

$$\begin{aligned}
&\mathrm{A}_m = A_s, \text{ wenn } \Phi_m \text{ nur einem einzigen } \Lambda_s \text{ kongruent ist,}\\
(9)\quad &\mathrm{A}_m = \sum A_k, \text{ wenn } \Phi_m \text{ einer endlichen Gruppe kongruenter } \Lambda_k \text{ kongruent ist,}\\
&\mathrm{A}_m = g(0) \sim \sum A_k, \text{ wenn } \Phi_m \text{ einer unendlichen Gruppe kongruenter } \Lambda_k \text{ kongruent ist.}
\end{aligned}$$

In der gewünschten Vollständigkeitsrelation $\sum |\mathrm{A}_m|^2 = \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\}$ kann die Summe auf der linken Seite nach (9) zurückgeführt werden auf die Fourierkoeffizienten A_s von $f(x)$, während der rechtsstehende Mittelwert der fastperiodischen Folge $|a_\nu|^2 = |f(\nu)|^2$ nach der Gleichung (3) mit ihren Ergänzungen bzw. nach (8) gleich ist der Summe aller Fourierkoeffizienten für die fastperiodische Funktion $|f(x)|^2$ zu Fourierexponenten $\equiv 0 \pmod{2\pi}$. Nach dem Multiplikationssatze aus der Theorie der fastperiodischen Funktionen ist

$$|f(x)|^2 = f(x)\bar{f}(x) \sim \sum A_s e^{i\Lambda_s x} \sum \bar{A}_t e^{-i\Lambda_t x} \sim \sum B_r e^{iM_r x}.$$

Hierin durchläuft M_r alle Zahlen der Form $\Lambda_s - \Lambda_t$, und der Koeffizient B_r hat den Wert $\sum A_s \bar{A}_t$, wobei die Summe sich über alle s und t zu $\Lambda_s - \Lambda_t = M_r$ erstreckt und absolut konvergiert. Also

$$(10)\qquad \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} = \sum B_n = \sum\left(\sum A_s \bar{A}_t\right)$$

mit den B_n, für welche der Fourierexponent M_n ein Vielfaches von 2π ist, bzw. mit einer inneren Summe, für welche $\Lambda_s - \Lambda_t$ gleich einem festen Vielfachen von 2π ist, und nachträglicher äusserer Summation über alle vorkommenden Vielfachen von 2π.

Unterscheiden sich nun *erstens* niemals zwei Λ_s von $f(x)$ untereinander um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, so kann $\Lambda_s - \Lambda_t$ keinem anderen Vielfachen von 2π gleich werden als 0, und das nur für $\Lambda_s - \Lambda_t = 0$ oder $s = t$. Die Summe $\sum B_n$ aller Fourierkoeffizienten von $|f(x)|^2$ mit Fourierexponenten $\equiv 0$ (mod 2π) schrumpft also zu B_0 für den Fourierexponenten 0 zusammen, und dieses B_0 ist gleich $\sum |A_s|^2$; daher

$$\mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} = \sum |A_s|^2.$$

Ebenso gross ist aber, weil für lauter inkongruente Fourierexponenten von $f(x)$ als die A_m alle einzelnen A_s erscheinen, $\sum |\mathrm{A}_m|^2$, und die Vollständigkeitsrelation (7) ist bewiesen. Uebrigens ist der gemeinsame Wert von $\mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\}$ und $\sum |\mathrm{A}_m|^2$ hier $\sum |A_s|^2 = M\{|f(x)|^2\}$, d. h. die bei der Vollständigkeitsrelation für die fastperiodische Funktion $f(x)$ in Frage kommende Grösse.

Gibt es *zweitens* endliche Gruppen kongruenter Fourierexponenten, so konvergiert $\sum |\mathrm{A}_m|^2$ nach der Besselschen Ungleichung (6) und kann, indem man jedes A_m nach (9) in die Summe $\sum A_k$ der Fourierkoeffizienten von $f(x)$ für die betreffende endliche Exponentengruppe auflöst, folgendermassen dargestellt werden:

(11) $$\sum |\mathrm{A}_m|^2 = \sum \Big| \sum A_k \Big|^2 = \sum\Big(\sum A_k \bar{A}_l\Big).$$

Die innere Summe berücksichtigt die Fourierkoeffizienten für eine feste Gruppe mod 2π kongruenter Fourierexponenten von $f(x)$; die äussere Summe läuft über die verschiedenen Gruppen. Erlaubte Umordnung führt von (10), wo nach der Grösse der verschiedenen Vielfachen von 2π geordnet ist, zu (11); wiederum zeigt sich die Vollständigkeitsrelation (7) als richtig.

Drittens lässt sich bei einer Gruppe unendlich vieler kongruenter Fourierexponenten von $f(x)$ die Summe $\sum A_k e^{iA_k x}$ der betreffenden Glieder $A_k e^{iA_k x}$ schreiben als Bochnersche Partialfunktion (e^{iAx} mal einer Reihe mit Fourierexponenten, die Vielfache von 2π sind), d. h. als (e^{iAx} mal einer stetigen reinperiodischen Funktion $g(x)$ von der Periode 1), und es ist $\mathrm{A}_m = g(0)$ für den zur Gruppe kongruenten Fourierexponenten Φ_m der Folge a_ν. Andererseits gilt

$$f(x) = e^{iAx} g(x) + f^*(x) \quad \text{und} \quad a_\nu = e^{iA\nu} g(0) + a_\nu^*,$$

deshalb

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} &= \mathfrak{M}\{a_\nu \bar{a}_\nu\} = \mathfrak{M}\{(e^{iA\nu} g(0) + a_\nu^*)(e^{-iA\nu}\overline{g(0)} + \overline{a_\nu^*})\} \\ &= \mathfrak{M}\{|g(0)|^2\} + \overline{g(0)}\,\mathfrak{M}\{a_\nu^* e^{-iA\nu}\} + g(0)\,\mathfrak{M}\{\overline{a_\nu^*} e^{iA\nu}\} + \mathfrak{M}\{|a_\nu^*|^2\}. \end{aligned}$$

Hierin verschwinden die beiden mittleren Glieder, weil die Folge a_ν^* keinen zur bisherigen Gruppe und damit zu A kongruenten Fourierexponenten mehr hat. Es bleibt

$$\mathfrak{M}\{|a_\nu|^2\} = |g(0)|^2 + \mathfrak{M}\{|a_\nu^*|^2\},$$

d. h. für den Fourierexponenten Φ_m stellt sich der richtige Beitrag $|g(0)|^2$ zur Summe $\sum |\mathrm{A}_m|^2$ ein. Durch Weiterbehandlung von $\mathfrak{M}\{|a_\nu^*|^2\}$ gelangt man auch hier zur Vollständigkeitsrelation, deren Beweis damit für alle möglichen Fälle vollendet ist.

Die Beziehungen (8) und (9) erlauben, wie zum Schlusse angemerkt sei, die Ergebnisse über die Potenzreihe (4) schlagender auszudrücken, nämlich wie folgt: *Für die im Einheitskreise $|z| < 1$ konvergente Potenzreihe*

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$$

mit fastperiodischen Koeffizienten a_ν ist bei radialer Annäherung an den Punkt $z = e^{-i\varphi}$ auf dem Einheitskreise der Grenzwert $\lim\limits_{r \to 1-0} (1-r) F(re^{-i\varphi})$ *stets vorhanden, und zwar gleich dem Fourierkoeffizienten* A_m *der fastperiodischen Folge a_ν, wenn wir an den Punkt $e^{-i\Phi_m}$ für den Fourierexponenten Φ_m herangehen, sonst gleich* 0.

G. VITALI (Padova - Italia)

RAPPORTI INATTESI FRA ALCUNI RAMI DELLA MATEMATICA

(In quale modo la moderna teoria delle funzioni di variabile reale ha concorso al ritrovamento delle derivate covarianti nel calcolo differenziale assoluto generalizzato).

La *moderna teoria delle funzioni di variabile reale* avendo per iscopo lo studio delle funzioni nel senso più generale, deve supporre nelle funzioni che esamina il minor numero possibile di condizioni, mentre il *calcolo differenziale assoluto*, essendo un algoritmo basato sopra proprietà della derivazione, deve supporre nelle funzioni a cui si applica delle condizioni di derivabilità e di continuità in misura più o meno notevole.

Ciò lascierebbe credere che nessun legame importante possa esistere fra questi rami di studio, se non quello costituito dalla ugualmente scarsa fortuna che hanno incontrato nel loro primo affacciarsi.

Ma ad affermare ancora una volta l'unità dello scibile, un contatto si è stabilito fra le due teorie, per cui il calcolo assoluto veniva, coll'ausilio della teoria delle funzioni di variabile reale, ad arricchirsi di nuove e molto promettenti operazioni.

È noto che il Calcolo assoluto, come algoritmo che facilita la ricerca analitica, è basato essenzialmente sopra due fatti notevoli, e cioè l'esistenza della *derivazione covariante* e la validità del *principio della saturazione*.

Ma i criteri su cui si imperniava il calcolo assoluto del RICCI ne suggerivano una estensione che fu tentata da ERNESTO PASCAL. I lavori del PASCAL sull'argomento furono da Lui riuniti in una pubblicazione che figura fra le Memorie della R. Accademia dei Lincei apparse nel 1910. Ma la vastità della materia che il lavoro del PASCAL voleva abbracciare e la difficoltà di trovare delle notazioni comprensive, distrassero l'attenzione degli studiosi dall'opera importante del PASCAL. Nè valse ad indirizzare sopra questa via la speculazione dei matematici un mio lavoro del 1923 col quale riesaminavo il pensiero del PASCAL e rendevo più scorrevole gli algoritmi coll'introduzione di notazioni che permettono di avvicinare molte considerazioni del campo generale a quelle che ormai erano conosciute nel campo battuto dal RICCI.

Il fatto si spiega.

Il calcolo assoluto generalizzato presentava bensì qualche carattere che poteva renderlo meritevole di attenzione, quali *la validità del principio della saturazione*, e la possibilità di darsi una più intima ragione di fatti che si presentano nell'orbita del calcolo assoluto del RICCI. (Infatti certi sistemi di funzioni, come i simboli di Christoffel, che si presentano nel calcolo assoluto di RICCI, non sono sistemi assoluti in questo calcolo, mentre lo sono in quello generalizzato, e ciò permette di seguirne il cambiamento per effetto di una sostituzione sulle variabili con regole che si prestano ad essere ricordate).

Ma non si era ancora trovato nel campo generale un'operazione analoga alla derivazione covariante del RICCI, nè potevano prenderne il posto *i simboli principali* e le *dedotte* di PASCAL, nè la possibilità di ricavare da ogni sistema assoluto del calcolo generalizzato un sistema assoluto del calcolo del RICCI. Inoltre non si presentava di questi fatti alcuna notevole applicazione.

Era evidente che il calcolo assoluto generalizzato sarebbe apparso imperfetto se non si riusciva ad estendere ad esso la derivazione covariante del calcolo di RICCI.

Ora, mentre i miei tentativi diretti di ricerca fallirono, io venni in possesso di questa estensione in un modo del tutto inatteso.

Da quando l'emiplegia che mi ha colpito mi ha tolto l'uso della mano destra e mi ha messo nell'impossibilità di scrivere senza ricorrere a mezzi meccanici, io mi servo nello studio della geometria differenziale della *rappresentazione funzionale*, la quale fornisce formule più sintetiche e facili a dominarsi, anche quando non si abbiano scritte sotto gli occhi.

Questa rappresentazione ha la sua ragion d'essere nella possibilità di sviluppare qualunque funzione f a quadrato sommabile in serie di funzioni di un dato sistema chiuso di funzioni normali ed ortogonali (serie convergente in media verso f), per cui i coefficienti di questa serie si possono interpretare come le coordinate cartesiane del punto rappresentato dalla f, e quindi questa rappresentazione è strettamente legata ad uno dei più bei capitoli della moderna teoria delle funzioni di variabile reale. In questa rappresentazione una varietà ad n dimensioni è individuata da un'equazione

$$f=f(t, u_1, u_2, \dots, u_n),$$

con f funzione a quadrato sommabile di t in un certo campo g, e derivabile in là quanto occorre rispetto alle u (1).

Le derivate di qualunque ordine della f rispetto alle u si possono interpretare come dei parametri che individuano delle direzioni (2). Detto σ_n lo spazio di

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano.* (Atti del R. Ist. Veneto di Sc. lett. ed arti, Anno Acc. 1927-28, Tomo LXXXVII, parte seconda, pp. 349-428) v. pag. 391.

(2) G. VITALI, l. c., pag. 358 e seg.

minor numero di dimensioni che passa per il punto della varietà e che contiene tutte le direzioni individuate da tutte le derivate di f di ordine $\leqslant n$, si trova che *un parametro di una qualunque normale a* σ_1 *e giacente in* σ_2 *è una combinazione lineare delle derivate seconde covarianti* (*del Ricci*) *della* f *rispetto alla forma che dà l'elemento lineare della varietà.*

Così la considerazione di dette normali è apparsa al mio spirito come *la più naturale sorgente della derivata del Ricci*, ed ho pensato che seguendo la stessa via si sarebbe forse trovata la desiderata derivata per il calcolo assoluto generalizzato.

Allora ho cercato di esprimere le normali al σ_n giacenti nel σ_{n+1}, supposto che la varietà sia generica, ed ho trovato che i parametri di queste normali sono combinazioni lineari di *certe espressioni* ottenute togliendo da una derivata $(n+1)$-*ma*, di f una combinazione lineare delle derivate di ordine inferiore. Con un'opportuna scelta di notazioni, dette espressioni potevano essere scritte in forma tale da ricordare la derivata di RICCI per un covariante ad un indice. Queste espressioni operano sul sistema delle derivate di f di ordine $\leqslant n$. Io ho poi sostituito a tale sistema di derivate un qualunque sistema covariante ad un indice di classe n del calcolo assoluto generalizzato, ed ho ottenuto un covariante a 2 indici, uno di classe n e l'altro di classe 1.

Si ha così una operazione che è la derivata cercata e che si può estendere a sistemi assoluti qualunque. Essa ha tutte le proprietà della derivata del RICCI.

Inoltre essa si presta ad essere applicata con vantaggio nei moderni studi di geometria proiettiva differenziale.

Ma non è questo il luogo di farne delle applicazioni.

Una di queste è apparsa nel mio lavoro « Geometria dello spazio hilbertiano », altre appariranno in pubblicazioni che sto redigendo, in cui farò una esposizione estesa della teoria della derivata considerata. Una esposizione succinta di questa teoria è già apparsa in una nota che figura nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei di questo anno ([1]).

Qui importava mostrare come la nuova derivata che si affaccia come un elemento importante nell'analisi matematica, debba la sua origine a considerazioni strettamente legate alla moderna teoria delle funzioni di variabile reale.

Che quando si volesse pensare che ciò sia dovuto al caso, si potrebbe obiettare che se fosse possibile impostare la teorica di queste derivate operando sulle varietà di uno spazio euclideo, essa teorica non potrebbe riuscire che una cosa monca, perchè si sarebbe costretti a limitare la classe del calcolo assoluto che si vuol fare, mentre il solo spazio hilbertiano può fornire l'ambiente in cui il nuovo calcolo può svolgersi senza limitazioni.

([1]) G. VITALI, *Sulle derivazioni covarianti nel calcolo assoluto generalizzato*. Rend. della R. Acc. dei Lincei. Classe di Scienze. Vol. VII, serie 6ª, 1° semestre, fasc. 8. Roma, aprile 1928.

Anche questa argomentazione è sufficiente per indurre a riconoscere che vi è stato un contatto necessario fra le due teorie in discorso.

* * *

Può darsi che possa trascorrere molto tempo e che le due teorie debbano percorrere molta strada prima che abbia a verificarsi un altro loro incontro così notevole come quello che io ho indicato, può anche darsi che un così forte incontro non abbia mai più a verificarsi.

Ma se fra esse non avverranno altri contatti che siano da segnalare, come quello a cui ho accennato, quanti piccoli contatti avverranno attraverso le menti dei singoli studiosi, quante volte, anche inconsciamente, il matematico avrà occasione di servirsi con profitto per lo studio di una di queste teorie dell'abito mentale che si è formato coltivando l'altra?

Perchè così è fatta la nostra mente, che le varie cognizioni che essa raccoglie possono in essa coordinarsi el amalgamarsi e tendere a formare un tutto armonico e senza discontinuità.

R. CACCIOPPOLI (Napoli - Italia)

TEORIA GENERALE DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

Lo studio del cambiamento di variabili negli integrali multipli (doppi in ispecie), per quanto più volte ripreso e con accanimento (1), non ha dato ancora quei risultati generali e definitivi che per gli integrali semplici riassume il teorema di LA VALLÉE POUSSIN, stabilendo nel suo campo naturale di validità, per così dire, la formola classica.

Sono invero mancati sin qui strumenti d'analisi appropriati, quali l'estensione alle corrispondenze fra spazî pluridimensionali della nozione di *continuità assoluta*, ed una definizione generale, indipendente da quella delle derivate parziali, di *jacobiano*. Questi strumenti occorrono poi anche ad uno studio esauriente di altre quistioni fondamentali — quadratura delle superficie curve, integrali superficiali —, ed appunto alcune ricerche sulle superficie mi han dato l'occasione di foggiarli (2). Li passerò in rassegna, prima di addentrarmi nell'argomento precipuo di questa Comunicazione (3), l'estensione agli integrali multipli del teorema di LA VALLÉE POUSSIN. Mi limiterò al caso di due dimensioni, in cui si esaurisce la generalità dei procedimenti e teoremi fondamentali, ed in cui più di un risultato complementare notevole si desume da peculiarità topologiche del piano.

1. - Per estendere alle corrispondenze piane le definizioni derivanti dalla nozione di *variazione*, cioè per definire, nel modo più naturale, quelle che chiamo *coppie a variazione limitata* e *assolutamente continue*, partiamo da una forma geometrica semi-intuitiva delle definizioni usuali per le funzioni di una variabile.

Se $f(t)$ è una funzione continua a variazione limitata nell'intervallo (a, b), l'equazione $x=f(t)$ rappresenta una *curva rettilinea* (non necessariamente un segmento), portata dall'asse x, di *lunghezza totale* finita, avente (a, b) per *intervallo base*. Se di più $f(t)$ è assolutamente continua, ad una *qualunque* porzione

---

(1) Basterà citare le ricerche di LA VALLÉE POUSSIN, RADEMACHER, W. H. YOUNG.

(2) V. le note *Sulla quadratura delle superficie piane e curve* (Rend. Acc. Lincei, sett. 1927) e *Sulle coppie di funzioni a variazione limitata* (Rend. Acc. Napoli, aprile 1928). Cfr. anche due altre note nei Rend. Lincei (20 maggio e 1° giugno 1928).

(3) Sunto di una memoria che verrà pubblicata nei Math. Ann.

infinitesima dell'intervallo base corrisponde sulla curva una porzione avente lunghezza infinitesima.

Analogamente, se $\varphi(u, v)$ e $\psi(u, v)$ sono due funzioni continue definite nel dominio D, diremo la coppia $[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$ a *variazione limitata* se la *superficie piana* S, di *dominio base* D, rappresentata dalle equazioni

$$(1) \qquad x=\varphi(u, v) \qquad y=\psi(u, v)$$

ha *area totale* finita; e se di più ad ogni porzione infinitesima di D corrisponde una porzione di S avente area infinitesima la coppia sarà *assolutamente continua.*

Precisiamo: l'area (che chiamiamo *totale* per distinguerla da quella *semplice* introdotta più giù) di S, secondo la definizione di LEBESGUE che adottiamo, è il minimo limite delle aree totali delle superficie poliedriche (che possiamo supporre *piane* anch'esse) tendenti ad S; i punti di S corrispondenti a punti della frontiera di D non le recano contributo, sicchè l'identificheremo con la *variazione totale* della coppia (φ, ψ) sull'insieme I dei punti interni a D. Definita analogamente l'area totale della porzione di S corrispondente ad un qualunque insieme aperto contenuto in I si otterrà una funzione additiva di insieme aperto, che si *prolungherà* nel campo di tutti gli insiemi misurabili (B) di I, ottenendone una funzione additiva di insieme $V(J)$ che darà la variazione totale di (φ, ψ) sull'insieme generico J. Risultando questa funzione assolutamente continua, sarà assolutamente continua anche la coppia (φ, ψ).

2. - Orientato il piano xy, ad ogni superficie poliedrica da esso portata si viene ad attribuire, accanto all'area totale, un'*area semplice*, somma delle aree delle singole facce presa ognuna col segno che le compete. Al tendere delle aree totali delle superficie poliedriche approssimanti S al loro minimo limite, le aree semplici tendono ad un limite ben determinato che diciamo *area semplice* di S e che identifichiamo con la *variazione* (*semplice*) di (φ, ψ) su I. Questa definizione si estende, come la precedente di variazione totale, ad ogni insieme J, misurabile (B), contenuto in I; e si ottiene così una nuova funzione additiva d'insieme $W(J)$.

La variazione totale di W coincide con la funzione V, sicchè V e W risultano insieme assolutamente continue.

Si ha quasi ovunque $\frac{dV}{dJ}=\left|\frac{dW}{dJ}\right|$.

Monotona è una coppia la cui variazione ha segno costante, sicchè $V=|W|$.

La funzione di punto $\frac{dW}{dJ}$ si identifica con il determinante funzionale $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$ nei casi ordinarî (p. es. quando φ e ψ sono uniformemente lipschitziane), e potrebbe chiamarsi *jacobiano generalizzato.* La diremo *derivata della coppia*, e scriveremo in ogni caso

$$\frac{dW}{dJ}=\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}.$$

3. - Ai metodi esposti potrebbe obbiettarsi che non se ne può trarre, fondandosi essi sulla ricerca di limiti d'indeterminazione, un *procedimento regolare di calcolo* per la variazione di una coppia: obbiezione un po' vaga, cui si potrebbe rispondere che anche una ordinaria successione convergente è in sè inadatta al calcolo, fino a che dati complementari non consentano una maggiorazione degli errori, e che pertanto non è senza qualche illusione che si ritiene poter desumere un effettivo procedimento di calcolo da una definizione fondata soltanto sull'uso di successioni convergenti. Comunque non va trascurata l'eventualità di una semplificazione non fosse che teorica. Orbene, a complemento delle nostre definizioni si può mostrare come sia possibile costruire *una* successione particolare di superficie poliedriche approssimanti S, le cui aree totali e semplici tendano a $V(I)$ e $W(I)$ rispettivamente. Ma non possiamo soffermarci qui su quest'argomento.

4. - Daremo ora la nozione di *pseudo-corrispondenza* fra insiemi istituita da una coppia a variazione limitata; nozione che si rivela essenziale nello studio della trasformazione degli integrali doppî.

Ci serviremo qui della locuzione « insieme di punti » in un senso più esteso del consueto, in quanto attribuiremo ai punti di un insieme *molteplicità* variabili dall'uno all'altro; occorrendo mettere in evidenza questo nuovo elemento della molteplicità, parleremo di *insiemi ponderati*. Mentre che ad un insieme ordinario corrisponde una funzione caratteristica suscettibile dei soli valori 0 e 1, un insieme ponderato sarà definito da una *funzione caratteristica* che potrà assumere ogni valore reale (nei casi che dovremo considerare si tratterà solo di valori interi). Per un insieme ponderato si definiranno una *misura semplice*, integrale della funzione caratteristica, ed una *misura totale*, integrale del valore assoluto della funzione caratteristica.

L'insieme dei punti di una superficie poliedrica Σ del piano xy deve riguardarsi come un insieme ponderato, in quanto un punto (x, y) può appartenere a più facce distinte di Σ; e secondo che, orientato il piano xy, ad ogni faccia si attribuisce un segno e corrispondentemente ad ogni suo punto il coefficiente $+1$ o -1, o pure le molteplicità si valutano *assolutamente*, si avranno due insiemi in generale distinti A e B, il secondo essenzialmente *positivo*.

Queste definizioni si estendono ad una superficie piana quadrabile S qualunque. Consideriamo una successione di superficie poliedriche Σ_1, Σ_2,.... approssimanti S, le cui aree totali ne tendano all'area totale, e definiamo per ogni superficie Σ_n gli insiemi A_n e B_n come poc'anzi. Le due successioni di insiemi ponderati A_1, A_2,...., e B_1, B_2,.... *convergono in media*, nel senso che le funzioni caratteristiche di A_n e di B_n convergono in media (di ordine 1). Gli *insiemi limiti* A e B sono definiti ognuno a meno di un insieme di misura totale nulla. Diremo l'insieme ponderato A *pseudo-corrispondente*, l'insieme ponderato B

corrispondente di I nella *trasformazione piana* (1); la misura (semplice) del primo dà l'area semplice, quella del secondo l'area totale di S.

Per ogni insieme J, misurabile (B), contenuto in I, si possono definire gli insiemi pseudo-corrispondente e corrispondente sul piano xy; la misura (semplice) del primo è $W(J)$, quella del secondo $V(J)$. Alla misura totale del primo può darsi il nome di *pseudo-variazione totale* di (φ, ψ) su J.

Aggiungiamo per finire che la teoria della pseudo-corrispondenza può precisarsi ed estendersi con l'aiuto delle considerazioni cui abbiamo accennato nel n. 3, e che si può definire per ogni insieme un insieme pseudo-corrispondente *ben determinato*, anche se (φ, ψ) non è a variazione limitata.

5\. - La teoria che ho sin qui esposta sembra apparentarsi a quella di BANACH [1] sulle *trasformazioni a variazione limitata*, ma se ne distacca in profondità tanto per l'impostazione generale quanto per i risultati. La teoria di BANACH non conduce in sostanza che a definire una *variazione totale*, e trascurando sistematicamente ogni considerazione di *segno* e di *orientazione* dissolve nella discontinuità amorfa degli aggregati di punti la continuità organica della doppia infinità di *elementi piani* che costituisce una superficie. La mia teoria conduce naturalmente non solo ad una definizione dell'area di una superficie piana o curva, ma anche ad un'analisi completa delle *superficie quadrabili*, degli *integrali superficiali*, e della *trasformazione degli integrali doppi.* Il dissidio fra la definizione che BANACH dà dell'area di una superficie e quella di LEBESGUE può essere probabilmente composto dalle modificazioni che suggerisce RADÒ [2], sceverando dalla totalità dei punti in cui si proietta sur un piano una porzione di superficie una *parte essenziale*; ma anche le considerazioni di RADÒ non sfuggono all'obbiezione fondamentale di non fornire che un calcolo *aritmetico* dell'area, avulso da una teoria generale di cui esso non dovrebbe essere che un'applicazione.

6\. - Possiamo ora raccogliere i risultati relativi alla teoria generale del cambiamento di variabili negli integrali doppî.

Essendo $f(x, y)$ una funzione continua, definiamo l'*integrale di* f *esteso alla superficie piana quadrabile* S rappresentata dalla (1) ponendo

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint_I f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,dW,$$

dove il secondo membro è un integrale di STIELTJES.

---

(1) *Sur les lignes rectifiables etc.* (Fund. Math. VII).

(2) V. la sua Comunicazione a questo Congresso.

Definiamo ancora l'*integrale di* f *esteso all'insieme ponderato* A pseudo-corrispondente di I ponendo

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint f(x, y)\mu(x, y)dxdy,$$

dove $\mu(x, y)$ è la funzione caratteristica di A.

Si dimostra l'*eguaglianza degli integrali di* f *estesi a* S *e ad* A: in formola

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_I f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]dW.$$

Se la coppia (φ, ψ) è assolutamente continua, si ha

$$\iint_A f(x, y)dxdy = \iint_I f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}dudv.$$

Questa formola si estende a funzioni discontinue, nell'ipotesi però che esista l'integrale a secondo membro. Ed ecco il teorema generale, che estende quello di LA VALLÉE POUSSIN agli integrali doppî:

Se la coppia (φ, ψ) *è assolutamente continua sono eguali* (*purchè esista il secondo di essi* [1]) *gli integrali, estesi ad insiemi pseudo-corrispondenti, dei due differenziali*

$$f(x, y)dxdy \quad \text{e} \quad f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}dudv.$$

7. - La nozione di *pseudo-corrispondenza* fra insiemi associati di integrazione ne estende una semplicissima che si introduce spontaneamente nello studio del cambiamento di variabile negli integrali semplici, quando si riconoscono associati intervalli di integrazione i cui estremi si corrispondono. Essa comporta in pratica notevoli semplificazioni particolari quando, come è per lo più il caso, l'insieme di cui si cerca il pseudo-corrispondente è un dominio limitato da una o più curve di JORDAN. Ma non ci soffermeremo qui su questi particolari, e termineremo piuttosto sviluppando un esempio.

8. - Sia $x = \varrho \cos\theta$, $y = \varrho \operatorname{sen}\theta$, $u = r\cos\omega$, $v = r \operatorname{sen}\omega$. Poniamo

$$\varrho = R(r), \quad \theta = 2\omega + \omega(2\pi - \omega)X(r),$$

dove $R(r)$ è una funzione assolutamente continua, non negativa, e nulla per $r = 0$,

(1) Se la coppia è monotona, basta che esista il primo.

e $X(r)$ è una funzione continua qualunque. La coppia (x, y) risulta assolutamente continua, e si ha

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 2 \frac{R(r)}{r} \frac{dR}{dr} [1 + (\pi - \omega) X(r)] ;$$

ma le derivate parziali di $x(u, v)$ e di $y(u, v)$ mancano se X non è derivabile.

Sono pseudo-corrispondenti il cerchio C' definito da $r \leq a$ ed il *doppio* del cerchio C definito da $\varrho \leq R(a)$; e si ha, se esiste il secondo integrale,

$$\iint_C f(\varrho, \theta) dx dy = \iint_{C'} f[R(r),\ 2\omega + \omega(2\pi - \omega) X(r)] \frac{R(r)}{r} R'(r) [1 + (\pi - \omega) X(r)] du dv.$$

A. ZYGMUND (Warszawa - Polonia)

REMARQUES SUR LES ENSEMBLES D'UNICITÉ DANS QUELQUES SYSTÈMES ORTHOGONAUX

Soit $\{\varphi_n\}$ un système de fonctions orthogonales et normales dans l'intervalle $(a, b,)$ c'est-à-dire que

$$\int_a^b \varphi_m \varphi_n dx = \begin{matrix} 1 (m = n) \\ 0 (m \neq n). \end{matrix}$$

Dans la théorie des séries de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n \tag{1}$$

on peut distinguer deux points de vue. L'un d'eux, qu'on peut appeler le point de vue *riemannien*, s'occupe des séries générales de la forme (1). L'autre, celui de FOURIER, s'occupe des séries de la forme (1) où les coefficients a_n sont donnés par la formule

$$a_n = \int_a^b f \varphi_n dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

f désignant une fonction intégrable (séries de Fourier).

Le problème central de la théorie de Fourier est celui de *représentation* des fonctions par leurs séries de Fourier. Le problème central de la théorie riemannienne est la question *d'unicité* de la représentation des fonctions par les séries de la forme (1).

Dans la théorie de Fourier le cas le plus simple et le mieux étudié est celui des *séries trigonométriques.* Certaines propositions établies d'abord pour les séries trigonométriques ont été plus tard étendues aux autres systèmes orthogonaux. Les démonstrations étaient plus ou moins analogues à celles pour les séries trigonométriques. C'est M. HAAR (1) qui le premier a posé justement et résolu le problème de Fourier pour les séries de STURM-LIOUVILLE, en le réduisant à celui pour les séries trigonométriques. Les théorèmes du type de M. HAAR

(1) A. HAAR, Mathematische Annalen 69.

ont été ensuite démontrés pour certains autres systêmes orthogonaux (W. H. YOUNG, A. HAAR, G. SZEGÖ).

Actuellement la théorie riemannienne de certains systèmes orthogonaux (STURM-LIOUVILLE, BESSEL, LEGENDRE, etc.) se présente sous l'aspect analogue à celui qui a eu lieu dans la théorie de Fourier avant les travaux de M. HAAR. En modifiant la méthode de la double intégration formelle de RIEMANN, on démontre les théorèmes analogues aux théorèmes bien connus de CANTOR, DU BOIS REYMOND et DE LA VALLÉE POUSSIN.

Ce procédé ne me paraît pas être le plus convenable, car le procédé de la dérivée seconde généralisée de RIEMANN ne s'applique pas si facilement aux autres systèmes orthogonaux. Les difficultés augmentent si l'on considère les séries divergentes mais sommables p. ex. par les procédés de CESÀRO ou de POISSON.

Il est donc naturel de poser la question de démontrer pour certains systèmes orthogonaux des théorèmes qui permettraient de réduire la théorie riemannienne de ces systèmes à celle des séries trigonométriques.

Pour fixer les idées considérons le problème d'unicité. Soit E un ensemble situé dans l'intervalle $(0, 2\pi)$. Supposons que toute série trigonométrique convergente en dehors de E s'annule identiquement. On appelle dans ce cas E l'ensemble d'unicité ou l'ensemble U (1). La définition analogue peut être posée pour les autres systémes orthogonaux. On peut poser la question quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble donné soit un ensemble U? Ce problème, qui est très difficile, n'est pas résolu jusqu'ici, même dans le cas des séries trigonométriques.

On peut cependant démontrer la proposition suivante:

Pour une classe étendue des systèmes orthogonaux (*en particulier pour les systèmes de Sturm-Liouville, Bessel, Jacobi*) *les ensembles* U *sont les mêmes que pour le système trigonométrique.*

La démonstration de cette proposition s'appuye sur l'évaluation asymptotique des fonctions appartenant aux systèmes considérés et sur la multiplication formelle des séries trigonométriques.

Le théorème enoncé plus haut peut être généralisé dans diverses directions: il subsiste pour les ensembles d'unicité de DU BOIS REYMOND, pour les séries divergentes mais sommables par certains procédés de sommation etc.

La méthode dont on se sert dans la démonstration de ces théorèmes permet facilement d'etendre aux systèmes considérés *les théorèmes de localisation* démontrés pour les séries trigonométriques. Remarquons encore que pour certains systèmes de polynômes orthogonaux (par exemple pour les systèmes de LEGENDRE et de JACOBI) on peut construire la théorie de la multiplication formelle (ana-

---

(1) L'ensemble E doit être appelé, plus précisement, *l'ensemble d'unicité de Cantor.*

logue à la multiplication formelle des séries trigonométriques introduite par M. A. RAJCHMAN), ce qui permet de résoudre complétement le problème de localisation même dans les points exceptionnels, tels que les points ± 1 pour le système de LEGENDRE.

Les démonstrations complètes de tous ces théorèmes (ainsi que d'autres théorèmes rentrant dans le même ordre d'idées) paraîtront dans un autre recueil.

N. GUNTHER (Leningrad - U. R. S. S.)

SUR LES INTÉGRALES DE STIELTJES GÉNÉRALISÉES

1. - Faisons correspondre à chaque domaine (ω_x), appartenant à un domaine donné (D_x) des points x un nombre $U^{(\omega_x)}$, en introduisant ainsi une fonction des domaines. Fixons les définitions suivantes:

a) La fonction du domaine $U^{(\omega_x)}$ est dite additive, si on a

$$U^{(\omega_x^{(1)})}\omega_x^{(1)} + U^{(\omega_x^{(2)})}\omega_x^{(2)} = U^{(\omega_x)}\omega_x, \text{ quand } \omega_x = \omega_x^{(1)} + \omega_x^{(2)} \tag{1}$$

le signe ω_x désignant la mesure du domaine (ω_x) (le volume, la surface, la longueur).

Remarque. Les fonctions des domaines $U^{(\omega_x)}$ variées nous nommerons, ayant en vue leurs applications, les valeurs moyennes des fonctions pour les domaines (ω_x). Par exemple: 1) si $f(x)$ est une fonction sommable dans (D_x), la fonction du domaine $U^{(\omega_x)} = \frac{1}{\omega_x}\int\limits_{(\omega_x)} f(x)dx$, où dx est l'élément du domaine (D_x), est la valeur moyenne de $f(x)$ pour (ω_x); 2) si $\varphi(x)$ est une fonction continue dans (D_x) et si (σ_x) est la frontière du domaine (ω_x), la fonction

$$U^{(\omega_x)} = \frac{1}{\omega_x}\int\limits_{(\sigma_x)} \varphi \cos(nx)do,$$

où n est la direction de la normale extérieure à (σ_x), est la valeur moyenne pour (ω_x) de la dérivée de φ par rapport à x; 3) si la surface (S) à en chaque point un plan tangent, $U^{(\omega_x)} = \frac{1}{\sigma_x}\int\limits_{(l)} \cos(\nu y)dl$, où (σ_x) est une portion de (S), (l) la frontière de (σ_x) et ν la normale à (l), située dans le plan tangent à (S), est la projection de la courbure moyenne de (S) pour (σ_x) sur la direction y [1].

b) La fonction des domaines $U^{(\omega_x)}$ est dite à variation bornée, si pour chaque division du domaine (D_x) en domaines $(\omega_x^{(1)})$, $(\omega_x^{(2)})$,...., $(\omega_x^{(n)})$ on a

$$\left|U^{(\omega_x^{(1)})}\right|\omega_x^{(1)} + \left|U^{(\omega_x^{(2)})}\right|\omega_x^{(2)} + \dots + \left|U^{(\omega_x^{(n)})}\right|\omega_x^{(n)} < B, \tag{2}$$

---

[1] N. GUNTHER. *Sur les intégrales di Stieltjes.* Travaux du Congrès de mathématiciens russes à Moscou, an 1927. — R. GÂTEAUX. *Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel et sur la théorie du potentiel.* Bulletin de la Soc. Math. de France, an 1919, t. XLVII.

où B est un nombre déterminé. La borne supérieure de la partie gauche de (2) nous nommerons la variation de $U^{(\omega_x)}$ dans (D_x).

c) La fonction des domaines $U^{(\omega_x)}$, additive et à variation bornée, est dite absolument continue, si pour chaque ε on peut trouver un nombre η tel, qu'on a

$$(3) \qquad \left|U^{(\omega_x^{(1)})}\right| \omega_x^{(1)} + \dots + \left|U^{(\omega_x^{(k)})}\right| \omega_x^{(k)} < \varepsilon, \text{ si } \omega_x^{(1)} + \dots + \omega_x^{(k)} < \eta.$$

d) nous donnerons le nom de la valeur d'une fonction des domaines dans le point x à la limite, si une limite déterminée existe, du nombre $U^{(\omega_x)}$, quand le domaine (ω_x) en contenant le point x tend vers zéro.

Il est facile à démontrer, que:

α) Si la fonction des domaines $U^{(\omega_x)}$ est additive et à variation bornée, on a

$$(4) \qquad U^{(\omega_x)} = V^{(\omega_x)} - W^{(\omega_x)},$$

où les fonctions des domaines $V^{(\omega_x)}$, $W^{(\omega_x)}$ sont additives et à variation bornées et telles qu'on a

$$(4') \qquad V^{(\omega_x)} \geqq 0, \qquad W^{(\omega_x)} \geqq 0.$$

β) Si $U^{(\omega_x)}$ est additive et si pour un certain $\lambda > 0$ la fonction des domaines $\left|U^{(\omega_x)}\right|^{1+\lambda}$ est à variation bornée, la fonction des domaines $U^{(\omega_x)}$ est absolument continue.

Il suit de là que $(U^{(\omega_x)})^2$ n'est pas à variation bornée, si $U^{(\omega_x)}$ n'est pas absolument continue.

γ) Une fonction $U^{(\omega_x)}$ absolument continue est égale à $\frac{1}{\omega_x}\int\limits_{(\omega_x)} f(x)dx$, où $f(x)$ est une certaine fonction, sommable dans (D_x). Les valeurs de $U^{(\omega_x)}$, quand elles existent, sont égales à $f(x)$.

δ) Si la fonction des domaines $U^{(\omega_x)}$ est additive et à variation bornée, on a

$$(5) \qquad U^{(\omega_x)} = W^{(\omega_x)} + V^{(\omega_x)}$$

où la fonction $W^{(\omega_x)}$ est absolument continue et les valeurs de $V^{(\omega_x)}$ sont égales à zéro presque partout. Si, en se basant sur (α), on suppose que $U^{(\omega_x)} \geqq 0$, la fonction des domaines $W^{(\omega_x)}$ est la partie non singulière de la limite inférieure de la somme

$$(5') \qquad \underline{U}^{(\omega_x^{(1)})}\omega_x^{(1)} + \dots + \underline{U}^{(\omega_x^{(k)})}\omega_x^{(k)}, \quad \omega_x^{(1)} + \dots + \omega_x^{(k)} = \omega_x,$$

où $\underline{U}^{(\omega_x)}$ est la limite, qui certainement existe, du nombre $U^{(\underline{\omega}_x)}$, dans lequel $(\underline{\omega}_x)$ désigne un domaine entièrement contenu dans (ω_x), quand $(\underline{\omega}_x)$ tend vers (ω_x).

2. - Supposons que $f(x)$ est une fonction du point x bornée dans (D_x); supposons que (d_x) est une partie de (D_x) et que (d_x) est divisé en domaines $(\omega_x^{(1)}),\dots (\omega_x^{(n)})$; supposons que x_i est un point quelconque dans $(\omega_x^{(i)})$. La limite de la somme

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} f(x_i)\, U^{(\omega_x^{(i)})}\omega_x^{(i)},$$

vers laquelle elle tend, quand $n \to \infty$ et $\omega_x^{(i)}$ tendent uniformément vers zéro, nous la nommons intégrale de Stieltjes généralisée et nous la désignons par

$$\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)\,dx. \tag{6'}$$

Exemple. Si le domaine est l'intervalle (a, b), $(\omega_x) = x_2 - x_1$, $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$,

$$U^{(\omega_x)} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1},$$

où $F(x)$ est une fonction à variation bornée, (6') n'est autre chose que

$$\int\limits_a^b f(x)\,dF(x).$$

L'intégrale généralisée de Stieltjes existe, si $f(x)$ est continue et $U^{(\omega_x)}$ est à variation bornée. L'intégrale généralisée de Stieltjes existe pour chaque fonction continue $f(x)$ seulement, si $U^{(\omega_x)}$ est à variation bornée. Sous certaines restrictions, l'intégrale (6') peut exister même si la fonctions $f(x)$ n'est pas bornée ([1]).

Exemple. Supposons que r soit la distance entre les points x et y. Nommons la fonctions de x

$$F(x) = \int\limits_{(D_y)} \frac{U^{(\omega_y)}}{r}\,dy \tag{7}$$

le potentiel généralisé, $U^{(\omega_x)}$ sa dénsité moyenne.

Si on a choisi convenablement $U^{(\omega_y)}$, $F(x)$ est égale à la somme d'un potentiel newtonien avec une série, dont les termes sont les potentiels des simples couches, les potentiels des lignes fermées et les fonctions de la forme $\frac{a_i}{r_i}$, où r_i est la distance entre le point x et un point y_i dans (D_y).

La fonction $F(x)$ est harmonique dans l'extérieur de (D_x). Si $U^{(\omega_x)} \geqq 0$ et si pour chaque sphère du rayon ϱ on a $U^{(\omega_0)} \varrho^{1+\lambda} < B$, $0 < \lambda < 1$, $F(x)$ est continue dans tout éspace; si $U^{(\omega_x)} \geqq 0$ et $U^{(\omega_0)} \varrho^{\lambda} < B$, $F(x)$ a les dérivées premières, qui sont continues dans tout éspace. Dans ce dernier cas, si (σ) est la frontière de (ω) et n la normale extérieure à (σ), on a

$$U^{(\omega)} = -\frac{4\pi}{\omega} \int\limits_{(\sigma)} \frac{dF}{dn}\,d\sigma. \tag{8}$$

On démontre facilement, en désignant par f, F, $L(x, y)$ les fonctions continues:

a) $$\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} (f(x) + F(x))\,dx = \int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)\,dx + \int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} F(x)\,dx.$$

([1]) N. GUNTHER. *Sur une application des fonctions de M. A. Korn.* C. R. 1926. *Sur une application de la théorie de fermeture.* Bullettins de l'Academie de U. R. S. S., 1927.

β) $$\int\limits_{(d_x')} U^{(\omega_x)} f(x)dx + \int\limits_{(d_x'')} U^{(\omega_x)} f(x)dx = \int\limits_{(d_x'+d_x'')} U^{(\omega_x)} f(x)dx.$$

γ) $\left|\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)dx\right| < M \cdot \overline{\lim} \sum\limits_{i=r}^{i=n} \left| U^{(\omega_x^{(i)})} \right| \omega_x^{(i)} = MA$, où M est la borne supérieure de $f(x)$.

δ) Si $U^{(\omega_x)} \geqq 0$ et $m < f(x) < M$, on a $mU^{(d_x)}d_x < \int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)dx < MU^{(d_x)}d_x$.

ε) $$\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)\Big(\int\limits_{(d_y)} V^{(\omega_y)} F(y) L(x, y)dy\Big)dx = \int\limits_{(d_y)} V^{(\omega_y)} F(y)\Big(\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x) L(x, y)dx\Big)dy.$$

Le produit $U^{(\omega_x)} V^{(\omega_y)}$ est, précisement, une fonction additive et à variation bornée dans le domaine (d_x, d_y), dont les élément sont $\omega_x^{(i)}\omega_x^{(j)}$, à cause dequoi chaqu'une des intégrales dans (ε) est égale à

(9) $$\int\limits_{(d_x)}\int\limits_{(d_y)} U^{(\omega_x)} V^{(\omega_y)} f(x) F(y) L(x, y)dxdy.$$

η) Si on a $V^{(\omega_x)} = \frac{1}{\omega_x} \int\limits_{(\omega_x)} U^{(\omega_x)} \varphi(x)dx$, ce qu'on peut nommer la valeur moyenne du produit $U^{(\omega_x)}\varphi(x)$, et si les fonctions $\varphi(x)$ et $f(x)$ sont continues, on a

(10) $$\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} \varphi(x) f(x)dx = \int\limits_{(d_x)} V^{(\omega_x)} f(x)dx.$$

Dans le cas particulier, quand la fonction $\varphi(x)$ est une fonction sommable, on a

(10′) $$\int\limits_{(d_x)} U^{(\omega_x)} f(x)dx = \int\limits_{(d_x)} \varphi(x) f(x)dx,$$

où $U^{(\omega_x)}$ est la valeur moyenne de $\varphi(x)$ pour (ω_x).

3. - En usant les formules, établies dans l'alinéa (2), on peut démontrer qu'à l'équation

(I) $$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_x)} L(x, y) \varphi(t)dt + f(x),$$

dans laquelle la fonction du domaine $U^{(\omega_x)}$ est additive et à variation bornée et $L(x, t)$ une fonction continue et bornée des points x et t dans (D_x) et (D_t), est applicable toute la théorie de FREDHOLM [1].

---

[1] W. HURWITZ. *Note on mixed linear integral equations.* Bol. of An. Math. Soc., V. XVIII, 1912. — A. KNESER. *Belastete Integralgleichungen.* Ren. di Palermo, t. 37, 1914. — F. RIESZ. *Ueber lineare Funktionalgleichungen.* Acta Mathematica, t. 41, 1918.

Ayant posé

$$L\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \\ y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L(x_1, y_1), \ldots, & L(x_1, y_n) \\ \cdots & \cdots \\ L(x_n, y_1), \ldots, & L(x_n, y_n) \end{vmatrix} \tag{11}$$

on s'assure aisément, que les séries

$$\left\{ \begin{aligned} & D(\lambda) = 1 - \lambda \int\limits_{(D_{t_1})} U^{(\omega_{t_1})} L(t_1, t_2) dt_1 + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2} \int\limits_{(D_{t_1})} \int\limits_{(D_{t_2})} U^{(\omega_{t_1})} U^{(\omega_{t_2})} L\begin{pmatrix} t_1, t_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots \\ & D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) = U^{(\omega_y)} \Big\{ L(x, y) - \lambda \int\limits_{(D_{t_1})} U^{(\omega_{t_1})} L\begin{pmatrix} x, t_1 \\ y, t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \\ & \qquad + \frac{\lambda^2}{1\cdot 2} \int\limits_{(D_{t_1})} \int\limits_{(D_{t_2})} U^{(\omega_{t_1})} U^{(\omega_{t_2})} L\begin{pmatrix} x, t_1, t_2 \\ y, t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \ldots \Big\} \\ & D\left(\begin{matrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{matrix} \middle| \lambda\right) = U^{(\omega_{y_1})} U^{(\omega_{y_2})} \ldots U^{(\omega_{y_m})} \Big\{ L\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m \\ y_1, \ldots, y_m \end{pmatrix} - \lambda \int\limits_{(D_{t_1})} U^{(\omega_{t_1})} L\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_m, t_1 \\ y_1, \ldots, y_m, t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \ldots \Big\} \end{aligned} \right. \tag{12}$$

sont convergentes pour toutes les valeurs de λ et que le rapport

$$U^{(\omega_y)} G(x, y, \lambda) = D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \middle| \lambda\right) : D(\lambda) \tag{13}$$

est la résolvante de l'équation (I). On a, effectivement,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} U^{(\omega_y)} G(x, y, \lambda) f(y) dy. \tag{14}$$

Si on donne à l'équation (I) la forme

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_y)} K^{(\omega_y)}(x) \varphi(y) dy + f(x), \tag{I'}$$

ayant posé

$$K^{(\omega_y)}(x) = \frac{1}{\omega_y} \int\limits_{(\omega_y)} U^{(\omega_y)} L(x, y) dy, \tag{15}$$

et à l'égalité (14) la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{(D_y)} \Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda) f(y) dy, \tag{14'}$$

ayant posé

$$\Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_y} \int\limits_{(\omega_y)} U^{(\omega_y)} G(x, y, \lambda) dy, \tag{13'}$$

on obtient l'équation associée à l'équation (I) dans la forme

$$V^{(\omega_y)} = \lambda \int\limits_{(D_x)} K^{(\omega_y)}(x) V^{(\omega_x)} dx + W^{(\omega_y)}, \tag{II}$$

d'où, si $W^{(\omega_x)}$ est additive et à variation bornée, on trouve

$$V^{(\omega_y)} = W^{(\omega_y)} + \lambda \int\limits_{(D_x)} \Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda) W^{(\omega_x)} dx. \tag{16}$$

La résolvante (13) satisfait aux équations

$$(17)\quad \begin{cases} U^{(\omega_y)}G(x, y, \lambda)=\lambda\int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_y)}L(t, y)\cdot U^{(\omega_t)}G(x, t, \lambda)dt+U^{(\omega_y)}L(x, y) \\ U^{(\omega_y)}G(x, y, \lambda)=\lambda\int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_t)}L(x, t)\, U^{(\omega_y)}G(t, y)dt+U^{(\omega_y)}L(x, y) \end{cases}$$

qu'on peut transformer dans

$$(17')\quad \begin{cases} \Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda)=\lambda\int\limits_{(D_t)} K^{(\omega_y)}(t)\Gamma^{(\omega_t)}(x)dt+K^{(\omega_y)}(x) \\ \Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda)=\lambda\int\limits_{(D_t)} K^{(\omega_t)}(x)\Gamma^{(\omega_y)}(t)dt+K^{(\omega_y)}(x). \end{cases}$$

Si λ_1 est une racine de $D(\lambda)$ et $D\begin{pmatrix} x_1,\dots, x_m \\ y_1,\dots, y_m \end{pmatrix}\lambda_1\Big)$ est le premier mineur, qui n'est pas égale identiquement à zéro, la fonction du point x

$$(18)\qquad \varphi_s(x)=\frac{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}$$

est la solution de l'équation homogène (I) pour $\lambda=\lambda_1$; les fonctions

$$\varphi_s(x), \qquad\qquad s=1, 2,\dots, m$$

sont linéairement indépendantes et chaque solution de l'équation homogène mentionnée est leurs fonction linéaire.

Ayant posé

$$(19)\qquad U^{(\omega_y)}\psi_s(y)=\frac{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}$$

formons

$$(19')\qquad V_s^{(\omega_y)}=\frac{1}{\omega_y}\int\limits_{(\omega_y)}\frac{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}{D\left(\begin{matrix} x_1^{(0)},\dots, x_{s-1}^{(0)}, x_s^{(0)}, x_{s+1}^{(0)},\dots, x_m^{(0)} \\ y_1^{(0)},\dots, y_{s-1}^{(0)}, y_s^{(0)}, y_{s+1}^{(0)},\dots, y_m^{(0)} \end{matrix}\,\middle|\,\lambda_1\right)}dy.$$

Nous obtenons m solutions analogues de l'équation associée homogène (II), par lesquelles on peut exprimer linéairement chaque solution de l'équation mentionnée.

Pour la résolubilité des équations non homogènes (I) et (II) pour $\lambda=\lambda_1$ il faut et il suffit qu'on aît

$$(20)\qquad \int\limits_{(D_x)} V_s^{(\omega_x)}f(x)dx=0, \qquad \int\limits_{(D_x)} W^{(\omega_x)}\varphi_s(x)dx=0, \qquad s=1, 2,\dots, m.$$

Si $\varphi_s(x)$ et $V_{s_1}^{(\omega_x)}$ correspondent à différentes valeurs de λ, on a

$$\int\limits_{(D_x)} V_{s_1}^{(\omega)} \varphi_s(x)\, dx = 0. \tag{21}$$

4. - Quand on a

$$L(x, y) = L(y, x) \tag{A}$$

et est satisfaite la condition que si la fonction $f(x)$ est continue, l'égalité

$$\int\limits_{(D_x)} U^{(\omega_x)} f^2(x)\, dx = 0 \tag{B}$$

entraîne l'égalité $f(x) = 0$, à l'équation (I) est applicable toute la théorie des équations à noyau symétrique.

Remarque. Si la condition (B) est satisfaite, tous les nombres $U^{(\omega_x)}$ sont du même signe; nous supposerons, qu'on a $U^{(\omega_x)} \geqq 0$.

On a: 1) l'équation $D(\lambda) = 0$ possède au moins une racine; 2) toutes les racines de l'équation $D(\lambda) = 0$ sont réelles; 3) tous les pôles de la fonction $G(x, y, \lambda)$ sont simples.

Les fonctions $\varphi_s(x)$ et $\psi_s(x)$, qui correspondent à même nombre caractéristique λ_1 ne sont pas distinctes, ainsi que les équations (17). Si les fonctions φ_s et φ_e correspondent aux différentes λ, on a

$$\int\limits_{(D_x)} U^{(\omega_x)} \varphi_s(x) \varphi_e(x)\, dx = 0. \tag{21'}$$

En choisissant les fonctions

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots. \tag{22}$$

convenons toujours, que pour les deux différentes entre elles la condition (21′) est satisfaite et qu'on a

$$\int\limits_{(D_x)} U^{(\omega_x)} \varphi_s^2(x)\, dx = 1. \tag{21$_1$}$$

Si la fonction $f(x)$ est de la forme

$$\int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_t)} L(x, t) h(t)\, dt, \tag{23}$$

où $h(t)$ est une fonction continue, on a

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_t)} f(t) \varphi_k(t)\, dt \cdot \varphi_k(x), \tag{24}$$

où la série est uniformément convergente. Pour la solution de l'équation (I) nous obtenons

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega_t)} f(t) \varphi_k(t)\, dt \cdot \varphi_k(x). \tag{25}$$

Analoguement, nous avons pour la solution de l'équation associée:

(26) $$V^{(\omega_x)} = W^{(\omega_x)} + \lambda \int_{(D_t)} K^{(\omega_x)}(t)\, W^{(\omega_t)} dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \frac{\lambda}{\lambda_k} \int_{(D_t)} W^{(\omega_t)} \varphi_k(t) dt \cdot \varphi_k^{(\omega_x)}$$

où l'on a posé

(27) $$\varphi_k^{(\omega_x)} = \frac{1}{\omega_x} \int_{(\omega_x)} U^{(\omega_x)} \varphi_k(x) dx.$$

L'égalité

(26′) $$V^{(\omega_x)} = W^{(\omega_x)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_k - \lambda} \int_{(D_z)} W^{(\omega_z)} \varphi_k(z) dz \cdot \varphi_k^{(\omega_x)},$$

qui est analogue à (25) peut être écrite seulement, si la série

(28) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(t)\varphi_k(x)}{\lambda_k}$$

est uniformément convergente comme fonction de x et de t.

Cependant, si

(23′) $$V^{(\omega_t)} = \int_{(D_t)} K^{(\omega_t)}(x) R^{(\omega_x)} dx$$

on a toujours

(24′) $$V^{(\omega_t)} \omega_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(\omega_t)} \omega_t}{\lambda_k} \int_{(D_x)} \varphi_k(x) R^{(\omega_x)} dx$$

(28′) $$K^{(\omega_t)}(x)\omega_t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \varphi_k^{(\omega_t)} \omega_t.$$

Remarque. Ici apparaît une distinction entre les théories des équations en intégrales de Stieltjes et des équations en intégrales de RIEMANN. Tandis que l'on a toujours

(29) $$\int_{(D_t)} U^{(\omega_t)} L(x, t) h(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{(D_t)} U^{(\omega_t)} h(t) \varphi_k(t) dt}{\lambda_k} \varphi_k(x)$$

à quoi on peut donner la forme

(29′) $$\int_{(D_t)} L(x, t) R^{(\omega_t)} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_{(D_t)} R^{(\omega_t)} \varphi_k(t) dt}{\lambda_k} \varphi_k(x),$$

ayant posé

(30) $$R^{(\omega_x)} = \frac{1}{\omega_x} \int_{(D_x)} U^{(\omega_x)} h(x) dx,$$

l'égalité (29′) n'a pas lieu, si $R^{(\omega_x)}$ est quelconque, comme le montre l'exemple suivant.

Si le domaine est l'intervalle (ab), $(\omega_x) = x_2 - x_1$, $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$, $F(x) = 0$ pour $0 \leqq x \leqq t$, $F(x) = 1$, pour $t < x \leqq 1$, $R^{(\omega_x)} = \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1}$, on a

(31) $$\int_{(D_z)} R^{(\omega_z)} \varphi_k(z) dz = \varphi_k(t).$$

Cependant l'égalité

(32) $$\int\limits_{(D_z)} L_2(x, z) R^{(\omega z)} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int\limits_{(D_t)} R^{(\omega t)} \varphi_k(t) dt}{\lambda_k^2} \varphi_k(x)$$

où

(33) $$L_2(x, z) = \int\limits_{(D_y)} U^{(\omega y)} L(x, y) L(y, z) dy,$$

a lieu pour chaque fonction moyenne $R^{(\omega x)}$ à variation bornée.

5. - Supposons, que chacune des fonctions des domaines $U^{(\omega x)}$, $V^{(\omega x)}$ satisfait à la condition (B) et qu'elles sont du même signe. Formons les équations [1].

(34) $$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega t)} L(x, t) \psi(t) dt$$

(34′) $$\psi(x) = \lambda \int\limits_{(D_t)} V^{(\omega t)} L(t, x) \varphi(t) dt.$$

Pour trouver les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ nous obtenons les équations

(35) $$\varphi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(D_t)} V^{(\omega t)} \overline{L}(x, t) \varphi(t) dt, \quad \overline{L}(x, t) = \int\limits_{(D_z)} U^{(\omega z)} L(x, z) L(t, z) dz$$

(35′) $$\psi(x) = \lambda^2 \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega t)} \underline{L}(x, t) \psi(t) dt, \quad \underline{L}(x, t) = \int\limits_{(D_z)} V^{(\omega z)} L(z, x) L(z, t) dz$$

dans lesquelles on a evidemment

(36) $$\overline{L}(x, t) = \overline{L}(t, x), \quad \underline{L}(x, t) = \underline{L}(t, x)$$

et à lesquelles, en conséquence, est applicable la théorie des équations au noyau symétrique. Les nombres caractéristique des équations (35) et (35′) sont positifs.

En désignant par $\varphi_k(x)$ et $\psi_k(x)$ les fonctions fondamentales des équations (35) et (35′), il est aisé de s'assurer, que si les fonctions $\varphi_k(x)$ forment un système orthogonal et normal, les fonctions $\psi_k(x)$ le forment aussi.

On voit ensuite que si $h(t)$ est continue et si l'on a

(37) $$g(x) = \int\limits_{(D_t)} U^{(\omega t)} L(x, t) h(t) dt,$$

on a aussi

(38) $$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \int\limits_{(D_x)} V^{(\omega x)} g(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \frac{\int\limits_{(D_t)} U^{(\omega t)} \psi_k(t) h(t) dt}{\lambda_k};$$

si $h(t)$ est continue et si l'on a

(37′) $$g(x) = \int\limits_{(D_t)} V^{(\omega t)} L(t, x) h(t) dt$$

---

[1] E. SCHMIDT. Math. An., B. 63, Seiten 459-467.

on a aussi

$$(38') \qquad g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\int_{(D_x)}U^{(\omega x)}g(x)\psi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k(x)\frac{\int_{(D_t)}V^{(\omega t)}\varphi_k(t)h(t)dt}{\lambda_k}.$$

D'ailleurs, il est facile à remarquer, que pour la réalisation des calculs il suffit que les fonctions $\overline{L}(x, t)$, $\underline{L}(t, x)$ soient bornées, bien entendu, si $U^{(\omega x)}$ et $V^{(\omega x)}$ vérifient quelques conditions complémentaires.

Exemple. Si l'on a $U^{(\omega x)}>0$, $U^{(\omega_0)}\varrho^{\lambda}<B$, $0<\lambda<1$ où ϱ est le rayon de la sphère (ω_0) avec le centre dans un point arbitraire et si $V^{(\omega x)}$ est une fonction quelconque positive et vérifiant la condition (B), par exemple, $V^{(\omega x)}=1$ ou $V^{(\omega x)}=U^{(\omega x)}$, on a

$$(39) \qquad \int_{(D_t)}\frac{U^{(\omega t)}h(t)dt}{r_{x,t}}=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\frac{\int_{(D_t)}U^{(\omega t)}\psi_k(t)h(t)dt}{\lambda_k}$$

où $r_{x,t}$ est la distance entre les points x et t et $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ sont les fonctions fondamentales pour les équations

$$(36_1) \qquad \varphi(x)=\lambda^2\int_{(D_t)}V^{(\omega t)}\overline{L}(x, t)\varphi(t)dt, \quad \overline{L}(x, t)=\int_{(D_z)}U^{(\omega z)}\frac{dz}{r_{xz}r_{tz}}$$

$$(36_1') \qquad \psi(x)=\lambda^2\int_{(D_t)}U^{(\omega t)}\underline{L}(x, t)\psi(t)dt, \quad \underline{L}(x, t)=\int_{(D_z)}V^{(\omega z)}\frac{dz}{r_{xz}r_{tz}}.$$

Si la série

$$(40) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\psi_k(t)}{\lambda_k}$$

est uniformément convergente comme fonction de x et de t, sa somme est égale à $L(x, t)$.

Dans ce cas, si la fonction moyenne $R^{(\omega x)}$ est à variation bornée et si

$$(41) \qquad g(x)=\int_{(D_t)}L(x, t)R^{(\omega t)}dt$$

on a, par exemple,

$$(42) \qquad g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\int_{(D_x)}V^{(\omega x)}g(x)\varphi_k(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(x)\frac{\int_{(D_t)}R^{(\omega t)}\psi_k(t)dt}{\lambda_k}.$$

6. - Les formules d'alinéa 3 peuvent être appliquées aux équations d'une forme plus générale. Introduisons, par exemple, l'expression

$$(43) \qquad \sum_{k=1}^{\infty}U_k^{(\omega y)}L_k(x, y)$$

ou l'expression

$$(43') \qquad \sum_{k=1}^{\infty}V_k^{(\omega y)}(x), \quad V_k^{(\omega y)}(x)=\frac{1}{\omega_y}\int_{(\omega_y)}U^{(\omega y)}L_k(x, y)dy,$$

où $L_k(x, y)$ sont les fonctions continues, assujettissant les termes de la série (43) aux conditions, qui assurent sa convergence; en désignant par A_k la variation de $U_k^{(\omega x)}$ et par M_k la borne supérieure de $|L_k|$, posons, par exemple, pour cela

ou la convergence de la série $\sum\limits_k A_k$, si $M_k < M$;

ou la convergence de la série $\sum\limits_k M_k$, si $A_k < A$.

L'égalité

$$\int\limits_{(D_y)} \sum_1^\infty U_k^{(\omega y)} L_k(x, y) \cdot \varphi(y) dy = \sum_1^\infty \int\limits_{(D_y)} U_k^{(\omega y)} L_k(x, y) \varphi(y) dy \tag{44}$$

étant établie, on peut appliquer la théorie d'alinéa (3) à la solution de l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{(D_t)} \sum_k U_k^{(\omega t)} L_k(x, t) \varphi(t) dt + f(x) = \lambda \int\limits_{(D_t)} \sum_k V_k^{(\omega t)}(x) \varphi(t) dt + f(x). \tag{I$_1$}$$

Il faut seulement faire les changements suivants dans les formules d'alinéa 3: ayant posé

$$L_{k_1, k_2, \dots, k_m}\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} L_{k_1}(x_1, y_1), \dots, L_{k_m}(x_1, y_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ L_{k_1}(x_m, y_1), \dots, L_{k_m}(x_m, y_m) \end{vmatrix} \tag{11$_1$}$$

on écrit à la place des séries (12) les séries

$$\left\{ \begin{aligned} D(\lambda) &= 1 - \lambda \int\limits_{(D_{t_1})} \sum_1^\infty U_k^{(\omega t_1)} L_k(t_1, t_1) dt + \\ &+ \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \int\limits_{(D_{t_1})} \int\limits_{(D_{t_2})} \sum_{k_1=1}^\infty \sum_{k_2=1}^\infty U_{k_1}^{(\omega t_1)} U_{k_2}^{(\omega t_2)} L_{k_1, k_2}\begin{pmatrix} t_1, t_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \dots \\ D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \lambda\Big) &= \sum_{k=1}^\infty U_k^{(\omega y)} L_k(x, y) - \lambda \int\limits_{(D_{t_1})} \sum_{k=1}^\infty \sum_{k_1=1}^\infty U_k^{(\omega y)} U_{k_1}^{(\omega t_1)} L_{k, k_1}\begin{pmatrix} x, t_1 \\ y, t_1 \end{pmatrix} dt_1 + \\ &+ \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \int\limits_{(D_{t_1})} \int\limits_{(D_{t_2})} \sum_{k=1}^\infty \sum_{k_1=1}^\infty \sum_{k_2=1}^\infty U_k^{(\omega y)} U_{k_1}^{(\omega t_1)} U_{k_2}^{(\omega t_2)} L_{k, k_1, k_2}\begin{pmatrix} x, t_1, t_2 \\ y, t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1 dt_2 - \dots \\ D\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} \lambda\Big) &= \sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} U_{k_1}^{(\omega y_1)} \dots U_{k_m}^{(\omega y_m)} L_{k_1, \dots, k_m}\begin{pmatrix} x_1, \dots, x_m \\ y_1, \dots, y_m \end{pmatrix} + \\ &+ \sum_{n=1}^\infty \frac{(-\lambda)^n}{n!} \sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} U_{k_1}^{(\omega y_1)} \dots U_{k_m}^{(\omega y_m)} \int\limits_{(D_{t_1})} \dots \int\limits_{(D_{t_n})} \sum_{l_1} \dots \\ &\dots \sum_{l_n} U_{l_1}^{(\omega t_1)} \dots U_{l_n}^{(\omega t_n)} L_{k_1 \dots k_m, t_1 \dots t_n}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_m, t_1 \dots t_n \\ y_1 \dots y_m, t_1 \dots t_n \end{pmatrix} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned} \right. \tag{12$_1$}$$

qui sont convergentes pour toutes les valeurs de λ. On doit prendre pour la résolvante de l'équation le rapport

$$D\binom{x}{y}\Big|\lambda\Big) : D(\lambda), \tag{45}$$

qu'on peut remplacer par

$$\Gamma^{(\omega_y)}(x, \lambda) = \frac{1}{\omega_y} \int\limits_{(\omega_y)} \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \middle| \lambda\right)}{D(\lambda)} dy. \tag{45'}$$

Avec ces notations l'équation associée à (I_1) a la forme

$$V^{(\omega_y)} = \lambda \int\limits_{(D_x)} \sum V_k^{(\omega_y)}(x) \cdot V^{(\omega_x)} dx + W^{(\omega_y)} \tag{II$_1$}$$

et les formules (14') et (16) donnent les solutions des équations (I_1) et (II_1). La résolvante (45') satisfait aux équations (17') si on y écrit

$$K^{(\omega_y)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} V_k^{(\omega_y)}(x). \tag{46}$$

Les formules (18) et (19') donnent les solutions des équations homogènes correspondantes et les conditions (20) sont les conditions de la résolubilité des équations non homogènes pour λ caractéristique.

A. S. KOVANKO (Baku - U. R. S. S.)

SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES SUR $(-\infty, +\infty)$

CHAPITRE I.

Sur les ensembles de diamètre infini.

§ 1. - Soit sur $(-\infty, +\infty)$ un ensemble E, qui est mesurable dans chaque intervalle fini. Désignons par $E(a, b)$ la partie de E sur l'intervalle (a, b).

$$\delta E(a, b) = \frac{\text{Mes } E(a, b)}{b-a};$$

désigne la densité de E sur (a, b).

Fixons a et faisons tendre b vers $+\infty$. Soit alors

$$\limsup_{b\to\infty} \delta E(a, b) = \delta_1^+ E; \qquad \liminf_{b\to\infty} \delta E(a, b) = \delta_2^+ E;$$

de même

$$\limsup_{a\to-\infty} \delta E(a\cdot b) = \delta_1^- E; \qquad \liminf_{a\to-\infty} \delta E(a\cdot b) = \delta_2^- E.$$

Il est aise de. voir, que $\delta_1^+ E$ et $\delta_2^+ E$ ne dépendent pas de a; de même $\delta_1^- E$ et $\delta_2^- E$ ne dépendent pas de b.

Soit CE le complementaire de E, alors évidemment:

$$\delta_1^+ E = 1 - \delta_2^+ CE; \quad \delta_2^+ E = 1 - \delta_1^+ CE; \quad \delta_1^- E = 1 - \delta_2^- CE; \quad \delta_2^- E = 1 - \delta_1^- CE;$$
$$\delta_1^+(E_1 + E_2) \leq \delta_1^+ E_1 + \delta_1^+ E_2; \quad \delta_1^-(E_1 + E_2) \leq \delta_1^- E_1 + \delta_1^- E_2.$$

Soit $\delta_1^+ E = \delta_2^+ E = \delta^+ E$. Nous dirons alors, que E est mesurable asymptotiquement à droite; de même si $\delta_1^- E = \delta_2^- E = \delta^- E$ nous dirons, que E est mesurable asymptotiquement à gauche.

$\delta^+ E$ et $\delta^- E$ sont respectivement les densités de E a droite et a gauche.

Notons « densité générale » de E,

$$\lim_{\substack{a\to+\infty \\ b\to+\infty}} \frac{\text{Mes } E(a, b)}{b-a}$$

à condition que $(a+b)$ reste fini. Il est aisé de démontrer que cette quantité est égale à $\dfrac{\delta^+ E + \delta^- E}{2}$.

Soit E_1 et E_2 deux ensembles asymptotiquement mesurables, sans points communs; alors $\delta^+(E_1 + E_2) = \delta^+ E_1 + \delta^+ E_2$, de même $\delta^-(E_1 + E_2) = \delta^- E_1 + \delta^- E_2$ donc $\delta(E_1 + E_2) = \delta E_1 + \delta E_2$.

Soit E_1 et E_2 deux ensembles asymptotiquement mesurables avec une partie commune; alors E_1+E_2 est en géneral non mesurable asymptotiquement (de même $(E_1 \cdot E_2)$).

Démontrons cela sur un exemple.

Nous allons construire un ensemble E non mesurable asymptotiquement.

Soit E un ensemble d'intervalles $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 ....$; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 ....$ leurs intervalles contigus (c'est l'ensemble CE).

Soit $\Delta_1=(0, 3)$ $\sigma_1=(3, 12)$; alors $\frac{\text{Mes}\, E(0, 12)}{12}=\frac{1}{4}$. Soit $\Delta_2=(12, 12+x_2)$.

Choisissons x_2 de manière que

$$\frac{\text{Mes}\, E(0, 12+x_2)}{12+x_2}=\frac{3}{4}, \text{ ou } \frac{3+x_2}{12+x_2}=\frac{3}{4},$$

d'où $x_2=24$; par suite $\Delta_2=(12, 36)$. Posons $\sigma_2=(36, +36+x_3)$; où $x_3=72$.

Nous continuons ainsi de suite, en sorte que

$$\frac{3+x_2+x_4+x_6+....+x_{2k}}{3+x_1+x_2+....+x_{2k}}=\frac{3}{4}; \text{ et } \frac{3+x_2+x_4+....+x_{2k}}{3+x_1+x_2+....+x_{2k}+x_{2k+1}}=\frac{1}{4}.$$

Nous avons $\delta_1{}^+E=\frac{3}{4}$; $\delta_2{}^+E=\frac{1}{4}$; donc E est non mesurable asymptotiquement.

Soit $I_k=(k-1, k)$ $(k=1, 2, 3,....)$ un ensemble d'intervalles. Soit E_1 l'ensemble d'intervalles $\left(k, k+\frac{1}{n}\right)$ $(k=0, 1, 2, 3,....)$ (n entier). Évidemment $\delta E_1=\frac{1}{n}$. Prenons dans $I_1, I_2, I_3, ... I_{k_1}$, les intervalles

$$\sigma_k=\left(k+\frac{1}{n}, k+\frac{2}{n}\right);$$

puis nous prenons dans $I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, ... I_{k_2}$, les intervalles

$$\sigma_k'=\left(k, k+\frac{1}{n}\right); \qquad k=k_1+1,...., k_{k_2}$$

puis les σ_k dans $I_{k_2+1} I_{k_2+2} .... I_{k_3}$; puis les σ_k' et ainsi de suite.

Ces intervalles σ_k et σ_k' forment un ensemble E_2; $\delta E_2=\frac{1}{n}$.

Examinons $E_1 E_2$;

$$\frac{\text{Mes}\, E_1E_2(0, k_1)}{k_1}=0; \qquad \frac{\text{Mes}\, E_1E_2(0, k_2)}{k_2}=\frac{k_2-k_1}{nk_2}; \qquad \frac{\text{Mes}\, E_1E_2(0, k_3)}{k_3}=\frac{k_2-k_1}{nk_3};....$$

Soit $\varepsilon<1$ un nombre positif, aussi petit que nous voulons. Les nombres: $k_1, k_2, k_3,....$ sont choisis de sorte que la quantité $\frac{\text{Mes}\, E_1E_2(0, x)}{x}$ ne converge pas vers une limite bien determinée.

Pour cela nous posons

$$\frac{k_1}{k_2}<\varepsilon; \qquad \frac{k_2-k_1}{k_3}<\varepsilon; \qquad \frac{k_1+k_3-k_2}{k_4}<\varepsilon;....$$

Nous avons donc, que E_1E_2 est non mesurable asymptotiquement.

§ 2. - Soit $E_1, E_2, E_3, \ldots$ une suite d'ensembles asymptotiquement mesurables, sans parties communes (deux à deux). Nous avons toujours

$$\sum_{k=1}^{k=n} \text{Mes } E_k(0, x) \leqslant \text{Mes} \sum_{k=1}^{k=\infty} E_k(0, x)$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\text{Mes } E_k(0, x)}{x} \leqslant \frac{\text{Mes} \sum_{k=1}^{k=\infty} E_k(0, x)}{x}.$$

Par suite pour $x \to \infty$ nous avons:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \delta^+ E_k \leqslant \delta_2{}^+ \left\{ \sum_{k=1}^{k=\infty} E_k \right\}$$

quelque soit n; Pour $n \to \infty$ nous avons donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^+ E_k \leqslant \delta_2{}^+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} E_k \right\}$$

en particulier, (si $\sum_1^{\infty} E_k$ est asymptotiquement mesurable) nous avons

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta^+ E_k \leqslant \delta^+ \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} E_k \right\}.$$

Exemple: $E_k = (k, k+1)$; d'où $\delta E_k = 0$; $\sum_1^{\infty} E_k(0, x) = [x]$; par suite $\delta \left\{ \sum_1^{\infty} E_k \right\} = 1$; mais $\sum_1^{\infty} \delta E_k = 0$.

Nous dirons que l'ensemble E est asymptotiquement dense à droite si $\delta^+ E = 1$, à gauche, si $\delta^- E = 1$, en général, si $\delta E = 1$.

THÉORÈME I. - Si E_1 et E_2 sont asymptotiquement denses, il est de même pour leur partie commune $E_1 E_2$.

Démonstration. - Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il est possible de trouver $x_0 > 0$ de manière, que:

$$\text{Mes } E_1(0, x) \geqslant x\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \quad \text{et} \quad \text{Mes } E_2(0, x) \geqslant x\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \qquad \text{pour } x > x_0;$$

d'où

$$\text{Mes } CE_1(0, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot x; \qquad \text{Mes } CE_2(0, x) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \cdot x;$$

mais

$$\text{Mes } C[E_1 E_2](0, x) \leqslant \text{Mes } CE_1(0, x) + \text{Mes } CE_2(0, x);$$

par suite

$$\frac{\text{Mes } CE_1 E_2(0, x)}{x} < \varepsilon \qquad \text{pour } x > x_0;$$

donc

$$\frac{\text{Mes } E_1 E_2(0, x)}{x} \geqslant 1 - \varepsilon;$$

mais comme ε est arbitraire, donc $\delta(E_1E_2)=1$; par suite: $\delta C(E_1E_2)=0$; donc E_1E_2 est asymptotiquement dense. C. q. f. d.

Examinons les ensembles régulièrement disposés.

Nous disons que E est un tel ensemble, si quelque soit a à chaque $\varepsilon>1$ correspond un nombre $x_0>0$ tel, que

$$\left|\frac{\text{Mes}\, E(a, a+x)}{x}-\delta E\right|<\varepsilon;$$

pour $x>x_0$ (x_0 indépendent de a). Il est aise de voir, que $\delta^+E=\delta^-E=\delta E$. La somme de deux ensembles de cette catégorie (sans points communs) est un ensemble de la même catégorie.

THÉORÈME II. - Soit E un ensemble tel, que $\delta E=0$. Soit $\varepsilon>0$ donné d'avance. Soit k_m le nombre d'intervalles $(n, n+1)$ (n entier) dans $(-m, +m)$ où

$$\text{Mes}\, E(n, n+1)<\varepsilon;$$

alors il est possible de trouver un nombre $m_0>0$, tel, que

$$\frac{k_m}{2m}>1-\varepsilon \qquad \text{pour } m>m_0.$$

Démonstration. - Nous avons évidemment un nombre m_0 tel, que

$$\frac{\text{Mes}\, E(-m, +m)}{2m}<\varepsilon^2 \qquad \text{pour } m>m_0;$$

(car CE est asymptotiquement dense). Mais

$$\text{Mes}\, E(-m, +m)\geqslant(2m-k_m)\varepsilon;$$

d'où $\varepsilon\left(\frac{2m-k_m}{2m}\right)<\varepsilon^2$ d'où $\frac{k_m}{2m}>1-\varepsilon$ pour $m>m_0$. C. q. f. d.

CHAPITRE II.

Les fonctions définies sur $(-\infty, +\infty)$.

§ 1. - Nous disons que $f(x)$ est asymptotiquement bornée (1), si quel que soit $\varepsilon>0$, il est possible de trouver deux nombres $M(\varepsilon, f)>0$ et $x_0(\varepsilon, M)>0$ tels, que si E désigne l'ensemble où $|f|<M$ alors

$$\text{Mes}\, E(-x, +x)>2x(1-\varepsilon) \qquad \text{pour } x>x_0.$$

Exemple: $f(x)=n$ sur $(2^n, 2^n+1)$ et $f(x)=0$ hors de ces intervalles $(n=1, 2, 3, ...)$.

THÉORÈME I. - La somme de deux fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$, qui sont « a. b. » est « a. b. ».

(1) Briévement « a. b. ».

Démonstration. - Etant donné $\varepsilon>0$, nous pouvons trouver deux nombres $M>0$ et $x_0>0$ tels, que $|f|<\frac{M}{2}$ sur E_1; et $|\varphi|<\frac{M}{2}$ sur E_2;

$$\text{Mes}\, E_1(-x, +x)>x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right); \qquad \text{Mes}\, E_2(-x, +x)>x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right); \qquad \text{pour } x>x_0.$$

Soit $E=E_1E_2$, alors nous avons Mes $E(-x, +x)\geqslant(1-\varepsilon)\cdot x$ (Chap. I) et sur E nous avons $|f+\varphi|<M$; donc $(f+\varphi)$ est « a. b. ».

THÉORÈME II. - Si $f(x)$ est « a. b. » il est de même pour $|f|$ $[f]^2$ et $|f|^2$.

Démonstration. - Pour $|f|$, cela est évident; $[f]^2$ et $|f|^2$ sont bornés par M^2 si f est borné par M (sur le même ensemble).

THÉORÈME III. - Si f et φ sont « a. b. » $(f\cdot\varphi)$ l'est aussi.

Cela découle immédiatemente de I et II et de l'égalité

$$f\varphi=\frac{(f+\varphi)^2+(f-\varphi)^2}{4}.$$

THÉORÈME IV. - Si $f(x)$ est « a. b. » $f(x+a)$ l'est aussi (évident).

§ 2. - Nous disons que $f(x)$ est asymptotiquement uniformément continu [1], si à tout nombre $\varepsilon>0$ on peut faire correspondre deux nombres $\delta(\varepsilon)$ et $x_0(\varepsilon)$ tels, que $|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon$ pour $|h|<\delta$ sur l'ensemble E;

$$\text{Mes}\, E(-x, +x)>2x(1-\varepsilon)$$

pour $x>x_0$.

THÉORÈME V. - La somme de deux fonctions f et φ, qui sont « a. u. c. » est « a. u. c. ».

Démonstration. - Soit $\varepsilon>0$ donné d'avance. Nous avons deux nombres $\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ et x_0 tels, que

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ sur } E_1$$

et

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2} \text{ sur } E_2$$

pour $|h|<\delta\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$$\text{Mes}\, E_1(-x, +x)>2x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right); \text{ et Mes}\, E_2(-x, +x)>2x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

pour $x>x_0$; d'où

$$\text{Mes}\, E_1E_2(-x, +x)>2x(1-\varepsilon)$$

pour $x>x_0$; mais sur (E_1E_2) nous avons

$$|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}; \qquad |\varphi(x+h)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

d'où

$$|[f(x+h)+\varphi(x+h)]-[f(x)+\varphi(x)]|<\varepsilon$$

pour $|h|<\delta$; « c. a. d. » que $[f(x)+\varphi(x)]$ est « a. u. c. », c. q. f. d.

---

(1) Briévement « a. u. c. ».

THÉORÈME VI. - Si $f(x)$ est « a. u. c. » et « a. b. » $[f(x)]^2$ l'est aussi.

Démonstration. - Soit $\varepsilon>0$. Nous pouvons trouver $M>0$, $\delta>0$ et $x_0>0$ tels, que $|f|<M$ et $|f(x+h)|<M$ sur E_1; $|f(x+h)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2M}$ pour $|h|<\delta$ sur E_2. Pour E_1 et E_2 nous avons:

$$\text{Mes } E_1(-x, +x)>2x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right); \qquad \text{Mes } E_2(-x, +x)>2x\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right);$$

pour $x>x_0$. Mais sur (E_1E_2) nous avons:

$$|[f(x+h)]^2-[f(x)]^2|\leqslant|f(x+h)+f(x)|\cdot|f(x+h)-f(x)|<2M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}=\varepsilon;$$

c'est à dire que $[f]^2$ est « a. u. c. » et « a. b. », c. q. f. d.

THÉORÈME VII. - Le produit de deux fonctions f et φ, qui sont « a. u. c. » et « a. b. » est une fonction « a. u. c. » et « a. b. ».

Démonstration. - Le théorème est évident à cause de V et VI et de l'égalité:

$$f\varphi=\frac{1}{4}\{[f+\varphi]^2-[f-\varphi]^2\}.$$

THÉORÈME VIII. - Si $|f|>A>0$ et $f(x)$ est « a. u. c. » et « a. b. » $\frac{1}{f(x)}$ l'est aussi (évident).

THÉORÈME IX. - Si $f(x)$ est « a. u. c. » $f(x+a)$ l'est aussi (évident).

CHAPITRE III.

Sur l'existence du théorème de la moyenne.

§ 1. - Soit $f(x)$ une fonction sur $(-\infty, +\infty)$ partout sommable.

Examinons la quantité: $\frac{1}{x}\int_0^x fdx.$

Introduisons les notations suivantes:

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{1}{x}\int_0^x fdx=M_1^+\{f\}; \qquad \lim_{x\to\infty} \inf \frac{1}{x}\int_0^x fdx=M_2^+\{f\}.$$

Si $M_1^+\{f\}=M_2^+\{f\}=M^+\{f\}$; nous disons que f a une valeur moyenne à droite.
Analoguement: Soit

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{1}{x}\int_{-x}^0 fdx=M_1^-\{f\}; \qquad \lim_{x\to\infty} \inf \frac{1}{x}\int_{-x}^0 fdx=M_2^-\{f\}.$$

Si $M_1^-\{f\}=M_2^-\{f\}=M^-\{f\}$; $f(x)$ a une valeur moyenne à gauche. Il est aisé de voir que si $M^+\{f\}$ et $M^-\{f\}$ existent, alors

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x}\int_{-x}^{+x} fdx=\frac{M^+\{f\}+M^-\{f\}}{2};$$

Désignons cette limite par $M\{f\}$; Rien ne nous empêche dans la suite (sans restreindre la généralité) de compter $f=0$ pour $x<0$.

Alors $M\{f\}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int\limits_0^x f dx$;

THÉORÈME I. - Si $|f|<A$; alors $|M_1\{f\}|<A$; $|M_2\{f\}|<A$; (évident).

THÉORÈME II. - $\sum\limits_{k=1}^{k=n} M\{f_k\}=M\left\{\sum\limits_{k=1}^{k=n} f_k\right\}$.

THÉORÈME III. - $M\{c\cdot f\}=cM\{f\}$; ($c=$const.).

THÉORÈME IV. - $M(c)=c$; ($c=$const.).

La classe des fonctions pour lesquelles $M\{f\}$ existe est très large. Ici appartiennent les fonctions périodiques, presque périodiques au sens de BOHR (1), et leurs généralisations.

Soit $f(x)$ une fonction sommable, telle, que quel que soit $\varepsilon>0$, il soit possible de trouver un nombre $x_0>0$ tel que $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ pour $x_1>x_0$ et $x_2>x_0$, sur E; où $\text{Mes}\, E(0,x)>x(1-\varepsilon)$ pour $x>x_0$. De plus $f(x)$ est uniformément sommable, c. a. d. qu'à $\varepsilon>0$ et $d>0$ correspond un nombre $\eta>0$ tel, que

$$\left|\int\limits_E f dx\right|<\varepsilon$$

pour $\text{Mes}\, E<\eta$; $DE<d$. Il faut démontrer que $M\{f\}$ existe. [DE désigne le diamètre de E].

Démonstration. - Soit $x=m$ ($m=$entier). Prenons deux nombres $\varepsilon>0$ et $\eta>0\to$(assez petit), éxaminons les intervalles $(n, n+1)$ ($n=$entier) dans $(0, m)$, où $\text{Mes}\, CE(n, n+1)<\eta$.

Soit k_m leur nombre. A cause du (théorème II, chap. I), il est possible de trouver $m_0>0$, que $\frac{k_m}{m}>1-\varepsilon$ pour $m>m_0$.

De l'inégalité $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ (pour $x_1>x_0$ et $x_2>x_0$ sur E) nous pouvons conclure qu'il existe un nombre fixe A tel, que: $|f(x)-A|<\varepsilon$ pour $x>x_0$ sur E.

Prenons l'intervalle $(n, n+1)$ où $\text{Mes}\, CE(n, n+1)<\eta$; nous avons:

$$\left|\int\limits_n^{n+1}(f-A)dx\right|\leq\left|\int\limits_{E(n,n+1)}(f-A)dx\right|+\left|\int\limits_{CE(n,n+1)}(f-A)dx\right|<$$
$$<\varepsilon\,\text{Mes}\, E(n, n+1)+\varepsilon<2\varepsilon.$$

Sur chaque intervalle $(n, n+1)$, où $\text{Mes}\, CE(n, n+1)<\eta$, nous avons:

$$\left|\int\limits_n^{n+1}(f-A)dx\right|<g$$

(1) Acta Math., t. 45.

(g fixe), a cause de la sommabilité uniforme. Donc:

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^m (f-A)\,dx\right| < 2\cdot\varepsilon\cdot\frac{k_m}{m} + g\left(1-\frac{k_m}{m}\right) < 2\varepsilon + g\varepsilon = \varepsilon(g+2)$$

pour $m > m_0$; d'où nous avons

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\int_0^m (f-A)\,dx = 0$$

où $M\{f\} = A$; s. q. f. d.

§ 2. - Soit $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,.... une suite de fonctions mesurables sur $(-\infty, +\infty)$. Nous disons que la suite converge asymptotiquement uniformément ([1]) sur $(-\infty, +\infty)$ vers $f(x)$ si:

1) Elle converge presque partout vers $f(x)$.

2) Soit E l'ensemble des points sur lequel $|f-f_n| > \varepsilon$; alors il existe deux nombres $x_0(n)$ et N tels, que $\dfrac{\text{Mes } E_n(-x, +x)}{2x} < \varepsilon$ pour $x > x_0(n)$ et pour $n > N$.

THÉORÈME V. - Soit une suite de fonctions mesurables: $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$,.... sur $(-\infty, +\infty)$, qui converge « a. u. » vers $f(x)$.

Les fonctions de la suite sont également uniformément ([2]) sommables; alors si $M\{f_n\}$ existe, $M\{f\}$ existe aussi, et

$$\lim_{n=\infty} M\{f_n\} = M\{f\}.$$

Démonstration. - A cause de la théorie du passage à la limite sous le signe de l'intégrale, nous avons:

$$\lim_{n=\infty} \int_E f_n\,dx = \int_E f\,dx$$

sur chaque ensemble E de diamètre fini.

Comme les fonctions $\{f_n\}$ $(n=1, 2, 3,....)$ sont « é. u. » sommables, nous avons que $f(x)$ est uniformément sommable. Par suite $(f-f_n)$ est « é. u. » sommable pour chaque n; donc

$$\left|\int_E (f-f_n)\,dx\right| < 2\varepsilon$$

pour Mes $E < \eta$; $DE < d$.

Examinons les intervalles $(k, k+1)$ (k = entier) où Mes $E_n(k, k+1) < \eta$; E_n désigne l'ensemble où $|f-f_n| > \varepsilon$.

Nous avons évidemment:

$$\left|\int_k^{k+1} (f-f_n)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \text{ Mes } CE_n(k, k+1) + \left|\int_{E_n(k,\,k+1)} (f-f_n)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \text{ Mes } CE_n(k, k+1) + 2\varepsilon < 3\varepsilon.$$

([1]) Briévement « a. u. ».

([2]) Briévement « é. u. » c'est à dire à $\varepsilon > 0$ et $d > 0$ correspond un nombre $h > 0$ tel, que $\left|\int_E f_n\,dx\right| < \varepsilon$ pour Mes $E < \eta$ $DE < d$ et chaque n.

Pour les intervalles $(k, k+1)$, où Mes $E_n(k, k+1) > \eta$, nous avons un nombre g (fixe) tel, que

$$\left|\int_k^{k+1} (f-f_n)dx\right| < g.$$

Soit k_m le nombre d'intervalles $(k, k+1)$ dans $(0, m)$ tels, que

$$\text{Mes}\, E_n(k, k+1) < \eta\,;$$

alors nous avons (chap. I, théor. II) un nombre $m_0 > 0$ tel, que $\frac{k_m}{m} > 1-\varepsilon$ pour $m > m_0$. Nous avons ainsi:

$$\left|\int_0^m (f-f_n)dx\right| \leqslant 3\varepsilon \cdot k_m + g(m-k_m) < 3\varepsilon \cdot m + gm\varepsilon = \varepsilon m(g+3);$$

donc

$$\left|\frac{1}{m}\int_0^m (f-f_n)dx\right| < \varepsilon(g+3)\,;$$

d'où nous avons à conclure, que $\lim\limits_{n\to\infty} M\{f_n\} = M\{f\}$.

Corollaire 1. Si $|f_n(x)| < \varphi(x)$ où $\varphi(x)$ est une fonction positive uniformément sommable et si $M\{f_n\}$ existe et $\{f_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ converge « a. u. » vers $f(x)$, alors $\lim\limits_{n=\infty} M\{f_n\} = M\{f\}$.

Corollaire 2. Si $M\{f_n\}$ existe et $\{f_n\}$ converge uniformément vers $f(x)$, alors $\lim\limits_{n=\infty} M\{f_n\} = M\{f\}$.

§ 3. - THÉORÈME VI. - Soit $f(x)$ une fonction définie sur $(-\infty, +\infty)$. Si pour chaque fonction $\varphi(x)$ sur $(-\infty, +\infty)$ nous avons $M\{f\varphi\} = 0$, alors, quel que soit $\varepsilon_1 > 0$, nous avons $|f| < \varepsilon_1$ sur un ensemble asymptotiquement dense.

Démonstration. - Comme $M\{f\varphi\} = 0$, alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il est possible de trouver un nombre $x_0 > 0$ tel que

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f\varphi dx\right| < \varepsilon$$

pour $x > x_0$. Soit E_ε l'ensemble, où $|f| > \sqrt{\varepsilon}$; alors en choisissant $\varphi(x)$ de manière, que $f\varphi > 0$; nous avons

$$\frac{1}{x}\int_0^x f\varphi dx < \varepsilon\,;$$

mais

$$\frac{1}{x}\int_0^x f\varphi dx \geqslant \frac{1}{x}\int_{E_\varepsilon(0,x)} f\varphi dx > \frac{\sqrt{\varepsilon}}{x}\int_{E_\varepsilon(0,x)} |\varphi|\, dx;$$

par suite

$$\frac{1}{x}\int_{E_\varepsilon(0,x)} |\varphi|\, dx < \sqrt{\varepsilon}.$$

Posons $|\varphi|=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ sur $E_\varepsilon(0,x)$; alors nous avons:

$$\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\text{Mes}\,E_\varepsilon(0,x)<\sqrt{\varepsilon};$$

ou Mes $E_\varepsilon(0,x)<\varepsilon x$. Par suite Mes $CE_\varepsilon(0,x)>x(1-\varepsilon)$ pour $x>x_0$. Sur CE_ε nous avons $|f|\leqslant\sqrt{\varepsilon}$. Comme ε est arbitraire, CE_ε est asymptotiquement dense. Nous avons à poser $\varepsilon=\varepsilon_1^2$. Nous avons de même le cas où $\varphi(x)$ est absolument continue et bornée.

THÉORÈME VII. - Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions sur $(-\infty,+\infty)$. $Q(x)$ étant absolument continue et bornée (donc $\frac{dQ}{dx}$ existe p. p.). Si pour chaque fonction $\varphi(x)$, absolument continue et bornée $M\{P\varphi+Q\varphi'\}=0$, alors quel que soit $\varepsilon_1>0$, $\left|P-\frac{dQ}{dx}\right|<\varepsilon_1$ sur un ensemble asymptotiquement dense.

Démonstration. - Quel que soit $\varepsilon>0$, nous avons un nombre $x_0>0$ tel, que

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x[P\varphi+Q\varphi']dx\right|<\varepsilon$$

pour $x>x_0$; où

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x P\varphi dx+\frac{1}{x}[Q\varphi]_0^x-\frac{1}{x}\int_0^x\varphi\frac{dQ}{dx}dx\right|<\varepsilon.$$

Pour $x\to\infty$, nous avons:

$$M\left\{\left[P-\frac{dQ}{dx}\right]\varphi\right\}=0.$$

Par suite à cause de VII, nous avons quelque soit $\varepsilon_1>0$

$$\left|P-\frac{dQ}{dx}\right|<\varepsilon_1,$$

sur un ensemble asymtotiquement dense. C. q. f. d.

J. REY PASTOR (Madrid - Buenos Aires)

PROLONGACIÓN ANALÍTICA Y SUMACIÓN DE SERIES DIVERGENTES

1. - El problema de la sumación de series e integrales divergentes, ha dado origen modernamente a una literatura tan copiosa (recopilada por SMAIL) que hace sospechar su identidad con el problema central de la Teoría de funciones, o sea la prolongación analítica.

Conocida es la definición de EULER (1745) antes de que se estableciera el concepto de suma como límite: « Summa cujusque seriei est valor expresionis illius finitae ex cujus evolutione illa series oritur ».

BOREL, PRINGSHEIM, KNOPP,.... han rechazado rotundamente esta definición euleriana, aduciendo el ejemplo

$$1-1+1-1+1-.... \qquad (1)$$

que, si bien nace de la serie $1:(1-x)$ para $x=1$, y, por tanto, se le puede asignar $\frac{1}{2}$ como suma, « la misma serie podría proceder de otras expresiones analíticas totalmente distintas, y se obtendría otro valor, por ejemplo

$$\frac{1+x}{1+x+x^2}=\frac{1-x^2}{1-x^3}=1-x^2+x^3-x^5+x^6-x^8-.... \qquad (2)$$

que para $x=1$ vale $\frac{2}{3}$ » (1).

Para medir el valor de esta clásica objeción a la definición euleriana (2), es preciso, ante todo, recordar que cada serie está definida por una función u_n del índice; dar una serie no es definir un *conjunto* de números, sino una

(1) KNOPP, Theorie und Anwendungen der unendlichen Reihen.

(2) BOREL dice: « Si dans un calcul, on est conduit à la série (1) on peut, *en général*, la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement, au cours d'une recherche objective; et non d'expressions construites artificiellement avec le souci de mettre justement la règle d'Euler en défaut ».

Esa falta de premeditación por parte del calculista que parece exigir el insigne analista francés para la validez de la definición euleriana, hace depender la suma, no ya de la coordinación de los términos con la serie natural, sino de un factor subjetivo, inadmisible en una definición matemática. Además, esos mismos ejemplos, malintencionadamente preparados, pueden presentarse en otros problemas, propuestos con absoluta ingenuidad.

coordinación de un conjunto con la serie natural. Por tanto: la alteración del orden, la asociación, la intercalación de ceros, producen series distintas, que sólo en ciertos casos tienen sumas iguales. Ahora bien, como ya hizo notar LAGRANGE, la serie (2) no produce la (1) para $x=1$, sino la

$$1-0+1-1-0+1-1-0+\ldots.$$

cuya suma, por cualquiera de los métodos conocidos, es y debe ser $\frac{2}{3}$.

Euler poseía sin duda el concepto más general de suma, que comprende al de convergencia de Cauchy y al de suma generalizada, posteriormente introducido; y su definición parece preferible a todas las demás, si se precisa así: « Suma de una serie $\sum u_n$ es el valor que toma en el punto $x=1$ la función analítica cuyo desarrollo es $\sum u_n x^n$ ».

Si 1 es punto singular de la función, o está fuera de su campo de existencia, la serie no es sumable. Si la función no es uniforme, pueden resultar varias sumas, de igual modo que acontece a las integrales; pero si convenimos en adoptar el valor $f(1)$ que resulta por prolongación radial a partir de 0, el valor es único y toda serie potencial $\sum a_n z^n$ es sumable en su estrella M (estrella principal de MITTAG-LEFFLER), pudiendo serlo incluso en los puntos esenciales de la función $f(z)$ que dicha serie define, cuando existe límite para $z=z_0$, o sea: lim $f(tz)$ para $t=1^-$.

2. - Partiendo de esta definición euleriana resultan inmediatamente las propiedades aritméticas:

a) $$\sum u_n \pm \sum v_n = \sum (u_n \pm v_n)$$

b) $$\sum k u_n = k \sum u_n$$

c) Si se agregan o suprimen términos iniciales nulos, en número finito, no varía la suma, pues la función generatriz queda multiplicada o dividida por una potencia de t. Si se agregan o suprimen ceros intermedios, las dos series son sumas de sumandos iguales y tienen la misma suma; pero si se agregan o suprimen infinitos ceros, ésta puede variar.

d) La propiedad asociativa y disociativa aplicada un número finito de veces, se reduce al caso anterior, y no cambia la suma.

Subsisten, pues, todas las propiedades de las series simplemente convergentes; y además se verifica con toda generalidad el teorema del producto.

e) La serie deducida de dos series sumables, por la regla de Cauchy, es también sumable y su suma es el producto de las sumas de ambas.

TOEPLITZ, PERRON, SCHUR, NÖRLUND, RIETSZ, JACOBSTHAL, KNOPP, KOJIMA,... han estudiado las condiciones para que un algoritmo satisfaga al principio de conservación de la convergencia (principio llamado de permanencia o de consistencia); HURWITZ impone además la condición de que conserve el límite $+\infty$

y el $-\infty$; pero, según la definición euleriana, es condición previa para todos los métodos, para no exponerse a contradicciones en la aplicación de los mismos, su analiticidad, la cual cumplen, en efecto, todos los métodos clásicos de sumación lineal o integral, los cuales conservan la suma ordinaria de las series potenciales dentro de su círculo de convergencia y, por tanto, fuera de él, en la zona en que cada uno es aplicable, dan la misma suma, siendo, por consiguiente, equivalentes en la parte común a los dos campos de sumabilidad.

Esta equivalencia de sumas no es tan inmediata cuando es infinito $\overline{\lim} \sqrt[n]{|u_n|}$; series, que después estudiaremos.

3. - Para estudiar la influencia de la coordinación de los términos con los números naturales, sin alterar el orden, o sea la variación de suma que puede producir la intercalación de ceros entre los términos de una serie, utilizaremos, por ejemplo, el método de Cesàro; y aplicado el criterio de permanencia de límite de los algoritmos lineales, resulta después de cálculo sencillo:

La condición necesaria y suficiente para que no altere la suma de cualquier serie por intercalación de $\delta_n - 1$ ceros entre a_n y a_{n+1} ($n=0, 1, 2, 3,....$) es:

$$\sum_{m=0}^{n-1} m\,|\,\delta_m - \delta_{m-1}\,| + n\delta_{n-1} < k \sum_{m=0}^{n-1} \delta_m.$$

Tal sucede, por ejemplo, en los casos siguientes:

a) Si δ_n se conserva constante desde un lugar en adelante.

b) Si cada δ_n es menor que el promedio de los anteriores, por un número fijo, desde un lugar en adelante.

c) En particular: si δ_n es función entera de n de cualquier grado.

Así, por ejemplo, las series $\sum a_n z^{2n}$ se pueden sumar indiferentemente en la forma $\sum a_n (z^2)^n$ o bien en esta otra: $\sum b_n z^n$ siendo $b_{2n} = a_n$ y $b_{2n-1} = 0$, resultando igual suma, aunque no en el mismo campo de sumabilidad, pues uno es trasformado conforme del otro por la trasformación z^2.

4. - Mientras el método C no da la suma de las series potenciales fuera del círculo de convergencia, el método E efectúa la prolongación analítica fuera de la circunferencia, si ésta no es frontera natural (por ejemplo, para la serie geométrica resulta un círculo de radio doble); el método B da la prolongación en todo el polígono de sumabilidad, y el de LE ROY, completado por MITTAG-LEFFLER, extiende el campo a toda la estrella. Son estos métodos, que efectúan la prolongación analítica, los únicos de que nos ocuparemos.

Es sabido que el método B define la suma por la expresión:

(1) $$s = \lim_{t=\infty} e^{-t} s(t)\,; \quad s(t) = s_0 + s_1 \frac{t}{1!} + \,....\, + s_n \frac{t^n}{n!} + ...$$

y, además de este método exponencial, BOREL ha dado otro « très proche parente, bien que distincte », el cual da como suma:

$$(2) \qquad s' = \int_0^\infty e^{-t} \cdot u(t) dt, \quad u(t) = \sum \frac{u_n t^n}{n!}.$$

La relación existente entre ambos ha dado origen a discusiones, siendo objeto de varias memorias de BOREL, HARDY, PERRON,....; pero nos parece que la cuestión se resuelve en dos líneas, como indicamos en nota al pie, demostrando al mismo tiempo el directo y la falsedad del recíproco (1).

Sin embargo, esta dualidad de métodos no equivalentes, nos parece inútil y fácilmente evitable, sin más que adoptar como suma exponencial:

$$(1') \qquad \lim e^{-t}\sigma(t), \text{ siendo: } \sigma(t) = s_0 \frac{t}{1!} + s_1 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

es decir, como función sumatriz la primitiva de $s(t)$; y entonces, de la relación evidente:

$$De^{-t}\sigma(t) = e^{-t}[\sigma'(t) - \sigma(t)] = e^{-t} \cdot u(t)$$

resulta la igualdad:

$$(3) \qquad s = \int_0^\infty e^{-t} \cdot u(t) dt = \lim_{t=+\infty} e^{-t} \cdot \sigma(t)$$

elevándose así el alcance del método exponencial, equiparándolo con el integral y resultando ambos equivalentes.

Parece no haber sido notado todavía, que en el Cálculo de las diferencias

---

(1) He aquí el resumen de la discusión:

BOREL afirma sin demostración rigurosa: si existe (1) también existe (2) y es $s = s'$ (1ª edición).

HARDY (Quartely Journal, 35, pag. 22-66) dice categóricamente: « de (1) no se deduce (2) ».

PERRON (Mat. Zeit. 6, pág. 158-160) dice: « Borel no ha vuelto después sobre el asunto y parece, por tanto, haber quedado conforme con Hardy; voy a demostrar que la afirmación de Hardy no es cierta; la demostración de Borel es falsa, pero la tesis es casualmente exacta ».

Para ello comienza estableciendo un lema, que Hardy demuestra « auf sehr umständlicher Weise » (según Perron) quien logra simplificarlo, integrando una ecuación diferencial; demostrado el lema, de él deduce el teorema de Borel.

Creemos que el laborioso método de Hardy y los menos complicados de Perron, Ricotti, etc., se evitan, como arriba indicamos, adoptando la función σ en vez de la s; pero, aun en el caso de insistir en adoptar la s, sobra también todo ello, pues la demostración del teorema de Borel se reduce a ésto:

Si existe $\lim s(t) : e^t$, en virtud de la regla de l'Hôpital debe existir también $\lim \sigma(t) : e^t$ es decir, converge la integral de Borel.

En cambio, es bien sabido que el paso inverso en la regla de l'Hôpital, no es legítimo; y los mismos ejemplos que se dan en los cursos elementales de Cálculo para probar que puede existir el límite de un cociente, sin existir el del cociente de derivadas, sirven para probar que hay series sumables por (2), que no son sumables por (1).

se puede organizar una teoría análoga, de sumación de series. Como la función correlativa de e^t es 2^t, se obtienen las siguientes expresiones para la suma:

$$s = \lim 2^{-t}\sigma(t), \qquad \text{donde} \qquad \sigma(t) = s_0 \frac{t^{(1}}{1!} + s_1 \frac{t^{(2}}{2!} + \dots$$

siendo $t^{(n} = t(t-1)\dots(t+n+1)$; y como se verifica, evidentemente, la igualdad correlativa:

$$\Delta 2^{-t}\sigma(t) = 2^{-t-1}[\sigma^{(1}(t) - \sigma(t)] = 2^{-t-1} \cdot u(t)$$

siendo

$$u(t) = u_0 + u_1 \frac{t^{(1}}{1!} + u_2 \frac{t^{(2}}{2!} + \dots,$$

resulta la nueva fórmula:

$$s = \frac{1}{2} \sum_0^\infty 2^{-t} \cdot u(t) = \lim_{t \to +\infty} 2^{-t}\sigma(t);$$

pero $u(n) = (u_0 + u_1)_n$, luego resulta el clásico método de EULER. Por tanto: El método de BOREL es correlativo del de EULER y ambos se pueden desarrollar paralelamente, tanto en su forma exponencial como integral; pero no es necesario hacerlo, pues sus propiedades resultan como caso particular del método general, que luego trataremos.

6. - Efectuando la multiplicación $e^{-t}\sigma(t)$, resulta como suma B de la serie $\sum u_n$:

$$(4) \qquad \lim_{t \to +\infty} \left[u_0 \frac{t}{1!} + \Delta u_0 \frac{t^2}{2!} + \dots + \Delta^n u_0 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \right]$$

expresión que puede ser útil en muchos problemas.

Recíprocamente: el límite para $t \to +\infty$ de cualquier trascendente entera, escrita en la forma normal $\sum a_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$ viene dado por la serie numérica, convergente o divergente: $\sum (a_0 + a_1)_n$, o sea:

$$s = a_0 + (a_0 + a_1) + (a_0 + 2a_1 + a_2) + \dots$$

7. - SANNIA (Atti Acc. Tor. 51, pág 67 y Rend. Pal. 42) ha demostrado que el teorema del producto en el método B es válido sin exigir la sumabilidad absoluta, bastando la convergencia de las integrales

$$\int_0^\infty e^{-t}u(t)dt, \qquad \int_0^\infty e^{-t}v(t)dt, \qquad \int_0^\infty e^{-t}v'(t)dt,$$

es decir, la sumabilidad B de una serie y B' de la otra. Su demostración se apoya en un cambio ilegítimo de variables en la integral doble que aparece en la elegante demostración de BOREL; pero no sólo la demostración, sino también la propiedad es inexacta. En efecto, basta fijarse en las series que tienen como funciones asociadas:

$$u(t) = \frac{\text{sen } t}{\sqrt{t+a}} e^t, \qquad v(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{t+a}} e^t \qquad (a > 0)$$

las cuales son sumables B', por ser convergentes las integrales

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{t+a}}\,dt, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t+a}}\,dt, \qquad \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{(t+a)^{\frac{3}{2}}}\,dt, \qquad \int_0^\infty \frac{\cos t}{(t+a)^{\frac{3}{2}}}\,dt$$

y sin embargo, la integral de BOREL que corresponde a la serie producto, es el límite, para $a \to \infty$, de

$$\int_0^a e^{-x} w(x)\,dx = \iint_T e^{-(x+y)} u(x) v(y)\,dx \cdot dy$$

extendida sobre el triángulo $(0, 0)$ $(0, a)$ $(a, 0)$; y esta integral vale en el ejemplo citado:

$$\iint_T \frac{\operatorname{sen} x \cdot \cos y}{\sqrt{(x+a)(y+a)}}\,dx \cdot dy = \frac{1}{2} \iint_T \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\sqrt{(x+a)(y+a)}}\,dx \cdot dy,$$

que carece de límite para $a \to +\infty$; luego la serie producto no es sumable B.

El señor DURAÑONA en su tesis ha demostrado que basta la convergencia de las integrales

$$\int_0^\infty e^{-t} u(t)\,dt, \qquad \int_0^\infty e^{-t} |v(t)|\,dt, \qquad \int_0^\infty e^{-t} |v'(t)|\,dt,$$

para asegurar la validez del teorema del producto en el método B.

8. - Como el campo de sumabilidad B coincide con el de sumabilidad absoluta, excepto el contorno, según demostró PRAGMEN, resulta que el caso en que no es aplicable la regla del producto en el método B sólo puede presentarse cuando el punto 1 está en el contorno del polígono.

De acuerdo con la definición euleriana, ampliaremos el campo de aplicación del método B, introduciendo una variable α y definiremos como suma generalizada B, o suma AB (por analogía con el método de ABEL) al valor $f(1)$ de la función $f(\alpha)$; y si la serie dada es $\sum a_n z^n$, su suma AB será $f(z, 1)$ siendo:

$$f(z, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} u(t)\,dt.$$

Así, por ejemplo, para la serie geométrica $\sum z^n$, resulta:

$$f(z, \alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} e^{zt}\,dt = \frac{1}{\alpha - z}; \qquad f(z, 1) = \frac{1}{1-z}$$

para todo z, excepto $z = 1$.

Si no se consigue la prolongación analítica fuera del polígono, se tomará para los puntos de contorno $\lim f(z, \alpha)$, para $\alpha \to 1$, como en el método de Abel.

9. - M. BOREL, en sus numerosas publicaciones sobre sumación de series divergentes y especialmente en su precioso libro, insiste muy repetidamente

(págs. 151, 153, 161, 197, 211, 213, 214) en que la teoría es *independiente* del problema de la prolongación analítica ([1]). Más exacto parece decir que se puede desarrollar independientemente de ella, como hace en dicha obra, aunque el prescindir de tal apoyo complica su desarrollo.

Hay, sin embargo, un caso en que la afirmación del genial geómetra conserva todo su valor; es el de las series de radio nulo, para las cuales carece de sentido el problema de la prolongación analítica, que podemos enunciarlo así: Dados los valores $f^n(0)$ $(n=0, 1, 2, 3, ...)$ (para lo cual basta conocer $f(z)$ en un continuo que contenga a 0) calcular $f(z)$ en todo punto de su campo de existencia. La condición necesaria y suficiente para que exista una función tal que $f^n(0)=a_n \cdot n!$ es: $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ *finito*; y, sin embargo, vamos a ver que, aun en el caso de límite infinito, o sea radio nulo, el problema de la sumación puede considerarse también como una prolongación analítica, en sentido más amplio.

Para esto, basta considerar derivadas *laterales*, esto es, derivadas obtenidas haciendo variar z en un ángulo cuyo vértice sea el punto considerado; cuando todas ellas existan y sean finitas, diremos que el punto es *semirregular*. Así, por ejemplo, las derivadas de la función $e^{-\frac{1}{z}}$ en el punto 0, en cualquier ángulo interior al semiplano $x>0$, son todas nulas; y al sumar funciones del tipo $e^{\frac{h}{z^m}}$ (multiplicadas por polinomios cualesquiera en z) a una función, no se alteran sus derivadas en 0.

Pero hay una clase de funciones, que llamaremos *semianalíticas* en 0, las cuales están determinadas unívocamente por sus valores $f^n(0)$, que pueden darse arbitrariamente, con limitación de su orden de crecimiento para $n \to \infty$, el cual puede ser ser muy superior al de las funciones holomorfas en 0.

10. - Llamamos *semianalíticas* en 0 a las funciones definidas por cualquier proceso uniforme de convergencia en un semientorno de 0, o sea:

$$f(z)=\lim_{t \to a} F(t, z) \tag{A}$$

siendo F cualquier función analítica de z y holomorfa en 0, es decir:

$$F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) z^n$$

con *generatrices* reales o complejas $\varphi_n(t)$, tales que:

$$\lim_{t \to a} \varphi_n(t)=1, \qquad \sum |\varphi_n(t)-\varphi_{n+1}(t)|<M. \tag{1}$$

([1]) « Nous avons tenu a montrer que la théorie des séries sommables en est indépendante », pág. 151.

Tales funciones se pueden expresar también en cualquiera de estas dos formas, equivalentes a la (A), pasándose fácilmente de cada una a las otras dos:

(B) $$f(z)=\sum_{t=0}^{\infty} F(t, z), \quad \text{siendo} \quad F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \beta_n(t) z^n$$

con la condición:

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t)=1;$$

(C) $$f(z)=\int_0^{\infty} F(t, z)\,dt, \quad \text{siendo} \quad F(t, z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \alpha_n(t) z^n .$$

con la condición

(3) $$\int_0^{\infty} \alpha_n(t)\,dt=1$$

o más general, a lo largo de una curva c cualquiera.

Suponiendo la continuidad uniforme al derivar estos procesos de convergencia, resulta:

(4) $$f^n(0)=\lim_{t \to a} F_z^n(t, 0)=n!\, a_n$$

y lo mismo en los tipos (B) y (C).

Por tanto, cualquier función analítica holomorfa en 0, es decir, representada por una serie: $\sum a_n z^n$ de radio $R>0$, puede expresarse en cualquiera de las formas (A), (B) o (C), por los métodos ya clásicos de sumación, que pueden resumirse así:

Abel: $\varphi_n(t)=t^n$ $\quad (t \to 1)$

Cesaro, C^1: $\varphi_n(t)=1-\frac{n}{t}$ si $n<t$; $\varphi_n(t)=0$ si $n \geqslant t$. $\quad (t \to \infty)$

Cesaro, C^k: $\varphi_n(t)=\frac{t^{(n}}{(t+k)^{(n}}$ » » $\quad (t \to \infty)$

Hölder, H^k: $\varphi_n(t)=\left(1-\frac{n}{t}\right)^k$ $\quad (t \to \infty)$

Riesz, R^k: $\varphi_n(t)=\left(1-\frac{\lambda(n)}{\lambda(t)}\right)^k$ $\quad (t \to \infty)$

Lambert: $\varphi_n(t)=n t^n \frac{1-t}{1-t^n}$ $\quad (t \to 1)$

Le Roy: $\varphi_n(t)=\frac{(nt)!}{n!}$ $\quad (t \to 1)$

Vallée-Poussin: $\varphi_n(t)=t^{(n} \cdot t^{(-n}$ $\quad (t \to \infty)$

Plancherel: $\varphi_n(t)=t^{(n}(t+1)^{(-n}$ $\quad (t \to \infty)$

Borel (exponencial): puede expresarse por la generatriz $1-e^{-t} E_n(t)$; pero es más cómodo expresarlo, como se acostumbra, linealmente en las s_n y los coeficientes son $e^{-t} \frac{t^n}{n!}$.

Wiener: Los coeficientes de las s_n son, análogamente: $\frac{2t}{\pi n^2} \operatorname{sen}^2 \frac{n}{t}$.

Perron: $\varphi_n(t)=f(\theta_n t)$ siendo $f(t)$ creciente de 0 a 1 para: $t \to \infty$ y θ_n decreciente, con límite 0.

11. - El método más importante de sumación en las formas (B) y (C), que llamaremos *método de los momentos*, y que comprende a los métodos más eficaces conocidos, consiste en adoptar como generatrices, funciones del tipo

$$\alpha_n(t)=\frac{\alpha(t)t^n}{\mu_n}, \qquad \beta_n(t)=\frac{\beta(t)t^{(n}}{\mu_n}$$

siendo los denominadores los momentos de órdenes sucesivos (por sumación o integración):

$$\mu_n=\int_c \alpha(t)t^n\cdot dt, \qquad \mu_n=\sum_0^\infty \beta(t)t^{(n}$$

a fin de que se cumplan las condiciones (2) y (3). La generatriz $\alpha(t)$ o la $\beta(t)$ debe tener todos sus momentos distintos de 0.

En este método general está incluído el indicado por BROMWICH para los momentos integrales y, en particular, los métodos bien conocidos;

EULER:	$\beta(t)=2^{-t}$	$\mu_n=2\cdot n!$	
BOREL:	$\alpha(t)=e^{-t}$	$\mu_n=n!$	$c(0-\infty)$
LE ROY:	$\alpha(t)=\frac{1}{p}e^{-t^{\frac{1}{p}}}\cdot t^{\frac{1}{p}-1}$	$\mu_n=(np)!$	$c(0-\infty)$
LE ROY:	$\alpha(t)=l\left(\frac{1}{t}\right)^p$	$\mu_n=\frac{p!}{(n+1)^{p+1}}$	$c(0-\infty)$

método que para $p=-2$ equivale al de integración. Este método elemental, que se aplica para deducir algunas series, como, por ejemplo, la logarítmica, queda incluido en el tipo (C) cuando se adopta el intervalo $(0-1)$ y la generatriz 1.

El método de MITTAG-LEFFLER coincide con el primero de LE ROY, haciendo tender p a 1 para alcanzar cualquier punto de la estrella principal de la función.

Puede llamarse método de PARSEVAL, al definido por la generatriz

$$\alpha(t)=\frac{\mu_0}{t}+\frac{\mu_1}{t^2}+\frac{\mu_2}{t^3}+\frac{\mu_3}{t^4}+\dots$$

siendo el camino de integración una curva cerrada que contenga en su interior al origen.

En el tipo (B) están incluidos casi todos los métodos usuales de representación de funciones por series de polinomios o de funciones racionales.

12. - Otros muchos métodos pueden proponerse, sin que ninguno de ellos, ni de los anteriores, pueda alegar supremacía absoluta sobre los otros, pues cada uno de ellos es adecuado solamente para ciertos tipos de series. Por ejemplo:

$$\alpha(t)=e^{-t^{\frac{1}{p}}}, \qquad \mu_{n-1}=\frac{1}{n}(np)!$$

y en particular:

$$\alpha(t)=e^{-\sqrt{t}}, \qquad \mu_n=2(2n+1)!$$

método que no debe confundirse con el método e^{t^k} de BOREL, que supone k

natural y equivale a elegir solamente valores $n=km$, repitiendo cada momento k veces.

En particular, para $p=\frac{1}{2}$ resulta:

$$a(t)=e^{-qt^2}; \qquad \mu_{2m}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{q}}(2m-1)!!\,(2q)^{-m}; \qquad \mu_{2m+1}=\frac{1}{2}m!\,(2q)^{-m-1}$$

método ventajoso utilizando solamente momentos de orden par o impar.

Tambien puede adoptarse como generatriz:

$$a(t)=\frac{1}{e^t-1}, \qquad \mu_n=n!\,s_{n+1}$$

y será útil solamente en series en que aparezcan las sumas s_i, tan frecuentes en muchas cuestiones de Análisis.

También de aplicación muy restringida es el siguiente:

$$a(t)=e^{-t}\cdot lt, \qquad \mu_n=\Gamma'(n+1).$$

Más general es este otro: especialmente para series en que figuran factoriales con signos $++--++--++--++\ldots$ y tomando solamente momentos de orden par o impar

$$a(t)=e^{-t}\,\mathrm{sen}\,t, \qquad \mu_n=n!\,2^{-\frac{n+1}{2}}\cdot\mathrm{sen}\,\frac{n+1}{4}\pi, \qquad \mu_{2m}=\pm\frac{(2m)!}{2^{m+1}}.$$

13. - Todos los métodos de sumación y prolongación analitíca estriban, pues, en un doble proceso: uno de sumación de expresión finita o serie, y después un paso al límite, bien directamente o en forma de serie o de integral. Prefijar la función generatriz o sucesión de generatrices, como hacen los creadores de diversos métodos, es restringir el campo de las series sumables. Más conveniente parece plantear así el problema: Dada una serie, elegir la generatriz en el cuadro de las que tienen momentos conocidos, para que la función asociada resulte fácilmente sumable.

Así, por ejemplo, si en los coeficientes figura el factor

$$(2n+1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n+1)$$

convendrá elegir la generatriz

$$a(t)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{t}\cdot\mathrm{sen}\,t$$

que tiene

$$\mu_n=(-1)^m(2n+1)!!\,2^{-(n+1)}, \qquad \text{siendo} \quad n=2m, \quad \text{o} \quad n=2m-1$$

y esto a pesar de que las integrales que definen estos momentos no son convergentes; pero introduciendo el factor de convergencia e^{-ta} resulta:

$$\int_0^\infty e^{-ta}t^r\,\mathrm{sen}\,t\cdot dt=\frac{(a-i)^{-r-1}-(a+i)^{-r-1}}{2i}r!$$

cuyo límite para $\alpha \to 0$ es

$$r!\cos\frac{\pi r}{2},$$

y para $r = n + \frac{1}{2}$ resulta la fórmula de μ_n.

Así, por ejemplo, la serie

$$1 + 3!!^2\frac{z}{1!} - 5!!^2\frac{z^2}{2!} + 7!!^2\frac{z^3}{3!} - \dots \pm (2n-1)!!^2\frac{z^n}{n!} \mp \dots$$

no sumable por los métodos usuales, se suma fácilmente con los momentos citados, resultando

$$f(z) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{t}\cdot\operatorname{sen} t\cdot(1+4zt)^{-\frac{3}{2}}\,dt.$$

Vemos, pues, cómo con la tabla anterior de generatrices, (que puede prolongarse sin dificultad) se amplía considerablemente el campo de las series sumables; pero claro es que el problema general queda sin resolver: Dada una serie, determinar la generatriz para que la función asociada sea de tipo conocido, por ejemplo: exponencial o geométrica. Esto conduce al dificil problema de los momentos de STIELTJES y son conocidas las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir los momentos dados.

En particular, si se elije $\lambda_n = (-1)^n$ para que resulte la serie geométrica, hay que resolver el sistema $\mu_n = (-1)^n a_n$; es el método de sumación de STIELTJES.

LE ROY elije $\lambda_n = 1$, que equivale a esto mismo; pero tales métodos tienen interés exclusivamente teórico, por la dificultad de construir y de manejar la función generatriz.

14. - Hemos visto hasta aquí un método general de representación de funciones analíticas en las formas (A), (B) y (C), dentro de todo el círculo de convergencia, prolongado en mayor o menor extensión, según la naturaleza de las generatrices elegidas, y las fórmulas obtenidas demuestran que la representación es única. Pero la importancia de tales expresiones (A), (B) y (C) no es solamente la prolongación de funciones analíticas, sino la generalización de este concepto, por engendrar funciones *semianalíticas* en 0 dadas las derivadas laterales $f^n(0)$ prefijadas.

Caso importante es aquel en que se adoptan como generatrices los productos $\alpha(t)t^n$, $\beta(t)t^{(n}$ de una sola generatriz por las potencias o factoriales sucesivas de t, divididos por los momentos respectivos. En tal caso, muy general, la función asociada $F(t, z)$ es del tipo $F(tz)$ como acontece en los métodos usuales de sumación integral. Si esta función $F(\zeta)$ es entera, la función engendrada $f(z)$ es holomorfa en 0; pero si existen puntos singulares ζ_i la función $f(z)$ resulta semianalítica en 0, con cortaduras a lo largo de las semirrectas $0\zeta_i$ siendo o no prolongable a través de ellas, según que la generatriz sea o no analítica.

Es interesante el hecho de que a pesar de no ser holomorfa en 0, la representación que efectúa es *conforme* en dicho punto.

Creemos que hay aquí un amplio campo de estudio, relacionado en cierto modo con las funciones cuasi-analíticas, que han sido objeto de tan interesantes trabajos de BOREL, DENJOY, CARLEMAN, etc.

Para que la prolongación así definida sea independiente de la función generatriz $\alpha(t)$ elegida, habrá que demostrar bajo qué condiciones deben coincidir en su campo común de convergencia (y, por tanto, en todo el campo de existencia) las funciones definidas por dos expresiones que tienen iguales derivadas en 0. Y todavía puede suponerse que F no es holomorfa en 0, sino solamente semianalítica; pero estas cuestiones exigen estudio más detenido.

Para que la serie $F(z, t)$ asociada a la serie $\sum a_n z^n$ tenga mayor radio que ésta, debe ser infinito $\overline{\lim} \sqrt[n]{\mu_n}$ y, por tanto, debe ser infinito el camino de integración, caso general que se reduce al camino real $(0, \infty)$; pero aun teniendo F radio infinito, o prolongada a lo largo de este semieje, la forma del campo de convergencia de la integral dependerá del tipo de función. Por ejemplo, si en la hipótesis de existencia de momentos de todo orden de $\alpha(t)$ resulta F racional, el campo es todo el plano, excepto las cortaduras $0\zeta_j$, siendo ζ_j los polos de F. Y si $\alpha(t)$ es analítica, estas cortaduras serán hermitianas, siendo la función prolongable por ambos bordes y resulta una función multiforme, que trasforma el plano múltiple en otro también múltiple, siendo *conforme* la representación, incluso en el punto 0.

Lo mismo sucede, en general, si el punto ∞ es regular o polo de F; y aun en el caso de ser singular esencial, si $F(\zeta)$ tiene límite *lateral* en un cierto ángulo, éste forma parte del campo de sumabilidad, excepto las cortaduras $0\zeta_j$. El semiplano de convergencia de las funciones determinantes, estudiadas especialmente por PINCHERLE, queda incluído en este caso.

Si $|\alpha(t)|$ es decreciente desde un valor en adelante, el campo de convergencia absoluta es una *estrella M*, es decir, formada por segmentos y semirrectas de origen 0. Si es creciente, el campo es una estrella *M inversa*, es decir, formada exclusivamente por semirrectas opuestas a 0. Si $\alpha(t)$ tiene límite no nulo, el campo es una *estrella completa*, es decir, formada por semirrectas de origen 0; pero $f(z)$ no es semianalítica en 0.

15. - Generalizada así la definición euleriana, quedan demostradas inmediatamente las operaciones con series divergentes, cualquiera que sea su radio, mientras que en el párrafo 2 suponíamos radio no nulo.

La propiedad a) es consecuencia de la regla aditiva de las derivadas laterales o totales:

$$D^n(u \pm v) = D^n u \pm D^n v.$$

La b) resulta análogamente de $D^n ku = k D^n u$.

La *c*) se demuestra así: por definición:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots = f(1),$$
$$0 + a_0 + a_1 + \dots = \varphi(1),$$

estando $f(z)$ y $\varphi(z)$ caracterizadas por las condiciones:

$$f^n(0) = a_n \cdot n!, \qquad \varphi^{n+1}(0) = a_n(n+1)!;$$

pero la función $\psi(z) = zf(z)$ tiene las derivadas (laterales o totales)

$$\psi^{n+1}(z) = zf^{n+1}(z) + (n+1)f^n(z)$$

y siendo $\psi^{n+1}(0) = \varphi^{n+1}(0)$, resulta $\varphi(z) \equiv zf(z)$, de donde: $\varphi(1) = f(1)$.

La regla *d*) del producto es consecuencia de la fórmula que da las derivadas (laterales o totales) del producto de dos funciones:

$$D^n(uv) = (u+v)^{(n)} \quad \text{o sea:} \quad c_n = \sum_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}.$$

J. BLAQUIER (Buenos Aires - Argentina)

SOBRE DOS CONDICIONES CARACTERISTICAS DE LAS FUNCIONES CONVEXAS [1]

El señor J. L. W. V. JENSEN, en su memoria « Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes » Acta Mathematica tomo 30, págs. 175-193 (año 1905-1906) introduce la difinición, clásica hoy día, de *función convexa* llamando así a toda función $f(x)$ real finita y uniforme de una variable real x, que satisface en un cierto intervalo (a, b) a la desigualdad:

$$f(x_1)+f(x_2) \geqslant 2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

En particular si la relación anterior subsiste siempre con el signo $=$ la función se dice *lineal* y si el signo es $\leqslant$ se llama *cóncava.*

Esta definición que relaciona las ordenadas de tres puntos cualesquiera de abscisas equidistantes del intervalo es de carácter *integral*; ocurre inmediatamente preguntarse si puede sustituirse por otra condición del mismo tipo pero de carácter *diferencial* es decir: ¿ Será suficiente que se verifique

$$f(x+h)+f(x-h) \geqslant 2f(x) \quad (^2)$$

no ya para tres puntos $x+h$, x, $x-h$ equidistante cualesquiera del intervalo sino solamente para tres puntos $x+h$, x, $x-h$ de un entorno de cada x por pequeño que éste sea ? Así es en efecto si además se impone la condición de continuidad según expresa el primer teorema objeto de esta nota, pero antes de demostrarlo recordaremos la definición de GALVANI.

El señor L. GALVANI, en su memoria « *Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque* » Rendiconti del circolo Matematico di Palermo, tomo XLI, año 1916, pág. 103, dice que una función

(1) Nota extractada de un trabajo efectuado en el Seminario Matemático de Buenos Aires bajo la dirección y guía del prof. Dr. REY PASTOR.

(2) Así se escibe la relación de JENSEN poniendo: $x_1+x_2=2x$ y $x_1-x_2=2h$.

$f(x)$ real finita y uniforme de una variable real x es *convexa* en un intervalo (a, b) cuando se verifica que:

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

siendo $x_1 < x_2 < x_3$, tres puntos cualesquiera pertenecientes a dicho intervalo.

El señor GALVANI demuestra en su memoria citada (pág. 120) que si $f(x)$ está acotada en (a, b) su definición de función convexa es equivalente a la de JENSEN (1).

Geométricamente la definición de JENSEN expresa que una curva $y=f(x)$ es convexa si el punto de abscisa media de los extremos de cualquier arco $\widehat{AB}$ no está encima de la cuerda $\overline{AB}$.

La definición de GALVANI expresa que ningún punto del arco $\widehat{AB}$ esta encima de la cuerda $\overline{AB}$.

Condición diferencial de Jensen.

El teorema a que aludimos anteriormente y que llamaremos condición diferencial de JENSEN expresa que:

La condición necesaria y suficiente para que una función acotada f(x) *sea convexa en un intervalo* (ab) *es, que sea continua en el intervalo abierto* (a^+b^-), *que para cada* x *interior a él exista un número positivo* δ *tal que siendo* $|h| < \delta$ *se verifique* $f(x+h)+f(x-h) \geqslant 2f(x)$ *y que en los extremos exista límite y sea*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(a) \ \text{ y } \ \lim_{x \to b^-} f(x) \leqslant f(b).$$

1) La condición es *necesaria.*

En efecto, por ser convexa es $f(x+h)+f(x-h) \geqslant 2f(x)$, siempre que $x+h$ y $x-h$ pertenezcan al intervalo (ab). Siendo acotada y convexa, JENSEN en su memoria citada (pág. 189) demuestra que es continua y apoyándose en la definición equivalente de GALVANI resulta que existe y es

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \leqslant f(a) \ \text{ y } \ \lim_{x \to b^-} f(x) \leqslant f(b) \ \ (2).$$

(1) Otra demostración de esta equivalencia puede verse en la Memoria de TORTORICI « *Sulle funzioni convesse* ». Annali di Matematica, Nov. 1926-Febb. 1927, pag. 144.

(2) Basta elegir un punto fijo $A_1[x_1, f(x_1)]$ y otro variable $M[x, f(x)]$ siendo $a < x_1 < x < b$ y observar que de esa def. se deduce que la pendiente de la cuerda A_1M es función monótona de x y como $f(x)=(x-x_1)\operatorname{tg}\alpha + f(x_1)$ resulta la existencia del límite para $x \to b^-$, el cual en virtud de la convexidad y continuidad es $\leqslant f(b)$.

Analogamente para el extremo a.

2) La condición es *suficiente.*

En efecto, si $f(x)$ no fuera convexa habría, (en virtud de la definición equivalente de GALVANI), dos puntos

$$A'[a', f(a')] \text{ y } B'[b', f(b')]$$

tales que la cuerda que determinan dejaría por encima algún punto del arco $\widehat{A'B'}$ de la curva $y = f(x)$ (1).

Rebajemos linealmente las ordenadas de la curva de modo que los puntos extremos A' y B' tengan ordenadas iguales, es decir consideremos la nueva función:

$$F(x) \equiv f(x) - \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'}(x - a')$$

en la que $F(a') = F(b')$.

Ella satisface a la identidad:

$$F(x+h) + F(x-h) - 2F(x) \equiv f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)$$

y como el segundo miembro es positivo o nulo por hipótesis, resulta:

$$F(x+h) + F(x-h) \geqslant 2F(x)$$

Sea x_0 el punto de (a', b') en que $F(x)$ toma el valor máximo absoluto, (que existe por la continuidad, en virtud del teorema de WEIERSTRASS), en ese punto es $F(x_0) > F(a')$ porque hemos supuesto que hay algún punto de la curva encima de la cuerda, la cual es horizontal de ordenada $F(a') = F(b')$.

El punto x_0 es pues interior a (a', b'). Ahora bien caben dos posibilidades:

α) Que el punto x_0 de máximo sea tal que para algunos $|h| < \delta$ por pequeño que sea δ exista el signo $<$ en alguna de las dos desigualdades:

$$F(x_0+h) \leqslant F(x_0)$$
$$F(x_0-h) \leqslant F(x_0)$$

y sumando, (por haber algún signo $<$) se obtiene: $F(x_0+h) + F(x_0-h) < 2F(x_0)$ o sea:

$$f(x_0+h) + f(x_0-h) < 2f(x_0).$$

Contra la hipótesis, lo que demuestra el teorema en este caso.

β) Que el punto x_0 de máximo sea tal que para todo $|h|$ suficientemente pequeño se verifique

$$\left.\begin{aligned} F(x_0+h) &= F(x_0) \\ F(x_0-h) &= F(x_0) \end{aligned}\right\} \text{ para } |h| < \delta$$

Hay entonces un segmento horizontal a la altura $F(x_0)$ del máximo. Si desig-

(1) Y siempre podremos suponer $a < a' < b' < b$.

namos con x_1 la abscisa extrema, de la derecha por ejemplo, de dicho segmento (que existe como se demuestra fácilmente) resulta:

$$\left. \begin{array}{l} F(x_1+h)<F(x_1) \\ F(x_1-h)=F(x_1) \end{array} \right\} \text{ para algún } |h|<\delta$$

luego

$$F(x_1+h)+F(x_1-h)<2F(x_1)$$

o sea

$$f(x_1+h)+f(x_1-h)<2f(x_1)$$

contra la hipótesis.

Nuestro teorema queda por tanto demostrado.

NOTAS: I). Después de estudiar esta cuestión hemos visto que el eminente prof. P. MONTEL en su reciente e interesante memoria *Sur les fonctions convexes et les fonctions sousharmoniques* publicadas en el Journal de Mathématiques pures et appliquées, tomo VII, pág. 29 año 1928, cita esta propiedad (sin demostrarla) omitiendo la condición de continuidad que es indispensable. Existen, en efecto, funciones tales que para cada x interior al intervalo (ab) hay un $\delta>0$ tal que

$$f(x+h)+f(x-h \geqslant 2f(x) \qquad \text{para } |h|<\delta,$$

siendo suficiente que en *un solo punto* $f(x)$ no sea continua para que pueda no ser convexa como lo demuestra la función:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x)=1-|x| & \text{para } x \neq 0 \text{ y } |x| \leqslant 1 \\ f(0)=0 & \end{array} \right.$$

Otro ej. en el que el signo $=$ de la relación de JENSEN no subsista siempre es:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x)=(1-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \quad \text{para } x \neq 0 \text{ y } |x| \leqslant 1; \ [f(x) \geqslant 0] \\ f(0)=0 \end{array} \right.$$

II). Como corolario de nuestro teorema resulta que:

Si una sucesión convergente de funciones convexas $f_n(x)$ *definidas en un mismo intervalo admite una función continua* f(x) *como límite, esta función* f(x) *también es convexa en su interior.*

En efecto, por hipótesis

$$f_n(x+h)+f_n(x-h)-2f_n(x) \geqslant 0$$

tomando límites:

$$f(x+h)+f(x-h)-2f(x) \geqslant 0$$

y como $f(x)$ es continua por hipótesis, resulta demostrado el corolario.

De aqui se deduce que:

Si las funciones convexas $f_n(x)$ *convergen uniformemente hacia* f(x) *resulta que* f(x) *es también convexa.*

Como el señor MONTEL en su memoria citada ha omitido la condición de continuidad deduce (pág. 32) que:

« Una sucesión convergente de funciones convexas tiene siempre por límite una función continua » lo que puede no ser cierto como lo demuestra el siguiente ejemplo:

La sucesión de funciones convexa $f_n(x)=x^{2n}$ tiene por límite la función

$$\begin{cases} f(x)=0 & \text{para } |x|<1 \\ f(x)=1 & \text{» } |x|=1 \end{cases}$$

la cual es discontínua.

Condición diferencial de Galvani.

Investiguemos si una condición diferencial del tipo de la de GALVANI es suficiente para caracterizar una función convexa.

Supongamos que a cada punto interior al intervalo (ab) le corresponda un entorno tal que se verifique la condición de convexidad de GALVANI para tres puntos cualesquiera *de dicho entorno.*

Como en el entorno $x-h$, $x+h$ correspondiente a cada punto interior x, se cumple la condición de GALVANI, resulta « a fortiori »

$$f(x+h)+f(x-h)\geqslant 2f(x).$$

Además se tiene por esa misma condición que en ese entorno la función está dentro del ángulo de vértice $[(x, f(x)]$, y cuyos lados son, la semirrecta de origen $[x, f(x)]$ dirigida hacia $[x+h, f(x+h)]$ y la opuesta de la de mismo origen dirigida hacia $[x-h, f(x-h)]$, y dentro del ángulo opuesto por el vértice a éste.

Estando en ese entorno dentro del ángulo completo resulta que $f(x)$ es continua en cada punto interior a (ab).

En virtud de la condición diferencial de JENSEN anteriormente demostrada resulta que $f(x)$ es convexa en cada intervalo (a', b') interior al (ab), de donde resulta que es convexa en (ab) existiendo límite en los extremos y tal que,

$$\lim_{x\to a^-} f(x)\leqslant f(a) \text{ y } \lim_{x\to b^-} f(x)\leqslant f(b)$$

Resulta por tanto el siguiente teorema como consecuencia de la mencionada condición diferencial de JENSEN:

Si a cada punto de un intervalo le corresponde un entorno tal que para $x_1<x_2<x_3$ *pertenecientes a él se verifica*

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

la función entonces es convexa en dicho intervalo y recíprocamente.

Propiedad ésta que proponemos llamar condición diferencial de GALVANI.

Agosto 1928.

T. RADÓ (Szeged - Ungheria)

SUR L'AIRE DES SURFACES CONTINUES

1. - Le but de la communication présente est d'exposer et d'éclairer un problème relatif à la théorie de l'aire des surfaces courbes, problème qui me semble fécond et qui résume, sous une forme très intuitive, plusieurs questions importantes et encore ouvertes de cette théorie. Les développements suivants se rapportent à des surfaces données par des équations paramétriques

$$x=x(u,\ v),\ \ y=y(u,\ v),\ \ z=z(u,\ v).$$

Nous ne supposerons pas qu'à deux couples différents (u, v) correspondent deux points distincts de la surface; il s'ensuit que les surfaces que nous allons considérer ne sont pas déterminées par l'ensemble de leurs points [1]. Je rappelle qu'il y a des théories, celle de M. CARATHÉODORY par exemple, où l'on considère des surfaces pour ainsi dire *amorphes*, qui ne sont d'abord que des ensembles de points quelconques et qui ne se révèlent comme des surfaces que par la façon dont elles se comportent envers un certain procédé pour mesurer l'aire. Pour distinguer de ces *surfaces amorphes* les nôtres, je les désignerai dans la suite comme des *surfaces paramétriques.*

2. - Il y a un grand nombre de définitions pour l'aire d'une surface paramétrique; pour arriver au problème que j'ai en vue, il me suffit cependant de constater la diversité extrême de ces définitions. En effet, cette diversité conduit à penser qu'il n'y a guère de fait intuitif qui aurait, à lui seul, assez d'autorité pour imposer d'une manière péremptoire telle ou telle définition mathématique pour l'aire. Dés lors, il y a lieu de recourir, pour mesurer l'aire d'une surface, au principe suprême de tout procédé de mesure, au *principe de la coupure*, et qui s'énonce dans le cas actuel comme il suit. Soit S une surface paramétrique et soit $A(S)$ son aire; au lieu de *définir* l'aire $A(S)$, nous essayerons

[1] Il en résulte la nécessité de se servir de *définitions très précises* pour toutes les notions concernant ces surfaces. Nous adopterons les définitions données par M. FRÉCHET dans son Mémoire *Sur la distance de deux surfaces*, « Annales de la soc. polonaise math. », t. 3 (1924), pp. 4-19.

de tirer de l'idée intuitive que nous possédons de cette quantité des limites inférieures et des limites supérieures pour elle, puis — et c'est là que commencera l'étude mathématique — nous chercherons à établir que ces limites constituent une *coupure*, au sens de DEDEKIND.

3. - Quant aux *limites inférieures*, la propriété la plus évidente de *l'aire intuitive* $A(S)$ est la suivante: la projection orthogonale de la surface S sur un plan quelconque p possède une aire π au plus égale à l'aire de S; on a donc $\pi \leqq A(S)$. Décomposons alors S en un nombre quelconque de surfaces partielles $S_1, ..., S_k$, prenons arbitrairement autant de plans $p_1, ..., p_k$ et désignons par $\pi_1, ..., \pi_k$ les aires des projections orthogonales de S_1 sur $p_1, ...,$ de S_k sur p_k. En vertu de la remarque précédente, nous aurons $\pi_1 + ... + \pi_k \leqq A(S)$. Soit P la limite supérieure de toutes les sommes ainsi obtenues; nous aurons aussi

$$P \leqq A(S).$$

Cette quantité P, vous l'aurez déjà remarqué, n'est autre chose que l'aire de S au sens de PEANO; à présent, nous devons la considérer seulement comme une limite inférieure pour l'aire intuitive $A(S)$.

J'aurai encore à considérer une seconde quantité analogue, que l'on obtient en partant de la propriété intuitive suivante: soient a, b, c les aires des projections orthogonales de la surface S sur les plans coordonnés xy, yz, zx; on a l'inégalité $(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2} \leqq A(S)$. En décomposant de nouveau S en des surfaces partielles $S_1, ..., S_k$, on obient alors des inégalités de la forme

$$(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)^{1/2} + ... + (a_k^2 + b_k^2 + c_k^2)^{1/2} \leqq A(S).$$

En désignant par G la limite supérieure de la somme dans le premier membre, on a aussi

$$G \leqq A(S).$$

J'ai désigné cette seconde limite inférieure pour l'aire par G, pour rappeler que cette quantité a été étudiée d'une manière approfondie par GEÖCZE.

Ayant obtenu, de deux manières différentes, des limites inférieures pour l'aire, passons à la recherche de *limites supérieures*. Nous les déduirons de la propriété fondamentale, mise en évidence par LEBESGUE, que *l'aire est une fonctionnelle semi-continue inférieurement*. Cela signifie que pour toute suite de surfaces S_n tendant vers S on a l'inégalité $\lim A(S_n) \geqq A(S)$. Soit alors, en particulier, Π_n une suite de polyèdres tendant vers S; l'aire $A(\Pi_n)$ se calcule par des formules élémentaires et de la semi-continuité il résulte que la quantité $\lim A(\Pi_n)$ est une limite supérieure pour $A(S)$. La limite inférieure, que nous désignerons par L, de ces limites supérieures est alors également une limite supérieure (et même la meilleure en son espèce):

$$A(S) \leqq L.$$

Cette quantité L, vous l'aurez déjà remarqué, n'est autre chose que l'aire de S au sens de LEBESGUE. A présent, nous devons la considérer seulement comme une limite supérieure pour l'aire.

4. - La détermination, conformément au principe de la coupure, de l'aire intuitive $A(S)$ revient à présent à établir l'une au moins des égalités $P=L$, $G=L$. Je me hâte cependant d'observer qu'on arrive à ce même problème par des considérations mathématiques exemptes de toutes spéculation philosophique, et cela en étudiant l'aire au sens de LEBESGUE, c'est-à-dire la quantité que nous avons désignée par L. En effet, au point de vue intuitif, cette quantité n'est qu'une limite supérieure pour l'aire; en tout cas, L est le résultat de limitations unilatérales, tandis que, pour maîtriser une quantité on doit l'attaquer des deux côtés à la fois, c'est-à-dire par des limitations bilatérales. Les quantités que nous avons désignées par P et G fournissent précisément des limitations complémentaires à L, et c'est ce qui explique qu'on les rencontre forcément dans toute recherche approfondie sur l'aire au sens de LEBESGUE.

5. - L'étude des relations entre les quantités P, G, L occupe une large place dans les travaux de GEÖCZE; dès l'abord, il s'est heurté à une difficulté sur laquelle il y a lieu d'insister, puisqu'elle semble constituer la difficulté spécifique de toute la théorie. Soit par exemple S une portion de surface sans points multiples, située entièrement dans un plan et limitée par une courbe de JORDAN. L'aire de S au sens de LEBESGUE est alors égale, comme on trouve, à l'aire *intérieure* de la figure, tandis que P et G sont au moins égales à l'aire de la projection de S sur son propre plan, c'est-à-dire à la mesure *extérieure* de la figure. Ceci montre déjà que l'on a en général $P>L$, $G>L$, c'est-à-dire que les limitations utilisées ne sont pas compatibles en général. Dans le cas simple que nous venons d'envisager il est d'ailleurs clair que l'on obtient des limitations compatibles en convenant de négliger la frontière de la surface. On conçoit cependant que dans le cas général d'une surface paramétrique continue on rencontrera des difficultés à déterminer les points gênants et superflus de la surface — d'ailleurs, on doit prendre garde de ne pas négliger trop, de peur d'obtenir des limites inférieures trop faibles. Les développements que GEÖCZE a consacré à l'étude de la difficulté signalée sont d'une extrême complication et constituent, je pense, la cause principale de ce que ses travaux sont si difficiles à suivre et dans leurs détails et dans leur ensemble.

6. - Pour obtenir, d'une façon simple et maniable, des limitations compatibles pour l'aire, je me suis proposé d'essayer la notion suivante. Soit S une surface, p un plan et π la projection orthogonale de S sur p. Pour écarter les points superflus de la projection π, je définis l'ensemble des point essentiels, le *noyau* *de la projection*, de la manière suivante. *Un point* Q *de la projection* π *appartient au noyau, si pour toute suite de surfaces* S_n *tendant vers* S, *le point* Q *est contenu, pour* n *assez grand, dans la projection orthogonale de* S_n *sur* p.

Je reprends alors les procédés qui nous ont conduit aux limites inférieures P et G, en remplaçant partout les projections par leurs noyaux. Les procédés ainsi modifiés fournissent deux quantités nouvelles, que je désignerai, pour ne pas compliquer les notations, par les mêmes lettres P et G.

De la définition même du noyau, on déduit alors immédiatement deux propriétés importantes de ces quantités. En premier lieu, les limites modifiées sont compatibles avec la limite supérieure L, c'est-à-dire que l'on a, pour toute surface paramétrique continue, les inégalités $P \leqq L$, $G \leqq L$. En second lieu, les quantités modifiées P et G participent de la propriété fondamentale de L, aire au sens de LEBESGUE, c'est-à-dire qu'elles sont des fonctionnelles semi-continues inférieurement dans le champ des surfaces paramétriques continues (1). Dès lors, il y a lieu de se demander et même d'espérer que les limitations modifiées fournissent une coupure pour l'aire, c'est-à-dire que l'on a, pour toute surface paramétrique continue, les égalités $P = L$, $G = L$. *La démonstration générale de ces égalités constitue précisément le problème sur lequel je voudrais appeler votre bienveillante attention.*

7. - En posant ce problème, je devrais aussi le justifier, en montrant que c'est là un bon problème au sens de M. HILBERT; je voudrais donc ajouter quelques remarques sur ce sujet. D'abord, les résultats que j'ai pu obtenir dans cette voie, permettaient de retrouver d'une manière très simple ed de compléter sur des points essentiels tous les résultats acquis antérieurement sur l'aire au sens de LEBESGUE, résultats dus principalement à GEÖCZE et à M. TONELLI (2). D'une manière générale, on peut dire que toutes les fois où l'on réussit à démontrer les égalités $P = L$ et $G = L$, la démonstration fournit du même coup la solution d'un problème central de la théorie, à savoir du problème du calcul de l'aire, au sens de LEBESGUE, d'une surface paramétrique à l'aide de ses coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$, problème qui fut posé à M. LEBESGUE (comme il l'a raconté dans une Note récente) (3) par CAMILLE JORDAN, dès que celui-ci prît

(1) Voir mon Mémoire *Über das Flächenmass rektifizierbarer Flächen,* « Math. Annalen », sous presse.

(2) Voir les Mémoires suivants (qui contiennent aussi des références détaillées aux travaux de GEÖCZE et de M. TONELLI): *a)* T. RADÓ, *Sur l'aire des surfaces courbes.* Acta litt. ac sc. regiae univ. hung. Franc.-Jos. Szeged, t. 3 (1927), pp. 131-169; *b)* S. SAKS, *Sur l'aire des surfaces* $z = f(x, y)$, idib, pp. 170-176; *c)* T. RADÓ, *Uber das Flächenmass rektifizierbarer Flächen* « Math. Annalen », sous presse.

(3) H. LEBESGUE, *Quelques remarques sur la définition de l'aire des surfaces,* « Fundamenta matematicae », t. VIII, 1926, pp. 160-165.

connaissance de la Thèse de M. LEBESGUE. Cela est d'ailleurs en quelque sorte évident a priori; en effet, déterminer une quantité à l'aide de limitations inférieures et supérieures est, pratiquement et théoriquement, la même chose que de calculer effectivement la quantité en question.

L'importance du problème du calcul de l'aire à l'aide des coordonnées de la surface consiste en ceci, qu'en possession d'une formule pour l'aire la théorie devient accessible aux méthodes générales de l'analyse; à cet égard, je voudrais signaler une belle Note de M. SAKS (1) dans laquelle il déduit les principaux résultats de M. TONELLI et un théorème important nouveau sur la dérivation de l'aire, d'une formule générale pour l'aire, valable pour toute surface continue donnée par une équation de la forme $z=f(x, y)$, formule que j'ai établie en étudiant les travaux de GEÖCZE et de M. TONELLI.

8. - Je voudrais ajouter que l'intuition géométrique indique presque immédiatement une solution absolument générale du problème que je viens de proposer. Il a été déjà observé qu'il s'agit au fond du calcul effectif de l'aire d'une surface paramétrique. Or, si les coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ d'une telle surface admettent des dérivées premières continues (en ce cas, je dirai que la *surface* est *bonne*), l'aire est nécessairement égale à la valeur de l'intégrale double classique

$$\iint \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right]^2}\, du dv.$$

Dès lors, il est naturel, pour calculer l'aire d'une surface continue générale S, de procéder par approximation. Soit donc S_n une suite de *bonnes* surfaces tendant vers S et déduites de S à l'aide de quelque procédé d'approximation; si l'aire $A(S_n)$ tendait vers l'aire $A(S)$, le calcul de $A(S)$ serait effectué. Or, l'aire est une fonctionnelle semi-continue inférieurement, ce qui permet seulement d'affirmer que l'on a l'inégalité

$$\lim A(S_n) \geqq A(S). \tag{1}$$

Mais d'autre part, tout procédé raisonnable d'approximation a pour effet non seulement d'améliorer la dérivabilité de la surface, mais aussi de la *niveller*, c'est-à-dire de rendre son allure plus uniforme. Or, il est intuitivement évident qu'en nivellant une surface on en diminue l'aire; ce point admis, on pourra affirmer que les surfaces d'approximation vérifient l'inégalité

$$A(S_n) \leqq A(S) \tag{2}$$

La formule $A(S) = \lim A(S_n)$ résulte à présent immediatement de (1) et de (2).

En essayant de traduire en langage mathématique ce principe de calcul si immédiat, on se heurte cependant à une difficulté fondamentale. En effet, la

(1) S. SAKS, loc. cit. (1), *b*).

méthode réussit complètement pour les surfaces données par une équation de la forme $z=f(x, y)$ [1]; mais dans le cas des surfaces données sous forme paramétrique générale $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$, je n'ai pu décider s'il existe un procédé d'approximation jouissant de la propriété de fournir des surfaces d'approximation vérifiant l'inégalité (2) [2]. Je pense qu'en approfondissant cette question d'approximation on parviendrait aussi à élucider certains points de la théorie du problème de Plateau, où l'on rencontre également des difficultés essentielles en passant au problème homogène, c'est-à-dire au problème relatif à des surfaces données sous forme paramétrique générale.

---

(1) Voir loc. cit. (1), *a*).

(2) Il y a cependant une classe importante de surfaces données sous forme paramétrique générale, pour lesquelles on peut obtenir des résultats complets, à savoir la classe des *surfaces rectifiables*. D'après M. LEBESGUE, une surface paramétrique est dite rectifiable, si elle est susceptible d'une représentation paramétrique où les coordonnées $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ vérifient une condition de Lipschitz. Ces surfaces jouissent de certaines propriétés de régularité, mises en évidence principalement par M. RADEMACHER, qui permettent de les traîter directement, sans avoir recours à des méthodes d'approximation [voir loc. cit. (1), *c*)].

INDICE

COMUNICAZIONI

SEZIONE I-A

SEZIONE I-B

(1) Per ritardo nella consegna delle bozze di stampa da parte dell'A., questa Comunicazione verrà pubblicata in un volume seguente.