ATTI

DEL

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO IV.

COMUNICAZIONI

SEZIONE II [A-B]

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1931 - IX

COMUNICAZIONI

Sezione Seconda A

M. BRÜCKNER (Bautzen - Germania)

UEBER DIE ANZAHL $\psi(n)$ DER ALLGEMEINEN VIELFLACHE

Es handelt sich um die Morphologie der Eulerschen konvexen Polyeder mit nur dreikantigen Ecken ([1]) und vorgeschriebener Zahl n der Grenzflächen und um die Bestimmung der Anzahl $\psi(n)$ solcher Polyeder. Diese Bestimmung wird erreicht durch wirkliche Darstellung aller allomorphen Typen und ist für $n=8$ bereits von Kirkmann (1855) geleistet, für $n=9$ und 10 von 0. Hermes und mir (1893). Es ist $\psi(8)=14$, $\psi(9)=50$, $\psi(10)=233$ ([2]). Wie wohl richtig bemerkt worden ist ([3]), hat die Zahl $\psi(n)$ den Charakter einer zahlentheoretischen Funktion und es ist nicht zu erhoffen, dass sie sich in geschlossener Form d. h. durch bekannte elementare Funktionen ausdrücken lässt. Eine von Herrn Steinitz ([4]) gewünschte Darstellung des asymptotischen Verlaufes von $\psi(n)$ ist wohl denkbar; hier soll nur der Versuch einer Näherungsformel auf empirischer Grundlage gewagt werden. Schon Cayley hat bei seiner Untersuchung der Polyeder mit Recht den Hauptdruck auf die wirkliche Darstellung der Polyedertypen gelegt ([5]) und alle Späteren sind ihm hierin gefolgt. Herr Steinitz führt als Methode der Ableitung der Typen der P_n die bekannte der sogenannten Fundamentalkonstruktionen an ([6]), und bemerkt, dass sie « prinzipiell » genüge, um alle P_n aus den P_{n-1} durch Abschneiden der Ecken, Kanten etc. zu erhalten. Dass sie absolut zu keinen Schlüssen auf die Anzahl der Typen führen kann, ist wiederholt betont worden. Sie hat aber neben dem Nachteil, dass zur Konstruktion der P_n alle P_{n-1} bekannt sein müssen besonders noch den, dass derselbe Polyedertypus

---

([1]) « Dreikantspolyeder » bei E. Steinitz: s. Math. Encyklopädie III A. B. 12: Polyeder und Raumeinteilungen. S. 53.

([2]) s. Steinitz a. a. O. S. 54. Die nach O. Hermes aus Crelle's Journal Bd 120 Heft 1 S. 27 angegebenen Werte für $n=11$ und 12 sind nicht korrekt.

([3]) s. Steinitz a. a. O. S. 54.

([4]) ebenda S. 54.

([5]) « I consider that the problem is to find the different polyhedra rather than to count them ».

([6]) Eberhard, Morphologie der Polyeder, S. 16. Für $n=9$ und 10 wurden die Polyeder auf diese umständliche Weise von mir früher bestimmt.

auf mehrerlei Weise erhalten wird und endlich noch den ausschlaggebenden, dass die gefundenen Typen absolut keine Ordnung irgend welcher Art erkennen lassen. Anders die zweite hier näher zu erläuternde « Methode der Deckkantenfiguren » von O. Hermes, die merkwürdigerweise in der Math. Encyklop. überhaupt nicht erwähnt wird. Wir setzen die Kenntnis der Darstellung der Polyeder durch ihr « Diagramm » voraus (1); fügen aber wegen der nötigen Bezeichnungen

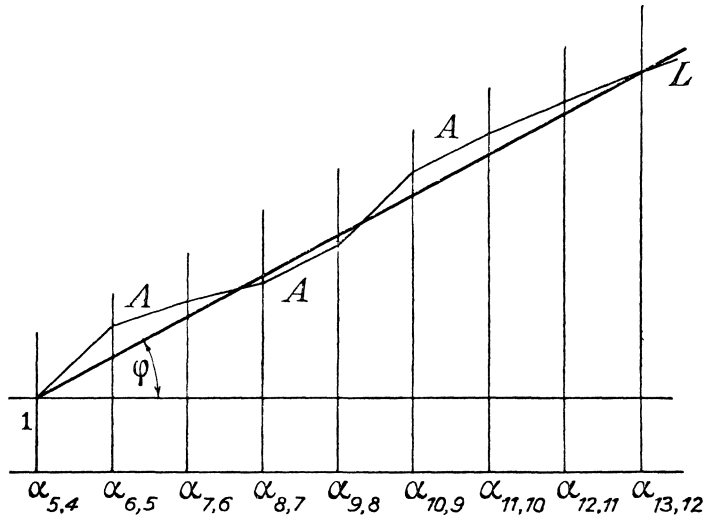


Fig. 1.

das Folgende im Anschluss an Fig. 1 bei. Sie ist das Diagramm eines P^5_{13}, d. h. eines 13-flaches mit $\lambda=5$ « Deckflächen », (schraffiert), mit $\zeta=1$ « Zwischenkanten » und $K=1$ « freien Kanten », an deren Ende ein f_3 liegt, das die « Basisfläche » kantet. Diese ist eine Fläche f_m des Polyeders mit der Maximalzahl m der Kanten (hier $m=7$). Da noch eine zweite Fläche f_7 auftritt, auf die das Polyeder in gleicher Weise projiciert sein kann, so haben wir eine zweite Diagrammdarstellung zu beachten; alle Figuren ausser der ersten bezeichnen wir kurz als « 2^{te} Figuren » (2). Nach der Methode von Hermes sind zunächst alle überhaupt möglichen Deckkantenfiguren aufzustellen und dann sind die « zweiten Figuren » zu bestimmen und zu tilgen. Das ist verhältnismässig leicht (weil mechanisch, wenn auch zeitraubend) da sich die Deckkantenfiguren in ganz bestimmter Weise ordnen lassen. Wir bezeichnen nämlich alle Polyeder P_n

(1) s. M. Brückner « Vielecke und Vielflache » Tafel II usw.

(2) Hat ein P_n, wie das in Fig. 1 dargestellte, isomorphe Ansichten, so ist es symmetrisch oder die Oberfläche zerfällt in isomorphe Kalotten. (Fig. 1 erscheint symmetrisch bei Projektion auf $f_{6,a}$).

mit λ Deckflächen als zu einer *Klasse* gehörig (1). Für P_n hat man $n-6$ Klassen, denn da die Basisfläche f_m des Diagrammes ein $(n-1)-$,.... 8, 7, 6-eck sein kann, so ist $\lambda=0, 1, 2....$ $(n-1)$. Jede Klasse ist nun einzeln zu untersuchen, beginnend mit den sogen. « Grund $-n-$ flachen » ($\lambda=0$), wo die Deckkantenfigur nur ein unverzweigter oder verzweigter Zug von $n-4$ Kanten ist. Die Polyeder einer Klasse ($\lambda\geqq 2$) zerfallen in *Gruppen* nach der Zahl ζ der Zwischenkanten. Für die erste Gruppe ist stets $\zeta=0$. Von $\zeta=1$ ab werden die λ Deckflächen in einzelne Kalotten von λ_1, λ_2.... Flächen zerlegt ($\lambda_1+\lambda_2....=\lambda$). Das Maximum von ζ ist $\zeta_m=n-\lambda-4$. Es wird zuerst erreicht, wenn die Deckkantenfigur aus einem f_3 und den zusammenhängenden $\lambda-1$ übrigen Flächen besteht. - Für die P_{14}^6 sind z. B. die Gruppen für $\zeta=0, 1, 2, 3, 4$ der Reihe nach zu behandeln; dabei ist zu beachten, dass von $\zeta=2$ ab der Zwischenkantenzug in getrennte Züge zerfallen kann, schliesslich in lauter Einzelkanten, aber es ist auch zu beobachten, dass nicht alle Gruppen zu existieren brauchen (2). - Jede Gruppe zerfällt weiter in *Untergruppen* nach der Zahl b der « Binnenkanten », d. h. der Kanten innerhalb der Deckkantenfigur (3). Das Maximum b_m ist bei λ Deckflächen und $\zeta=0(\lambda>2)$ gleich $3(\lambda-2)$; das Minimum natürlich $\lambda-1$. Für alle Gruppen mit $\zeta\geqq 1$ wird das Maximum b_m erreicht, wenn die Deckkantenfigur aus einer isolierten Fläche und dem Complex der übrigen $\lambda-1$ besteht; also ist jetzt $b_m=3(\lambda-3)$. Es sind der Reihe nach für die Gruppe alle Figuren mit stetig abnehmender Anzahl der Binnenkanten abzuleiten. Dies ist der schwierigste Teil der Untersuchung nach der Methode von Hermes, doch können wir auf die Einzelheiten hier unmöglich eingehen. - Denn nun zerfällt jede Untergruppe in *Ordnungen* nach der Zahl h der « freien Kanten », beginnend mit $k=0$. Fassen wir zunächst eine Kantenfigur $K_n^\lambda(\zeta=0)$ (4) ins Auge, bei der die k freien Kanten einen zusammenhängenden Zug bilden, so wird das Maximum k_m erreicht, wenn die λ Deckflächen ein einfach berandetes Flächenstück bilden mit nur noch 3 freien Ecken. Es ist leicht abzuleiten $k_m=n-\lambda-4$. Es sind nun wiederum der Reihe nach alle Fälle $k=0, 1, 2,....$ k_m zu behandeln, aber jedesmal sind die zerfallenden Züge freier Kanten in erster Linie zu berücksichtigen: Man zerlegt k in gleiche oder verschiedene Summanden; bis auf lauter Einzelkanten, wenn die Zahl der freien Ecken der Figur der λ Flächen dies zulässt und berücksichtigt dann natürlich bei den mehrkantigen Zügen alle für sie

---

(1) Es sei für die weiteren Betrachtungen $n>12$, da für $n=12$, $f_m=f_5$ sein kann, was zu berücksichtigen hier zu weit führen wurde.

(2) Für $n=15$, $\lambda=8$ z. B. ist der Wert $\zeta_m=3$, aber es existieren nur die Gruppen für $\zeta=0, 1, 3$.

(3) Für das durch Fig. 1 dargestellte Polyeder ist $b=4$.

(4) Hierdurch sei sowohl das Gebilde, als auch deren Anzahl bezeichnet, G_n^λ ebenso « Gattung » der P_n und deren Zahl.

vorhandenen (und vorher bestimmten!) Gestaltungen (1). Es besteht somit bei der Methode von Hermes eine genau vorgeschriebene Anordnung in der Folge der abzuleitenden Kantenfiguren und damit auch der Polyeder. Nur beiläufig sei darauf hingewiesen, dass die Methode zur Ableitung der P_n die Kenntnis der P_{n-1} nicht voraussetzt; ja dass auch die Polyeder beliebig herausgegriffener Gruppen unabhängig von den übrigen sich finden lassen (2).

Sind alle Typen der P_n bestimmt, so werden sie ihren *Gattungen* zugewiesen. Zu einer « Gattung » gehören alle allomorphen Polyeder (*Arten*) mit

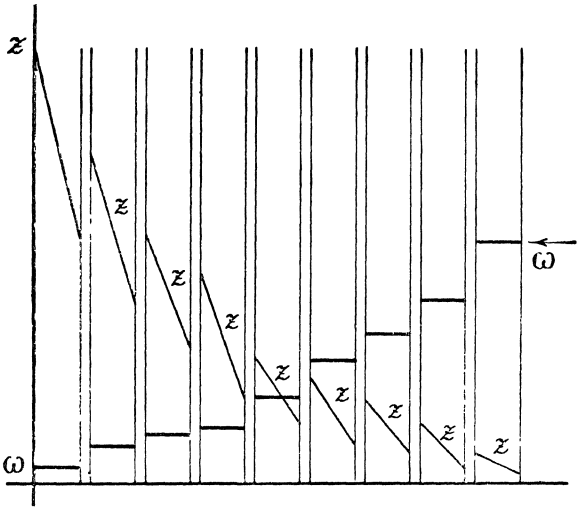


Fig. 2.

derselben Flächenformel ($f_n - \lambda - 1, \ldots f_4, f_3$). Es mag erwähnt werden, dass man versuchen kann, die Gattungen der P_n^λ auf Grund der bekannten Eberhardschen Gleichungen (3)

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 - 12 = m, \qquad f_7 + 2f_8 + 3f_9 + \ldots = m$$

zu finden; aber der Versuch misslingt nur allzuoft, da die Zahl der f_6 in den Gleichungen nicht auftritt und sich nicht von vornherein ersehen lässt, für welches Minimum von f_6 sich Polyeder realisieren lassen. Es sei nun Z die Anzahl der Arten einer Gattung. Es gibt Gattungen für die $Z=1$ ist, meist ist $Z>1$ (4).

---

(1) Es brauchen nicht für alle Ordnungen einer bestimmten Zahl k Polyeder zu existieren, wie z. B. für P_{14}^6, $\zeta=0$, $b=12$, $K=0$ ein Polyeder unmöglich ist, weil keine Fläche f_i $(i>7)$ auftreten darf. Und analog in anderen Fällen.

(2) Für $n=14$, 15, 16 wurde davon Gebrauch gemacht.

(3) s. Eberhard, Morphologie, S. 198.

(4) Es kommen schon für verhältnismässig kleine Werte von n sehr grosse Werte von Z vor; z. B. ist für die Gattung $P_{13}^4(1f_8, 2f_7, 2f_6, 3f_5, 2f_4, 3f_3)Z=754$!

Es fragt sich, welche weiteren Werte zu erwarten sind. Es kommen in der obigen Flächenformel $n-x-3$ verschiedenkantige Flächenarten vor (für einzelne, ausser der ersten, kann die Anzahl gleich 0 sein). Setzen wir $\frac{n}{n-\lambda-3}=\mu$, und bilden die Summe der Quadrate:

$$s=\sum(\mu-f_i)^2 \qquad i=3, 4, \ldots n-\lambda-1,$$

so gilt der Satz: « Die Polyedergattungen der grossen Zahlen Z entsprechen den kleinen Werten von s, und umgekehrt » (1). Aber nicht alle Polyedergattungen, die zu demselben Werte s gehören, haben gleiche Z. Es gilt vielmehr, wie Fig. 2 andeutet, das Folgende: Die Ordinaten s wachsen offenbar sprungweise und bilden vom Minimum zum Maximum ansteigend den « s-zug ». Zu jedem s gehört eine Reihe Gattungen, deren Z-werte wieder als Ordinaten eingetragen werden. Für jedes s ergibt sich dann ein Zug fallender Z-werte, aber derart, dass auch die aufeinanderfolgenden Z-züge beständig sinken. Der Maximalwert von Z gehört zum Minimum von s (2). Mittel der Hermes'schen Methode habe ich sämtliche P_{11}, P_{12}, P_{13} und einzelne Klassen der P_{14}, P_{15}, P_{16} abgeleitet (3) und stelle in den folgenden Tabellen die Zahlenwerte zusammen. (Die in Klammern stehenden Zahlen sind die der Kantenfiguren).

P_{11}

$G_{11}^0=$	30	$P_{11}^0=$ 82	
$G_{11}^1=$	51	$P_{11}^1=$ 281	(287)
$G_{11}^2=$	62	$P_{11}^2=$ 508	(597)
$G_{11}^3=$	42	$P_{11}^3=$ 335	(558)
$G_{11}^4=$	14	$P_{11}^4=$ 44	(116)
$G_{11}=$	199	$P_{11}=$ 1250	(1640)

(1) Der Satz sagt offenbar aus, dass die Zahl Z um so grösser ist, je mehr die einzelnen Flächenzahlen um den Wert μ herum liegen; sie wird um so kleiner, je mehr extrem grosse oder kleine Zahlen für einzelne Flächenarten auftreten.

(2) Es bekommt übrigens die « Z-curve » durch Einzelwerte Z zuweilen oszillierenden Charakter, wiewohl der Satz im allgemeinen gültig bleibt; jedenfalls leistet er gute heuristische Dienste.

(3) Diese Arbeit, auf die ich fast 8 Jahre verwendet habe, ist in 9 mehr oder weniger starken Manuskriptbänden enthalten, mit mehr als 150000 Diagrammen der Kantenfiguren der P_{11}, P_{12}, P_{13}, (P_{14}, P_{15}, P_{16}) und vollständigen, geordneten Tabellen aller Gattungen der genannten P_n, sowie deren Zahlen Z und s. Auch sind daselbst alle symmetrischen und « kalottenisomorphen » Polyeder (vollständig bis $n=13$) gezeichnet, auf die wir hier nicht eingehen konnten. Ebenso finden sich dort die Beweise für alle hier aufgestellten Behauptungen. Ich beabsichtige diese Manuskriptbände einer deutschen Universitätsbibliothek zur Aufbewahrung zu übergeben.

P_{12}			P_{13}		
$G_{12}^0 = 50$	$P_{12}^0 = 228$		$G_{13}^0 = 88$	$P_{13}^0 = 731$	
$G_{12}^1 = 91$	$P_{12}^1 = 991$	(1000)	$G_{13}^1 = 154$	$P_{13}^1 = 3452$	(3468)
$G_{12}^2 = 120$	$P_{12}^2 = 2264$	(2418)	$G_{13}^2 = 223$	$P_{13}^2 = 9401$	(9695)
$G_{12}^3 = 107$	$P_{12}^3 = 2826$	(3715)	$G_{13}^3 = 224$	$P_{13}^3 = 16234$	(18502)
$G_{12}^4 = 61$	$P_{12}^4 = 1232$	(2496)	$G_{13}^4 = 165$	$P_{13}^4 = 15218$	(22415)
$G_{12}^5 = 14$	$P_{12}^5 = 74$	(247)	$G_{13}^5 = 76$	$P_{13}^5 = 4302$	(10645)
$G_{12}^6 = 1$	$P_{12}^6 = 1$		$G_{13}^6 = 16$	$P_{13}^6 = 115$	(478)
$G_{12} = 444$	$P_{12} = 7616$	(10105)	$G_{13} = 946$	$P_{13} = 49453$	(65934)

P_{14}			P_{15}, P_{16}		
$G_{14}^0 = 140$	$P_{14}^0 = 2282$		$G_{15}^0 = 225$	$P_{15}^0 = 7531$	
$G_{14}^1 = 253$	$P_{14}^1 = 12170$	(12186)	$G_{15}^1 = 399$	$P_{15}^1 = 45232$	(45252)
$G_{14}^2 = 359$	$P_{14}^2 = 37030$	(37480)	$G_{15}^8 = 17$	$P_{15}^8 = 266$	(1572)
$G_{14}^7 = 18$	$P_{14}^7 = 178$		$G_{16}^0 = 350$	$P_{16}^0 = 24312$	

Die bekanntlich zuerst von Steiner gestellte Frage nach dem *Bildungsgesetz* der Zahlen $\psi(n)$ ward nie beantwortet, und wir beabsichtigen nicht, es zu tun. Wir stellen nur die folgenden Betrachtungen an. Bezeichnet man $\frac{P_n + 1}{P_n}$ mit $a_{n+1,n}$, so ergeben sich aus den bisher bestimmten Werten der P_n (auf 2 Dez.) die Zahlen $a_{5,4} = 1$; $a_{6,5} = 2$; $a_{7,6} = 2{,}50$; $a_{8,7} = 2{,}80$; $a_{9,8} = 3{,}57$; $a_{10,9} = 4{,}66$; $a_{11,10} = 5{,}37$; $a_{12,11} = 6{,}07$; $a_{13,12} = 6{,}51$.

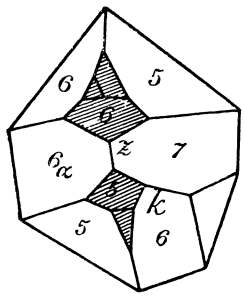


Fig. 3.

Ihre graphische Darstellung gibt bei Verbindung der Endpunkte der Ordinaten den gebrochenen Linienzug A in Fig. 3, der bald über, bald unter der geraden Linie L verläuft. Wählt man den Winkel φ so, dass bei Ersetzung der Eckpunkte von A durch die Punkte gleicher Abscisse auf L die durchschnittlichen Abweichungen möglichst klein werden, nämlich für $\tan \varphi = 0{,}7151 = w$, und ersetzt die wahren Werte von $a_{n+1,n}$ durch die auf der Geraden L liegenden, so wird, wie leicht zu zeigen

$$\psi(n) = \prod_{1}^{n-5} \left[i \right] (1 + iw).$$

Die folgende Tebelle gibt die daraus berechneten Werte von $\psi(n)$ (d. h. die nächstliegende ganze Zahl) und in Klammern die wahren Werte

$\psi(5) = 1$ (1)	$\psi(8) = 13$ (14)	$\psi(11) = 1225$ (1251)
$\psi(6) = 2$ (2)	$\psi(9) = 51$ (50)	$\psi(12) = 7357$ (7616)
$\psi(7) = 4$ (5)	$\psi(10) = 232$ (233)	$\psi(13) = 49444$ (49451)

Weiterhin ergäbe sich durch die Formel

$$\psi(14) \sim 3677.10^2; \qquad \psi(15) \sim 2996.10^3; \qquad \psi(16) \sim 2657.10^4 \qquad \text{usw.}$$

Man ersieht daraus, dass durch die obige *empirische Formel* für die Zahlen $\psi(n)$ wenigstens die Grössenordnung bestimmt wird und es ist immerhin interessant zu erfahren, dass schon die Anzahl der 18-flache mehrere Milliarden beträgt, die Anzahl der 21-flache aber bereits über einige Billionen, was bei meinen deutschen Zuhörern und Zeitgenossen der Inflation kein Gruseln erregen wird.

V. SNYDER (New York - U. S. A.)

INVOLUTORIAL SPACE TRANSFORMATIONS CONTAINED MULTIPLY IN A LINEAR LINE COMPLEX

Introduction.

The determination of the involutorial birational transformations of space which belong to a linear line complex, that is, such that the lines PP' joining pairs of conjugate points constitute the complex, has been made for the case in which each line contains only one pair of conjugate points, both for the case of the non-singular complex (1) and for the singular complex (2).

The case in which each line of the complex contains more than one pair has not been considered systematically. An illustration of three pairs in a general complex is given by MONTESANO in connection with another problem (3) and one of two pairs on each line of a special complex was found (4) incidentally in discussing the problem of mapping a general cubic variety of S_4 on the points of S_3. This variety is probably irrational, hence this double special linear complex may furnish an illustration of an irrational involution in three way space.

The present note considers a family of involutions contained in a general linear complex with any given number k of pairs of conjugate points on each line, and a series of such families contained in a special complex. Neither one includes all known to exist, but either or both may contribute to the study of irrational involutions of order two in S_3.

---

(1) D. MONTESANO. *Sulle trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. 4, 207-215, 277-285 (1888). — H. A. DAVIS. *Involutorial transformations belonging to a linear complex.* American Journal of Mathematics, vol. 52, 53-71 (1930).

(2) M. PIERI. *Sulle trasformazioni birazionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 6, 240-244 (1892). — SHARPE and SNYDER. *Certain types of involutorial space transformations.* Transactions American Mathematical Society, vol. 20, 175-202 (1918) and vol. 21, 52-78 (1920).

(3) D. MONTESANO. *Una estensione del problema della projettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.* Annali di Matematica, Ser. 3, vol. 1, 313-357 (1898).

(4) V. SNYDER. *Un'involuzione d'ordine due dell'S_3 appartenente alla varietà cubica generale dell'S_4.* Giornale di Matematiche, vol. 61, 125-128 (1923).

1. - Non-special complex. — Consider a pencil of linear line congruences $s_1B+s_2C=0$ contained in a fixed non-special linear complex $A=0$, and a pencil $t_1H_1+t_2H_2=0$ of quadrics, a congruence s and a quadric t being associated by the relation $s_1\varphi_1(t_1, t_2)+s_2\varphi_2(t_1, t_2)=0$, wherein $\varphi_i(t_1, t_2)$ is a rational homogeneous polynomial of order k in t_1, t_2.

The base of the pencil of complexes is the regulus defined by $A=0$, $B=0$, $C=0$. The other regulus on the quadric is made up of the ∞^1 pairs of directrices of the congruences, one pair being associated with each value of $s_1 : s_2$.

These conditions determine an involutorial birational transformation of points of space, the lines joining pairs of conjugate points PP' of which belong to the complex $A=0$, and every such line contains k pais of associated points. Given a point (y). The quadric passing through it determines $t_1 : t_2$, $t_1H_1(y)+t_2H_2(y)=0$, and hence $s_1 : s_2$ is known. The directrices d, d' of the congruence can then be determined. If now the transversal of d, d' through (y) be drawn, it will meet the quadric determined by (y) in (y'), its conjugate in the involution.

Conversely, given any line of the complex. This fixes the value of s, and hence of d, d'. There are k associated values of t, hence k quadrics of the pencil, each of which meets the line in pairs of points PP', consequently the system defines an involution I such that every line PP' contains k such pairs.

Analytically, the procedure is as follows:

Let the base quadric be $x_1x_4-x_2x_3=0$, with

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{x_3}{x_4}=\frac{m_1}{m_2}, \quad m_1^2s_2-m_2^2s_1=0. \qquad m_2x_1-m_1x_2, \quad m_2x_3-m_1x_4=0.$$

The transversal through (y) is then

$$s_2(x_1y_3-x_3y_1)+s_1(x_2y_4-x_4y_2)=0, \qquad s_2p_{13}+s_1p_{24}=0.$$
$$A\equiv(x_2y_3-x_3y_2)+(x_1y_4-x_4y_1)=0, \quad p_{23}+p_{14}=0.$$

The parametric equations of this line may be expressed in terms of its points on d, d'. The result is

$$\varrho x_1=u_1y_1+s_1u_2y_2, \quad \varrho x_2=u_1y_2+s_2u_2y_1,$$
$$\varrho x_3=u_1y_3+s_1u_2y_4, \quad \varrho x_4=u_1y_4+s_2u_2y_3.$$

In these values of (x) are now substituted in

$$H_2(y)H_1(x)-H_1(y)H_2(x)=0,$$

then (y') is defined by the equations

$$\varrho y_1'=Py_1-2Q\varphi_1y_2,$$
$$\varrho y_2'=Py_2-2Q\varphi_2y_1,$$
$$\varrho y_3'=Py_3-2Q\varphi_1y_4,$$
$$\varrho y_4'=Py_4-2Q\varphi_2y_3,$$

wherein $P=H_2(y)H_1(x)-H_1(y)H_2(x)$, with the values $\varphi_1 y_2$, $\varphi_2 y_1$, $\varphi_1 y_4$, $\varphi_2 y_3$ substituted for x_1, x_2, x_3, x_4 respectively and $Q=H_2(y)H_1(x,y)-H_1(y)H_2(x,y)$, $H_i(x,y)$ being the polar of $H_i(x)$ as to (y).

The fundamental elements are $C_4\equiv[H_1,H_2]$ and the intersection of $P=0$, $Q=0$.

The quadric $H\equiv y_1y_4-y_2y_3=0$ contains one regulus in $A=0$; each of its generators contains an infinite number of pairs PP' of conjugate points.

The case $k=1$ is included among those treated by MONTESANO ([1]) by synthetic methods, but apparently does not include the general T_{11} defined by him, as that transformation does not leave a pencil of quadric surfaces invariant. It does include the other cases.

2. - Any plane α of space contains a pencil of lines belonging to $A=0$ and each line contains k pairs of conjugate points PP'. Since the vertex of the pencil contains one and only one conjugate, the locus of these points is a self-conjugate curve Δ_{2k+1} in I, of order $2k+1$. For $k=1$, the transformation is a central involution of a cubic curve into itself; the vertex of the pencil is any point of the curve, and the pairs of points PP' define a g_2^1 belonging to it. For $k>1$, the transformation is a perspective Jonquières involution and is singular. The γ_2^1 of pairs of points is no longer rational since each line containing one pair contains k pairs.

Since a plane meets its conjugate surface in I in a composite curve consisting of a section of the surface of invariant points and of a self-conjugate curve, it follows that the minimum order of I is $2k+1$ and for that order there can exist no surface of invariant points.

3. - Let α turn about any line r in it, not belonging to $A=0$. The points PP' will now describe a surface containing r, its conjugate polar r' in A, and in each position of α, the associated Δ_{2k+1}. Hence the surface is of order $2k+2$, and is self-conjugate in I. The system of such surfaces is ∞^4, one associated with every pair of lines r, r'. Two such surfaces S_r, S_s, associated with r, r' and s, s' respectively contain, as partial curve of intersection, the locus of points PP' on the regulus determined by r, r', s, s' since these lines are obviously in hyperbolic position. Every line of the regulus in $A=0$ contains k pairs of points PP', and the curve and r, r' together form the complete intersection with S_r, hence this curve is of order $4k+2$; it is self-conjugate in I. Now consider a third surface S_p of the system, associated with a line p not belonging to $A=0$ nor meeting r nor s.

([1]) D. MONTESANO. *Sulle trasformazioni involutorie dello spazio che determinano un complesso lineare di rette.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. 4, 207-215, 277-285 (1888).

There are two lines which meet r, r', s, p and these also meet s', p'. The $2k$ points P, P' on each belong to all three surfaces, hence in the ∞^4 system $|T_{2k+2}|$, any three meet in $4k$ points; the ∞^3 system defined by any further basis point also passes through the $4k-1$ associated points, thus defining a one-dimensional involution of order $4k$ in S_3.

A plane $(ax)=0$ is transformed by I into

$$P(ax)-2Q[\varphi_1(a_1x_2+a_3x_4)+\varphi_2(a_2x_1+a_4x_3)]=0,$$

hence it meets its conjugate surface in the Δ_{2k+1} of its plane,

$$(ax)=0, \quad \varphi_1(a_1x_2+a_3x_4)+\varphi_2(a_2x_1+a_4x_3)=0.$$

By letting the plane turn about the line $(ax)=0$, $(bx)=0$, the locus of its associated Δ_{2k+1} is found to be

$$(ax)\{\varphi_1(b_1x_2+b_3x_4)+\varphi_2(b_2x_1+b_4x_3)\}- \\ -(bx)\{\varphi_1(a_1x_2+a_3x_4)+\varphi_2(a_2x_1+a_4x_3)\}=0.$$

If $a_ib_k-a_kb_i=r_{ik}$, the surface T_r is defined by the equation

$$H(\varphi_2r_{42}-\varphi_1r_{13})+(\varphi_1x_2x_4-\varphi_2x_1x_3)(r_{14}-r_{23})+ \\ +r_{12}(\varphi_1x_2^2-\varphi_2x_1^2)+r_{34}(\varphi_1x_3^2-\varphi_2x_4^2)=0.$$

The complex A is $p_{14}+p_{23}=0$; the polar conjugate of

$$(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{42}, r_{34}) \quad \text{is} \quad (r_{12}, r_{13}, -r_{23}, -r_{14}, r_{42}, r_{34}),$$

hence T_r contains (r') also.

4. - The quadric $H\equiv x_1x_4-x_2x_3=0$ has a regulus $\tau_1x_1-\tau_2x_3=0$, $\tau_1x_2-\tau_2x_4=0$ belonging to the complex A, and another $\sigma_1x_1-\sigma_2x_2=0$, $\sigma_1x_3-\sigma_2x_4=0$ having only two generators in A, $\sigma_1=0$ and $\sigma_2=0$. Any line r meets two Γ-lines of H. These lie on T_r. If r is a line of the σ-generation of H, then H is a component of T_r, and the residual consist of k quadrics of the t-pencil.

The surface of invariant points $Q=0$ is generated by the two projective systems

$$u_1H_1(x, y)-u_2H_2(x, y)=0, \quad u_1H_1(y)-u_2H_2(y)=0.$$

The former contains C_4^k and the latter C_4'. The residual is another space quartic of the first kind. A generator of H_t is transformed by I into a space cubic lying on it and meeting the given generator in two points. These are the residual points of the generator on Q. Since an arbitrary line is transformed into C_{4k+5} it follows that each of the intersections of the line with C_4 accounts for $2k+1$, that is, a point of C_4 is transformed into a curve of order $2k+1$. A line meets its conjugate in I in $2k+4$ points on K, hence each Δ_{2k+1} has a point of multiplicity $k+1$ at its image on C_4.

Each T_r is invariant under I. Any two, T_r and T_s have in common a C_{4k+2} on $H_{r,s}$; the residual γ_{4k+2} is a basis curve for all surfaces of the system $|T|$. By eliminating φ_1, φ_2 from the equations of T_r, T_s it is seen that the curve of intersection residual to C_4 lies on a composite quartic surface consisting of $H_{r,s}$ and H. Hence the residual basis curve γ_{4k+2} lies on H and is of type $(2k+2, 2k)$.

The basis curve C_4 meets H in 8 points, each of which is k-fold on γ_{4k+2}. Since H is invariant under I, it follows that $\gamma_{4k+2} \sim P^2 - 4Q^2\varphi_1\varphi_2$ by I.

Every generator of the τ-regulus, of H is transformed into itself; it is parasitic and contains an infinito number of pairs PP' of conjugate points.

If r belongs to the τ-regulus, T_r has r for a double line. When r is a line of the σ-regulus, Δ_{2k+1} consists of k conics and of a τ-line on H.

A line r will give rise to a double line on T_r only when $r_{13} = r_{24} = 0$ and $r_{14}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{34} = 0$. If it also belongs to A, it is a τ-generator of H, or is a common bisecant of C_4 and γ_{4k+2}, not passing through any actual point of intersection.

These lines are fundamental for $|T|$. The total number of (real or apparent) double points on γ_{4k+2} is $(2k+1)(k+1) + k(2k-1) + 4k(k-1)$ and the number of intersections $[C_4, \gamma_{4k+2}] = 8k$. Hence the number of common bisecants is $4k+8$. All these lines are parasitic in I. If r meets one of these lines g_i, T_r contains g_i.

5. - The characteristic table of I can now be determined. We have seen that $\gamma_{4k+2} \sim (P^2 - 4Q^2\varphi_1\varphi_2) : C_4^{4k+2}\gamma_{4k+2}^3(4k+8)g_i^2$. Every quadric of the t pencil is transformed into itself, and contains only the fundamental curve C_4. Hence

$$C_4 \sim P^2 : C_4^{4k+1}\gamma_{4k+2}^4(4k+8)g_i^2.$$

The jacobian is of order $16(k+1)$ and contains $C_4^{8k+3}\gamma_{4k+2}^7(4k+8)g_i^4$, hence C_4 and γ_{4k+2} are the only fundamental curves. The characteristics may now be written:

$$s_1 \sim s_{4k+5} : C_4^{2k+1}\gamma_{4k+2}^2(4k+8)g_i,$$
$$C_4 \sim P^2_{8(k+1)} : C_4^{4k+1}\gamma_{4k+2}^4(4k+8)g_i^2,$$
$$\gamma_{4k+2} \sim P^2 - 4Q^2\varphi_1\varphi_2 : C_4^{4k+2}\gamma_{4k+2}^3(4k+8)g_i^2.$$

$T_{2k+2} : C_4^k\gamma_{4k+2}$, and $\varphi_i : C_4^k$ are transformed into themselves while Q remains invariant point by point.

6. - If the condition be imposed that for each value of $t_1 : t_2$ the directrices d, d' of the associated congruence $s_1B + s_2C = 0$ shall be conjugate lines as to the t-pencil defining them, then this quadric remains invariant under the harmonic homology having d, d' for axes. In this case the pencil of quadrics is given by $H_1 \equiv x_1x_2 + hx_3x_4 = 0$, $H_2 \equiv x_1x_4 + x_2x_3 + px_1x_2 = 0$, wherein h, p are arbitrary constants. The basis curve is composite consisting of $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_4 = 0$; $x_1 - mx_3 = 0$, $hx_4 + mx_2 = 0$, m being given by $hm^2 + hpm - 1 = 0$.

Now $P=0$, and the equations of the transformations are

$$\varrho x_1' = \varphi_1 x_2, \quad \varrho x_2' = \varphi_2 x_1, \quad \varrho x_3' = \varphi_1 x_4, \quad \varrho x_4' = \varphi_1 x_3.$$

The transformation is of order $2k+1$. There is no surface of invariant points. The fundamental curve consists of each of the sides of the basis quadrilateral of the t-pencil of quadrics taken k times, and the lines l_{13}: $x_1=0$, $x_3=0$, and l_{24} have common tangent planes for all the k sheets of the s_{2k+1}, images of the planes of space, thus accounting for the other $2k$ lines. The quadric H contains one pair of basis lines, but not the other (except for particular values of h and of p).

The jacobian of order $8k$ consists of $\varphi_4^2\varphi_2^2$. Any plane through l_{13} is transformed into one through l_{24} and conversely. Since $x_3 - kx_1 = 0 \sim \varphi_1(x_4 - kx_2) = 0$ it follows that $l_{13} \sim \varphi_1$ and $l_{24} \sim \varphi_2$. The curve of invariant points is the residual intersection of $x_1^2\varphi_2 - x_2^2\varphi_1 = 0$, $H=0$. It is u_{2k+2} of order $2k+2$ and of type $(2, 2k)$ on H. It is hyperelliptic of genus $2k-1$.

The composite surfaces made *up* of the planes of space and their conjugates in I_{2k+1} are included in the system $|T_{2k+2}| : C_4^k u_{2k+2} 2k g_i$. Lines of $A=0$ meet their conjugate C_{2k+1} in $2k$ points PP'. Other lines do not meet their conjugates.

For $k=1$, this case is included among those discussed by NOETHER [1] and is also a very particular case of a transformation developed by MONTESANO [2] for arbitrary k.

The other basis generators are fundamental of the second kind. Any point goes into the whole line through it. Thus any plane through m or m' is transformed into a non-composite s_{2k+1}, but containing m to multiplicity $k+1$.

A case of $k=3$ without a surface of invariant points and not included in the above category was given by MONTESANO [3].

7. - Special linear complex. — Let $x_1=0$, $x_2=0$ be the axis of the special complex. The other directrix of the congruence $s_2B + s_1C = 0$, $A=0$ is then uniquely determined by s_1, s_2. As before let $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$ be the basis of the system. Then $\frac{x_1}{x_3} = \frac{x_2}{x_4} = \frac{s_1}{s_2}$ is the variable directrix, and the line through y has the equations

$$x_1y_2 - x_2y_1 = 0, \quad s_2(x_3y_2 - x_2y_3) + (x_1y_4 - x_4y_1)s_2 + s_1(x_4y_3 - x_3y_4) = 0.$$

---

[1] M. NOETHER. *Ueber die eindeutigen Raumtransformationen.* Mathematische Annalen, 3, 547-580 (1871). See p. 571.

[2] D. MONTESANO. *Su una classe di trasformazioni razionali involutorie dello spazio di genere arbitrario n e di grado* $2n+1$. Giornale di Matematiche, 31, 36-50 (1893).

[3] D. MONTESANO. *Una estensione del problema della projettività a gruppi di complessi e di congruenze lineari di rette.* Annali di Matematica, Ser. 3, vol. 1, 313-357 (1898).

In this case the series of surfaces left invariant by I are of order n having the line $p \equiv x_1=0,\ x_2=0$ to multiplicity $n-2$.

Let $P_1 \equiv \sum u_r x_1^{n-r-2}x_2^r=0,\ P_2 \equiv \sum v_r x_1^{n-r-2}x_2^r=0$ be two such surfaces wherein each u_r, v_r is a general quadratic quaternary form in (x). Let $t_1P_1+t_2P_2=0$, $s_1\varphi_1(t_1, t_2)+s_2\varphi_2(t_1, t_2)=0$ define the pencil of surfaces P, and the $(1, k)$ relation between (s_1, s_2) and (t_1, t_2) as before. The surface $P_2(y)P_1(x)-P_1(y)P_2(x)=0$ is then cut by the line $p_{12}=0,\ s_2(p_{32}+p_{14})+s_1p_{43}=0$ in (y), (y'), which defines the involution I. The equations are of the form

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1(\lambda+\mu s_1),\\ y_2' &= y_2(\lambda\mu+s_2),\\ y_3' &= y_3\lambda-\mu s_2y_1,\\ y_4' &= y_4\lambda-\mu s_2y_2. \end{aligned}$$

These values of (y') are to be substituted in the equation

$$P_2(y)P_1(y')-P_1(y)P_2(y')=0,$$

and the factor $\mu(\lambda+\mu s_1)^{n-2}$ removed.

$$\begin{aligned} \lambda &= P_2(y)P_1(s_1y_1,\ s_1y_2,\ -s_2y_1,\ -s_2y_2)-P_1(y)P_2(sy) \equiv P\\ \mu &= -2P(y_1, y_2, y_3, y_4 : s_1y_1,\ s_1y_2,\ -s_2y_1,\ -s_2y_2) = -2Q \end{aligned}$$

wherein the only terms effected by s_1, s_2 are those in each quadratic u_r, v_r in both P and Q.

$s_1=\varphi_2(P_1, P_2)$, $s_2=-\varphi_1(P_1, P_2)$ are each of order kn in (y). Each contain p to multiplicity $k(n-2)$. $P(y)$ is of order $2n(k+1)$; it contains p to multiplicity $2(n-2)(k+1)+2$. Q is of order $(k+2)n$, and contains p to multiplicity $(k+2)(n-2)+1$. All the fundamental elements are contained in $P=0$, $Q=0$. The transformation is therefore of order $2n(k+1)+1$. The surfaces conjugate to the planes of space contain p to multiplicity $2(n-2)(k+1)+2$.

The surfaces $P_1=0$, $P_2=0$ intersect in a curve of order n^2, of which p counted $2(n-2)$ times forms a part. The residual $\gamma_{4(n-1)}$ is a basis curve of the transformation. It meets p in $4(n-2)$ points, and has the genus $6n-11$. This curve is a fundamental curve of the transformation of multiplicity $2k+1$.

We have then

$$s_1 \sim s_{2n(k+1)+1} : p^{2(n-2)(k+1)+2}\gamma_{4(n-1)}^{2k+1}.$$

An arbitrary plane $\sum a_ix_i=0$ is transformed into

$$P\left(\sum a_ix_i\right)-2Q(s_1a_1x_1+s_1a_2x_2-s_2a_3x_1-s_2a_4x_2)=0.$$

The surface of invariant points is $Q=0$.

Any plane meets its conjugate in the section of the plane with $Q=0$ and in the curve

$$(asx) \equiv a_1s_1x_1+a_2s_1x_2-a_3s_2x_1-a_4s_2x_2=0, \quad \sum a_ix_i=0.$$

This curve is of order $nk+1$, has the point of intersection of its plane with p to multiplicity $nk-2k+1$, and has $4(n-1)$ points on γ each to multiplicity k.

As the plane turns about a line in its plane which does not meet p, the curve generates a surface K of order $kn+2$, having p to multiplicity $nk-2k+1$, and $\gamma_{4(n-1)}$ to multiplicity k. The equation of the surface associated with the line $\sum \alpha_i x_i=0$, $\sum \beta_i x_i=0$ is $(\alpha s x)\sum \beta_i x_i-(\beta s x)\sum \alpha_i x_i=0$.

Let (α, β) and (α', β') be any two skew lines, neither of which meets p. The regulus determined by them and p belongs to the complex; on it lies a curve of pairs of conjugate points, which lies on both $K_{\alpha,\beta}$ and $K_{\alpha',\beta'}$. Each line of the regulus contains $2k$ points of the curve.

The variable curve of intersection of $K_{\alpha,\beta}$, $K_{\alpha',\beta'}$ lies on a quartic: it is obtained by eliminating s_1, s_2 between their two equations. This quartic is composite; one component is the quadric just described and the other is the fixed quadric $H=0$. The equation of the former is

$$\begin{aligned}&(r_{13}'r_{14}-r_{13}r_{14}')x_1^2-(r_{13}r_{34}'-r_{13}'r_{34})x_1x_3+(r_{42}r_{34}'-r_{42}'r_{34})x_2x_4-\\&-(r_{14}r_{23}'-r_{14}'r_{23})x_1x_2+(r_{34}r_{14}'-r_{14}r_{34}')x_1x_4-(r_{23}r_{34}'-r_{23}'r_{34})x_2x_3+\\&+(r_{23}r_{42}'-r_{23}'r_{42})x_2^2-(r_{42}r_{13}'-r_{42}'r_{13})x_1x_2=0,\quad r_{ik}=\alpha_i\beta_k-\alpha_k\beta_i.\end{aligned}$$

Thus, any two surfaces K_{nk+2} intersect in (φ_1, φ_2), have a variable curve on the quadric determined by their two variable directrices and p, and a residual curve on H. This latter is common to all the surfaces of the system $|K_{nk+2}|: p^{nk-2k+1}$. The line (α, β) meets H in two points; the generators of H through them which belong to Γ are also on $K_{\alpha,\beta}$. If α, β is a generator of H not in Γ, then H is a component of $K_{\alpha,\beta}$. The other is a composite surface of the pencil determined by P_1 and P_2.

A surface of the pencil $K_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha'\beta'}$ meets its associated quadric in the line p, in a line determined by (α, β) and (α', β') and in a residual curve of order $nk+2k+2$, of symbol $[nk+2, 2k]$. The fixed curve on H is of order $nk+2k+1$, since the two lines of the complex through the points in which the preceding line meets H are on H and the K of the pencil determined by the line. Call this curve $\delta_{nk+2k+1}$.

From the fact that any plane through p is transformed into itself, it follows that $p \sim P-2Qs_1$, and since H is left invariant, $\delta_{nk+2k+1} \sim P$.

Moreover, every K of the system is left invariant, hence $\gamma_{4(n-1)} \sim \Gamma_{4n(k+1)}$.

These are sufficient to construct the table of characteristics of the entire transformation, including the parasitic lines g_i.

$$\begin{aligned}&s_1 \sim s_{2n(k+1)+1} : p^{2(n-2)(k+1)+2}\gamma_{4(n+1)}^{2k+1}\delta_{nk+2k+1}^2(6nk+6n-8k-4)g_i\\&p \sim P-2Q\varphi_1 : p^{2(n-2)(k+1)+2}\gamma_{4(n-1)}^{2k+1}\delta_{nk+2k+1}^2(6nk+6n-8k-4)g_i\\&\delta_{nk+2k+1} \sim P_{2n(k+1)} : p^{2(n-2)(k+1)+2}\gamma_{4(n-1)}^{2k+1}\delta_{nk+2k+1}^2(6nk+6n-8k-4)g_i\\&\gamma_{4(n-1)} \sim \Gamma_{4n(k+1)} : p^{4(n-2)(k+1)+3}\gamma_{4(n-1)}^{4k+1}\delta_{nk+2k+1}^2(6nk+6n-8k-4)g_i^2.\end{aligned}$$

The jacobian consists of $P(P-2Q\varphi_1)\Gamma$. This form does not include those which have no surface of invariant points, as the transformation becomes singular if $P\equiv 0$, Moreover, other transformations exist which belong multiply to a special linear complex, but are not contained in the category here considered (1).

The method of PIERI (2) so fruitful for the case of $k=1$ could not be generalized to advantage, hence an entirely different one was employed in the present discussion.

---

(1) V. SNYDER. *Un'involuzione d'ordine due dell'S_3 appartenente alla varietà cubica generale dell'S_4*. Giornale di Matematiche, vol. 61, 125-128 (1923).

(2) M. PIERI. *Sulle trasformazioni birazionali dello spazio inerenti a un complesso lineare speciale.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 6, 240-244 (1892).

A. EMCH (Urbana - Illinois - U. S. A.)

FINITE GROUPS AND THEIR GEOMETRIC REPRESENTATION

I. - Introduction.

The fact that every finite group may be represented as a substitution group of a certain degree m makes it possible to construct in every case certain configurations in a projective space of $m-1$ or lower dimensions whose points correspond uniquely to the substitutions of the group. Such configurations are representatives of the groups and are characterised by geometric properties which reflect the properties of the group. Such representations in certain particular cases are numerous and have been known for a long time. From this standpoint I have considered the symmetric group of degree m on a hyperquadric in S_{m-1} (1). It is thus obvious that any finite group may be represented by a certain configuration (with characteristic geometric properties) on a hyperquadric. Whether such a representation would in every case be mathematically profitable is an open question. While there is thus indicated a general method of approach to the geometrical problem of finite group theory, there may be developed special methods of representation of finite groups in connection with particular problems connected with group theory, which seem to be of sufficient interest and importance to deserve attention. This is the case with the theory of triple and multiple systems in which geometric considerations are found in the literature only in a few instances (2). It was KIRKMAN (3) in 1844, and

(1) *Some geometric applications of symmetric substitution groups.* The American Journal of Mathematics. Vol. XLV (1923), pp. 192-207.

(2) L. HEFTER. *Über das Problem der Nachbargebiete.* Mathematische Annalen, vol. 38 (1891), pp. 477-508.

DE VRIES. *Zur Theorie der Tripel Systeme.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, vol. 8 (1894), pp. 222-226. *Ueber polyedrale Configurationen.* Mathematische Annalen, vol. 34 (1889), pp. 237-246.

(3) *On a problem in combinations.* The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, vol. 2 (1847), pp. 191-204.

STEINER (1) who in 1853 first stated the problem of triple systems and certain multiple systems in its most elementary aspect as it was revealed to him by the study of the configuration of the 28 double tangents of the quartic. A detailed account of this connection is given by NOETHER (2) in an important paper which appeared in 1879. Netto pays attention to the algebric properties of triple systems and the closely associated triple equations and their groups. Since that time triple systems have been studied by a number of investigators mostly with reference to existence proofs, formation and group properties of such systems (3).

That a vast number of similar systems, for example triple systems with double couples, quadruple systems containing every triple once, in general *n-tuple* systems of various types may be formed becomes evident without much effort. There seems to be little that has been done along this line of generalization. In as much as with every well defined system of this sort there is associated a finite group which dominates it and as the number of such systems is unlimited, there exists a large class of finite groups which bear conversely the characteristics of these systems. Esch triple or multiple system and couples of such may be represented by a certain spatial configuration to which is attached a related finite group. It is the purpose of this paper to mention a few simple examples of this sort and their groups.

II. - Finite Groups of Given Order m.

Every substitution group of order m may be represented by a simply isomorphic group of order m and degree m, i. e., by a regular group of order m.

---

(1) *Combinatorische Aufgabe.* Journal für reine und angewandte Mathematik, vol. 45 (1853), pp. 181-182.

(2) *Ueber die Gleichungen achten Grades und ihr Auftreten in der Theorie der Curven vierter Ordnung.* Mathematische Annalen, vol. 15 (1879), pp. 89-110.

(3) E. NETTO. *Zur Theorie der Tripelsysteme.* Mathematische Annalen, vol. 42 (1893), pp. 141-152.

E. H. MOORE. *Concerning triple systems.* Mathematische Annalen, vol. 43 (1893), pp. 271-285.

F. M. COLE. *The triad systems of thirteen letters.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 14 (1913), pp. 1-5.

H. S. WHITE. *Triple systems as transformations, and their paths among triads.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 14 (1913), pp. 6-13.

LOUISE D. CUMMINGS. *On a method of comparison for triple system.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 15 (1914), pp. 311-327.

H. S. WHITE. *The multitude of triad systems on 31 letters.* Transactions of the American Mathematical Society, vol. 16 (1915), pp. 13-19.

S. BAYS. *Sur les systèmes cycliques de Steiner.* Annales Sc. de l'École Normale Supérieure, 3 sér., ouvre 4 (1923) pp. 55-90.

For this reason it is not difficult to show that every group K_ν *on* m *letters may be represented (in an infinite number of ways) by a certain configuration of points on a hyperquadric, uniquely determined by a point* (ν), *which is a divisor of the entire configuration of the* m: *points representing the symmetric group, the structure of the group* K_ν *is reflected by the geometric properties of the corresponding configuration.*

As a simple example consider the *Groups on four letters*, for which the symmetric group-configuration G_{24} is well known.

For the subgroups G_8 of the G_{24} we have the

THEOREM: *An octuple* (P) *corresponding to an octic subgroup* G_8 *of the symmetric* G_{24} *on* 4 *letters determines a quartic* C_4 *on the symmetric quadric which is invariant in the* G_8. *Through* C_4 *there is a pencil of quadrics belonging to the* G_8. *Each of these quadrics is invariant under the* G_8.

The octuples on C_4 *form a linear series* g_8^1, *i. e., an involution. Expressed differently the* C_4 *is invariant under an octic collineation group in* S_3.

III. - Triple Systems.

1. - *Simple Triple Systems.*

As systems of this sort, their description and name of their properties, at least for lower orders, are fairly well known I shall not enter into a detailed discussion of them, and present merely a few additional circumstances which seem to be worthy of notice.

It is well known that triple systems Δ_n^3 on n elements exist only, and in every case, for number of the form $n=6m+1$, and $n=6m+3$. Instead of using the medium of hyperquadric or other forms of possible graphic representation we may make use of the simple device of representing the n elements by n generic points in ordinary space S_3. *Then to every triple system corresponds a certain open polyhedral configuration of triangles on these* n *points. To two triple system* Δ_n^3 *without a common triple corresponds a closed polyhedral configuration, whose mapping upon simple closed surfaces will be explained subsequently in case of* $n=7$ *and* $n=9$.

For Δ_3^7 we have, as is well known, the simple G_{168}.

There are altogether $7:168=30$ distinct Δ_7^3's and any of the 35 triples is always common to 6 distinct Δ_7^3's. But it is not possible to form 5 distinct Δ_7^3's which together contain all of the 35 triples, as has already been established by Cagley (1).

---

(1) *Papers*, vol. 1, pp. 481-484.

Δ_9^3. For the generating « matrix » we may use the square arrangement

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\|.$$

The 12 triples obtained from the three rows, the three column and the 6 terms of the ordinary determinante expansion form a triple system $a\,b\,c$, $d\,e\,f$, $g\,h\,i$, $a\,d\,g$, $b\,c\,h$, $c\,f\,i$, $a\,e\,i$, $a\,f\,h$, $b\,d\,i$, $c\,d\,h$, $b\,f\,g$, $c\,e\,g$, on 9 letters or numbers, in which $a\,b$,...., i denote the 9 numbers 1, 2,...., 9 in any order. Thus the particular arrangement of the « matrix « is equivalent with the substitution

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ a & b & c & d & e & f & g & h & i \end{matrix}.$$

To determine the group which leaves the triple system invariant we notice first that the Δ_9^3 as a whole does not change when any two rows, or any two columns are interchanged. This gives a subgroup of 36 substitutions which leave Δ_9^3 invariant.

But there are 11 other distinct matrices and distinct from any attached to the G_{36}, which also leave Δ_9^3 invariant, namely (including the first)

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & e & i \\ b & f & g \\ c & d & h \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & f & h \\ b & d & i \\ c & e & g \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ e & f & d \\ i & g & h \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & d & g \\ e & h & b \\ i & c & f \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & e & i \\ f & g & b \\ h & c & d \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & f & h \\ d & i & b \\ g & c & e \end{matrix} \right\|$$

$$\left\| \begin{matrix} a & b & c \\ f & d & e \\ h & i & g \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & d & g \\ h & b & e \\ f & i & c \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & e & i \\ g & b & f \\ d & h & c \end{matrix} \right\| \quad \left\| \begin{matrix} a & f & h \\ i & b & d \\ e & g & c \end{matrix} \right\|$$

With each of these are connected as above 36 substitution which leave Δ_9^3 invariant. These together form all the substitution which leave the given Δ_3^9 invariant, and they consequently form a G_{432} of order $36 \cdot 12 = 432$, which is known as the group of the triple equation of degree 9. There are, of course, several ways of generating this group. For instance if we set

$$S_1 = 133.456.789$$
$$S_2 = 147.258.369$$
$$S_3 = 159.267.348$$
$$S_4 = 168.249.357$$

then G_9 (S_1, S_2, S_3, S_4) is a non-cyclic Abelian group of order 9 and the G_{432} is the holomoph of G_9.

Each triple is common to 120 *distinct triple systems.*

There are altogether $7 \cdot 120 = 840$ distinct triple systems on 9 elements.

Now in case of 9 the remarkable circumstance presents itself that *all* 84 *triples may be distributed completely and each only once in* 7 *triple systems. This may be called a complete set of triple systems.*

That this is not always possible is clear from the case of $n=7$. Such a complete set is for example obtained from the 7 matrices

$$\left\|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&4\\3&5&9\\7&6&8\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&5\\3&7&8\\9&4&6\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&6\\3&4&7\\8&5&9\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&7\\3&6&8\\4&9&5\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&8\\4&3&9\\5&7&6\end{matrix}\right\| \quad \left\|\begin{matrix}1&2&9\\7&3&6\\8&4&5\end{matrix}\right\|$$

As there are 840 distinct Δ_9^3's, and from the fact the fact that there exists at least one complete set, it is easily seen that a great number of such complete sets may be formed and that each Δ_9^3 may belong to more than one complete set. So far I have not been able to establish necessary and sufficient conditions on the number m for which complete sets of triple systems are possible. The original complete set of Δ_9^3's were found by trial.

2. - *Triple Systems with double couples.*

n elements form $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ triples and $\frac{1}{2}n(n-1)$ couples. Let Δ be a triple system containing every couple twice and let x be the number of triples of the system. As every triple contains 3 couples

$$3x = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = n(n-1),$$

$x = 1/3n(n-1)$. Hence n must have either the form $n=3m$, or $n=3m+1$, and $x=m(3m-1)$, or $x=(3n+1)m$.

3. - *Triple System of order* 7 *with double couples.*

Such a system may be constructed by taking two ordinary triple systems of order 7 with single couples without a common triple. For example

$$\left\|\begin{matrix}1&2&3\\&4&\\5&6&7\end{matrix}\right\| \equiv \begin{matrix}1&1&1&2&2&3&3\\2&4&5&4&5&4&6\\3&7&6&6&7&5&7\end{matrix}$$

$$\left\|\begin{matrix}2&1&6\\&4&\\7&3&5\end{matrix}\right\| \quad \begin{matrix}1&1&1&2&2&3&4\\2&3&5&3&4&5&6\\6&4&7&7&5&6&7\end{matrix}$$

Each system is invariant in a simple G_{168}. There are 7 substitution which permute the two systems, namely

$$\begin{aligned} S_1 &= (27)(35)(46) \text{ leaves } (1) \\ S_2 &= (15)(34)(67) \quad \text{» } (2) \\ S_3 &= (16)(25)(47) \quad \text{» } (3) \\ S_4 &= (12)(36)(57) \quad \text{» } (4) \\ S_5 &= (14)(26)(37) \quad \text{» } (5) \\ S_6 &= (17)(45)(23) \quad \text{» } (6) \\ S_7 &= (13)(24)(56) \quad \text{» } (7) \end{aligned}$$

in each system invariant. Then the product of each of these is a cyclic substitution of order 7 and all these products are the powers of one of these. For example

$$S_1S_2 = (1\ 5\ 4\ 7\ 2\ 6\ 3) = T$$
$$S_3S_5 = (1\ 2\ 5\ 6\ 4\ 3\ 7) = T^4$$

T and its powers transform the two triple systems into themselves. Hence this is a sub-group

$$G_{14} = 1,\ S_1,\ldots,\ S_7,\ T,\ T^2,\ldots,\ T^6$$

which leaves the triple system Δ_7^2 with double couples invariant.

If we let 1, 2,...., 7 represent generic points in a space of three dimensions, so that each triple is represented by a triangle, then the two systems form a closed surface such that at each of the 21 couples there are two adjacent triangles. This surface can be developed and deformed into a polyhedron on a torus. By joining the centers of the triangles as indicated in the figure we obtain 7 hexagons on the torus with the seven points as center. The mapping process of the polyhedron of 14 triangles upon a torus is also verified by the formula

$$k = V + F - S = 7 + 14 - 21 = 0.$$

Moreover $2 - k = 2 - 2p$, $p = 1$. The group belonging to this configuration is a G_{42}.

4. - *Triple Systems of order* 9 *with double couples.*

The triple system obtained from

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix} \right\| \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 4 & 6 & 5 & 5 & 4 & 6 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 9 & 8 & 9 & 7 & 8 & 7 & 8 & 9 & 6 & 9 \end{matrix} \right\|$$

has a group which is doubly transitive, since 1, 2 may be replaced by any two other letters, say 5 and 8:

$$\left\| \begin{matrix} 5 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 7 \\ 9 & 3 & 6 \end{matrix} \right\|$$

Or we have the substitution (154)(283)(796) which leaves the triple system invariant. Moreover the substitution which leave 1,2 invariant also leave 3 invariant and form a group of order 6

1, (47)(58)(69), (456)(798), (465)(789), (59)(67)(48), (68)(49)(57)

Hence the group which leaves the triple system invariant is a G_{432} of order $9\cdot 8\cdot 6=432$, since a group on n elements which is $k-$fold transitive has the order equal to the product of $n(n-1)....,\ (n-k+1)$ and the order of the group which leaves k of the elements fixed. The G_{432} is also the holomorph of the non-cyclic Abelian group Γ_9 of order 9.

$\Gamma_9(S_1, S_2, S_3, S_4)$ in which

$$S_1=123.456.789$$
$$S_2=147.258.369$$
$$S_3=159.267.348$$
$$S_4=168.249.357$$

Two triple systems Δ_9^3 without a common triple form a closed surface with three double vertices:

$$\left\|\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix}\right\| \equiv \begin{matrix}1&1&1&1&2&2&2&3&3&3&4&7\\2&4&5&6&4&5&6&4&5&6&5&8\\3&7&9&8&9&8&7&8&7&9&6&9\end{matrix}$$

$$\left\|\begin{matrix}1&2&4\\3&5&9\\7&6&8\end{matrix}\right\| \equiv \begin{matrix}1&1&1&1&2&2&2&3&3&4&4&7\\2&3&5&6&3&5&7&4&5&5&8&6\\4&7&8&9&8&6&9&6&9&7&9&8\end{matrix}$$

The surface can also be disected and mapped on a rectangle, and finally on a torus.

There is to be noticed this peculiarity in the polyhedral configuration for $n=9$, that the three vertices 1, 7, 9 are double vertices, each with two distinct cycles of triangles. By Euler's formula

$$k=V-S+F=(6+3\cdot 2)-36+24=0,$$

so that $2-k=2$ is the order of connectivity.

From the rectangular figure it is apparent that the cylindrical configuration with the edges 534 joined is left invariant by the cylic substitutions (rotations around axis of cylinder)

$$(458)(236)(197)=T$$

moreover by

$$S_1=(28)(35)(46)(79)$$
$$S_2=(17)(25)(34)(68)$$
$$S_3=(19)(38)(56)(24)$$

Now

$$S_1S_3 = T = (236)(458)(719)$$
$$S_1S_2 = (263)(485)(917) = T^2$$
$$S_2S_3 = (791)(263)(485) = T^2$$

Hence there is a non-cyclic group G_6 of order 6 (1, T, T^2, S_1, S_2, S_3) which leaves the closed surface invariant.

5. - *Triple Systems of even Order with double couples.*

The simplest case of this sort is for $n=6\mu$, $\mu=1$, or $n=6$, with

$$x = 2\mu(6\mu-1) = 10.$$

Such a system is for example

1 2 3	2 3 5
1 3 4	3 4 6
1 4 5	4 5 2
1 5 6	5 6 3
1 6 2	6 2 4

which form a closed surface. It is unilateral and can be mapped on a projective plane. The formule gives

$$V - S + F = 10 + 6 - 15 = 1 = k$$

or $2-k=1$ for the order of connectivity. The substitutions which leave the surface in ist composition of triples invariant form the icosahedral G_{60}.

If we join the centers of the five triangles around each vertex we obtained the unilateral surface mapped into 6 *pentagons, i. e., a unilateral polyhedron of* 6 *pentagons on the projective plane and* 10 *vertices is left invariant by the icosahedral group.*

IV. - Multiple Systems.

1. - *Systems* Δ_n^k.

n elements 1, 2, 3,...., n form $\binom{n}{k}$ $k-$tuples and $\binom{n}{k-1}$ $(k-1)-$tuples. *It is proposed to form a system* Δ_n^k *of* $k-$*tuples with the property that it contains each* $(k-1)-$*tuple just once.*

Let x be this number, then since every $k-$tuple contains $k(k-1)$ tuples, $kx = \binom{n}{k-1}$, or $x = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-k+2)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots.(k-1)k}$ which must be an integer. The condition that this be an integer is however not sufficient. Ley y be the number of $k-$tuples of Δ_n^k containing the letter 1. Then all $(k-1)$ tuples of Δ_n^k containing the letter 1 are in these $k-$tuples. A $(k-2)$ tuple formed from the re-

maining $n-1$ letters cannot appear in more than one of the y $k-$tuples. On the other hand each of these $(k-2)-$tuples is contained in the y $k-$tuples. Thus in each of the y $k-$tuples, there are $\binom{k-1}{k-2}(k-2)-$tuples. Hence

$$y\binom{k-1}{k-2}=\binom{n-1}{k-2},$$

or

$$y=\frac{(n-1)(n-2)\ldots\ (n-k+2)}{(k-1)(k-2)\ldots\ 2}$$

is the number of $k-$tuples of Δ with a given letter just once in each of the y $k-$tuples. For a Δ_n^k system y must be an integer which is another necessary condition. Next we might find the number of $k-$tuples that each contain a given couple ik and so forth.

2. - Δ_n^4. To illustrate this, take $k=4$, then

$$x=\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} \qquad y=\frac{(n-1)(n-2)}{3\cdot2}$$

In this case $n-3$ elements which form quadruples with ik must form $\frac{1}{2}(n-2)$ couples which with ik form all possible distinct triples each containing ik. From this follows that n must be even. Thus $n=2m$, and $y=1/3\ (m-1)(2m-1)$, and either $m=3\mu+1$, or $m=\frac{1}{2}(3\mu+1)$. In the latter case $\mu=2\nu+1$ and $m=3\nu+2$.

For quadruple systems of order n we have therefore either $n=6\mu+2$, or $n=6\mu+4$, and the number of quadruples in Δ_n^k is accordingly

$$x=\tfrac{1}{2}(3\mu+1)(6\mu+1),$$

$$x=\tfrac{1}{2}(3\mu+2)(2\mu+1)(3\mu+1).$$

In such a system each element occurs $\mu(6\mu+1)$ or $(2\mu+1)(3\mu+1)$ times.

3. - *Quadruple systems of lowest order* Δ_8^4.

Next to the quadruple system on four elements which consists of one quadruple 1234, containing four triples 123, 124, 134, 234, and which is left invariant by the symmetric group on four elements the quadruple systems of lowest order can be formed with 8 elements, such that each system contains 14 quadruples and each possible triple once, and every couple three times, and each letter 7 times. Its group is found to be a G_{1344}.

4. - *Configuration of two quadruple systems without a common quadruple.*

If we interpret the eight elements as eight points in space of four dimensions, every quadruple will be represented by a tetrahedron. Two quadruple systems without a common quadruple can be joined so that each face (triple) of

the fourteen tetrahedrons in one system will coincide with the same triple-face of the tetrahedron in the second system in which it occurs. In this manner we obtain a closed hypersurface P_{28} in S_4 bounded by 28 tetrahedral cells.

If in an S_n, there are for a polyhedron r_0 vertices, r_1 edges, r_2 faces, r_3 cells, r_4 four spaces bounding, etc., then for an Eulerian polyhedron

$$1-r_0+r_1-r_2+r_3 \ldots (-1)^{n-1}r_{n-1}=0.$$

Here r_{n-1} the number of $(n+1)$ spaces bounding the polyhedron is 1. Now for our 28 cell in S_4 we have

$$1-8+28-56+28-1=-8.$$

Hence the 28 cell in S_4 does not belong to the ordinary polytope. It is invariant in a G_{336}.

That configurations admitting of finite groups are not limited to the types Δ_n^k will appear from the following example.

5. - *A certain quadruple system on* 16 *elements.*

It is proposed to construct a quadruple system on 16 elements 1, 2,...., 16 such that every element occurs, just 6 times, i. e., in six quadruples of the system.

Let x be the number of quadruples, then there are $4x$ elements in the system. But as every element occurs in six quadruples, there must be $4x/6=16$ and $x=24$. Thus such a system must have 24 quadruples. Such a system is for example

1 2 3 4	1 5 4 8	5 9 12 8	1 4 16 13
5 6 7 8	2 6 7 3	9 13 16 12	1 2 14 13
9 10 11 12	8 12 11 7	10 14 15 11	1 5 9 13
13 14 15 16	12 16 15 11	6 10 11 7	2 3 15 14
1 5 6 2	5 9 10 6	7 11 15 3	6 10 14 2
8 7 3 4	9 13 14 10	3 16 15 4	8 4 16 12

There are exactly 32 couples each of which occurs exactly 3 times in the system. The 24 quadruples may be grouped into 8 octuples.

1 2 3 4	5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16
5 6 7 8	9 10 11 12	13 14 15 16	1 2 3 4
8 4 1 5	5 6 2 1	6 10 14 2	8 7 3 4
12 16 13 9	10 14 13 9	7 11 15 3	12 11 15 16

so that every octuple contains exactly 6 of the quadruples of the systems. But the 48 quadruples thus obtained are two by two equal, so that there are only

the 24 original distinct quadruples. Now between the number of elements, couples, quadruples and octuples exists the identity

$$1-16+32-24+8-1=0$$

which is Euler's formula for the 8 cell or cube in four dimensions. That this configuration is equivalent with the regular 8-cell in 4-dimensional space can ensily be shown. Ist group G_{192} is obtained without difficulty and in well known.

6. - *Quintuple and Higher Systems.*

By a similar procedure as in Δ_n^4 it is found that the lowest possible non-trivial quintuple system is a Δ_{11}^5 with 66 quintuples. In such a system every letter occurs 30 times, every couple 12 times, every triple 4 times, every quadruple once.

Professor CARMICHAEL shows that the group which leaves this system invariant is a four-fold transitive Mathieu group of degree 11 and order 11, 10, 9, 8.

The existence proofs for quintuple systems for $n>11$, and in general of k-tuples systems seem to be difficult, likewise the solution of the problem of complete sets of k-tuples systems for possible values of n. In any case these problems are closely connected with group theory.

As in the case of the 8-cell in S_4, other conditions than the existence of each $(k-1)$ tuples in a set of k-tuples may be imposed on n elements. We get accordingly different configuration and groups in which they are invariant.

G. FANO (Torino - Italia)

TRASFORMAZIONI DI CONTATTO BIRAZIONALI DEL PIANO

1. - Le trasformazioni di contatto nel piano, nello spazio, e anche a più variabili indipendenti, costituiscono una creazione geniale di S. LIE, il quale le ha studiate esclusivamente, o quasi, dal punto di vista differenziale, cioè nell'ipotesi che le funzioni che vi compaiono siano funzioni qualsiansi, soggette soltanto ad avere comportamento regolare nell'intorno di un punto generico della regione considerata. Esse possono anche studiarsi nel campo algebrico e nel campo birazionale, nel quale non sono state però finora molto approfondite. Per quanto a me consta, i lavori principali in argomento sono quelli di L. AUTONNE, il quale, in due Memorie del 1887-88 (1), ha impostato analiticamente il problema per il piano, studiandone alcuni casi elementari; e in lavori successivi (2) ha avviata la ricerca anche per lo spazio a tre o più dimensioni, studiando fra altro i diversi tipi di varietà, da lui dette « primordiales », che corrispondono ai punti e iperpiani come figure di elementi, e che al crescere della dimensione dello spazio ambiente danno luogo a un maggior numero di casi.

Ricordo che si chiama *elemento lineare* o anche solo *elemento* del piano la figura costituita dall'insieme di un punto del piano e di una retta passante per esso. Per la rappresentazione analitica, quando si tratta di elementi propri, si può far uso delle coordinate cartesiane ortogonali x, y del punto, aggiungendo come terza coordinata dell'elemento il coefficiente direttivo p della retta che fa parte dell'elemento. Due elementi infinitamente vicini (x, y, p) $(x+dx, y+dy, p+dp)$ si dicono *in posizione unita*, quando soddisfano alla condizione $dy-pdx=0$, ossia quando il punto dell'uno appartiene alla retta dell'altro (3). *Unione* (« *Verein* ») è ogni sistema ∞^1 di elementi, ciascuno dei quali sia in posizione unita col consecutivo. Nel piano, sono *unioni* tutte le linee, come

(1) Journ. de mathém. (4) vol. 3 (1887), p. 63; vol. 4 (1888), p. 177, 407.

(2) Ultimo, la Memoria riassuntiva: *Sur les formes mixtes*, Annales de l'Univ. de Lyon, Sciences et Médec., 16 (1905).

(3) Per elementi impropri, conviene ricorrere a coordinate omogenee sia di punto (x_1, x_2, x_3) che di retta (u_1, u_2, u_3). La relazione di posizione unita è allora caratterizzata da una qualunque delle due relazioni $\Sigma u_i dx_i = 0$ oppure $\Sigma x_i du_i = 0$, fra loro equivalenti in forza della $\Sigma u_i x_i = 0$.

sistemi di elementi costituiti dai singoli loro punti insieme colle rispettive tangenti; in particolare le rette, figure di elementi a retta fissa e punto variabile; e in più i punti, come sistemi ∞^1 a punto fisso e retta variabile. *Trasformazioni di contatto* sono le trasformazioni delle tre variabili indipendenti x, y, p, cioè del sistema ∞^3 degli elementi del piano, che mutano elementi in posizione unita in elementi così fatti, ossia la relazione $dy - pdx = 0$ in sè stessa, cioè ogni unione anche in una unione.

2. - Una trasformazione di contatto fra due piani:

$$(1) \qquad x_1 = X(x, y, p) \quad y_1 = Y(x, y, p) \quad p_1 = P(x, y, p)$$

si dirà *birazionale* quando è in pari tempo una trasformazione birazionale delle tre variabili x, y, p; cioè quando le X, Y, P sono funzioni razionali delle x, y, p, e tali che dalle (1), per valori generici di x_1, y_1, p_1, possano ricavarsi le x, y, p come funzioni pure razionali delle prime.

Sono trasformazioni di contatto birazionali le trasformazioni cremoniane del piano, estese agli elementi nel senso di S. LIE, cioè in quanto gli elementi uscenti da un punto P generico vengono già, come conseguenza della trasformazione puntuale, a corrispondere proiettivamente agli elementi uscenti dal punto omologo P'; e le trasformazioni birazionali del piano rigato (da alcuni chiamate trasformazioni « ortiche ») estese in senso duale; quindi anche tutti i loro prodotti, i quali, ovviamente, possono ridursi a prodotti di trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente; e conducono già a tipi abbastanza complessi. Ai punti e alle rette corrispondono, in generale, sistemi ∞^2 di curve. Sono pure trasformazioni di contatto birazionali le reciprocità piane, che mutano elementi punto-retta in analoghi elementi retta-punto, e le unioni-punti in unioni-rette e viceversa; esse si possono però ottenere come prodotti di trasformazioni dei tipi precedenti.

Nelle trasformazioni cremoniane del piano punteggiato, l'interesse principale si concentra sulle così dette *reti omaloidiche*, cioè sui sistemi ∞^2 di curve, necessariamente *razionali*, dell'un piano, che corrispondono alle rette dell'altro piano. Questi sistemi sono completamente caratterizzati dalle due proprietà seguenti:

a) la *linearità*, cioè per due punti generici del piano passa una e una sola curva del sistema;

b) due curve generiche del sistema hanno una sola intersezione variabile (cioè fuori dei punti basi);

e anzi la proprietà *a*) è in questo caso una conseguenza della *b*). La più generale trasformazione cremoniana si ottiene scegliendo ad arbitrio nei due piani due reti omaloidiche di curve, una delle quali si può sempre supporre che sia la rete delle rette, e ponendo fra queste due reti una proiettività arbitraria.

Nelle trasformazioni di contatto birazionali, i sistemi pure ∞^2 di curve che corrispondono, nei singoli piani, ai punti dell'altro piano, o anche alle rette (poichè punti e rette sono ora per noi sistemi ∞^2 di unioni, fra loro equivalenti), si compongono pure di curve razionali, e sono caratterizzati da due proprietà analoghe alle precedenti, che si potrebbe dire sono ancora le stesse, *limitate al campo infinitesimale.* Esse costituiscono ora due condizioni distinte:

a) Poichè ogni elemento del piano appartiene a un unico punto, come pure a un'unica retta, così: *Vi è nel sistema* ∞^2 *una e una sola curva contenente un elemento generico assegnato.*

b) Due punti (e così due rette) infinitamente vicini hanno a comune un solo elemento, il quale è altresì l'unico elemento dell'un punto (o retta) che sia in posizione unita con un elemento dell'altro. Ne segue che, entro il nostro sistema ∞^2 di curve, una curva generica fissa γ avrà un solo elemento *variabile* in posizione unita con un elemento di ogni singola curva ad essa infinitamente vicina. Per conseguenza, γ avrà anche colle sue infinitamente vicine *una sola intersezione variabile*, e *una sola tangente comune variabile* (mentre le altre, intersezioni e tangenti comuni di una data γ e delle curve infinitamente vicine a questa saranno tutte fisse). In altri termini, *il sistema* ∞^2 *ha come serie caratteristica una* g_1^1.

Chiamerò d'ora in poi *sistema* Ω ogni sistema ∞^2 di linee piane soddisfacenti alle due proprietà *a*), *b*) ultimamente indicate, incluso altresì il sistema ∞^2 dei punti, i quali, considerati come unioni, anche vi soddisfano.

Sono razionali anche le linee di un qualsiasi sistema Ω, risultando ciascuna di esse, in forza della proprietà *b*), riferita birazionalmente al sistema delle sue infinitamente vicine. È pure razionale ogni sistema Ω come ente ∞^2, perchè le sue curve passanti per un punto generico costituiscono ∞^2 diversi enti ∞^1 razionali in esso contenuti.

Ogni trasformazione di contatto birazionale fra 2 piani muta un sistema Ω anche un sistema Ω. E una tale trasformazione può individuarsi dando nei piani stessi due sistemi Ω arbitrari, uno dei quali può supporsi sempre che sia il sistema dei punti o delle rette, e ponendo fra i 2 sistemi, come enti razionali ∞^2, una trasformazione cremoniana arbitraria. Anche in ciò è ovvia l'analogia colle trasformazioni cremoniane.

3. - A quali condizioni devono soddisfare le curve di un sistema Ω? Già si è detto che le curve (γ) di questo sistema sono razionali. Ora le C^n piane razionali (generalmente irriducibili) formano un unico sistema continuo di dimensione $3n-1$. E poichè gli $\binom{n-1}{2}$ punti doppi di una curva generica del sistema assorbono $(n-1)(n-2)$ sue intersezioni fisse colle curve infinitamente vicine, rimarranno solo più $3n-2$ intersezioni variabili; vale a dire il sistema complessivo di tutte le C^n razionali ha come serie caratteristica una g_{3n-2}^{3n-2} (completa).

Per staccare da questo sistema un sistema ∞^2 con g_1^1 caratteristica, occorrono $3(n-1)$ condizioni ulteriori, tali da implicare complessivamente, per ciascuna curva, un egual numero di intersezioni fisse colle sue infinitamente vicine. Si trova che tali condizioni sono generalmente costituite da un egual numero di contatti con linee algebriche fisse, potendosi anche avere più contatti con una stessa curva, oppure contatti di ordine superiore, eventualmente anche contatti in punti assegnati, assorbenti sempre un numero corrispondente di condizioni fra le $3(n-1)$. Qualcuna di queste linee (come unione) può essere sostituita da un punto, assegnato come multiplo di un ordine dato k; esso assorbe allora $\frac{k(k-1)}{2}$ dei punti doppi, e, per due curve infinitamente vicine, precisamente k intersezioni in più delle $k(k-1)$ già assorbite dai suddetti punti doppi. Si può altresì richiedere che uno o più dei punti doppi variabili siano cuspidi; il che, per ciascuno di questi punti, implica una condizione fra le $3(n-1)$. Mentre però la curva generica di un sistema Ω può avere punti doppi ordinari e cuspidi variabili, gli eventuali punti multipli di ordine superiore a due dovranno essere tutti fissi, cioè punti basi del sistema.

Naturalmente, imponendo a una curva razionale di ordine assegnato n di avere complessivamente $3(n-1)$ contatti con curve algebriche arbitrarie, ne risulterà un sistema ∞^2 soddisfacente alla proprietà *b*), ma in generale non alla proprietà *a*). Perchè risulti soddisfatta anche quest'ultima proprietà, dovranno le curve a cui le C^n devono essere tangenti (o le altre condizioni che vi si possono sostituire) essere scelte con particolari criteri, che non sono in grado per ora di precisare.

Se la curva generica di un sistema Ω ha soltanto punti multipli ordinari, essa sarà di classe $\nu=2(n-1)$; e perciò il numero $3(n-1)$ delle condizioni ulteriori cui essa è assoggettata risulta $=n+\nu-1$. E poichè ogni eventuale cuspide diminuisce ulteriormente di un'unità la classe ν, e conta in pari tempo come una condizione fra le $3(n-1)$ suddette, si può affermare altresì che, dopo fissato il numero delle cuspidi delle C^n generica di un sistema Ω, e conseguentemente la classe ν di questa curva, sarà $n+\nu-1$ il numero delle condizioni ulteriori cui la curva stessa dovrà ancora soddisfare.

A chiudere questa prima parte della comunicazione, aggiungo due osservazioni:

1°) In un sistema continuo di curve piane algebriche, indicando con n, ν rispettivamente l'ordine e la classe della curva generica del sistema, la somma $n+\nu$ (carattere duale di sè stesso) può ricevere un significato geometrico molto semplice: cioè il numero degli elementi di questa curva generica che sono in posizione unita rispettivamente con altrettanti elementi di una curva infinitamente vicina. P. es.: nel sistema di tutte le C^n piane, due curve generiche infinitamente vicine hanno n^2 intersezioni, e altrettante coppie di elementi in posizione unita; e n^2 è appunto la somma dell'ordine n e della classe $n(n-1)$.

2°) L'*aequatio directrix* (PLÜCKER) $\Phi(x, y, x_1, y_1)=0$, nella quale Φ indica

un polinomio nelle 4 variabili x, y, x_1, y_1, definisce fra i 2 piani (x, y) e (x_1, y_1) una trasformazione di contatto algebrica, ma in generale non birazionale. Perchè sia tale, occorre ancora e basta che i 2 sistemi ∞^2 di linee rappresentati da $\Phi=0$ quando vi si considerino x, y come coordinate e x_1, y_1 come parametri e viceversa soddisfacciano entrambi alla proprietà *a*) di cui sopra, oppure entrambi alla proprietà *b*); poichè la proprietà *a*) dell'uno equivale alla proprietà *b*) dell'altro.

4. - Per uno studio ulteriore delle trasformazioni di contatto birazionali del piano riesce utile la rappresentazione, già data da LIE [1], del sistema degli elementi lineari di un piano sullo spazio punteggiato; rappresentazione algebrica e generalmente biunivoca, quindi birazionale.

Fra le coordinate (ξ, η, p) di un elemento lineare del piano e le coordinate cartesiane (x, y, z) di un punto dello spazio poniamo le relazioni:

$$x=\xi; \qquad y=\frac{1}{2}p; \qquad z=\eta-\frac{1}{2}p\xi$$

dalle quali si ricava, viceversa:

$$\xi=x; \qquad \eta=z+xy; \qquad p=2y.$$

Si ha così una rappresentazione birazionale della varietà ∞^3 degli elementi del piano sopra lo spazio punteggiato. E poichè l'equazione differenziale $d\eta-pd\xi=0$, che caratterizza le coppie di elementi in posizione unita, cioè le unioni del piano, si muta nell'equazione $dz+xdy-ydx=0$, equazione Pfaffiana di un certo complesso lineare non speciale Λ, così alle unioni del piano (linee e punti, come insiemi ∞^1 di elementi) corrispondono nello spazio linee appartenenti al complesso lineare Λ, cioè le cui tangenti sono rette di questo complesso; e viceversa. In particolare a linee piane algebriche corrispondono linee del complesso Λ anche algebriche, in corrispondenza birazionale colle prime; e viceversa. È noto che queste curve appartenenti a un complesso lineare hanno in ogni loro punto, come piano osculatore, il piano polare di questo stesso punto rispetto al complesso; ogni loro singolarità è *autoduale*; inoltre, se sono algebriche, hanno la classe eguale all'ordine.

Le trasformazioni di contatto birazionali del piano avranno per immagini le trasformazioni cremoniane dello spazio, che mutano in sè l'equazione Pfaffiana del complesso lineare Λ, cioè il sistema degli elementi punto-retta, e quindi anche il sistema degli elementi punto-piano di questo complesso. Le chiameremo *trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare* Λ.

Ai sistemi Ω del piano, in particolare ai sistemi ∞^2 dei punti e delle rette,

---

[1] *Geometrie der Berührungstransformationen* I, p. 238. La rappresentazione risale però ai vecchi lavori di LIE del 1872-74.

corrisponderanno nello spazio *congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti al complesso lineare* Λ (congruenze che indicheremo con Ω_0).

Più particolarmente, agli ∞^2 punti e alle ∞^2 rette del piano corrispondono due congruenze lineari speciali di rette contenute nel complesso lineare Λ. Introducendo coordinate omogenee di punto (x, y, z, t), sono queste le due congruenze lineari di direttrice (unica) $x=t=0$, rispettivamente $y=t=0$. Designeremo con p_0 e r_0 queste due direttrici, e con p ed r le rette delle due congruenze.

Sono elementi fondamentali della rappresentazione:

Nello spazio, tutti i punti delle due rette p_0 e r_0, a ciascuno dei quali corrispondono gli ∞^1 elementi di un'unione; a ogni punto di p_0, gli elementi di una retta parallela all'asse η; a ogni punto di r_0, gli elementi di uno stesso punto improprio.

Nel piano, l'elemento costituito dal punto all'infinito dell'asse η (punto che indicheremo con A) insieme colla retta all'infinito (che indicheremo con a). A questo elemento Aa corrispondono gli infiniti punti del piano $t=0$, ossia p_0r_0. Più particolarmente, ai singoli elementi consecutivi ad Aa nell'intorno di 2° ordine di A corrispondono i punti delle diverse rette del fascio p_0r_0.

A una curva piana algebrica di ordine n e classe ν in posizione generale (più precisamente, non passante per A nè tangente alla retta a) corrisponde nello spazio una curva sghemba di ordine $n+\nu$, appartenente al complesso lineare Λ e avente le due rette r_0 e p_0 rispettivamente come corda n^{pla} e come corda ν^{pla}. P. es.: alle rette $(n=1,\ \nu=0)$, le rette r del complesso Λ semplicemente incidenti alla r_0; alle coniche $(n=\nu=2)$, le quartiche appartenenti al complesso e aventi sia r_0 che p_0 come corde.

Ora, le curve sghembe razionali di ordine assegnato $n+\nu$ e appartenenti a un dato complesso lineare dipendono da $2(n+\nu)+1$ parametri. Imponendo a queste di avere le rette r_0 e p_0 come corde delle multiplicità indicate, rimangono ancora disponibili $n+\nu+1$ parametri. D'altra parte, le curve piane razionali di un sistema Ω, quando se ne indichi con n l'ordine e con ν la classe, risultano ancora assoggettate a $n+\nu-1$ condizioni ulteriori, consistenti in altrettanti contatti con curve piane assegnate (o passaggi per punti). Nella rappresentazione del sistema degli elementi del piano sullo spazio punteggiato, queste ultime condizioni si traducono, per le curve della congruenza corrispondente Ω_0, nell'appoggiarsi in $n+\nu-1$ punti a altrettante curve (non necessariamente distinte) appartenenti anch'esse al complesso Λ. Risulta così confermato che le curve di ordine $n+\nu$ (razionali, appartenenti al complesso Λ) che soddisfano alle condizioni accennate dipendono ancora da due parametri. Esse costituiscono una congruenza del 1° ordine appartenente al complesso Λ, e le cui direttrici, o linee focali, p_0 e r_0 incluse, sono esse medesime linee di questo complesso.

Se le curve piane del sistema Ω passano per A, oppure sono tangenti alla a, una o più volte, le curve del complesso Λ loro immagini sono di ordine infe-

riore a $n+\nu$, e diminuisce corrispondentemente anche la multiplicità di una almeno delle corde r_0 e p_0. Viceversa, a una curva sghemba di ordine m appartenente al complesso Λ, non appoggiata nè a r_0 nè a p_0, corrisponde una curva piana di ordine e classe $2m$, avente (fra altro) due punti m^{pli} infinitamente vicini, in A e nel punto consecutivo sopra a. Es.: alle ∞^3 rette del complesso, le ∞^3 coniche passanti per A e ivi tangenti alla a (LIE). E a una congruenza del 1° ordine di linee del complesso, le cui linee focali appartengono pure al complesso, corrisponde nel piano un sistema Ω; se le curve sono di ordine m, su ciascuna vi saranno $2m-1$ fuochi (calcolando solo quelli generalmente distinti).

La determinazione di tutti i sistemi Ω di curve piane equivale pertanto alla determinazione di tutte le possibili congruenze del 1° ordine di curve razionali appartenenti a un dato complesso lineare, e aventi per linee focali esclusivamente linee del complesso medesimo. Le linee della congruenza possono anche passare per uno o più punti fissi, ciascuno dei quali assorbirà 2 dei $2m-1$ fuochi.

5. - Nel piano, una trasformazione di contatto birazionale si può definire assegnando ad arbitrio due sistemi Ω fra loro omologhi e la corrispondenza birazionale subordinata fra essi come enti razionali ∞^2. Corrispondentemente, nello spazio, una trasformazione cremoniana inerente a un dato complesso lineare Λ si può individuare assegnando ad arbitrio due congruenze Ω_0 — cioè congruenze del 1° ordine di curve razionali del complesso del tipo indicato —, e la corrispondenza birazionale fra esse subordinata.

Può avvenire in particolare, che vi sia, nel complesso lineare, una congruenza lineare speciale (di rette) la quale si muti pure in una congruenza del medesimo tipo. È interessante vedere, in questo caso, in qual modo di una linea comunque data appartenente al complesso lineare Λ si può costruire la corrispondente, che apparterrà anche a quel complesso. Indichiamo con (h), (k) le due congruenze lineari speciali fra loro omologhe, e fra le quali supponiamo assegnata una qualsiasi corrispondenza birazionale; h_0 e k_0 siano le loro direttrici rettilinee. Data ad arbitrio una linea $\mathcal{C}$, appartenente al complesso Λ, le rette di (h) che ad essa si appoggiano costituiscono una rigata $\mathcal{R}$, della quale $\mathcal{C}$ è, oltre ad h_0, l'unica direttrice (ed asintotica) appartenente al complesso Λ. Alla rigata $\mathcal{R}$ corrisponderà entro (k) anche una rigata, la quale all'infuori della direttrice rettilinea k_0 avrà una e una sola direttrice (ed asintotica) appartenente al complesso Λ: sarà questa la curva omologa a $\mathcal{C}$.

La questione (che sarebbe interessante risolvere) se le trasformazioni di contatto birazionali del piano possano ottenersi *tutte* come prodotti di sole trasformazioni cremoniane del piano punteggiato e del piano rigato alternativamente (n. 2), equivale sostanzialmente all'altra, se le trasformazioni cremoniane dello spazio inerenti a un dato complesso lineare Λ si possano ottenere come prodotti

di quelle particolari fra esse, ciascuna delle quali muta in sè stessa una congruenza lineare speciale (di rette) contenuta nel complesso. Si tratta quindi di un problema di operazioni generatrici di un gruppo abbastanza ampio di trasformazioni cremoniane dello spazio; il che fa presumere che la sua risoluzione non sia molto semplice.

La stessa questione può anche prospettarsi in modo diverso. Due congruenze Ω_0 di curve di uno stesso complesso lineare si dicano fra loro *coniugate* quando le curve di ciascuna delle due incidenti a una stessa curva dell'altra formano, entro la prima come ente razionale, le ∞^2 famiglie ∞^1 di una rete omaloidica. Questa relazione ha carattere invariantivo rispetto alle trasformazioni cremoniane inerenti al complesso lineare; e basta ch'essa si verifichi, per due date congruenze Ω_0, in uno dei 2 sensi, perchè debba pure verificarsi nell'altro senso. La questione posta dianzi equivale allora a quest'altra: Se da una qualsiasi congruenza Ω_0 contenuta nel complesso Λ si possa passare a una congruenza lineare speciale (cioè a una congruenza Ω_0 di rette) del complesso medesimo pel tramite di un numero finito di altre congruenze Ω_0, ciascuna delle quali sia coniugata alla precedente.

6. - Osserverò infine che un esempio molto semplice di trasformazione birazionale (non proiettiva) inerente a un complesso lineare è dato da una trasformazione da tempo nota, ma per la quale questa proprietà non è stata forse ancora rilevata.

Si tratta della trasformazione involutoria in cui si corrispondono in doppio modo le coppie di punti « coniugati » rispetto a una cubica sghemba γ^3, ossia appartenenti a una stessa corda di questa curva e coniugati armonici rispetto ai 2 punti comuni alla cubica e a questa corda. È una ben nota trasformazione cubica, studiata da CREMONA, STURM, REYE; ai piani corrispondone le ∞^3 superficie cubiche φ^3 aventi la cubica γ^3 come asintotica; ciascuna di esse ha 3 punti doppi nelle intersezioni di γ^3 col piano omologo. Alle rette corrispondono cubiche sghembe, appoggiate a γ^3 in 4 punti; ma per le rette appoggiate a γ^3 questa cubica si spezza; e in particolare ai così detti « raggi osculatori » (*Schmiegungsstrahlen*) della cubica γ^3, cioè alle rette che passano per un punto di γ^3 e stanno nel relativo piano osculatore, corrispondono (a prescindere dalla tangente a γ^3 in quel punto, retta fondamentale, contata 2 volte) anche raggi osculatori, e ai 3 raggi osculatori di γ^3 passanti per un punto generico P dello spazio, i 3 raggi osculatori passanti pel punto omologo P'. Poichè queste 2 terne di raggi stanno rispettivamente nei piani polari di P e P' rispetto al complesso lineare definito dalla cubica γ^3, è chiaro che il sistema degli elementi punto-piano di questo complesso lineare è mutato in sè stesso.

B. BYDŽOVSKÝ (Praha - Cecoslovacchia)

REMARQUE SUR LES GROUPES FINIS DE TRANSFORMATIONS DE CREMONA

Parmi les types auquels se peuvent réduire — d'après les travaux connus de S. KANTOR et de WIMAN — tous les groupes finis de transformations planes de Cremona, il y en a qui reproduisent un système de cubiques à plusieurs points fixes et un type reproduisant le système de sextiques à huit points doubles donnés. On désigne ces types comme groupes à n points, n pouvant prendre toutes les valeurs entières de 3 à 8. Il est à remarquer qu'il y a une différence essentielle entre les cas de n égal à 3, 4, 5, 6 et ceux pour lesquels n est égal à 7 ou 8. En effet, encore pour n égal à 6, les groupes respectifs de transformations existent quelque soit le groupe de six points donnés. Si, cependant, on se donne un groupe arbitraire de 7 points, il n'existe, en général, qu'une seule transformation périodique de Cremona qui reproduise le système de cubiques passant par les sept points donnés, à savoir, l'involution bien connue de Geiser, qui donne, avec l'identité, le seul groupe à sept points respectif. L'existence de tout autre groupe de transformations de Cremona à 7 points exige que le groupe de 7 points soit un groupe particulier et la question se pose tout naturellement comment il faut spécialiser ce groupe de points pour assurer cette existence. Une considération tout à fait analogue a lieu pour le cas du groupe de huit points; la seule transformation périodique de Cremona qui reproduit le système des sextiques ayant les points de ce groupe pour points doubles et qui existe en général, est l'involution bien connue de Bertini reproduisant toute sextique de ce système. Pour en revenir au cas de 7 points: si l'on spécialise le groupe de points, il peut arriver que l'involution de Geiser dégénère. Or, on peut se demander plus spécialement, comment il faut spécialiser ce groupe pour assurer l'existence d'une seconde transformation de Cremona sans que l'involution de Geiser, définie par ce groupe, dégénère. La question analogue se pose pour le groupe de 8 points.

J'indiquerai sommairement quelques résultats concernant ce sujet. Il n'est pas besoin d'insister sur ce que ces résultats ont lieu à des transformations de Cremona près.

. Pour n égal à 7 le théorème a lieu:

Si un système de cubiques à 7 points fixes, lequel se reproduit par une

involution de Geiser non dégénérée, se reproduit par une deuxième involution, celle-ci est ou l'involution quadratique de la première classe ou l'homologie de Jonquières du 3e ordre.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'un ou l'autre se produise, est essentiellement la même: les sept points doivent etre situés sur une cubique de sorte que quatre d'entre eux aient un cinquième pour point tangentiel commun (ou, bien entendu, avoir une position résultant de celle-ci par une transformation de Cremona convenable). Si cette condition est remplie, il existe, d'abord, une homologie de Jonquières du 3e ordre reproduisant le système; composée avec l'involution de Geiser elle donne une troisième involution du 6e degré. Celle-ci se reduit, par des transformations de Cremona, à une involution quadratique de la première classe.

Pour n égal à 8 le théorème a lieu:

Si un système de sextiques à huit points doubles donnés, qui se reproduit par une involution de Bertini non dégénérée, se reproduit par une deuxième involution, celle-ci ne peut être que l'homologie de Jonquières du 3e ordre.

La condition, pour que cette involution se produise, est la même que dans le cas précédent: les huit points doivent etre situés sur une cubique ayant la propriété énoncée ci-dessus. Si le groupe de huit points satisfait à cette condition, il existe, d'abord, une homologie de Jonquières du 3e ordre reproduisant le système; composée avec l'involution de Bertini, elle donne une troisième involution du 15e ordre, laquelle est réductible, bien entendu, encore à une homologie de la même nature. Il est intéressant de remarquer qu'on peut réduire simultanément ces deux involutions à des involutions du même ordre, égal à 9, et pour lesquelles aussi les autres nombres caractéristiques sont les mêmes.

Parmi les conséquences géométriques des théorèmes énoncés je me bornerai à signaler celles qui concernent les sextiques ayant les huit points donnés pour points doubles et invariantes par rapport au groupe du 4e ordre qui vient d'être trouvé. D'abord, ces sextiques forment un faisceau. Quatre tangentes doubles de chacune de ces courbes passent par un point double, le même pour toutes les courbes. Une propriété caractéristique est celle-ci: la conique déterminée par cinq points doubles — les mêmes pour toutes les sextiques invariantes — coupe chacune de ces courbes encore en deux points; par ces deux points passent les tangentes d'un point double fixe.

G. SCHAAKE (Amsterdam - Olanda)

LE GEOMETRIE DEGLI ELEMENTI LINEARI DEL PIANO, DEGLI ELEMENTI PIANI DELLO SPAZIO E DEGLI ELEMENTI LINEARI DELLO SPAZIO

§ 1. - Un elemento lineare del piano a sia formato dalla retta l con coordinate omogenee ξ_1, ξ_2, ξ_3 e dal punto P, situato su l, con coordinate omogenee x_1, x_2, x_3. Questi sei numeri soddisfano alla relazione:

$$x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3=0. \tag{1}$$

Ogni elemento lineare di a determina i seguenti nove numeri, eccetto un fattore costante:

$$p_{ik}=x_i\xi_k \qquad (i=1,2,3,\ k=1,2,3).$$

Questi nove numeri soddisfano sempre all'equazione seguente, che si deduce della relazione (1):

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}=0$$

ed alle relazioni che otteniamo quando poniamo eguali a zero tutti i minori quadratici della matrice

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}.$$

Viceversa nove numeri p_{ik}, che non sono tutti nulli, e che soddisfano alle relazioni trovate, determinano un elemento lineare (P, l) del piano a.

I nove numeri p_{ik}, che, eccetto un fattore costante sono determinati dall'elemento lineare (P, l) e che viceversa determinano l'elemento lineare (P, l), possono dunque considerarsi come coordinate omogenee dell'elemento lineare (P, l) del piano a.

§ 2. - Ad ogni elemento lineare (P, l) di a appartiene in uno spazio ad otto dimensioni S_8 il punto B, che ha le medesime coordinate omogenee p_{ik}.

Dunque gli elementi lineari (P, l) di a possono rappresentarsi sui punti d'una varietà a tre dimensioni V_3, che è situata nello spazio a sette dimensioni S_7, che ha per equazione:

$$\sum a_{ik}p_{ik}=0.$$

C'è un elemento lineare d'un sistema Σ, per cui il punto P è perfettamente determinato. Il sistema Σ possiede anche un elemento lineare, per cui la retta l è perfettamente determinata. Perciò il sistema Σ è chiamato un sistema $\{1, 1\}$ od un sistema bilineare di ∞^2 elementi lineari.

Dunque l'ordine di V_3 è il numero degli elementi lineari, che appartengono a tre sistemi Σ dati. Possiamo facilmente dimostrare che tre sistemi Σ hanno comuni sei elementi lineari. Perciò la varietà V_3 è del sesto ordine.

§ 3. - Gli elementi lineari che sono comuni a due sistemi Σ formano un ∞^1-sistema $\Phi(3, 3)$, perchè i loro punti formano una curva cubica e le loro rette avviluppano una curva della terza classe. Un sistema Φ è rappresentato dalla sezione di V_3 con uno spazio a cinque dimensioni S_5.

Le rette degli elementi lineari d'un sistema Σ, che hanno i loro punti P su una retta a di a, inviluppano una conica, che tocca la retta a, perciò gli elementi lineari di Σ che hanno i loro punti P su di una retta a di a, formano un sistema $S(1, 2)$. La rappresentazione di questo sistema è una curva gobba k^3 del terzo ordine, che appartiene alla varietà V_3. Ciò segue dal numero tre degli elementi lineari che sono comuni a due sistemi Σ e hanno i loro punti P sulla retta a.

La curva cubica che è inviluppata dalle rette l degli elementi lineari che sono comuni a due sistemi Σ, i quali contengono il sistema detto $S(1, 2)$ è degenerata nella conica di S ed in un fascio di rette. Da ciò si conclude che tre sistemi Σ i quali contengono il sistema $S(1, 2)$, hanno comune un elemento lineare fuori di S.

Ne segue che uno spazio a quattro dimensioni S_4 per lo spazio a tre dimensioni S_3 sega la varietà V_3 fuori di S_3 in un punto B.

Adesso possiamo rappresentare gli elementi lineari del piano a su i punti d'uno spazio a tre dimensioni R_3 dello spazio S_7. L'elemento lineare (P, l) si rappresenta sulla proiezione Q del punto B, omologo di (P, l), dallo spazio S_3 sullo spazio R_3.

§ 4. - Un elemento piano (P, π) dello spazio sia formato dal piano π colle coordinate omogenee $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ e dal punto P, situato in π, colle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4. Questi otto numeri soddisfano alla relazione:

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0. \tag{1}$$

Ogni elemento piano dello spazio determina i seguenti sedici numeri, eccetto un fattore costante:

$$p_{ik} = x_i\xi_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4,\ k = 1, 2, 3, 4).$$

Questi numeri soddisfano sempre all'equazione seguente, che si deduce dalla relazione (1):

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} + p_{44} = 0 \tag{2}$$

ed alle relazioni che si ottengono quando si pongono eguali a zero tutti i minori quadratici della matrice:

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{vmatrix}.$$

Viceversa sedici numeri dati p_{ik}, che non sono tutti nulli e che soddisfano alle relazioni dette, determinano un elemento piano (P, π) dello spazio.

I sedici numeri p_{ik}, che, eccetto un fattore costante, sono determinati dall'elemento piano (P, π) e che viceversa determinano l'elemento piano (P, π), possono dunque considerarsi come coordinate omogenee dell'elemento piano (P, π) dello spazio.

§ 5. - Ad ogni elemento piano (P, π) dello spazio appartiene in uno spazio lineare a quindici dimensioni S_{15} il punto B, che ha le medesime coordinate omogenee p_{ik}.

Dunque gli elementi piani (P, π) dello spazio possono rappresentarsi sui punti d'una varietà a cinque dimensioni V_5, che è situata in uno spazio a quattordici dimensioni S_{14}, che ha per equazione:

$$p_{11}+p_{22}+p_{33}+p_{44}=0.$$

L'ordine di V_5 è il numero dei punti di sezione di cinque spazii a tredici dimensioni R_{13} dello spazio S_{14} colla varietà V_5.

La sezione d'uno spazio S_{13} con V_5 è la rappresentazione del sistema Σ degli elementi piani dello spazio, che soddisfano all'equazione:

$$\sum a_{ik}p_{ik}=0.$$

C'è un elemento piano d'un sistema Σ, per cui il punto P è perfettamente determinato ed il piano π contiene oltre ciò una retta data PA. Il sistema Σ possiede anche un elemento piano, per cui il piano π è perfettamente determinato ed oltre ciò il punto P è situato su una retta data di π. Perciò il sistema Σ è chiamato un sistema $\{1, 1\}$ od un sistema bilineare di ∞^4 elementi piani.

Dunque l'ordine di V_5 è il numero degli elementi piani, che appartengono a cinque sistemi Σ dati. Possiamo facilmente dimostrare che cinque sistemi Σ hanno comuni venti elementi piani. Perciò la varietà V_5 è del ventesimo ordine.

§ 6. - Gli elementi piani che sono comuni a due sistemi Σ formano un ∞^3-sistema $\Phi(1, 2, 1)$, perchè Φ possiede un elemento piano, per cui il punto P è dato, due elementi piani, per cui il punto P è situato su una retta data ed il piano π passa per questa retta ed un elemento piano per cui il piano π è dato. Un sistema Φ è rappresentato dalla sezione di V_5 con uno spazio a dodici dimensioni S_{12} di S_{14}.

Gli elementi piani che sono comuni a tre sistemi Σ formano un ∞^2-sistema $\Psi(4, 6, 4)$, perchè Ψ possiede quattro elementi piani, che hanno i loro punti P su una retta data, sei elementi piani, per cui il punto P è situato in un piano dato ed il piano π passa per un punto dato, e quattro elementi piani, per cui il piano π passa per una retta data. Un sistema Ψ è rappresentato dalla sezione di V_5 con uno spazio ad undici dimensioni S_{11} di S_{14}

I punti P degli elementi piani d'un sistema Ψ, per cui il piano π passa per un punto A, formano una superficie del terzo ordine. Fra questi elementi piani ve ne sono tre che hanno i loro piani π passanti per un altro punto dato e hanno i loro punti P in un piano dato. Perciò gli elementi piani di Ψ i cui piani π passano per un punto dato A, formano un ∞^2-sistema $S(3, 3, 1)$. La rappresentazione di questo sistema è una superficie del decimo ordine ω^{10}, che è situata in uno spazio ad otto dimensioni S_8 di S_{14}.

La superficie del quarto ordine che è formata dai punti P degli elementi piani che sono comuni a tre sistemi Σ i quali contengono il sistema $S(3, 3, 1)$ è degenerata nella superficie ω^3 ed in un piano. Da ciò si conclude che cinque sistemi Σ i quali contengono il sistema $S(3, 3, 1)$ hanno comune un elemento piano fuori di $S(3, 3, 1)$.

Ne segue che uno spazio a nove dimensioni S_9 per lo spazio ad otto dimensioni S_8 sega la varietà V_5 fuori di S_8 in un punto B.

Adesso possiamo rappresentare gli elementi piani dello spazio sui punti d'uno spazio a cinque dimensioni R_5 dello spazio S_{14}. L'elemento piano (P, π) si rappresenta sulla proiezione Q del punto B, omologo di (P, π), dallo spazio S_8 sullo spazio R_5.

§ 7. - Un elemento lineare dello spazio sia formato dalla retta l colle coordinate omogenee p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23} $(p_{ik}=x_ix_k'-x_i'x_k)$ e dal punto P, situato su l colle coordinate omogenee x_1, x_2, x_3, x_4. Questi dieci numeri soddisfano all'equazione:

$$p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0 \tag{1}$$

ed alle quattro equazioni:

$$p_{34}x_2+p_{42}x_3+p_{23}x_4=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

Ogni elemento lineare dello spazio determina i seguenti ventiquattro numeri, eccetto un fattore costante:

$$p_{ikl}=x_ip_{kl} \quad (i=1,2,3,4,\ k,l=1,2,3,4,5,6,\ k\neq l).$$

Questi ventiquattro numeri soddisfano sempre alle sedici equazioni seguenti che si deducono dalla relazione (1):

$$p_{112}p_{134}+p_{113}p_{142}+p_{114}p_{123}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

alle quattro equazioni seguenti che si deducono dalle relazioni (2):

$$p_{234}+p_{342}+p_{423}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ed alle relazioni che si ottengono quando si pongono eguali a zero tutti i minori quadratici della matrice

$$\begin{vmatrix} p_{112} & p_{113} & p_{114} & p_{134} & p_{142} & p_{123} \\ p_{212} & p_{213} & p_{214} & p_{234} & p_{242} & p_{223} \\ p_{312} & p_{313} & p_{314} & p_{334} & p_{342} & p_{323} \\ p_{412} & p_{413} & p_{414} & p_{434} & p_{442} & p_{423} \end{vmatrix}.$$

Viceversa ventiquattro numeri dati p_{ikl}, che non sono tutti nulli, e che soddisfano alle relazioni dette, determinano un elemento lineare (P, l) dello spazio.

I ventiquattro numeri p_{ikl}, che, eccetto un fattore costante, sono determinati dall'elemento lineare (P, l) e che viceversa determinano l'elemento lineare (P, l), possono dunque considerarsi come coordinate omogenee dell'elemento lineare (P, l) dello spazio.

§ 8. - Ad ogni elemento lineare (P, l) dello spazio appartiene in uno spazio lineare a ventitre dimensioni S_{23} il punto B, che ha le medesime coordinate omogenee p_{ikl}.

Dunque gli elementi lineari (P, l) dello spazio possono rappresentarsi sui punti d'una varietà a cinque dimensioni V_5, che è situata in uno spazio a diciannove dimensioni S_{19}, che ha per equazioni:

$$p_{234}+p_{342}+p_{423}=0$$
$$p_{134}+p_{341}+p_{413}=0$$
$$p_{124}+p_{241}+p_{412}=0$$
$$p_{123}+p_{231}+p_{312}=0.$$

L'ordine di V_5 è il numero dei punti di sezione di cinque spazii a diciotto dimensioni S_{18} dello spazio S_{19} colla varietà V_5.

La sezione d'uno spazio S_{18} con V_5 è la rappresentazione del sistema Σ degli elementi lineari dello spazio, che soddisfano all'equazione:

$$\sum a_{ikl}p_{ikl}=0.$$

C'è un elemento lineare d'un sistema Σ, per cui il punto P è perfettamente determinato e la retta l sega oltre ciò una retta data. Il sistema Σ possiede anche un elemento lineare, per cui la retta l è perfettamente determinata. Perciò il sistema Σ è chiamato un sistema $\{1, 1\}$ od un sistema bilineare di ∞^4 elementi lineari.

Dunque l'ordine di V_5 è il numero degli elementi lineari, che appartengono

a cinque sistemi Σ dati. Possiamo facilmente dimostrare che cinque sistemi Σ hanno comuni quaranta elementi lineari. Perciò la varietà V_5 è del quarantesimo ordine.

§ 9. - Gli elementi lineari che sono comuni a due sistemi Σ formano un ∞^3-sistema $\Phi(1, 3, 3)$, perchè Φ possiede un elemento lineare, per cui il punto P è dato, tre elementi lineari per cui la retta l è situata in un piano dato ed il punto P è situato su di una retta di questo piano e tre elementi lineari per cui la retta l appartiene ad un fascio dato di rette. Un sistema Φ è rappresentato dalla sezione di V_5 con uno spazio a diciasette dimensioni R_{17} di R_{19}.

Gli elementi lineari che sono comuni a tre sistemi Σ formano un ∞^2-sistema $\Psi(5, 7, 6)$, perchè Ψ possiede cinque elementi lineari che hanno i loro punti P su di una retta data, sette elementi lineari, per cui le rette l passano per un punto dato e sei elementi lineari per cui le rette l sono situate in un piano dato. Un sistema Ψ è rappresentato dalla sezione di V_5 con uno spazio a sedici dimensioni R_{16} di R_{19}.

I punti P degli elementi lineari d'un sistema Φ, per cui la retta l appartiene ad un complesso lineare di rette, formano una superficie del quarto ordine. Fra questi elementi lineari ve ne sono tre, le cui rette l passano per un punto dato e tre che hanno le loro rette l in un piano dato. Perciò gli elementi lineari di Φ che hanno le loro rette l in un complesso lineare dato di rette, formano un ∞^2-sistema $S(4, 3, 3)$. La rappresentazione di questo sistema è una superficie del ventiquattresimo ordine ω^{24}, che è situata in uno spazio a tredici dimensioni S_{13} di S_{19}.

La superficie del quinto ordine chè è formata dai punti P degli elementi lineari che sono comuni a tre sistemi Σ i quali contengono il sistema $S(4, 3, 3)$, è degenerata nella superficie ω^4 ed in un piano. Da ciò si conclude che cinque sistemi Σ i quali contengono il sistema $S(4, 3, 3)$ hanno comune un elemento piano fuori di $S(4, 3, 3)$.

Ne segue che uno spazio a quattordici dimensioni per lo spazio a tredici dimensioni S_{13} sega la varietà V_5 fuori di S_3 in un punto B.

Adesso possiamo rappresentare gli elementi lineari dello spazio sui punti d'uno spazio a cinque dimensioni R_5 dello spazio S_{19}. L'elemento lineare (P, l) si rappresenta sulla proiezione Q del punto B, omologo di (P, l), dallo spazio S_{13} sullo spazio R_5.

A. TORROJA (Barcelona - Spagna)

SOBRE LA CORRESPONDENCIA ENTRE LOS PUNTOS DE UN ESPACIO Y LOS GRUPOS DE PUNTOS DE OTROS VARIOS

Introduccion.

El problema de la representación de espacios de más de tres dimensiones sobre otros espacios más sencillos, que el ilustre VERONESE abordó el primero en su clásica memoria « Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni » (1) que inicia esta clase de estudios, ha sido objeto desde entonces de numerosos y muy interesantes trabajos, debidos a MÜLLER, QUIJANO, DE VRIES, SCHOUTE, PERAZZO, etc. y en los cuales se proponen y estudian sistemas diversos de representación constituidos por correspondencias especiales entre los elementos del espacio que se trata de representar y grupos de ellos de los espacios sobre los cuales se representa. Pero si el estudio particular de cada uno de estos sistemas habia sido hecho cuidadosamente en estos trabajos, faltaba en absoluto un estudio de conjunto de los mismos, análogo al hecho por STAUDIGL, NICODEMI, BORDIGA y DEL RE para el espacio de tres dimensiones y en el cual, comenzando por fijar los caracteres fundamentales comunes a todos ellos, se buscase el sistema general que estos caracteres definen; sistema que comprendería, por consiguiente, a todos los anteriores y del cual podrían deducirse éstos por sucesivas restricciones, poniéndose así de manifiesto las relaciones mútuas que entre ellos existen y las condiciones que determinan la elección de cada uno. Un ensayo en este sentido es lo que nos propusimos hacer en una memoria presentada hace cuatro años a la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona (2). En ella y previa discusión de los trabajos de MÜLLER y DEL RE sobre los sistemas de representación del espacio ordinario, señalamos como caracteres fundamentales comunes a todos los sistemas propuestos para la representación de espacios superiores: 1°) que los puntos del espacio objeto estén representados biunívocamente por grupos de puntos de los espacios imagen, y 2°) que las rectas de aquél lo estén por grupos de rectas de éstos; y demos-

(1) Atti Ist. Ven., s. V, t. VIII, 1881-82.

(2) *Representación gráfica de espacios superiores.* (Memorias de la R. Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, vol. XVIII, n. 11, 1924).

tramos que todo sistema que cumpla estas dos condiciones consiste necesariamente en un conjunto de proyecciones centrales sobre espacios lineales iguales a los espacios imagen y contenidos en el espacio objeto, hechas desde espacios tambien lineales y contenidos en éste, complementarios de aquellos, y seguidas o no de transformaciones homográficas de estas proyecciones.

Ahora bien; este sistema general, que aparece así como el más amplio sistema adecuado para el estudio de las propiedades proyectivas de las figuras y cuyas propiedades particulares y ulterior especialización se estudian tambien en aquella memoria, tiene inevitablemente elementos que son de excepción en la correspondencia biunívoca que le constituye, ya que los puntos de cada espacio centro de proyección tienen indeterminada su proyección sobre el espacio imagen correspondiente. Y como esta excepción, que constituye a no dudar un defecto del sistema, es consecuencia inevitable de las dos condiciones que le definen, ocúrrese naturalmente investigar si prescindiendo de la segunda de ellas, esto es, de la conservación de las rectas, sería posible obtener un sistema de representación biunívoca aplicable sin excepción a todos los puntos del espacio y en el cual las rectas estuvieran representadas por grupos de lineas, algébricas desde luego, pero de un orden superior al primero. Tal es el problema que en esta nota nos proponemos estudiar brevemente, movidos por amable requerimiento que en manera alguna podíamos desatender.

Planteamiento de la cuestion.

Enunciada en términos precisos, la cuestión que las anteriores consideraciones plantean es, pues, la siguiente:

¿Es posible establecer una correspondencia algébrica y biunívoca sin excepción entre los puntos de un espacio lineal E y grupos de k puntos de otros tantos espacios tambien lineales $E_1, E_2, \ldots, E_k$?

Ha de advertirse que si bien estos espacios imagen pueden coincidir en mayor o menor número, los grupos de puntos que en ellos se tomen han de considerarse siempre ordenados, para no alterar la naturaleza del problema. (El caso de grupos no ordenados de puntos de un solo espacio lineal ha sido estudiado y resuelto negativamente por BORDIGA [1], aunque desde un punto de vista distinto del nuestro). En cuanto a la variedad constituida por estos grupos de puntos, sabido es que, habiéndo de estar en correspondencia birracional con el espacio objeto E, ha de tener el mismo número de dimensiones que éste; lo cual exige que la suma de los números de dimensiones $m_1, m_2, \ldots, m_k$

---

[1] G. BORDIGA. *Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano.* (Annali di Matematica, s. III, t. XXVII, 1917, pag. 8).

de los espacios imagen E_1, E_2,...., E_k sea igual o mayor que el número n de dimensiones del E y que los puntos de cada grupo, en el segundo caso, estén ligados entre sí por un número de relaciones algébricas igual a $\sum m-n$. Nosotros además supondremos por el pronto que el número n es mayor que cada uno de los m_1, m_2,...., m_k, ya que el objeto de un sistema de representación es siempre representar los elementos de un espacio por medio de los de otros más sencillos que aquél.

Caso particular en que $\sum m=n$.

Así planteada la cuestión, puede desde luego contestarse negativamente en el caso de que los puntos de cada grupo sean independientes entre sí, o lo que es igual, que el número de dimensiones del espacio objeto sea igual a la suma de los números de dimensiones de los espacios imagen; ya que el profesor BORDIGA ha demostrado que la variedad de SEGRE, que en este caso representa biunívocamente sin excepción los grupos de puntos independientes de varios espacios lineales, es un modelo de orden mínimo. Esta variedad se obtiene, como es sabido (1), formando los productos

$$X=x_r y_s z_t \ldots . \qquad \begin{pmatrix} r=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m_1 \\ s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m_2 \\ t=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

y considerando las X como coordenadas homogéneas de puntos en un espacio lineal, cuyo número de dimensiones será, por tanto, $(m_1+1)(m_2+1)\ldots.(m_k+1)-1$, siendo $m_1+m_2+\ldots.+m_k=n$ el de dimensiones de la variedad constituida por dichos puntos, ya que éste es el número de parámetros arbitrarios de que las X dependen. El orden de esta variedad, según demostró SEGRE, es $\frac{n!}{m_1!\ m_2!\ldots.\ m_k!}$. Ahora bien; BORDIGA ha demostrado (2), siguiendo el camino señalado por SEVERI en el estudio de una cuestión análoga (3), que esta variedad es de orden mínimo entre todas las que representan biunívocamente sin excepción los grupos de k puntos independientes y ordenados de un conjunto de espacios lineales. De donde resulta la imposibilidad de establecer una correspondencia biunívoca sin excepción entre estos grupos de puntos y los puntos de un espacio lineal, ya que si ello fuera posible, este espacio constituiria la variedad de orden mínimo buscada.

---

(1) C. SEGRE. *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.* (Rend. Circ. Mat. Palermo, t. V, part. 1ª, 1891, pag. 192).

(2) G. BORDIGA (loc. cit. pag. 33).

(3) F. SEVERI. *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione, immersi in uno spazio lineare.* (Annali di Matematica, s. III, t. XXIV, 1915, pag. 2).

Quizás sorprenda este resultado a quienes no se han ocupado en estas cuestiones, por implicar la consecuencia, a primera vista anómala, de que los grupos de puntos independientes y ordenados de un sistema de espacios lineales no constituyen un espacio lineal, apesar de que a cada uno de estos grupos corresponde un grupo de otros tantos números independientes y recíprocamente (suponemos coordenadas absolutas para mayor sencillez del razonamiento). Pero obsérvese que para que la variedad constituida por un conjunto de elementos en correspondencia biunívoca con los grupos de n parámetros independientes sea un espacio lineal proyectivo es preciso, por una parte, que cuando uno o varios parámetros se hagan infinitos, el elemento correspondiente sea el mismo cualquiera que sea el valor de los parámetros restantes; y por otra, que cuando varios parámetros tomen el valor infinito, el elemento correspondiente varie al variar cualquiera de las razones mútuas entre ellos. Y si la variedad es la constituida por los grupos de puntos de varios espacios lineales, sucede, por una parte, que al hacerse infinitos uno o varios parámetros, correspondientes a los puntos de uno o varios espacios (pero no a todos), el grupo de puntos correspondiente es distinto al variar los parámetros en el espacio o espacios restantes, ya que varian uno o varios de los puntos del grupo (con lo cual deja de cumplirse la primera condición); y por otra, si los parámetros correspondientes a dos o más espacios parciales se hacen infinitos, el grupo de puntos correspondiente no varia al variar las razones mútuas entre ellos, con tal de que se mantengan constantes las razones entre los parámetros correspondientes a cada espacio (lo cual está en contradicción con la segunda condición). Claro es que estas consideraciones no bastarían para dar una contestación negativa a la cuestión propuesta; pero expresan la causa por la cual la variedad formada por los grupos de puntos de varios espacios lineales no es, como a primera vista parece, un espacio tambien lineal.

Caso general para espacios lineales.

Estudiemos ahora el caso general, en que $\sum m$ sea igual o mayor que n (menor ya sabemos que no puede ser) y apliquemos para resolverlo el razonamiento empleado en nuestra memoria antes citada [1] para demostrar el principio fundamental allí enunciado.

Consideremos a este efecto los grupos formados por un punto fijo P en uno de los espacios imagen E_j y puntos variables en los restantes. Los puntos del espacio objeto E que corresponden a estos grupos constituyen una variedad algébrica de $n-m_j$ dimensiones, como transformada en la correspondencia que

---

[1] *Representación gráfica de espacios superiores*, (loc. cit., pag. 11).

estudiamos de la variedad que forman el punto P y todos los grupos posibles de puntos de los restantes espacios imagen que con aquél satisfacen a las $\sum m-n$ relaciones fijas que entre ellos sabemos existen. A cada punto del espacio E_j corresponde, pues, una variedad algébrica de $n-m_j$ dimensiones en el espacio objeto E y el conjunto de todas estas variedades es un sistema lineal, pasando por cada punto genérico del espacio objeto una y una sola de ellas: la correspondiente al punto del espacio E_j que es imagen de aquél. Ahora bien; este sistema lineal tiene una variedad base de $n-m_j-1$ dimensiones y los puntos de esta base, por ser comunes a todas las variedades, tienen como imagen u homólogo en el espacio E_j todos los puntos de éste y son, por tanto, de excepción en la correspondencia biunívoca que tratábamos de establecer.

Analíticamente puede tambien llegarse fácilmente a este mismo resultado. Designemos por $X^{(0)}, X^{(1)},\ldots, X^{(n)}$ las coordenadas homogéneas de los puntos del espacio objeto E y por $x_j^{(0)}, x_j^{(1)},\ldots, x_j^{(m_j)}$ las de los puntos de un espacio imagen cualquiera E_j. Puesto que la correspondencia entre los puntos del espacio objeto y los grupos de puntos de los espacios imagen ha de ser algébrica y biunívoca, las coordenadas de éstos serán funciones racionales de las de aquellos y podrá escribirse

$$\frac{x_j^{(0)}}{\varphi_0(X)} = \frac{x_j^{(1)}}{\varphi_1(X)} = \ldots = \frac{x_j^{(m_j)}}{\varphi_{m_j}(X)}$$

donde las φ son formas de un cierto orden g de las X. Los puntos de E que tienen en E_j una imagen fija P constituyen una variedad algébrica dada por las fórmulas anteriores en las cuales se suponen constantes las x_j y variables las X; y estas variedades forman un sistema lineal definido por las mismas ecuaciones en las cuales se consideran las x_j como parámetros arbitrarios. Este sistema lineal tiene una variedad base, constituida por los puntos cuyas coordenadas X anulan todas las φ, la cual es, por tanto, una variedad algébrica de $n-m_j-1$ dimensiones, cuyos puntos tienen como imagen en el espacio E_j cualquier punto de éste, ya que las x_j, siendo nulos todos los denominadores. quedan en este caso completamente indeterminadas; que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

Y como lo dicho para el espacio imagen E_j puede repetirse para todos los demás, resulta finalmente que el espacio objeto E contiene, por lo menos, k variedades de $n-m_1-1$, $n-m_2-1,\ldots$, $n-m_k-1$ dimensiones cuyos puntos son todos de excepción en la correspondencia biunívoca que constituye el sistema de representación. Es pues imposible establecer la correspondencia algébrica y biunívoca sin excepción que buscábamos entre los puntos de un espacio lineal E y los grupos de puntos de otros varios E_1, $E_2,\ldots$, E_k.

Si comparamos este resultado con el obtenido para el sistema general de representación puntual biunívoca que conserva las rectas estudiado en nuestra memoria ya citada, vemos que las variedades constituidas por los puntos de

excepción tienen en ambos casos el mismo número de dimensiones, con la diferencia de ser lineales en aquel sistema y de orden superior en el ahora considerado. Al prescindir de la conservación de las rectas no se logra, pues, evitar ni disminuir los elementos de excepción del sistema y en cambio aumenta el orden de las variedades que éstos constituyen. El sistema definido por las dos condiciones fijadas en aquel trabajo no solo es, por consiguiente, el más sencillo por su manejo sino el más conveniente tambien desde el punto de vlsta de los elementos de excepción que en él aparecen.

Generalización al caso de espacios no lineales.

Es interesante notar que el resultado obtenido, esto es, la imposibilidad de establecer la correspondencia sin excepción entre los puntos del espacio E y los grupos de puntos de los E_1, E_2,...., E_k, lo ha sido con solo suponer que esta correspondencia es unívoca en un sentido (a cada punto de E corresponde un solo grupo de puntos de E_1, E_2,...., E_k) y que la demostración relativa a uno de estos espacios E_j es independiente de los demás. Lo cual indica que el origen de aquella imposibilidad radica a su vez en la imposibilidad de establecer una correspondencia algébrica y unívoca sin excepción entre los puntos de un espacio E y los de otro E_j de menor número de dimensiones que aquél; resultado mucho más amplio que el propuesto y del cual es éste una mera consecuencia.

Pero el interés de esta observación no está solo en mostrarnos el esquema, por decirlo así, de la demostración buscada, sino en que reduciendo la cuestiòn al estudio de las correspondencias entre dos solos espacios, permite extender fácilmente los resultados obtenidos a espacios no lineales y prescindir además de la condición de índole práctica de que el espacio objeto E tenga mayor número de dimensiones que cada uno de los E_1, E_2,...., E_k.

Consideremos, en efecto, dos variedades algébricas V_r y V_t de dimensiones r y t, siendo $r \neq t$, y contenidas en dos espacios lineales E_R y E_T de dimensiones R y T respectivamente, y supongamos que entre ellas existe una correspondencia algébrica y unívoca en el sentido $V_r \rightarrow V_t$. Las coordenadas $x_t^{(0)}$, $x_t^{(1)}$,...., $x_t^{(T)}$ de los puntos de V_t, siendo funciones racionales de las $x_r^{(0)}$, $x_r^{(1)}$,...., $x_r^{(R)}$ de los puntos de V_r, podrán expresarse como anteriormente por las fórmulas

$$\frac{x_t^{(0)}}{\psi_0(x_r)} = \frac{x_t^{(1)}}{\psi_1(x_r)} = ... = \frac{x_t^{(T)}}{\psi_T(x_r)}$$

donde las ψ son formas de un mismo orden ([1]). Pero entre las x_r solo puede haber $r+1$ independientes, puesto que r es el número de dimensiones de V_r,

---

([1]) G. BERTINI. *Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi.* (Messina, Principato, 1923, pag. 239).

y como las x_t son funciones racionales de ellas, el numero de dimensiones de la variedad V_t que forman no puede ser mayor que éste; es decir que tenemos $t \not> r$ y, siendo $t \neq r$ según el supuesto, habrá de ser $t < r$. Por otra parte, entre las x_t tampoco puede haber, por la misma razón, mas de $t+1$ independientes, siendo las restantes funciones algébricas de ellas; sean ψ_0, ψ_1,...., ψ_t los denominadores correspondientes a las primeras. Las ecuaciones $\psi_0 = 0$, $\psi_1 = 0$,...., $\psi_t = 0$, que se obtienen igualando a cero estos denominadores, definen en E_R una variedad algébrica de $R-t-1$ dimensiones, cuya intersección con la V_r es una variedad de $R-t-1+r-R=r-t-1$ dimensiones (igual o mayor que cero, según acabamos de ver), a cada uno de cuyos puntos corresponden todos los puntos de V_t, ya que anulando sus coordenadas los denominadores de las x_t independientes, éstas serán indeterminadas, así como las restantes que son funciones de ellas. Lo cual prueba que toda correspondencia algébrica y unívoca entre dos variedades de distintos números de dimensiones tiene necesariamente elementos de excepción.

Aplicando ahora este resultado a la correspondencia entre los puntos de un espacio y los grupos de puntos de otros varios, podemos finalmente afirmar la imposibilidad de establecer una correspondencia algébrica y biunívoca sin excepción entre los puntos de un espacio o variedad, lineal o no, y grupos de puntos de otras varias, una al menos de las cuales tenga distinto número de dimensiones que aquella; ya que una tal correspondencia implicaria la existencia de correspondencias algébricas y unívocas sin excepción entre aquella variedad y cada una de éstas, lo cual acabamos de ver es imposible (1).

Observaciones.

Una restricción subsiste todavia en este resultado respecto de los números de dimensiones de los espacios o variedades, y aunque no constituye en realidad limitación alguna desde el punto de vista práctico, porque, como al principio indicamos, el objeto de un sistema de representación es siempre determinar los elementos de un espacio por medio de los de otros de menor, y por tanto dis-

(1) Al hablar, tanto aquí como en el resto de esta nota, de correspondencias sin excepción, nos referimos indistintamente a elementos reales e imaginarios, ya que limitando la condición a la carencia de elementos de excepción reales, son posibles en muchos casos las correspondencias buscadas. Así, por ejemplo, para tener una correspondencia algébrica y biunívoca, sin excepción en el campo real, entre los puntos del espacio ordinario y pares de puntos de dos planos, basta fijar dos pares de rectas imaginarias conjugadas de segunda especie y tomar como homólogo de cada punto del espacio el par de trazas con aquellos planos de las dos rectas que pasan por éste y cortan respectivamente a uno u otro de los dos pares de rectas fijadas.

tinto, número de dimensiones que aquél, considerada la cuestión desde un punto de vista puramente geométrico, es obligado investigar si esta restricción es realmente necesaria o se puede, con un mejor estudio del problema, prescindir de ella como hemos prescindido de la linearidad de los espacios y extender el resultado obtenido al caso de que todos los espacios imagen tengan el mismo número de dimensiones que el espacio objeto. Fácil es ver que esto no es así y que la conclusión hasta ahora encontrada no es válida en este caso; en el cual es posible por el contrario establecer, en ciertas condiciones, la correspondencia sin excepción que en los otros no era posible lograr. Basta para convencerse de ello suponer, por ejemplo, que todos los espacios objeto e imagen son lineales y establecer un sistema de homografías entre aquél y cada uno de éstos; tomando como correspondiente de cada punto del primero el grupo formado por sus homólogos en estas homografías, se tiene la correspondencia buscada entre los puntos de aquel espacio y los grupos de puntos de éstos. Ni es éste siquiera el único modo de obtener una tal correspondencia; que puede tambien lograrse con solo que las correspondencias entre el espacio objeto y cada uno de los espacios imagen sean unívocas en este sentido (y de índices finitos, claro esta, ya que los números de dimensiones son los mismos) y estén elegidas en número y de modo tal que los ciclos formados por los puntos del espacio objeto que corresponden a un punto en cada uno de los espacios imagen no puedan tener más de un punto común. De análoga manera puede obtenerse la correspondencia buscada cuando se trata de espacios no lineales, si bien para ello han de cumplir ciertas condiciones, cuyo estudio no hemos podido abordar por la premura en redactar esta nota para su oportuna presentación al Congreso. De todos modos, lo dicho es suficiente para mostrar que en el caso de que los espacios objeto e imagen tengan todos el mismo número de dimensiones, no puede asegurarse de un modo general que no sea posible obtener entre los puntos del uno y los de los otros una correspondencia que cumpla las condiciones prefijadas.

Una observación hemos de hacer para terminar, aunque casi sea innecesaria. Al afirmar la imposibilidad de una correspondencia algébrica y biunívoca sin excepción entre los puntos de un espacio y los grupos de puntos de otros varios que no tengan todos el mismo número de dimensiones que aquél, damos por supuesto que los puntos que forman estos grupos han de ser todos variables, excluyendo la solución, en el caso de que unos espacios imagen tengan el mismo número de dimensiones que el espacio objeto y otros no, de que se dejen fijos los puntos situados en estos últimos espacios y variables los situados en los primeros; ya que si bien es posible obtener en esta forma una correspondencia que cumpla las condiciones propuestas, los puntos fijos no intervienen verdaderamente en ella y la correspondencia relaciona en realidad los puntos del espacio objeto con los grupos de puntos tan solo de los espacios imagen que tienen el mismo número de dimensiones que él.

Conclusión.

Resumiendo finalmente los resultados obtenidos en este breve estudio y enunciándolos por orden de mayor a menor generalidad, tenemos pues las siguientes conclusiones:

1ª) Toda correspondencia algébrica y unívoca entre dos espacios o variedades algébricas de distintos números de dimensiones tiene necesariamente elementos de excepción.

2ª) No es posible establecer una correspondencia algébrica y biunívoca sin excepción entre los puntos de un espacio o variedad algébrica y grupos de puntos de otros varios, a menos de tener todos éstos el mismo número de dimensiones que aquél.

3ª) El sistema de representación puntual de un espacio lineal sobre otros varios tambien lineales que hace corresponder a las rectas de aquél grupos de rectas de éstos, es el más perfecto, desde el punto de vista de los elementos de excepción, entre todos los constituidos por correspondencias algébricas y biunívocas entre los puntos del primer espacio y grupos de puntos de los restantes.

P. BARBARIN (Paris - Francia)

IMAGES EUCLIDIENNES DES PLANS NON EUCLIDIENS

1. - Exposé.

En élargissant la notion primordiale de l'angle de deux lignes géodésiques sur une région normale, c'est-à-dire totalement dépourvue de points singuliers ou exceptionnels, il est permis de donner, comme l'on sait, un sens plus étendu aux définitions 4, 8, 9, 11 et 12 des Éléments d'Euclide (1).

Si nous appelons, par convention, *égaux* deux angles géodésiques dont la mesure par rapport à 2π ou par rapport à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est plus simple, est la même, il est naturel d'admettre comme postulat fondamental que l'un de ces angles peut se substituer à l'autre, alors même qu'ils n'appartiennent pas à la même surface, c'est-à-dire être *transporté* d'une surface sur une autre sans que sa mesure change, la région où il est transporté demeurant aussi normale.

C'est cette idée simple que, sans faire appel à la troisième dimension, nous voulons utiliser uniquement pour passer des plans non Euclidiens au plan Euclidien, ou inversement, en construisant sur ce dernier, par des tracés élémentaires qui ne sont que des inversions, les correspondantes de figures géodésiques appartenant aux deux premiers.

Je rappelle pour cela que, par le moyen de quadrilatères géodésiques trirectangles, nous savons, étant donné un segment s de géodésique, construire sur le plan de Riemann l'angle

$$\sigma = \Phi(s),$$

et sur celui de Lobatchefsky-Bolyai l'angle

$$\sigma' = \Pi(s).$$

Nous savons aussi effectuer les constructions inverses, et déterminer, connaissant l'angle σ ou l'angle σ' l'une des géodésiques

$$s = \Theta(\sigma) \quad \text{ou} \quad s = \Pi(\sigma') \ (2).$$

---

(1) EUCLIDE, Édition Peyrard, 1816, avec texte grec, français et latin.

(2) *Études de géométrie analytique non Euclidienne.* (Académie Royale de Bruxelles, Mémoires, Tome LX, 1900, § 2).

Constructions générales. (Académie de Lisbonne, Jornal, 1917).

La géométrie non Euclidienne. (Scientia, Gauthier Villars, 1928, § 24).

Soit E le plan euclidien. Appelons εK^2 la courbure constante d'une surface R répondant à $\varepsilon=1$, ou d'une surface L répondant à $\varepsilon=-1$.

Nous traçons sur E l'angle rectiligne droit xoy, puis sur R et L les angles géodésiques droits XOY et $X'O'Y'$; à un point M de R nous faisons correspondre un point m de E, et de même à un point M' de L nous faisons correspondre un point m' de E. M et m sont appelés *images* l'un de l'autre, ainsi que M' et m'. Pour unifier les notations, je désignerai les fonctions habituelles relatives à un segment géodésique s par les notations

$$C(s), \quad S(s), \quad T(s) \quad \text{avec} \quad C^2(s)+\varepsilon S^2(s)=1,$$

et qui sont circulaires ou hyperboliques selon que $\varepsilon=1$ ou $\varepsilon=-1$.

Le postulat de la conservation des angles énoncé plus haut, et qui a servi de base aux travaux célèbres de DARBOUX, KLEIN, CAYLEY et de beaucoup d'autres géomètres, s'exprime par les équations générales

$$\omega=\widehat{xom}=\widehat{XOM},$$
$$\operatorname{cotg} V=\frac{d\varrho}{d\omega\cdot S\varrho}=\frac{dr}{d\omega\cdot r},$$

où $\varrho=OM$ et $r=om$. On en déduit

$$r=d\cdot T\frac{\varrho}{2},$$

d étant une constante arbitraire. Il reste à traduire ce résultat par une construction.

2. - Construction des Images.

1°) *Couple M, m.* - Traçons sur E le cercle *absolu* de centre o et de rayon d. Le paramètre de R étant désigné par U, la région normale de cette surface est limitée par le cercle de centre O et ayant pour rayon $\frac{\pi}{2}U$; elle est représentée sur E par l'intérieur de l'absolu. Si nous faisons en particulier $\omega=0$, M est sur OX et m sur ox. Il faut tracer l'angle $\widehat{yo\alpha}$ égal à $\mu=\Phi(OM)$, et joindre le point α de l'absolu au point y_1 opposé de y par une droite qui coupe ox en m; on a en effet

$$om=oy_1\operatorname{tg}\widehat{oy_1\alpha}=d\operatorname{tg}\frac{\mu}{2}=dT\frac{OM}{2}.$$

Inversement, m étant donné sur ox, la droite my_1 rencontre l'absolu en α et l'angle $\widehat{yo\alpha}=\mu$. On en déduit $OM=\Theta(\mu)$.

2°) *Couple M', m'.* - Traçons l'angle $\widehat{xo\alpha'}$ égal à $\mu'=\Pi(O'M')$, la tangente à l'absolu en α' rencontrant ox prolongé en t, on décrit le cercle de rayon $t\alpha'$ qui rencontre ox en m', car

$$om'=ot-t\alpha'=\frac{d(1-\sin\mu')}{\cos\mu'}=d\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\mu'}{2}\right)=d\cdot T\frac{O'M'}{2},$$

puisque $\cos\mu'=\operatorname{th} O'M'$.

Inversement, étant donné m' sur ox, on décrit le cercle qui passe par m', a son centre t sur ox et est orthogonal à l'absolu en α'; l'angle $\widehat{xo\alpha'}=\mu'$, et on en déduit $O'M'=\sqcap\!\!\sqcap(\mu')$.

Quand $\mu+\mu'=\frac{\pi}{2}$, α et α' se confondent sur l'absolu; donc m et m' se confondent, et les points M et M' ont la même image m sur E.

3. - Résolution des équations $\operatorname{tg} x=\operatorname{th} y$, $\operatorname{tg} x=\lambda \operatorname{th} y$.

Ce qui précède donne le moyen immédiat de résoudre la première équation, car un système de solutions est

$$x=\frac{1}{2}\Phi(\mu), \qquad y=\frac{1}{2}\sqcap\!\!\sqcap\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right),$$

μ étant un angle arbitraire. Plus généralement, nous saurons résoudre par une construction graphique analogue l'équation

$$\operatorname{tg} x=\lambda \operatorname{th} y,$$

λ étant quelconque. Il suffira pour cela de prendre sur om la ligne $om_1=\lambda om$ et de tracer l'angle $\mu_1=\Phi(OM_1)$ qui lui correspond; on aura alors

$$\operatorname{tg}\frac{\mu_1}{2}=\lambda \operatorname{tg}\frac{\mu}{2}, \quad x=\frac{1}{2}\Phi(\mu_1), \quad y=\frac{1}{2}\sqcap\!\!\sqcap\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right).$$

4. - Image d'une géodésique de R ou de L.

Soit A ou A' son point de rencontre avec OX ou $O'X'$ auquel elle est perpendiculaire; nous construirons d'abord l'image euclidienne a ou a' de chacun de ces points. L'équation polaire de la géodésique considérée ayant la forme $KT\varrho\cos\omega=1$, celle de son image devient

$$r^2+2\varepsilon Kdr\cos\omega-\varepsilon d^2=0,$$

cette image est donc un cercle. Pour $\varepsilon=1$, il passe par les deux points y et y_1 de l'absolu; par conséquent c'est le cercle des trois poinis y, a et y_1 limité à l'axe. C'est aussi l'inverse du segment yoy_1 de cet axe par rapport à a, avec la puissance $\overline{ay}^2$ égale aussi à $\dfrac{\varepsilon d^2}{C^2\dfrac{OA}{2}}$.

Les images de deux géodésiques orthogonales le sont aussi, et alors le centre de l'une, ainsi que le symétrique du centre de l'autre par rapport à o sont conjugués vis à vis de l'absolu.

L'image d'une géodésique de L perpendiculaire à $O'X'$ au point A' passe par a', est orthogonale à l'absolu et se confond précisément avec le cercle de centre t qui a servi à trouver ce point. Si l'on trace la demi corde $a'b'$ de

l'absolu perpendiculaire à ox, ce cercle est encore l'inverse de la droite yoy_1 par rapport à a', mais en prenant pour puissance $-\overline{a'b'^2}$ égale aussi à $\frac{\varepsilon d^2}{C^2 \frac{OA'}{2}}$.

Deux géodésiques parallèles ont leurs images tangentes au même point de l'absolu; pour deux géodésiques perpendiculaires les centres t, t' sont conjugués.

5. - Image de la géodésique de deux points et de leur distance.

Soient M_1 et M_2 deux points de R, ou M_1' et M_2' de L. L'image de leur géodésique est le cercle passant par m_1 et m_2 qui coupe l'absolu aux deux extrémités d'un diamètre dans le premier cas, et dans le second, le cercle orthogonal à l'absolu qui passe par m_1' et m_2'. Leur construction est donc facile; appelons les $\overline{(m_1 m_2)}$. La distance M_1M_2 sera connue par $\overline{M_1M_2} = \ominus(\theta)$, θ étant l'angle des cercles orthogonaux à $\overline{(m_1 m_2)}$ menés par m_1 et m_2 de façon à couper aussi l'absolu suivant un diamètre.

La distance $M_1'M_2'$ sera connue par $\overline{M_1'M_2'} = \boxplus(\theta')$; l'angle θ' se construit en menant par m_2' le cercle orthogonal à $\overline{(m_1'm_2')}$ et à l'absolu, coupant ce dernier en α_2, puis le cercle qui passe par m_1' et est aussi orthogonal à l'absolu en α_2; θ' est l'angle de ce dernier avec $\overline{(m_1'm_2')}$.

Or, si l'on appelle I et J les points où la géodésique M_1M_2 rencontre le cercle imaginaire de l'infini, on sait que [1]

$$\overline{M_1M_2} = \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} L(M_1M_2IJ),$$

la parenthèse étant un rapport anharmonique.

Mais

$$(M_1M_2IJ) = (O, M_1M_2IJ) = (o, m_1m_2ij),$$

i et j étant les images de I et J. Donc si sur le plan E on pose par définition

$$\overline{m_1m_2} = \frac{1}{2\sqrt{-\varepsilon}} L(o, m_1m_2ij),$$

on a

$$\overline{M_1M_2} = \overline{m_1m_2}.$$

Le triangle de trois géodésiques de R ou de L a donc pour image celui de trois cercles du plan E où la somme des angles est égale à celle du premier, et comme elle, supérieure ou inférieure à deux droits.

6. - Image d'une droite de E sur R ou sur L.

Supposons la perpendiculaire à ox à la distance $oa = p$.

Son équation polaire se transforme en

$$T\frac{\varrho}{2} = \frac{p}{d\cos\omega},$$

---

[1] LAGUERRE, 1853; CAYLEY, 1859.

et représente un hypercycle. Pour le construire, il n'y a qu'à déterminer les points A de R ou A' de L qui ont a pour image; puis tracer la médiatrice de OA ou $O'A'$. L'image demandée est la branche ne passant par O ou par O' dans l'hypercycle qui a cette médiatrice pour base.

Il en résulte que sur R ou sur L trois branches d'hypercycle de cette sorte forment un triangle où la somme des angles est toujours égale à deux droits.

7. - Image d'une géodésique de L sur R ou inversement.

En posant $XOM=X'O'M'=\omega$, $OM=\varrho$, $O'M'=\varrho'$, on doit avoir

$$\frac{d\varrho}{d\omega \sin \varrho}=\frac{d\varrho'}{d\omega \operatorname{sh} \varrho'} ,$$

d'où

$$\operatorname{tg} \frac{\varrho}{2}=\lambda \operatorname{tg} \frac{\varrho'}{2} ,$$

λ étant un nombre arbitraire. Soit A' le point de rencontre de la géodésique de L considérée avec $O'X'$, et A son image sur R.

Nous avons

$$\operatorname{tg} \frac{OA}{2}=\lambda \operatorname{th} \frac{O'A'}{2} ,$$

et nous avons vu au § 3 le moyen de déterminer OA.

L'image de la géodésique est également un hypercycle dont il faut trouver la base et l'équidistance. Construisons d'abord l'angle $\alpha=\Pi(O'A')$; la base est la géodésique de R située du côté de A à la distance p de O donnée par

$$\operatorname{tg} p=\frac{1+\lambda^2}{2\lambda \operatorname{tg} \alpha} ,$$

ou plus simplement, si l'on pose $\lambda=\operatorname{tg} \varphi$,

$$\operatorname{tg} p=\frac{1}{\sin 2\varphi \operatorname{tg} \alpha} ;$$

mais, λ pouvant être supposé *rationnel*, $\sin 2\varphi$ l'est aussi, et j'ai indiqué (1) les constructions géodésiques à faire pour obtenir p.

L'équidistance d est alors égale à $OA-p$.

De même, l'image sur L d'une géodésique de R est un hypercycle passant par A' et dont la base se construit par la même méthode que plus haut.

8. - Images d'un cercle de l'une des surfaces E, R, L sur les deux autres.

En généralisant les explications qui précédent, on voit aisément que cette image est toujours un cercle. Donc, pour le construire, il n'y a qu'à tracer le

(1) *Constructions générales* (Jornal de Lisbonne, 1917). — *La Géométrie non Euclidienne*, Chapitre VI.

diamètre M_1M_2 du cercle donné qui passe par l'origine, à construire les images m_1 et m_2 des deux points, et à décrire le cercle de diamètre m_1m_2.

Ceci conduit à un théorème général.

On sait tracer, sur chacun des plans E, R ou L des triangles ayant pour côtés soit des segments de géodésiques soit des arcs de cercle, et dans lesquels la somme des angles est tantôt égale, supérieure ou inférieure à deux angles droits.

Ce théorème est, en quelque sorte, l'image de celui que j'ai démontré dans mes *Études de Géométrie analytique non Euclidienne.*

Dans chacun des trois espaces d'Euclide, de Riemann ou de Lobatchefsky-Bolyai on sait construire des surface à courbure constante sur lesquelles les triangles géodésiques ont une somme d'angles égale supérieure ou inférieure à deux angles droits.

9. - Les images des géodésiques des surfaces E, R ou L sont les perspectives de sections planes d'une quadrique.

Appelons (E), (R), (L) les espaces à trois dimensions ayant chacun même courbure que E, R ou L.

Dans l'espace (E), la quadrique considérée est soit une sphère S de diamètre d, soit un hyperboloïde de révolution H a deux nappes équilatère d'axe réel égal à d. La perspective est faite sur le plan tangent à un sommet en prenant pour point de vue le sommet opposé. Le cône perspectif qui a pour directrice un cercle du plan tangent rencontre la quadrique suivant le cercle de rayon nul qui a le sommet du cône pour centre, et une autre section plane dont le plan passe par le centre de la quadrique. Seulement il faut noter que cette section plane est une géodesique de S, mais n'en est pas une de H, dont la courbure ne demeure pas constante.

Dans un des deux autres espaces, par exemple dans (L) il y a un fait semblable.

Soit une sphère S de cet espace, ayant pour centre O, et V un point extérieur. Le cône circonscrit de sommet V a pour demi-angle θ et touche la sphère suivant un cercle de diamètre CC_1. Soit pris sur VO la longueur $VD = \sqcap(\theta)$; menons en D le plan perpendiculaire à VD, et prenons le pour plan de perspective. La perspective du cercle CC_1 est le cercle de l'infini du plan, et le plan entier est la perspective de la zone CAC_1 limitée par le petit cercle, en même temps que la figure inverse de cette zone par rapport à V. Donc si MON est la trace d'un plan coupant la sphère O suivant une géodésique, M' et N' étant les perspectives de M et N, le quadrilatère $MNM'N'$ est inscriptible; donc le cône perspectif est aussi coupé suivant un cercle par le plan du tableau. Soit enfin E rencontre de CC_1 avec MN; le plan de bout de trace VE rencontre le

plan du tableau suivant la base de l'hypercycle qui représente la perspective complète (1).

Pour raisonner de même dans l'espace (R) il fandralt prendre V à l'intérieur de la sphère S. Soit CVC_1 le plan perpendiculaire à OV et α l'angle OCV. Le plan du tableau est perpendiculaire à VO à la distance $VD=\Phi\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$; il coupe la sphère suivant un cercle qui sur la perspective représente l'absolu.

---

(1) *Études de géométrie analytique non Euclidienne*, page 71-72.

F. SEVERI (Roma - Italia)

SULLA CONDIZIONE D' INTEGRABILITÀ PEI DIFFERENZIALI ESATTI DI 1ª SPECIE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA E SUI DIFFERENZIALI SEMIESATTI

1. - Data una superficie algebrica $f(x, y, z)=0$, d'ordine m, che supponiamo dotata di singolarità ordinarie (linea doppia, punti tripli e punti cuspidali), il che notoriamente non è restrittivo, dovendo trattare di proprietà invarianti per trasformazioni birazionali, il PICARD ha dimostrato che la ricerca dei differenziali totali di 1ª specie appartenenti ad f, *equivale* alla ricerca di tre polinomi d'ordine $m-2$ (al più) A, B, C *aggiunti* ad f (cioè tali che le superficie $A=0$, $B=0$, $C=0$ passin per la linea doppia di f) soddisfacenti alle identità algebriche

$$Af_x' + Bf_y' + Cf_z' = Nf \tag{1}$$

$$N = A_x' + B_y' + C_z'. \tag{2}$$

Poichè il sistema lineare degli integrali semplici di 1ª specie eventualmente appartenenti ad f, è *razionalmente dato* una volta assegnata la f, sorge il problema di costruire razionalmente questo sistema, alla stessa guisa che il sistema degl'integrali abeliani di 1ª specie d'una curva, si costruisce con ben note operazioni razionali, a partire da questa.

La (1), in cui A, B, C intervengono senza esser soggetti a derivazione, si interpreta più agevolmente nel campo delle operazioni geometriche razionali; mentre la (2), che è un'equazione a derivate parziali nelle A, B, C, è di più riposta interpretazione.

Da venti anni a questa parte — e cioè dal precedente Congresso Internazionale dei Matematici tenutosi in Italia (Roma, 1908) — son tornato a varie riprese su questo difficile problema, essenziale per la completa conoscenza degli integrali picardiani. Di recente (1) ho avuto occasione di ricordar le fasi della mia ricerca. Richiamerò taluni risultati fondamentali del lavoro cui alludo:

a) Il numero q' delle superficie aggiunte d'ordine $m-2$ (s'intende « linearmente indipendenti »), che passan pei punti base di un fascio $|C|$ di sezioni

(1) Vedi le mie note: *Gl'integrali algebrici semplici e doppi* (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, 1928).

piane di f e pel gruppo jacobiano di $|C|$, è un carattere di f, invariante assoluto per trasformazioni birazionali. Questo carattere è $\geqslant$ all'irregolarità q di f.

b) Ogni superficie aggiunta d'ordine $m-2$ passante pel gruppo jacobiano di $|C|$ passa in conseguenza pel gruppo base.

c) Se, in particolare, è $A=0$ un'aggiunta d'ordine $m-2$, che soddisfa alla condizione *b*) nei riguardi del fascio $x=$cost., restano ad essa *associate* due aggiunte d'ordine $m-2$, $B=0$, $C=0$, comportantesi analogamente rispetto ai fasci $y=$cost., $z=$cost., e tali che è soddisfatta la (1).

d) Gl'integrali

$$\int \frac{A\,dy - B\,dx}{f_z'}, \qquad \int \frac{B\,dz - C\,dy}{f_y'}, \qquad \int \frac{C\,dx - A\,dz}{f_x'}$$

hanno gli stessi valori lungo qualunque ciclo lineare di f (cioè della relativa riemanniana quadridimensionale) e son di 1ª specie su qualunque curva algebrica della superficie. Li ho chiamati *integrali di differenziali semiesatti di 1ª specie.*

e) Viceversa, ogni espressione differenziale $P\,dx + R\,dy$, con P, R funzioni razionali del punto di f, tale che $\int P\,dx + R\,dy$ sia di 1ª specie su qualunque curva della superficie (e perciò basta che lo sia sulle sezioni piane), è un differenziale semiesatto di 1ª specie.

f) Essendo $A=0$, $B=0$, $C=0$ tre aggiunte associate d'ordine $m-2$ — soddisfacenti cioè alla (1) — esse soddisfanno in conseguenza alla

$$N = A_x' + B_y' + C_z' - Q, \tag{2'}$$

ove $Q=0$ è un'aggiunta d'ordine $m-4$ (al più).

g) *Sopra* f sussiston le relazioni:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right) = \frac{Q}{f_z'}, \quad \frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_x'}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f_x'}\right) = \frac{Q}{f_x'}, \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{C}{f_y'}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_y'}\right) = \frac{Q}{f_y'},$$

per guisa che

$$\iint \frac{Q}{f_z'}\,dx\,dy = \iint \frac{Q}{f_x'}\,dy\,dz = \iint \frac{Q}{f_y'}\,dz\,dx$$

è un integrale doppio di 1ª specie di f, che ha tutti i periodi nulli.

h) La differenza $q' - q$ denota sia il numero degl'integrali doppi di 1ª specie (linearmente indipendenti) senza periodi, come il numero degl'integrali semiesatti di 1ª specie che, sopra una qualsiasi curva D di f staccano gruppi canonici segabili con curve aggiunte D' alla D.

OSSERVAZIONE. - I risultati *a*), *b*) posson riferirsi anche ad un fascio $|C|$ di curve qualunque di f. In luogo di una superficie aggiunta d'ordine $m-2$, occorre allora parlare di una curva $C+C'$, ove C' è una curva aggiunta a C.

2. - La (1) determina dunque i differenziali semiesatti di 1ª specie appartenenti ad f. Questi differenziali sono sempre esatti? Cioè: è sempre $q'=q$? Ossia: la (1) trae seco sempre di conseguenza la (2)? Se così fosse, non esi-

sterebbero integrali doppi di 1ª specie, senza periodi. A tali domande non si sa rispondere. Spero che su esse voglian portare la loro attenzione quanti aman di lumeggiare o di risolvere questioni di alta analisi con processi geometrici. Se anche — dopo lo sbalzo verificatosi nel 1904-05, essenzialmente in conseguenza dei nuovi elementi concettuali e dei contributi risolutivi che allora ebbi la fortuna di poter arrecare alla teoria — le gravi difficoltà, che tutt'ora s'incontrano nella teoria delle funzioni algebriche di due variabili, hanno pel momento alquanto ridotto il numero dei cultori di questa bellissima branca di studi, ho fede che presto nuove energie arrecheranno ad essa vigorose spinte. Non è infatti possibile che la teoria delle funzioni algebriche, la quale è per la matematica un campo sperimentale di primo ordine, dove nacquero e si affinarono i più importanti concetti matematici moderni, possa, non dico inaridirsi, ma semplicemente restare incolta a lungo!

3. - Qui mi propongo di mostrare come s'interpreti geometricamente (mediante condizioni razionali) il complesso delle (1), (2). Ma prima desidero indicare l'*esempio di una superficie* f *sulla quale esiste, per così dire, un troncone d'integrale semiesatto di 1ª specie,* cioè un integrale del tipo $\int P dx$, con P funzione razionale del punto di f, il quale si conserva di 1ª specie sopra *tutte* le sezioni piane di un fascio ($y=$cost.), senza tuttavia avere i periodi costanti, cioè senza esser parte di un integrale di PICARD. Potrà completarsi il « troncone » in guisa da ricavarne un integrale $\int P dx + R dy$ che sia semiesatto di 1ª specie? Rispondere a questa domanda vuol dire rispondere, con un esempio, alle domande del n. 2.

Considero la superficie del 6° ordine:

$$f = y^3 - (4x^3 - 3xy - z^2)^2 - 1 = 0. \tag{3}$$

Essa contiene un fascio equianarmonico di cubiche ellittiche, segate dai piani $y=$cost. Ogni piano taglia f lungo due di queste cubiche, che coincidon soltanto per $y = 1, \varepsilon, \varepsilon^2, \infty$ (ε radice cubica complessa dell'unità). Per $y=\infty$ le due cubiche coincidon sulla retta all'infinito del piano yz, che è doppia per la superficie, la quale non ha punti multipli al finito. La f, possedendo un fascio irrazionale, è irregolare.

Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{4}\int \frac{dx}{z} = \int \frac{4x^3 - 3xy - z^2}{f_z'}\, dx. \tag{4}$$

Posto $g_2 = 3y$, $g_3 = \sqrt{y^3 - 1}$, l'integrale (4) assume la forma

$$I(y) = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}},$$

ove il discriminante $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2 = 27$ non si annulla mai. Epperò per *ogni* valore finito di y, $I(y)$ rimane di 1ª specie.

Per $y=\infty$ divengon infiniti g_2, g_3 e l'invariante $J=\frac{g_2^3}{\Delta}=y$. Tuttavia $I(y)$ resta di 1ª specie. Si verifica infatti subito ch'esso annullasi identicamente sulla curva all'infinito di f (che è la retta all'infinito del piano yz), portando al finito questa sezione con una trasformazione omografica $\left(\text{p. es. colla } x'=\frac{x}{y},\ y'=\frac{1}{y},\ z'=\frac{z}{y}\right)$.

Pertanto *l'integrale* I(y) *riman di 1ª specie per ogni valore, finito od infinito, di* y. I suoi periodi non son costanti, poichè, qualora lo fossero, essendo nulli all'infinito, sarebbero nulli sempre; ed $I(y)$ ridurrebbesi, esso medesimo, ad una costante.

Si può ora costruire un differenziale semiesatto di 1ª specie $\frac{Ady-Bdx}{f_z'}$ appartenente alla (3), con $B=4x^3-3xy-z^2$ oppure $B=(y-y_0)(4x^3-3xy-z^2)$, dove y_0 è una conveniente costante? Bisogna all'uopo determinare il polinomio A (di 4° grado al più nelle x, y, z e di 3° grado al più nelle y, z), in modo che $Af_x'+Bf_y'$ si esprima come combinazione lineare di f, f_z'. Supposto A esistente, alcuni coefficienti di A si determinan subito tenuto conto del comportamento all'infinito e del fatto che le sezioni di f coi piani $x=$cost. son quartiche senza punti multipli. Ma, per condurre in fondo la ricerca, occorre analizzare minutamente le singolarità che f presenta all'infinito e specialmente nel punto all'infinito dell'asse y. I calcoli, se non interviene qualche opportuno accorgimento, son molto complicati.

Il procedimento esposto nel n. 9 del mio lavoro citato prova che, se sulla $f=0$ esiste un integrale $\int\frac{Bdx}{f_z'}$, che sia di 1ª specie sopra ogni sezione piana $y=$cost. (compresa la sezione $y=\infty$), esso è sempre parte di un integrale semiesatto di 1ª specie $\int\frac{Ady-Bdx}{f_z'}$. Però la conclusione non è senz'altro applicabile alla (3), perchè è subordinata all'ipotesi che f abbia singolarità ordinarie (e che sia in posizione generica rispetto agli assi). Attesa la natura della proprietà, pare improbabile ch'essa possa dipender da circostanze siffatte; ma in argomento così delicato occorre la massima cautela anche nelle induzioni (1).

4. - Passo infine ad occuparmi della interpretazione geometrica delle (1), (2). Considero all'uopo su f una rete R di curve C (irriducibili e senza punti base). Sieno: Σ_1, Σ_2 due fasci generici di R, aventi in comune la curva C_0 della rete; K la jacobiana di R; C' una curva aggiunta alle C; E_1, E_2 i gruppi base di Σ_1, Σ_2 (situati su C_0); Φ, Ψ due curve $C+C'$, non contenenti C_0, ma passanti rispettivamente per E_1, E_2 e pei gruppi jacobiani D_1, D_2 dei fasci Σ_1, Σ_2; G_1, G_2 i gruppi (canonici) staccati su C_0 da Φ, Ψ, fuori rispettivamente dei gruppi E_1, E_2.

---

(1) Cfr. a tal proposito il fatto estremamente singolare, che si presenta per la generazione dei periodi degl'integrali doppi, nel Trattato di PICARD e SIMART, t. II, p. 345.

La curva *completa* dei contatti delle curve di Σ_1 con quelle di Σ_2 (brevemente « la curva di contatto dei due fasci ») equivale a $3C+C'$; ma da essa staccasi semplicemente la curva C_0. Il resto è la jacobiana K di R. Pertanto, le curve K, $C_0+\Phi$, $C_0+\Psi$ appartengono alla stessa rete S, perchè son equivalenti ad una curva $2C+C'$. Si posson dunque considerare in S i fasci H_1, H_2 individuati rispettivamente dalle coppie di curve K, $C_0+\Phi$; K, $C_0+\Psi$.

La curva completa di contatto dei fasci H_1, Σ_2 scindesi nella C_0 ad essi comune (come curva parziale di H_1) ed in una curva residua, che chiameremo J_{12}. Similmente definiscesi la curva J_{21} nei riguardi dei fasci H_2, Σ_1. Indichiamo infine con L la curva di contatto dei fasci H_1, H_2, astrazion fatta delle curve K, C_0 ad essi comuni (una come curva totale e l'altra come curva parziale); sicchè C_0+L sarà la jacobiana della rete S.

Poichè la curva completa di contatto di H_1, Σ_2 equivale $2K+C+C'\equiv 3K-C$, e da essa staccasi C_0, sarà $J_{12}\equiv 3K-2C$. Similmente $J_{21}\equiv 3K-2C$. La stessa considerazione, applicata ai fasci H_1, H_2, conduce alle equivalenze

$$C_0+K+L\equiv 2K+K+K'\equiv 4K+C'-C\equiv 5K-3C,$$

onde:

$$L\equiv 4(K-C)\equiv 4\Phi.$$

Una curva $L-J_{12}$, essendo equivalente a $K-2C\equiv C'$, è effettiva; cioè J_{12} — e similmente J_{21} — è contenuta *parzialmente* in $|L|$. Onde, *per esprimere che le curve* J_{12}, J_{21} *coincidono, basta esprimere ch'esse staccan sulla curva* L *lo stesso gruppo di punti* (cioè gli stessi punti, colla medesima molteplicità d'intersezione in ciascuno). Questo è ovvio, quando qualcuna delle L, J_{12}, J_{21} è irriducibile, come accadrà in generale. Se, invero, è irriducibile L, e le J_{12}, J_{21} segano L nello stesso gruppo $(L, J_{12})=(L, J_{21})$, esse non posson esser distinte, perchè altrimenti nel loro fascio vi sarebbe una curva contenente come parte L; se, essendo sempre $(L, J_{12})=(L, J_{21})$, è irriducibile J_{12}, non può essere J_{21} distinta da J_{12}, perchè su J_{12} il gruppo (J_{12}, J_{21}) sarebbe *parte* del gruppo (J_{12}, L), contrariamente all'ipotesi che su L il gruppo (J_{12}, L) *coincida* con (J_{21}, L) [1].

Ma la conclusione vale altresì quando L, J_{12}, J_{21} son riducibili. Mettiamoci infatti nell'ipotesi che J_{12}, J_{21} abbian parti comuni (da contarsi come *comuni* lo stesso numero di volte), potendo anche talune di queste parti appartenere a L, come componenti semplici o multiple. Astraendo dalle parti comuni ad J_{12}, J_{21}, si hanno come resti due curve equivalenti A, B, segate nello stesso gruppo di punti da L. Ora, poichè L contiene parzialmente A, B, su ciascuna delle com-

---

[1] Si avverta che la J_{12} sega sempre una C', e quindi anche L, che è equivalente a $C'+J_{12}$, in un numero >0 di punti, perchè J_{12} è curva totale di un sistema lineare infinito $|4C+3C'|$, di cui C' non è curva fondamentale.

ponenti irriducibili di A, la curva B, supposta distinta da A, e la L, segan due gruppi, di cui il primo è contenuto nel secondo. Ciò è inconciliabile col fatto che $(A, L)=(B, L)$.

5. - Determiniamo in primo luogo il numero $[J_{12}, L]=[J_{21}, L]$ dei punti dei gruppi (J_{12}, L), (J_{21}, L). Basta perciò ricordare che $J_{12}\equiv 4C+3C'$, $L\equiv 4(C+C')$. Risulta:

$$[J_{12}, L]=[4C+3C', 4C+4C']=16n+56(p-1)+12n',$$

ove $n=[C, C]$, $n'=[C', C']$ e p denota il genere delle C. Dico che questo numero può anche scriversi sotto la forma $[\Delta_1]+[\Delta_2]+[M]+[N]$, in cui Δ_1, Δ_2 denotan i gruppi jacobiani dei fasci H_1, H_2 liberati rispettivamente dai gruppi

$$(C_0, \Phi)=E_1+G_1, \qquad (C_0, \Psi)=E_2+G_2,$$

che son costituiti dai punti doppi delle particolari curve $C_0+\Phi$, $C_0+\Psi$ di quei fasci; ed M, N son i gruppi (equivalenti) staccati su K da Φ, Ψ, fuori dei gruppi jacobiani D_1, D_2 dei fasci Σ_1, Σ_2, pei quali appunto passano rispettivamente le Φ, Ψ.

Calcoliamoci all'uopo $[\Delta_1]=[\Delta_2]$ ed $[M]=[N]$. Applicando ai fasci H_1, Σ_2 una nota relazione (di C. SEGRE) viene:

$$[\Delta_1]+[C_0, \Phi]-[K, C_0]-[K, \Phi]-4\varrho=[D_2]-n-4p, \tag{5}$$

ove ϱ denota il genere di K. Ma:

$$[C_0, \Phi]=[C, C+C']=n+2p-2, \quad [K, C_0]=[2C+C', C]=2n+2p-2,$$
$$[K, \Phi]=[2C+C', C+C']=2n+6p-6+n',$$
$$\varrho=(2p+n-1)+\pi'+(4p-4)-1=\pi'+6p-6+n,$$

in cui π' designa il genere di C'. Consegue perciò dalla (5):

$$[\Delta_1]=26p+6n+n'+4\pi'+[D_2]-30,$$

e, siccome $n'-\pi'=p-2$, in definitiva viene:

$$[\Delta_1]=22p+6n+5n'+[D_2]-22.$$

Quanto ad $[M]$, si ha:

$$[M]=[\Phi, K]-[D_1]=[C+C', 2C+C']-[D_1]=2n+6p-6+n'-[D_1];$$

onde:

$$[\Delta_1]+[\Delta_2]+[M]+[N]=2[\Delta_1]+2[M]=16n+56(p-1)+12n'=[J_{12}, L].$$

Si ha insomma la *relazione numerativa*

$$[J_{12}, L]=[\Delta_1]+[\Delta_2]+[M]+[N], \tag{6}$$

fondamentale per le ulteriori deduzioni.

6. - Suppongasi che le J_{12}, J_{21} coincidano. Allora, siccome la prima contiene il gruppo Δ_1 (perchè in ciascun punto P di Δ_1 la curva di Σ_2 passante per esso ha un incontro bipunto colla curva di H_1 passante per P, in quanto detta curva ha ivi un nodo), e, similmente, la seconda contiene il gruppo Δ_2, vorrà dire che:

a) Ciascuna delle curve J_{12}, J_{21} *deve contenere il gruppo* $\Delta_1+\Delta_2$.

Se le J_{12}, J_{21} coincidono, dovranno altresì coincidere i gruppi (J_{12}, K), (J_{21}, K). Ora (J_{12}, K) si scinde nel gruppo (Φ, K) dei punti base di H_1 giacenti su J_{12} [1] e nel gruppo dei punti ove K ha incontro bipunto colle curve di Σ_2 per ciascun di essi, cioè nel gruppo jacobiano D_2 di Σ_2 e nel gruppo O dei punti per ognuno P dei quali passa un fascio di curve di R, osculantisi in P. Dunque:

$$(J_{12}, K)=(\Phi, K)+D_2+O.$$

Similmente:

$$(J_{21}, K)=(\Psi, K)+D_1+O.$$

Se $J_{12}=J_{21}$, sarà pertanto $(\Phi, K)+D_2=(\Psi, K)+D_1$; e siccome Φ, Ψ contengon rispettivamente D_1, D_2, affinchè valga la precedente eguaglianza occorre che $M=N$. Cioè:

b) Le curve Φ, Ψ *devon segare* K, *fuori rispettivamente dei gruppi* D_1, D_2, *nello stesso gruppo* M *di punti.*

7. - Viceversa, dico che *le condizioni a), b) son, non soltanto necessarie, ma anche sufficienti, perchè* $J_{12}=J_{21}$.

Invero, essendo soddisfatta la *b)*, la curva L, come unica parte della jacobiana della rete S, che contiene il gruppo base M della rete stessa [gruppo che è *base*, in virtù appunto della *b)*], deve passar doppiamente per ciascun punto di M [2]. Perciò, in forza della relazione (6), il numero dei punti del gruppo segato su L da J_{12}, fuori di M, sarà uguale a $[\Delta_1]+[\Delta_2]$. Ma già, per la *a)*, la J_{12} passa pel gruppo $\Delta_1+\Delta_2$, che giace su L; dunque la J_{12} non incontra L fuori del gruppo $\Delta_1+\Delta_2+2M$. Analoga conclusione vale per J_{21}. Epperò (n. 4) le J_{12}, J_{21} coincidono. Riassumendo:

Condizione necessaria e sufficiente per la coincidenza delle curve J_{12}, J_{21}, *è che le curve* Φ, Ψ *seghino* K, *fuori rispettivamente dei gruppi* D_1, D_2, *per cui esse passano, in un medesimo gruppo* M *di punti e che ambedue le curve* J_{12}, J_{21} *contengano il gruppo* $\Delta_1+\Delta_2$.

---

[1] Per l'altro gruppo base (C_0, K) di H_1, la J_{12} non passa, perchè esso giace sulla parte C_0 della curva completa di contatto di H_1, Σ_2.

[2] E L non passerà nè per D_1 nè per D_2, perchè questi son punti base comuni dei due fasci H_1, H_2, onde la curva completa dei loro contatti ci passa semplicemente e la condizione è già soddisfatta pel fatto che vi passa K.

8. - Applichiamo la conclusione precedente al caso in cui R sia la rete delle sezioni di f (situata genericamente rispetto agli assi e dotata di singolarità ordinarie) coi piani paralleli all'asse z; K è allora la curva $f=f_z'=0$, fuori della linea doppia di f; Σ_1 è il fascio $x=\text{cost.}$, Σ_2 il fascio $y=\text{cost.}$; C_0 la curva all'infinito di f. La curva Φ è segata da un'aggiunta d'ordine $m-2$, $A=0$, passante pel gruppo jacobiano D_1 e pel gruppo base E_1 del fascio Σ_1; e la curva Ψ da un'aggiunta d'ordine $m-2$, $B=0$, passante pel gruppo jacobiano D_2 e pel gruppo base E_2 di Σ_2.

Nel n. 9 del mio lavoro citato, trovasi dimostrato che, in queste condizioni (moltiplicando uno dei polinomi A, B per una conveniente costante) esiste una terza aggiunta d'ordine $m-2$, $C=0$, associata alle A, B, in guisa da soddisfare alla (1); sicchè — come ho già osservato in quel lavoro — la (1) s'interpreta geometricamente affermando l'esistenza di un'aggiunta d'ordine $m-2$, $A=0$, passante pel gruppo jacobiano del fascio $x=\text{cost.}$; dal che consegue il passaggio pei punti base del fascio stesso e l'esistenza delle B, C.

Ciò ricordato, consideriamo la funzione razionale del punto di f:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)=\frac{1}{f_z'^3}\left[f_z'(f_z'A_x'-Af_{zx}''-A_z'f_x')+Af_{zz}''f_x'\right].$$

Essa annullasi al finito, sopra un piano $y=\text{cost.}$, negli zeri doppi della funzione razionale $\frac{A}{f_z'}$, cioè nei punti al finito ove il piano stesso sega la curva di contatto del fascio $\frac{A}{f_z'}=\text{cost.}$ col fascio Σ_2. Ma il fascio $\frac{A}{f_z'}=\text{cost.}$, essendo individuato dalla curva polare K della funzione razionale $\frac{A}{f_z'}$ e dalla sua curva zero, che è $\Phi+C_0$, non è che il fascio indicato, nel n. 4, con H_1. Perciò la curva di livello zero, *al finito*, della $\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)$, è J_{12}. La curva polare di $\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)$ è K, curva polare di 3° ordine; e l'ulteriore curva di livello zero è la curva all'infinito C_0, curva zero di 2° ordine (come si rileva dagli ordini del numeratore e del denominatore di $\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)$, oppure dal fatto che $J_{12}\equiv 3K-2C$). Analoga conclusione, coi debiti cangiamenti, vale per $\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right)$; onde:

Le funzioni razionali $\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)$, $\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right)$ *hanno la stessa curva polare (del 3° ordine) e si annullano (del 2° ordine) lungo la curva all'infinito di* f. *Le loro ulteriori curve di livello zero sono rispettivamente* J_{12}, J_{21}.

Affinchè su f sia soddisfatta la *condizione d'integrabilità*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right)+\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right)=0, \tag{7}$$

occorre dunque che $J_{12}=J_{21}$. Questa condizione è altresì sufficiente.

Invero, se $J_{12}=J_{21}$, la funzione razionale del punto di f:

$$F(x,y,z)=\frac{d}{dx}\left(\frac{A}{f_z'}\right):\frac{d}{dy}\left(\frac{B}{f_z'}\right)=\frac{f_z'(f_z'A_x'-Af_{zx}''-A_z'f_x')+Af_{zz}''f_x'}{f_z'(f_z'B_y'-Bf_{zy}''-B_z'f_y')+Bf_{zz}''f_y'},$$

non si annulla (nè mai diventa infinita) su f; sicchè eguaglia una certa costante h. Per valutare questa costante, cerchiamone il valore lungo K. La F su K riducesi ad $\frac{Af_x'}{Bf_y'}$ e per la (1), che riteniamo ormai soddisfatta, su K è $Af_x' + Bf_y' = 0$, cioè $\frac{Af_x'}{Bf_y'} = -1$. Dunque $h = -1$. La $F = h$ equivale pertanto alla (7).

Riassumendo, otteniamo la seguente *interpretazione geometrica della condizione d'integrabilità, espressa dal complesso delle due identità algebriche* (1), (2):

La (1) *s'interpreta affermando l'esistenza di un'aggiunta d'ordine* m−2, A=0, *passante pel gruppo jacobiano del fascio* x=cost. [*dal che consegue il passaggio di* A *pel gruppo base del fascio e l'esistenza delle due aggiunte associate* B=0, C=0, *soddisfacenti con* A=0 *alla* (1)].

Soddisfatta che sia la (1),

$$\int \frac{A\,dy - B\,dx}{f_z'} = \int \frac{B\,dz - C\,dy}{f_x'} = \int \frac{C\,dx - A\,dz}{f_y'}$$

è integrale di un differenziale di 1ª specie, per lo meno semiesatto, e affinchè questo differenziale sia esatto, cioè affinchè sia soddisfatta la (2), *occorre e basta che la curva dei contatti* (*al finito*) *del fascio* $\frac{A}{f_z'}$ = cost. *col fascio* y=cost. *e la curva dei contatti* (*al finito*) *del fascio* $\frac{B}{f_z'}$ = cost. *col fascio* x=cost. *contengano rispettivamente i gruppi jacobiani* (*al finito*) *dei fasci* $\frac{B}{f_z'}$ = cost., $\frac{A}{f_z'}$ = cost. (oltre naturalmente ai gruppi jacobiani dei fasci $\frac{A}{f_z'}$ = cost., $\frac{B}{f_z'}$ = cost., che contengono di per sè).

OSSERVAZIONE. - La (1) è senz'altro un'identità fra le x, y, z considerate come variabili indipendenti, e non già soltanto sulla superficie f.

La (2), per quanto precede, è a priori soddisfatta soltanto sulla f. Ma poichè i polinomi che in essa figurano hanno ordine $m-3$ al più, una volta soddisfatta su f, essa è soddisfatta in tutto lo spazio. Perciò le (1), (2) possono ritenersi identità algebriche nelle variabili *indipendenti* x, y, z.

† C. ROSATI (Pisa - Italia)

SULLE CORRISPONDENZE FRA CURVE ALGEBRICHE

1. - Corrispondenze a valenza e corrispondenze singolari.

Il punto di partenza dei moderni sviluppi della teoria delle corrispondenze fra curve algebriche risale, com'è noto, a una celebre memoria di HURWITZ [7] del 1886, nella quale per via trascendente viene stabilito sopra una curva algebrica il principio generale di corrispondenza. Con Hurwitz lo studio delle corrispondenze viene allacciato a quello della moltiplicazione complessa delle funzioni abeliane.

Data sopra una curva C del genere p, su cui $u_1 u_2 \ldots u_p$ indicano gl'integrali normali di 1ª specie, una corrispondenza algebrica (m, n) che conduca da un punto x agli omologhi $y'y''\ldots y^{(n)}$ (operazione T) e da un punto y agli omologhi $x'x''\ldots x^{(m)}$ (operazione T^{-1}), dall'osservazione che le somme abeliane

$$\sum_{r=1}^{n} u_k(y^r)$$

come funzioni del punto x sono integrali di 1ª specie, Hurwitz deduce le equazioni

$$\sum_{r=1}^{n} u_k(y^r) = \sum_i \pi_{ki} u_i(x) + \pi_k \qquad (k=1, 2, \ldots, p). \tag{1}$$

Da cui seguono facilmente le eguaglianze

$$\begin{aligned} \pi_{kl} &= h_{kl} + \sum_i g_{il} a_{ki} \\ \sum_i \pi_{ki} a_{il} &= H_{kl} + \sum_i G_{il} a_{ki} \end{aligned} \qquad (k, l=1, 2, \ldots, p) \tag{2}$$

nelle quali a_{ik} sono i periodi degli integrali u_i ed h, g, H, G sono i coefficienti interi delle combinazioni lineari con cui i cicli omologhi per la T delle retrosezioni si esprimono per le retrosezioni medesime. L'eliminazione dalle (2) delle costanti π_{kl} conduce a p^2 equazioni quadratiche a coefficienti interi fra i periodi a_{ik}, il cui insieme indicheremo con (H). La matrice di ordine $2p$ $\begin{vmatrix} h_{ik} & g_{ik} \\ H_{ik} & G_{ik} \end{vmatrix}$ dicesi *matrice caratteristica* dell'operazione T, e la matrice di ordine p $|\pi_{ik}|$ dicesi *matrice di 2ª specie* associata a T. La matrice caratteristica dell'operazione T^{-1} è $\begin{vmatrix} G_{ki} & -g_{ki} \\ -H_{ki} & h_{ki} \end{vmatrix}$.

Le equazioni (H) esprimono la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza sulla curva C di corrispondenze con gl'interi caratteristici h, g, H, G. Il loro significato geometrico è dato dalla proprietà che *l'omografia razionale di* S_{2p-1} *associata alla matrice* $\begin{vmatrix} h & H \\ g & G \end{vmatrix}$ *trasforma in sè l'*S_{p-1} *dei periodi,* cioè l'S_{p-1} intersezione degli iperpiani aventi per coordinate i periodi degli integrali di 1ª specie (ROSATI ([11])). A seconda che le relazioni (H) si riducono o no a identità, nasce una distinzione delle corrispondenze in corrispondenze *ordinarie* o *a valenza* (*Wertigkeit*) e in corrispondenze *singolari.* Alle prime sono associate moltiplicazioni ordinarie delle funzioni abeliane inerenti alla curva C, alle seconde moltiplicazioni complesse. Hurwitz deduce poi che *se i moduli della curva sono generali, ogni corrispondenza su di essa è necessariamente a valenza.* Però, come ha osservato SEVERI, la precisa validità di questa deduzione richiederebbe la variabilità completa dei periodi a_{ik}, mentre è noto che tali periodi, come moduli trascendenti della curva, sono, appena è $p \geqslant 4$, sovrabbondanti. Ma un bel teorema di Severi ([23]), ([25]) contenuto in una Memoria dei Math. Annalen del 1913, precisato maggiormente in una sua Nota lincea del 1927, stabilisce che *la curva generica di un sistema lineare semplice almeno* ∞^3 *sopra una superficie regolare non possiede che corrispondenze a valenza,* e pone perciò la precedente affermazione di Hurwitz al riparo di ogni obiezione. (Vedansi anche, a questo proposito, una Nota di ZARISKI ([26]) ed una di LEFSCHETZ ([9])). Il risultato fondamentale della Memoria di Hurwitz, conseguito con l'uso delle funzioni ϑ, è poi l'assegnazione della base per la totalità delle corrispondenze e la formulazione del principio generale di corrispondenza.

Uno studio generale per via sintetica delle corrispondenze forma l'oggetto di una classica Memoria di SEVERI ([20]) (1903) nella quale ai risultati di Hurwitz, che in essa vengono allargati e approfonditi nel loro significato geometrico, altri numerosi e importanti se ne aggiungono. Il ponte di passaggio fra i risultati analitici di Hurwitz e quelli geometrici di Severi è fornito dal Teorema d'Abel. Il Severi considera corrispondenze irriducibili, effettive e virtuali. Con l'uso sistematico del concetto di *somma* e di *prodotto,* egli dimostra l'esistenza sopra una curva di corrispondenze a valenza arbitraria (positiva e negativa) e giunge a caratterizzare geometricamente il gruppo delle coincidenze di una tale corrispondenza, ottenendo così nel modo più semplice e rapido il principio di Cayley-Brill-Hurwitz e insieme il suo significato funzionale. Posta poi la nozione di corrispondenze dipendenti, stabilisce una relazione geometrica-funzionale fra i gruppi di punti uniti di più corrispondenze dipendenti, da cui, supposta l'esistenza della base, trae il principio generale di Hurwitz. In tal modo vien posto in piena luce il contenuto geometrico dei detti principî. Altre nozioni importanti son quelle di *grado* e *genere* (virtuali) di una corrispondenza, che il Severi introduce ricorrendo alla superficie delle coppie di punti (ordinate o no) della curva C. Lo studio esauriente di tale superficie è stato il punto di partenza dei

brillanti risultati da lui conseguiti nella teoria della base per la totalità delle curve tracciate sopra una qualsiasi superficie algebrica.

Un criterio aritmetico con cui vengono caratterizzate le corrispondenze a valenza è dato dal seguente altro teorema del Severi:

Se u *indica il numero dei punti uniti di una corrispondenza* T *di indici* (α, β) *e di grado* 2μ *sopra una curva del genere* p, *si ha la disuguaglianza*

$$(u-\alpha-\beta)^2 \leqslant 4p(\alpha\beta-\mu)$$

il segno $=$ *valendo quando e solo quando la corrispondenza* T *è a valenza.*

Fra i contributi portati dal Severi nella teoria delle corrispondenze va pure segnalato il teorema affermando l'invarianza della relazione di equivalenza fra gruppi di punti di fronte a trasformazioni algebriche di indici qualunque, e l'interpretazione funzionale della formula di Zeuthen, che in casi particolari era stata assegnata da altri geometri (Painlevé, Castelnuovo, Humbert). Per una esposizione completa ed armonica delle ricerche sue e di altri sull'argomento, con complementi notevoli e copiose notizie bibliografiche, vedesi il secondo *Trattato di Geometria algebrica* del Severi (Bologna, Zanichelli).

Delle corrispondenze a valenza può darsi la seguente interpretazione topologica (Rosati ([10])): *Se* T *è una corrispondenza a valenza* γ *della curva* C, *sulla Riemanniana immagine di* C *un qualsiasi ciclo* σ *ha per omologo nella* T *il ciclo* $-\gamma\sigma$. Nel caso particolare di una corrispondenza a valenza zero fra curve distinte o sovrapposte, si ottiene il risultato che le serie algebriche costituite da gruppi equivalenti sono (secondo una felice espressione del Chisini) tutte e sole quelle *a circolazione nulla.* Questo, che esprime il contenuto topologico del teorema d'Abel, fu da me segnalato incidentalmente come conseguenza immediata dell'espressione analitica del teorema stesso. Più tardi e indipendentemente il Chisini ([4]), ([5]) ne ha dato una notevole dimostrazione diretta. Con pure considerazioni topologiche egli è riuscito inoltre a stabilire la formula di Cayley-Brill-Hurwitz e il principio generale di corrispondenza, che pertanto viene ad assumere una portata più vasta, risultando applicabile anche a corrispondenze non algebriche.

Altra importante ricerca sulla teoria delle corrispondenze nel campo dell'*Analysus situs* è stata compiuta recentemente da LEFSCHETZ ([8]). Egli considera la riemanniana R_4 relativa alla superficie delle coppie di punti di due curve C, C' distinte e sovrapposte. Una corrispondenza fra C e C' viene rappresentata in R_4 da un ciclo Γ a due dimensioni, e si ha il fatto notevole che gli indici della corrispondenza e i suoi interi caratteristici sono i coefficienti della combinazione lineare con cui Γ si esprime mediante i cicli di un sistema fondamentale. Di qui il Lefschetz deduce i risultati di Hurwitz e di Severi, dando una nuova conferma del potente ausilio che l'Analysis situs può portare anche nel campo della Geometria algebrica.

2. - Corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche.

Se due corrispondenze T, T^{-1}, l'una inversa dell'altra, sono dipendenti, deve essere o $T \equiv T^{-1}$, ovvero $T \equiv -T^{-1}$, cioè le corrispondenze stesse sono o *equivalenti* o *residue*. Le corrispondenze soddisfacenti alla 1ª condizione diconsi *simmetriche*, quelle soddisfacenti alla 2ª *emisimmetriche*. La matrice caratteristica di T, quando sia moltiplicata per quella fondamentale relativa alle retrosezioni, dà luogo, nei due casi, rispettivamente ad una matrice emisimmetrica e simmetrica. Un criterio aritmetico per caratterizzare i due tipi di corrispondenze, è dato dal seguente teorema:

Se u *indica il numero dei punti uniti e* d *il numero delle coppie involutorie di una corrispondenza* T *di indici* (α, β) *e grado virtuale* ν, *si hanno le disuguaglianze*

$$(\alpha-\beta)^2+\nu \leqslant u+2d \leqslant (\alpha+\beta)^2-\nu,$$

valendo i segni di uguaglianza quando e solo quando la T *è rispettivamente simmetrica ed emisimmetrica.*

Indicando con μ il numero base per la totalità delle corrispondenze della curva C e con μ_1, μ_2 i numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti appartenenti a C, si ha $\mu=\mu_1+\mu_2$, cioè il numero base μ risulta la somma dei due numeri base μ_1, μ_2 relativi alle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche.

La nozione di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche e le precedenti proprietà che ad esse si riferiscono sono dovute a Rosati ([10]).

3. - Generalizzazione del concetto di valenza.

Il concetto di valenza può essere notevolmente esteso (Rosati ([12]), ([13])). Data una corrispondenza T, un numero γ (reale o complesso) tale che la funzione lineare di T, $T+\gamma I$, (I rappresentando l'identità) sia di livello costante per un sistema lineare di integrali di 1ª specie Σ, dicesi *valenza* di T associata al sistema Σ. Ogni corrispondenza T possiede un certo numero di valenze $\gamma_1\ \gamma_2 \ldots\ \gamma_r$ associate ai sistemi $\Sigma_1\ \Sigma_2 \ldots\ \Sigma_r$. Tali sistemi sono indipendenti, ma possono essere congiunti o dal sistema ∞^{p-1} degli integrali della curva o da un sistema subordinato. Nel 1° caso la T si dice *regolare*, nel 2° irregolare. Le corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche sono tutte regolari. Le valenze di una corrispondenza T sono interi algebrici e coincidono coi moltiplicatori della moltiplicazione complessa associata a T. Se una valenza (parziale) di T è un intero razionale, il sistema d'integrali ad essa associato è un sistema regolare riducibile e inversamente. Un'involuzione razionale T dell'ordine n sopra un curva del genere $p>1$ possiede le due valenze 0, $-n$; pertanto la T individua due sistemi regolari riducibili complementari, rispetto ai quali la T e la $T-nI$ sono di livello costante. Il primo a considerare corrispondenze *plurivalenti* è stato il Severi.

Nella Memoria sopra citata dei Math. Annalen (1913) egli giunge infatti al seguente notevole risultato: *Quando la varietà di Picard* V *annessa ad una superficie* F *è a moduli generali, sulla curva generica* C *di un sistema lineare di* F, *semplice almeno* ∞^3, *non esistono che corrispondenze a valenza semplice o doppia.*

4. - Equazione caratteristica, equazione delle valenze, equazione minima di una corrispondenza.

Sia Ω la matrice caratteristica della corrispondenza T; l'equazione di grado $2p$ a coefficienti interi

$$\Omega(\varrho) = |\Omega - \varrho I| = 0,$$

in cui I indica la matrice identica, prende il nome di *equazione caratteristica* di T. Due corrispondenze T, T^{-1}, l'una inversa dell'altra, hanno la stessa equazione caratteristica.

Se π indica la matrice di 2ª specie associata a T, l'equazione di grado p

$$\pi(\varrho) = |\pi + \varrho I| = 0 \tag{I}$$

ammette per radice le valenze di T, e dicesi *equazione delle valenze* di T. Indicando con

$$\pi'(\varrho) = |\pi' + \varrho I| = 0 \tag{II}$$

l'equazione delle valenze di T^{-1}, si ha identicamente

$$\Omega(\varrho) = \pi(-\varrho)\pi'(-\varrho);$$

inoltre l'equazione (II) ha per radice le immaginarie coniugate di quelle della (I). Si ha dunque la proprietà: *Due corrispondenze* T, T^{-1} *l'una inversa dell'altra hanno valenze immaginarie coniugate.* Di più una valenza γ_i di T e la immaginaria coniugata $\bar{\gamma}_i$ di T^{-1} sono associate a sistemi lineari $\Sigma_i \Sigma_i'$ di integrali di 1ª specie della stessa dimensione, ma generalmente distinti. Dal che segue intanto che T e T^{-1} sono entrambe regolari o irregolari. Nel caso che si abbia $\Sigma_i = \Sigma_i'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ le corrispondenze T, T^{-1} diconsi *a valenze sovrapposte. Due corrispondenze* T, T^{-1} *a valenze sovrapposte sono necessariamente regolari, e l'una è funzione razionale dell'altra. Inversamente, se* T *è funzione razionale di* T^{-1}, T *e* T^{-1} *sono a valenze sovrapposte.*

Le valenze di una corrispondenza simmetrica sono reali e l'equazione delle valenze è a coefficienti interi; le valenze di una corrispondenza emisimmetrica sono numeri immaginari puri.

Le proprietà sopra enunciate devonsi a Rosati ([12]), ([13]), ([14]).

All'equazione delle valenze si collega un risultato importante dovuto a Castelnuovo ([3]). È noto che, data fra due curve C, C' (distinte o sovrapposte) una corrispondenza (α, β) e dette T, T^{-1} le due operazioni ad essa relative, la TT^{-1} è una corrispondenza simmetrica della curva C le cui valenze sono tutte nega-

tive (ad eccezione di una eventualmente nulla) (Rosati ([14])). L'equazione delle valenze di TT^{-1} avrà pertanto tutti i coefficienti positivi. Il risultato di Castelnuovo cui sopra abbiamo alluso consiste in ciò che *tali coefficienti sono gli invarianti* $Z_1\ Z_2 \ldots$ *di Comessatti relativi alla serie* γ_α' *indotta sulla curva* C *dalla corrispondenza data.* Con la considerazione di tali invarianti, il Comessatti ([6]) è riuscito ad estendere dal punto di vista trascendente il classico criterio di Castelnuovo ([1]) che caratterizza le serie algebriche costituite da gruppi equivalenti. Poichè la corrispondenza $T^{-1}T$ della curva C' ha le stesse valenze della TT^{-1}, segue che *la serie* γ_β' *indotta su* C' *dalla corrispondenza data ha gli stessi invarianti* $Z_1\ Z_2 \ldots$ *della serie* γ_α' (Rosati ([14])).

L'espressione di tali invarianti in funzione di altri caratteri numerativi delle dette serie conduce a delle relazioni che possono considerarsi come naturali estensioni della formula Zeuthen (Rosati ([15])).

Sia $\psi(T)$ la funzione razionale intera di T del minimo grado la quale dia luogo a una corrispondenza a valenza zero, cioè tale che sia $\psi(T) \equiv 0$. Se $F(T)$ è un'altra funzione razionale di T tale che si abbia pure $F(T) \equiv 0$, il polinomio $F(\varrho)$ deve essere divisibile per $\psi(\varrho)$. L'equazione $\psi(\varrho) = 0$ a coefficienti interi col primo di essi uguale all'unità, dicesi *equazione minima* della T. Le sue radici sono tutte e sole quelle dell'equazione caratteristica, e sono tutte semplici o no secondochè la T è regolare o irregolare. Due corrispondenze T, T^{-1}, l'una inversa dell'altra hanno la stessa equazione minima.

La nozione di equazione minima di una corrispondenza devesi a Rosati (12).

5. - Corrispondenze speciali. Integrali abeliani riducibili.

Una corrispondenza T che abbia una *parziale* valenza nulla dicesi *speciale.* Ad una corrispondenza speciale sono associati due sistemi regolari riducibili: l'uno ∞^{q-1} $(o < q < p)$ per cui la T è di livello costante, l'altro ∞^{p-q-1} generato dalle somme abeliane nel gruppo omologo per la T di un punto variabile (Rosati ([11])). La considerazione delle corrispondenze speciali permette di allacciare la teoria dei sistemi regolari di integrali abeliani riducibili a quella delle corrispondenze. Basterà accennare al modo come, in quest'ordine d'idee, può introdursi il concetto fondamentale (dovuto a Scorza ([18])) di *coefficente di immersione* di un sistema regolare.

Come ad una corrispondenza speciale sono associati due sistemi regolari riducibili, così ad un tal sistema A sono associate due *reti* di corrispondenze speciali: l'una (*di* 1^a *specie*) costituita dalle corrispondenze T le cui somme abeliane appartengono ad A, l'altra (*di* 2^a *specie*) costituita dalle corrispondenze T_1 che sono di livello costante per gli integrali di A. Se l, m sono i numeri delle corrispendenze indipendenti contenute nelle due reti, e μ è il numero base per le corrispondenze di C, si ha $l + m = \mu$. Supposto che le due reti abbiano comune un numero $\lambda > 0$ di corrispondenze indipendenti, il sistema A appartiene a una

infinità discontinua di sistemi analoghi, e il minimo continuo reale che la contiene ha la dimensione λ. Quando $\lambda=0$, il sistema A non ne ammette altri analoghi infinitamente vicini: è un sistema *isolato*. Il numero λ è il coefficente di immersione del sistema A (Rosati ([16])).

L'applicazione di metodi geometrici allo studio degli integrali riducibili, iniziata da Severi ([24]), è stata proseguita in lavori di Scorza ([18]), ([19]) (al quale specialmente spetta l'attuale semplice assetto della teoria) e di Rosati ([16]).

6. - Gli ordini di corrispondenze.

Sia T una corrispondenza regolare ed n sia il grado della sua equazione minima. L'insieme delle corrispondenze funzioni razionali di T, cioè delle corrispondenze S tali che $lS=f(T)$ è una rete di specie n. Le corrispondenze di questa rete sono a due a due permutabili e si riproducono, oltre che per addizione e sottrazione, anche per moltiplicazione; in essa sono poi contenute le corrispondenze a valenza. A questa rete si dà il nome di *ordine* e si indica con $o(T)$; la corrispondenza T dicesi *generatrice* dell'ordine e n il suo *grado*. L'ordine $o(T)$ si dice poi *riducibile* o *irriducibile* secondochè è riducibile o irriducibile l'equazione minima di T, ovvero secondochè in $o(T)$ esistono o no corrispondenze speciali. Per gli ordini di corrispondenze si hanno le proprietà:

a) *Se l'ordine* o(T) *è irriducibile, ogni ordine* o(S) *contenuto in* o(T) *è pure irriducibile ed ha per grado un divisore di quello di* o(T).

b) *Le corrispondenze comuni a due ordini costituiscono un ordine.*

c) *Le corrispondenze simmetriche contenute in un ordine costituiscono un ordine.*

La nozione di ordine e le proprietà ora enunciate sono dovute a Rosati ([14]).

7. - Corrispondenze permutabili.

Due corrispondenze T, U tali che i prodotti TU, UT differiscono per una corrispondenza a valenza zero diconsi *permutabili*. Sulle corrispondenze permutabili si ha il seguente teorema (Rosati ([17])):

Un insieme H *di un numero finito o infinito di corrispondenze regolari a due a due permutabili è contenuto in un ordine* o(T), *generato da una corrispondenza* T *combinazione lineare di corrispondenze dell'insieme* H.

Da questo può dedursi una conseguenza notevole.

Si osservi anzitutto che se S_1, S_2 sono due corrispondenze simmetriche, posto $T=S_1S_2$, si avrà $T^{-1}\equiv S_2S_1$; onde perchè sia $T\equiv T^{-1}$, cioè perchè il prodotto S_1 S_2 sia ancora una corrispondenza simmetrica, occorre e basta che S_1 ed S_2 siano permutabili. Dunque se le corrispondenze simmetriche della curva C sono a due a due permutabili, esse formano gruppo; e viceversa, se

formano gruppo, tale gruppo è necessariamente abeliano. Ma si può inoltre provare che:

Se le corrispondenze simmetriche della curva C *formano gruppo, il gruppo stesso è anche un ordine.*

Invero la rete Σ delle corrispondenze simmetriche soddisfa allora alle ipotesi del teorema sopra enunciato. Pertanto esisterà in Σ una corrispondenza S tale che l'ordine $o(S)$ contiene Σ; ma poichè ogni funzione razionale di una corrispondenza simmetrica è ancora simmetrica, l'ordine $o(S)$ dovrà esser contenuto in Σ, onde si avrà $o(S)=\Sigma$.

Notiamo incidentalmente la seguente proprietà riguardante le involuzioni irrazionali (Rosati ([17])):

Data sopra una curva C *di genere* >1 *una involuzione irrazionale* T, *il numero delle corrispondenze indipendenti di* C *permutabile con* T *è* $\mu-2\lambda$, *essendo* μ *il numero base e* λ *il coefficiente d'immersione dei sistemi regolari riducibili definiti dalla* T.

Dal che segue che:

I sistemi regolari riducibili associati a una involuzione irrazionale T *sono isolati quando e solo quando* T *è permutabile con ogni corrispondenza della curva.*

8. - Le corrispondenze permutabili con le loro inverse. Gli ordini coincidenti coi loro inversi.

Lo studio di una corrispondenza (m, n) fra due curve C, C', distinte e sovrapposte di cui T, T^{-1} indicano le operazioni ad essa relative, è intimamente legato a quello di due altre corrispondenze: la TT^{-1} della curva C e la $T^{-1}T$ della curva C'. Esse diconsi le corrispondenze *laterali* della data. Se questa è a valenza zero, è chiaro che anche le sue laterali sono a valenza zero; ma si verifica anche inversamente che se una (e quindi anche l'altra) delle corrispondenze laterali è a valenza zero, anche la corrispondenza data gode della stessa proprietà. Questa proposizione che adempie ad un ufficio esenziale in talune questioni fondamentali di Geometria sopra una superficie, è dovuto a Severi ([21]) e fu da lui dimostrato con l'uso degli integrali abeliani. Il desiderio di ritrovare questo teorema per una via più conforme alla sua natura algebrica condusse il Castelnuovo a stabilire il suo criterio di equivalenza dal quale il teorema stesso deducesi come corollario.

Nella ipotesi che C, C' siano sovrapposte, possiamo più in generale domandarci quando avviene che le corrispondenze laterali sono dipendenti. Si ha, a questo proposito, il teorema (Rosati ([17])):

Se i prodotti TT^{-1}, $T^{-1}T$ *di due corrispondenze l'una inversa dell'altra sono dipendenti, deve essere* $TT^{-1}\equiv T^{-1}T$ *e le due corrispondenze* T, T^{-1} *sono regolari e funzioni razionali l'una dell'altra.*

Di qui, tenendo conto di una proprietà enunciata al n. 4, si trae il corollario:

Due corrispondenze T, T^{-1} *sono a valenza sovrapposte quando e solo quando le corrispondenze stesse sono permutabili.*

Un caso importante di corrispondenze permutabili con le loro inverse è dato dalle corrispondenze *hermitiane.* Una corrispondenza T tale che sia $TT^{-1} \equiv kI$ con k necessariamente intero positivo (n. 4) dicesi *hermitiana di ordine* k. *Sulle curve di genere* $p>1$ *le corrispondenze hermitiane di un dato ordine* k *sono in numero finito,* non riguardando come distinte due corrispondenze associate alla stessa matrice caratteristica, cioè appartenente alla medesima *classe.* Una corrispondenza biunivoca è hermitiana del 1° ordine; inversamente *se* T *è una corrispondenza hermitiana del 1° ordine, in una delle classi* $\pm$T, *o in entrambe quando la curva è iperellittica, è contenuta una corrispondenza biunivoca* (Rosati ([14])). La proprietà sopra enunciata quò dunque riguardarsi come una estensione del notissimo teorema di Schwarz-Klein.

Una generalizzazione, in altro senso, del teorema di Schwarz, conseguito con la rappresentazione trascendente di Hurwitz, è dovuta a Castelnuovo ([2]), il quale assegna per il genere di una curva possedente una infinità continua di corrispondenze algebriche un limite superiore in funzione di uno degli indici delle medesime.

Da ciò che precede deducesi che l'ipotesi della permutabilità delle corrispondenze T, T^{-1} equivale all'altra che i due ordini $o(T)$, $o(T^{-1})$ sono coincidenti. Gli ordini coincidenti coi loro inversi posseggono, riguardo ai numeri di corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti in essi contenuti, la seguente proprietà (Rosati ([17])):

Se l'equazione $\psi(z)=0$ *di una corrispondenza* T *permutabile con la sua inversa possiede* r *radici reali ed* s *coppie di radici complesse coniugate, l'ordine* o(T) *da essa generato congiunge una rete di specie* $\nu_1 = r+s$ *di corrispondenze simmetriche con una rete di specie* $\nu_2 = s$ *di corrispondenze emisimmetriche. Se l'equazione stessa è irriducibile, deve essere* $s=0$, *ovvero* $r=0$, *cioè l'ordine* o(T) *o è tutto di corrispondenze simmetriehe, o in esso il numero delle corrispondenze simmetriche indipendenti uguaglia quello delle emisimmetriche; e nei due casi, i numeri* r *ed* s *sono divisori del genere* p.

9. - Le curve su cui il gruppo delle corrispondenze soddisfa ad alcune condizioni di permutabilità.

Le proprietà sopra esposte possono applicarsi a studiare la natura del gruppo G costituito dalla totalità delle corrispondenze della curva C, ammesso che soddisfi ad alcune condizioni di permutabilità (Rosati ([17])). Supponiamo C priva di sistemi riducibili, e vediamo le conseguenze interessanti che si traggono da ciascuna delle 3 ipotesi:

1ª) *Il gruppo* G *sia permutabile*;

2ª) *Nel gruppo* G *ogni corrispondenza sia permutabile con la sua inversa*;

3ª) *Nel gruppo* G *sia permutabile il sottogruppo* H *costituito dalle corrispondenze a matrici unimodulari.*

1ª IPOTESI

All'intero gruppo G è ora applicabile il 1° teorema del n. 7, onde si trae che le corrispondenze di C costituiscono un ordine $o(T)$, *cioè sono tutte funzioni razionali di un'unica corrispondenza* T. E poichè C è supposta priva di sistemi riducibili, dall'ultimo teorema del numero precedente deducesi che l'equazione minima di T, $\psi(z)=0$, ammette radici o tutte reali o tutte complesse; e che, indicando ν il numero delle radici reali o delle coppie di radici complesse coniugate di detta equazione, *per i numeri base* μ_1, μ_2 *si hanno nei due casi rispettivamente i valori*:

$$\mu_1=\nu,\ \mu_2=0;\quad \mu_1=\nu,\ \mu_2=\nu$$

e ν *è un divisore del genere* p.

Nel caso in esame può anche determinarsi la natura del gruppo Γ costituito dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà di Iacobi V_p inerente a C.

Si indichino infatti con $\theta_1\ \theta_2 \ldots$ le radici dell'equazione $\psi(z)=0$ e sia $U\equiv f(T)$ la corrispondenza generica del gruppo G. Il numero $f(\theta_1)$ è un intero algebrico del corpo $\{\theta_1\}$, e, al variare di U entro G, descrive un *ordine* o_1. Il gruppo G risulta pertanto oloedricamente isomorfo all'ordine di numeri o_1; e in tale isomorfismo al sottogruppo H di G costituito dalle corrispondenze a matrici unimodulari risponde il sottogruppo costituito dalle unità di o_1. Invocando allora il teorema di Dirichlet sulle unità degli ordini di un corpo algebrico, si giunge al risultato:

Se il gruppo G *delle corrispondenze di una curva* C, *priva di sistemi riducibili, è permutabile, sulla varietà di Iacobi* V_p *inerente a* C *le schiere di trasformazioni birazionali in sè formano un gruppo discontinuo abeliano e sono date ciascuna una sola volta dalla formula*

$$\Gamma=\Gamma_0^r\Gamma_1^{n_1}\Gamma_2^{n_2}\ldots\Gamma_{\nu-1}^{n_{\nu-1}}$$

nella quale Γ_0 *indica una schiera generante un sottogruppo ciclico di ordine pari* 2k, $\Gamma_1\Gamma_2\ldots\Gamma_{\nu-1}$ *un sistema fondamentale di schiere aperiodiche, il numero* r *percorrendo i valori interi da* 1 *a* 2k *e gli esponenti* $n_1 n_2 \ldots n_{\nu-1}$ *i valori interi da* $-\infty$ *a* $+\infty$. *Il numero* ν *è un divisore di* p *ed è uguale al numero base per le corrispondenze della curva* C, *o è la metà di questo numero.*

OSSERVAZIONE. - Le schiere $\Gamma_0\Gamma_0^2\ldots\Gamma_0^{2k}$ formanti un sottogruppo ciclico del

gruppo Γ sono associate alle *unità ridotte* dell'ordine o_1. Nel 1° dei casi sopra considerati, ($\mu_1=\nu$, $\mu_2=0$), gli ordini $o_1 o_2$.... sono tutti reali e in essi esistono le sole unità ridotte ± 1. Il sottogruppo suddetto è allora del 2° ordine e costituito dalle due schiere di trasformazioni ordinarie di 1ª e di 2ª specie. Il caso $k>1$ può dunque presentarsi quando è $\mu_1=\mu_2=\nu$. In generale, *l'esistenza di tali unità ridotte porta all'esistenza di un gruppo ciclico di trasformazioni birazionali in sè della curva* C. *Tale gruppo è dell'ordine* 2k *o dell'ordine* k *secondochè* C *è o non è iperellittica.*

2ª IPOTESI

L'analisi del gruppo G conduce in questo caso al risultato:

Perchè sulla curva C *ogni corrispondenza sia permutabile con la sua inversa occorre e basta che le corrispondenze simmetriche di* C *costituiscano un ordine* o(S), *cioè che esista su* C *una corrispondenza simmetrica di cui tutte le corrispondenze simmetriche sono funzioni razionali.*

Se ν è il grado dell'equazione minima $\psi(z)=0$ della corrispondenza S generatrice dell'ordine, i numeri base della curva non possono presentare che le alternative:

$$\mu_1=\nu,\ \mu_2=0;\quad \mu_1=\nu,\ \mu_2=\nu;\quad \mu_1=\nu,\ \mu_2=3\nu.$$

Nel 1° e nel 2° caso l'intero gruppo G è un ordine e le corrispondenze di C sono tutte a due a due permutabili. Nel 3° caso, che può presentarsi solo quando il genere p è un numero pari $\geqslant 4$, le corrispondenze di C si distribuiscono in infiniti ordini congiungenti l'ordine $o(S)$ delle corrispondenze simmetriche con una rete variabile di specie ν di corrispondenze emisimmetriche. Se dunque esistono curve prive di sistemi riducibili su cui ogni corrispondenza è permutabile con la inversa senza che le corrispondenze siano tutte e due permutabili, tali curve devono presentare la 3ª alternativa, ed essere intanto di genere pari $\geqslant 4$.

3ª IPOTESI

Essa equivale all'altra che il gruppo Γ costituito dalle schiere di trasformazioni birazionali in sè della varietà di Iacobi V_p inerente a C sia abeliano.

All'insieme H è applicabile il 1° teorema del n. 7, onde si deduce che H appartiene a un ordine irriducibile $o(T)$ coincidente con l'inverso, e il gruppo Γ risulta oloedricamente isomorfo al gruppo delle unità di uno degli ordini coniugati di numeri associati ad $o(T)$. Pertanto Γ possiede una base finita e la sua struttura, dipendente dall'equazione minima di T, è quella stessa descritta nella 1ª ipotesi. Di più si verifica il fatto notevole che ogni corrispondenza simmetrica di C è contenuta in $o(T)$, e quindi le corrispondenze simmetriche di C costituiscono un ordine $o(S)$. Le curve per cui sia verificata la 3ª ipotesi sod-

disfano dunque anche alla 2ª, che pertanto risulta la meno restrittiva delle 3 considerate. Per i numeri base non potranno aversi che le 3 alternative precedenti, e si potrà pure concludere che una curva C per cui sia abeliano il gruppo Γ delle schiere di trasformazioni birazionali in sè della relativa varietà di Iacobi V_p, senza che sia abeliano l'intero gruppo G delle corrispondenze, deve trovarsi nelle condizioni della 3ª alternativa, ed essere intanto di genere pari $\geqslant 4$.

BIBLIOGRAFIA

1. CASTELNUOVO — *Sulle serie algebriche di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Vol XV, 1906).
2. — — *Sulle curve che posseggono una infinità continua di corrispondenze algebriche.* (Scritti matematici offerti a Francesco D'Ovidio, Torino, Bocca, 1918).
3. — — *Sulle funzioni abeliane.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Note I, II, III, IV, Serie 5ª, Vol. XXX, 1921).
4. CHISINI — *Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico.* (Rendiconti dell'Istituto lombardo, Vol. LIV, 1921).
5. — — *Il general principio topologico di corrispondenza.* (Rendiconti dell'Istituto lombardo, Vol. LVII, 1924).
6. COMESSATTI — *Sulle serie algebriche semplicemente infinite di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica.* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, Tomo XXXVI, 1913).
7. HURWITZ — *Ueber algebraische Corrispondenzen und das verallgemeinerte Corrispondenzen-princip.* (Math. Annalen, Bd. 28, 1886).
8. LEFSCHETZ — *Correspondences between algebraic curves.* (Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 28, N. 3, 1927).
9. — — *A Theorem on Correspondences on Algebraic Curves.* (American Journal of Mathematics, Vol. L, N. 2, 1928).
10. ROSATI — *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Serie 5ª, Vol. XXII, 1913).
11. — — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, e in particolare, fra i punti di una curva di genere due.* (Annali di Matematica, Serie III, Tom. XXV, 1913).
12. — — *Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Acc. di Torino, Vol. LI, 1915-16).
13. — — *Sulle valenze delle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Acc. di Torino, Vol. LIII, 1917).
14. — — *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* (Annali di Matematica, Serie III, Tomo XXXI, 1921).
15. — — *Sopra certi invarianti aritmetici delle serie algebriche semplicemente infinite appartenenti ad una curva algebrica.* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLIX, 1925).
16. — — *Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle reti di corrispondenze ad essi associate.* (Annali di Matematica, Serie IV, Tomo III, 1925-26).
17. — — *Sulle corrispondenze permutabili appartenenti ad una curva algebrica, e sulle varietà di Iacobi a gruppo di moltiplicabilità abeliane.* (Annali di Matematica, Serie IV, Tomo VI; in corso di stampa).

18. SCORZA — *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, Tomo XLI, 1916).
19. — — *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann.* (Rendiconti del Circolo mat. di Palermo, Tomo XLV, 1921).
20. SEVERI — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie.* (Memorie della R. Acc. di Torino (2), Tom. 54, 1903).
21. — — *Il teorema d'Abel sulle superficie algebriche.* (Annali di Matematica, Serie III, Tom. XII, 1905).
22. — — *Sopra alcune proprietà aritmetiche delle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica.* (Atti della R. Acc. di Torino, Vol. 48, 1912-13).
23. — — *Le corrispondenze fra i punti di una curva variabile in un sistema lineare sopra una superficie algebrica.* (Math. Annalen, Bd. 74, 1913).
24. — — *Sugli integrali abeliani riducibili.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (5), Vol. XXIII, 1914).
25. — — *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva variabile sopra una superficie algebrica.* (Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, Serie 6ª, Vol. VI, 1927).
26. ZARISKI — *On a Theorem of Severi.* (American Journal of Mathematics, Vol. L, N. 1, 1928).

A. ROSENBLATT (Kraków - Polonia)

VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE E PIÙ DIMENSIONI

CAPITOLO I.

Ricerche generali sopra le proprietà algebriche delle varietà.

I fondamenti della teoria delle varietà algebriche di più di due dimensioni, si trovano negli stessi due lavori di NOETHER: *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde*, degli anni 1869 e 1874, nei quali per la prima volta furono esposti i concetti ed i teoremi fondamentali della teoria delle superficie algebriche. Queste ricerche sopra la superficie, riprese dai geometri francesi ed italiani e sviluppate con grande ingegno da questi ultimi, hanno condotto alla scoperta delle proprietà principali delle superficie algebriche e culminano nella classificazione di queste superficie dal punto di vista delle trasformazioni birazionali.

Non si può dire altrettanto delle varietà di più di due dimensioni. Qui anche si deve principalmente ai geometri italiani la scoperta di proprietà importantissime. Ma è lecito constatare che sebbene siano state trovate molte proprietà nascoste ed inattendibili, oltre quelle che sono generalizzazioni più o meno facili di quelle delle quali godono le superficie, tuttavia molto rimane ancora da fare. Appare una volta di più che nel passaggio di due a tre variabili indipendenti si scopra molto d'imprevisto.

1. - *Definizioni.*

Ricordiamo anzitutto le definizioni fondamentali della teoria delle varietà algebriche V. La definizione di una varietà comunemente adottata è quella di SEGRE [1] nella sua fondamentale *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito*, basato sulle ricerche dello KRONECKER esposte nella sua *Festschrift*. Si considera l'insieme dei punti le cui coordinate cartesiane soddisfano ad un sistema di un numero finito di equazioni algebriche nelle quali possono anche figurare razionalmente dei parametri.

La V è *riducibile* o *irriducibile* secondo che consiste da un numero finito più grande di uno di varietà algebriche rappresentabili ciascuna separatamente

---

[1] *Mehrdimensionale Raüme.* Enzyklopädie.

o no. Secondo KRONECKER (1) si può con operazioni razionali ottenere la rappresentazione staccata delle parti di dimensioni differenti di cui consta la V.

Una V_k, cioè una varietà di k dimensioni, può nello S_r essere sempre rappresentata come intersezione *completa* dal più $r+1$ *forme* o *ipersuperficie* algebriche M_{r-1}, cioè varietà rappresentabili con una sola equazione. Una V_{r-1} è sempre una forma. Si può p. es. considerare $r+1$ coni che projettano la V_k da $r+1$ S_{r-k-2} in posizione generica (2).

Ricordiamo ancora che l'intersezione V_t della V_k irriducibile nel S_r con un S_{r-k+t}, $t>0$ *generico*, è irriducibile. Per $t=0$ si ha un numero n dei punti comuni, *ordine* della V_k.

Una V_k^n (d'ordine n) è *normale* nel S_r se non è projezione di una V_k^n di uno spazio superiore. Il suo spazio d'appartenenza ha la dimensione $r \leqq n+k-1$ secondo VERONESE (3).

Il concetto di varietà algebrica è stato *generalizzato* in modi diversi, considerando come elementi, come ha fatto il SEGRE, s-ple di punti ordinate o no di spazi, o s-ple di punti di curve algebriche, o spazi e s-ple di spazi contenuti in spazi dati. Così il LEFSCHETZ (4) studia le varietà rappresentanti s-ple di punti di varietà. Queste varietà si rappresentano e studiano con varietà algebriche puntuali ordinarie.

2. - *Varietà algebriche contenute in una* V_k.

Il concetto fondamentale di *sistemi lineari* di curve sopra una superficie è stato esteso dal SEGRE alle V_k. Sistemi lineari *completi* di V_{k-1} sono chiamati da lui quelli che non sono contenuti in sistemi più ampi dello stesso ordine e *grado* (numero d'intersezioni variabili di k V_{k-1}), una V_{k-1} essendo contenuta in un *unico* sistema lineare completo.

I sistemi lineari sono a loro volta contenuti in sistemi *algebrici* o *continui* completi. Il sistema algebrico è *irriducibile* e unico come insieme di sistemi lineari, ma non sembra che sia chiarita la questione dell'unicità del sistema algebrico irriducibile considerato come insieme di V_{k-1}.

SEVERI (5) ha esteso alle V_k il concetto di *sistema lineare caratteristico* delle V_{k-2} segate sopra una V_{k-1} dalle V_{k-1} infinitamente vicine. Esso è in *generale* completo, ma *a fortiori* valgono qui i dubbi del SEVERI espressi nel caso delle superficie sopra la validità *senza eccezioni* di questo teorema di ENRIQUES.

---

(1) *Grundzüge*, etc.
(2) SEGRE, l. c.
(3) *Behandlung*, etc.
(4) *On certain numerical invariants*, etc.
(5) *Fondamenti per la geometria*, etc.

Poco sappiamo dalle *congruenze* algebriche di V_h, $1 \leqq h \leqq k-2$, cioè dei sistemi algebrici ∞^{k-h}, tali che per un punto passi un numero finito ν, *indice* di V_h.

3. - *Caratteri projettivi di una* V_k.

Importanti sono le ricerche del SEVERI [1] sopra i *caratteri* delle V_k che le caratterizzano projettivamente. Questi caratteri $(a_0, \ldots, a_k)$ sono gli *ordini* delle V_d luogo di punti contatto degli S_k tangenti soddisfacenti alla condizione $(a_0, \ldots, a_k)$ nel senso di SCHUBERT [2] (contenenti un S_0 nell'a_0, un S_1 nell'a_1 passante per a_0, ecc.), essendo

$$d = \sum_0^k a_i + \frac{1}{2} k(k+3) - r(k+1).$$

I caratteri più importanti sono le *classi* ϱ_i, $i = 1, \ldots, k$ cioè ordini della V_{k-i} di contatto degli S_k appoggiati ad un $S_{r-k+i-2}$ secondo un S_{i-1} ed i *ceti* introdotti per la prima volta dal SEVERI, ω_i, $i = 1, \ldots, k$, cioè gli ordini delle V_{k-i} appartenenti agli S_k appoggiati ad un S_{r-k-i}. $\omega_0 = \varrho_0$ è l'ordine della V_k.

SEVERI determina i caratteri della V comune a p V_i, $i = 1, \ldots, p$ ed i caratteri di una parte della V supposta spezzata e supposti noti i caratteri dell'altra.

Così le classi μ_i ed i ceti ν_s della V comune a due V_k, $V_{k'}$ di classi ϱ_i, $\varrho'_{i'}$ e di ceti ω_i, $\omega'_{i'}$ sono espresse dalle formole

$$\mu_i = \sum_{l=0}^{i} \varrho_l \varrho'_{i-l}, \qquad i = 0, \ldots \tag{1}$$

$$\nu_s = \sum_{l=0}^{s} \omega_l \omega'_{s-l} \qquad s = 0, \ldots \tag{2}$$

4. - *Moduli di forme algebriche. Teorema* $Af + B\varphi$ *di Noether.*

L'estensione del *teorema fondamentale* « $Af + B\varphi$ » di NOETHER alle V è stata data dal SEVERI [3] nel caso generale di h forme F_i, $i = 1, \ldots, h$ che si tagliano secondo una V_{r-h} priva di parti multiple. SEVERI dimostra:

1°) Le forme F passanti per la V_{r-h} costituiscono il modulo $(F_1, \ldots, F_h)$ nel senso di HILBERT [4], cioè sono combinazioni lineari delle F_i.

2°) La « *formola di postulazione* » della V_{r-h}, cioè l'espressione che dà il numero delle F d'ordine l assai alto passanti per la V_{r-h}, dunque nel nostro caso la « *funzione caratteristica* » di HILBERT che è per una V_d qualunque del tipo

$$v(l) = \sum_{i=0}^{d} k_i \binom{l+d-i}{d-i}, \tag{1}$$

---

(1) *Sulle intersezioni delle varietà algebriche,* etc.

(2) Cf. SEGRE: *Mehrdimensionalə Raüme.* Enzyklopädie.

(3) *Rappresentazione di una forma qualunque,* etc.

(4) *Über die Theorie,* etc.

le k_i essendo indipendenti da l, è nel nostro caso *per tutti i valori di l* della forma seguente

$$(2) \qquad v(l)=\binom{l+r}{r}-\sum\binom{l-n_i+r}{r}+\ldots.+(-1)^h\binom{l-n_1-\ldots.-n_h+r}{r},$$

le sommazioni essendo estese alle combinazioni degli F_i di ordini n_i, e con le convenzioni seguenti

$$\binom{l-n_1-\ldots.-n_k+r}{r}=0, \qquad \text{se } l-n_1-\ldots.-n_k<0,$$

e

$$v(l)=\binom{l+r}{r}$$

se non esistono le F.

Estensioni ai casi di punti multipli sono state date da KÖNIG [1], SEVERI [2] e TORELLI [3].

A SEVERI [4] sono dovute due formole importanti:

la formola

$$(3) \qquad v(l+q)=v(l)+\omega(l+q)$$

che dà il legame fra le formole di postulazione $v(l)$ di una V_d e $\omega(l)$ della V_{d-1} intersezione della V_d con una forma F d'ordine q,

e la formola

$$(4) \qquad v(l)+v'(l)=x(l)+y(l),$$

$x(l)$, $y(l)$ essendo le formule di postulazione della *intersezione* X_{d-1} e dell'*insieme* Y di due V_d, $V_{d'}$, $d\leqq d'$.

5. - *Trasformazioni birazionali delle varietà.*

L'effetto delle trasformazioni birazionali sopra le V, e particolarmente sopra le V_3 è già stato studiato dal NOETHER.

Trasformando la forma F_3 del S_4

$$(1) \qquad f(x_0,\ldots., x_4)=0$$

colla trasformazione

$$(2) \qquad \varrho x_i=\varphi_i(y_0,\ldots., y_4)$$

nella forma Φ_3 egli studia le *curve* e *superficie* razionali *eccezionali* che corrispondono ai punti semplici di F_3, le superficie *eccezionali* contenenti fasci di curve razionali corrispondenti alle curve semplici nelle quali le φ si annullano, e le curve e superficie corrispondenti ai punti multipli ed alle curve multiple.

Manca sempre uno studio accurato delle trasformazioni birazionali analogo a quello compiuto da CASTELNUOVO e da ENRIQUES per le superficie, e che risolverebbe la questione della possibilità di far sparire gli enti eccezionali sopra la V.

---

(1) *Einleitung,* etc.

(2) *Su alcune proprietà dei moduli,* etc.

(3) *Sopra certe estensioni,* etc., e *Sulla postulazione,* etc.

(4) *Fondamenti per la geometria,* etc.

6. - *Varietà aggiunte. Varietà canoniche.*

Le *forme aggiunte* appartenenti nel S_r ad una forma M^n_{r-1} sono state introdotte *algebricamente* neanche per via *trascendente* nella teoria degli integrali $r-1$-pli sopra la forma del NOETHER. Esse sono definite da lui come passanti $\mu-r+h+1$ volte per ogni V_h μ-plo per la M_{r-1}. Le forme d'ordine $n-r-1$ segano come mostra il NOETHER un sistema invariante (canonico) completo.

Per le V_d nel S_r senza punti multipli che con una V' formano l'intersezione completa di $r-d$ forme di ordini n_i, le forme passanti per la V' sono state introdotte come *subaggiunte* dal SEVERI, che mostra che queste d'ordine $\sum n_i - r - 1$ segano il sistema canonico completo.

Invariatamente si definisce sopra la V_d per *ricorrenza* i sistemi lineari subaggiunti, aggiunti ai sistemi lineari e canonici seguendo la via mostrata dall'ENRIQUES per le superficie. Le V_2' subaggiunte ad un sistema di V_2 di una V_3 segano sopra una generica V_2 il sistema canonico. Vengono poi la definizione del sistema delle V_2' *aggiunte*, il teorema fondamentale per l'aggiunzione, e la definizione del sistema *canonico* $|K| = |V_2' - V_2|$ sopra la V_3. Per ricorrenza si perviene alle definizioni analoghe per le V_d con d arbitrario.

7. - *Generi, aritmetico e geometrico.*

Il *genere aritmetico* delle superficie è stato generalizzato in due modi diversi per le V_d dal SEVERI [1]. L'una prende le mosse dall'osservazione che la formola

$$p_d = (-1)^d \left(\sum_{i=0}^{d} k_i - 1 \right) \tag{1}$$

nella quale figurano i coefficienti k_i della formola di postulazione dà per $d=1$ e $d=2$ il genere della curva ed il genere aritmetico della superficie, e *definisce il genere aritmetico virtuale* con questa formola, chiamandolo *effettivo* se la V_d è irriducibile e priva di singolarità.

L'altra definizione si ottiene considerando nel S_{d+1} una forma M^n_d d'ordine n con singolarità *ordinarie*, cioè projezione d'una V_d senza singolarità. È cioè il *numero virtuale* P_a delle M^{n-d-2}_d d'ordine $n-d-2$ passanti per la V_{d-1} doppia della M_d

$$P_a = \binom{n-1}{d+1} - v(n-d-2), \tag{2}$$

$v(n-d-2)$ essendo la postulazione della V_{d-1} per le forme d'ordine $n-d-2$.

L'*uguaglianza* di questi due numeri interi è stata dimostrata rigorosamente nel caso $d=3$ (e per tutti i valori di d) dal SEVERI, *ammettendo* che ogni V dotata di punti multipli si possa considerare come limite di una V dello stesso spazio senza singolarità e dimostrando che p_d sia un *carattere numerativo*

---

[1] *Fondamenti per la geometria*, etc.

della V_d, cioè esprimibile mediante i caratteri projettivi dalle V_d e dalle sue varietà multiple. Una dimostrazione senza questa ammissione è poi stata data dall'ALBANESE (1).

Quanto al *genere geometrico* delle M_d esso è stato definito dallo NOETHER come numero *effettivo* delle M_d d'ordine $n-d-2$ passanti $\mu-d+h$ volte per le V_h μ-ple della M_d, come « Geschlecht », « Raumgeschlecht » nel caso $d=3$. NOETHER ha dimostrato l'invarianza birazionale di questo intero.

8. - *Altri invarianti.*

La considerazione del sistema *canonico* $|K|$ uguale per il teorema fondamentale alla differenza $|F'-F|$ tra un sistema lineare $|F|$ ed il suo aggiunto $|F'|$ permette di definire immediatamente gli invarianti *relativi*

$$\Omega_0,\ \Omega_1,\ldots.$$

che sono i *caratteri virtuali* di $|K|$: numero d'intersezione di d V_{d-1}, genere virtuale della curva comune a $d-1$ V_{d-1} etc., cioè i *generi virtuali aritmetici* di queste intersezioni. Introdotti dal NOETHER nel caso di $|K|$ effettivo, di $d=3$ e della V_3 priva di enti eccezionali essi sono stati studiati dal PANNELLI nel caso delle V_3 generali.

Di NOETHER sono le due relazioni per V_3

$$2\Omega_1-2=3\Omega_0 \tag{1}$$

e

$$2p=\Omega_0-\Omega_1+\Omega_2+4, \tag{2}$$

nella seconda p essendo il « Raumgeschlecht ». La seconda relazione solamente constatata dal NOETHER in tutti i casi da lui studiati, studiata poi generalmente dal PANNELLI (2) è stata chiarita completamente dal SEVERI (3) mostrando che p è il *genere aritmetico* (di cui le due definizioni sono equivalenti).

Il concetto fondamentale d'*irregolarità superficiale* di una V_3 è stato introdotto dal CASTELNUOVO e dall'ENRIQUES. Ella è l'irregolarità *costante* di una superficie F contenuta nel V_3 ed appartenente ad un sistema lineare almeno ∞^2 a curve caratteristiche irriducibili. L'irregolarità superficiale di una V_d è l'irregolarità superficiale *costante* delle V_3 sezioni iperpiane della V_d. L'irregolarità superficiale è uguale alla metà del numero dei *cicli lineari indipendenti* della V_d.

SEVERI ha esteso la *formola fondamentale* (2) al caso di una V_k qualunque

$$P_a+(-1)^{k-1}p_k=\Omega_0-\Omega_1+\ldots.+(-1)^{k-1}\Omega_{k-1}+k+(-1)^{k+1}, \tag{3}$$

---

(1) *Sul genere aritmetico,* etc.

(2) *Sopra gli invarianti,* etc.

(3) *Fondamenti per la geometria,* etc.

che *ammettendo* l'uguaglianza dei generi aritmetici P_a e p_k assume la forma

$$[1+(-1)^{k-1}]P_a=\Omega_0-\Omega_1+.... \tag{4}$$

SEVERI ha introdotto il concetto di *genere geometrico virtuale* di una superficie F sopra una V, appartenente ad un sistema lineare, che è la somma del genere aritmetico virtuale e di $\frac{q_2-1}{2}$, q_2 essendo la connessione lineare di superficie generica del sistema.

Egli introduce anche il concetto d'*irregolarità k-dimensionale*

$$q_1=P_g-P_a$$

di una V_k e più generalmente le irregolarità q_i, $i=1,...., k-1$ $k-i+1$ dimensionali delle V_{k-i+1} generiche della V_k, *ammettendo* per $k>3$ che l'irregolarità $k-1$ dimensionale della V_{k-1} contenute nella V_k non possa crescere oltre limite e sia la stessa per le V_{k-1} soddisfacenti a certe condizioni di generalità.

SEVERI ed ALBANESE provano l'invarianza *assoluta* del genere aritmetico P_a rispettivamente per $k=3$ e per $k=4$.

Un'altra serie di invarianti relativi Π_i, $i=0,...., k$ della V_k è dovuta al SEGRE [1], definiti mediante la considerazione di un fascio lineare di V_{k-1} con una V_{k-2} base e con δ V_{k-1} dotate di punti doppi colla formola di *ricorrenza*

$$\Pi_k=\delta-2\Pi_{k-1}-\Pi_{k-2} \tag{5}$$

per $k\geqq 3$, Π_1 essendo il doppio del genere della V_1 nel caso $k=3$, e Π_2 essendo l'invariante di ZEUTHEN-SEGRE.

Più generalmente si può considerare con PANNELLI [2] gli invarianti I_j, $j=0,...., k-1$ legati alle *varietà jacobiane* appartenenti ai sistemi lineari di dimensione $j+1$ di V_{k-1}, I_0 essendo legato al numero δ dai punti doppi di un fascio

$$I_0=\Pi_k, \tag{6}$$

I_1 essendo espresso per le V_3 dalla formola

$$I_1=g+P_0-9P_1-36P_a-(\pi-1)-28, \tag{7}$$

nella quale g è il genere della curva jacobiana della rete, P_0 il numero dei punti base, P_1 il genere della curva caratteristica, π il genere della curva base e P_2 il genere aritmetico di una V_2 etc.

Vale la relazione di PANNELLI

$$48P_a-54=2I_1-I_0. \tag{8}$$

---

[1] *Intorno ad un carattere,* etc.

[2] *Sopra un carattere,* etc.

L'invariante Π_k è legato agli indici di connessione R_i di BETTI della Riemanniana W_{2k} della V_k dalla notevole formola di ALEXANDER

$$R_k = \Pi_k + 2\sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{k-i+1} R_i + 2(-1)^k (k-1). \tag{9}$$

9. - *Teoremi di Castelnuovo-Enriques e di Riemann-Roch.*

CASTELNUOVO ed ENRIQUES provano il teorema fondamentale:

« Ogni sistema lineare $|V_{k-1}|$ appartiene ad un sistema continuo completo composto di $i \leqq q_2$ sistemi lineari (q_2 irregolarità superficiale) e sono sistemi pei quali è $i = q_2$ ».

Questo teorema ed i lemmi seguenti per le V_3:

1°) La deficienza δ_2 del sistema *caratteristico* del sistema lineare $|F|$ di superficie non supera q_2 e sono sistemi pei quali è $\delta_2 = q_2$,

2°) La deficienza δ_1 del sistema *canonico* di una F non supera la somma delle due irregolarità ed esistono superficie per le quali è $\delta_1 = q_1 + q_2$,

hanno permesso al SEVERI di estendere il teorema di RIEMANN-ROCH alle V_3 trovando per la dimensione ϱ del sistema $|F'|$ *aggiunto* ad un sistema $|F|$ generale, cioè almeno ∞^2, la disuguaglianza

$$\varrho \geqq p_a + P_a - 1, \tag{1}$$

introducendo i caratteri n', π', p_a' di F'

$$\varrho \geqq n' - \pi' + p_a' - P_a + 2. \tag{2}$$

Non si sa se vale sopra le V_3 il teorema di PICARD, cioè se il sistema F' è *regolare* vale a dire se si ha il segno dell'uguaglianza, ma certamente è regolare il sistema F' aggiunto ad un multiplo assai alto delle sezioni piane.

Generalizzando la formola (2) alle V_k, SEVERI suppone che pei sistemi $|F|$ lineari non speciali sopra una V_k vale la formola

$$\varrho \geqq n_0 - n_1 + \ldots \pm n_{k-1} \mp P_a + k \tag{3}$$

$n_0, \ldots, n_k$ essendo i caratteri virtuali del sistema $|F|$ e chiama *regolari* i sistemi pei quali vale l'*uguaglianza.* MARONI dimostra la formola di SEVERI per le V_k contenenti un fascio di genere p di spazi S_{k-1}.

10. - *Moduli delle* V_3.

Le nostre conoscenze degli invarianti numerici delle V_3 sono oggi insufficienti per poter tentare una classificazione di queste varietà e perciò non si può bene parlare del numero dei moduli di una *classe* di V_3. Applicando tuttavia il metodo dell'ENRIQUES al calcolo di questo numero, cioè studiando il sistema caratteristico

ammesso completo segato nello S_4 delle V_3 infinitamente vicine, ROSENBLATT [1] perviene alla formola

$$M=I_0-I_1+\Omega_2+4P_a-q_2-i+\delta-8+\Theta, \tag{1}$$

nella quale i è l'indice di specialità della serie g segata sopra la pinch-curve della superficie D doppia (curva di punti di contatto di due falde della D) dalle superficie $\overline{C}=4C+C'$, $|C|$ essendo regolare e $\Theta \geqq 0$.

11. - *Corrispondenze algebriche tra varietà algebriche.*

Esse sono state studiate dal compianto TAFANI [2]. In una corrispondenza $(1, n)$ tra due V_3, V_3^* di generi P_a, P_a' e di caratteri di SEGRE Π, Π' valgono le relazioni

$$48(P_a'-1)=48n(P_a-1)+24p_a-3\omega+3\varphi-2\tau+27, \tag{1}$$

e

$$\Pi'=n(\Pi-6)+J-(2p-2)+z+10, \tag{2}$$

nelle quali p_a, ω sono il genere aritmetico ed il carattere di CASTELNUOVO-ENRIQUES della superficie D di diramazione, φ il carattere d'immersione in D dell'intersezione con una superficie canonica, τ il numero d'intersezioni della curva tripla col sistema canonico, J il carattere di ZEUTHEN-SEGRE della D, p il genere della curva tripla di diramazione e z il numero dei punti di diramazione quadrupli.

CAPITOLO II.

Integrali sopra le varietà algebriche.

1. - *Integrali k-pli finiti sopra la V_k.*

Generalizzando il concetto d'integrale doppio dovunque finito nella teoria delle superficie introdotto da CLEBSCH, NOETHER introduce gli integrali k-pli finiti appartenenti alla forma V_k del S_{k+1} data omogeneamente

$$f(x_0,\ldots,x_{k+1})=0. \tag{1}$$

Esprimendo le x_i come funzioni algebriche di $k+1$ parametri $\lambda_0,\ldots,\lambda_{k-1}$, s, legati algebricamente, egli considera le espressioni

$$\omega=\int \frac{\Theta\cdot\sum c_0 x_1 \frac{\partial x_2}{\partial\lambda_0}\cdots\frac{\partial x_{k+1}}{\partial\lambda_{k-1}}}{\sum c_i\frac{\partial f}{\partial x_i}}\,d\lambda_0,\ldots,d\lambda_{k-1} \tag{2}$$

nelle quali c_i sono costanti arbitrarie e Θ un polinomio *aggiunto* alla V_k d'ordine $n-k-2$.

---

[1] *Sopra i moduli,* etc.

[2] *Sulle corrispondenze,* etc.

NOETHER dimostra l'invarianza assoluta degli integrandi. Il loro numero p è la « Geschlechtszahl » della varietà.

2. - *Integrali semplici.*

Gli integrali semplici totali o di PICARD sopra le superficie sono stati trasportati dallo stesso PICARD alle varietà generali, colla divisione in tre specie. Il numero di questi di prima specie è stato trovato dal CASTELNUOVO e dall'ENRIQUES uguale al mezzo dell'indice R_1 di connessione della Riemanniana W_{2k} appartenente alla V_k. Essi dimostrano che una sezione piana di $\geqq 2$ dimensioni della V_k e più generalmente una V_l generale di $l \geqq 2$ dimensioni hanno lo stesso R_1 della V_k, dunque lo stesso numero di integrali Picardiani di 1ª specie formati appunto dagli integrali della V_k.

3. - *Integrali doppi delle* V_3.

Gli integrali doppi di 1ª specie delle V_3 sono stati studiati dal SEVERI [1]. Essi hanno la forma

$$J = \int P_{12}dx_1dx_2 + P_{23}dx_2dx_3 + P_{31}dx_3dx_1 \tag{1}$$

$P_{ij} = P_{ji}$, la condizione d'integrabilità essendo

$$\frac{\partial P_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial P_{31}}{\partial x_2} = 0. \tag{2}$$

Il loro numero N non è superiore alla deficienza δ staccata sopra una sezione iperpiana dal sistema aggiunto

$$N \leqq \delta, \tag{3}$$

dunque vale la disuguaglianza del SEVERI

$$N \leqq q_1 + q_2 \tag{4}$$

che, secondo SEVERI, dovrebbe essere sostituita probabilmente dall'uguaglianza.

LEFSCHETZ ha esaminato gli integrali doppi di *seconda* specie della V_3, che sono definiti come staccanti integrali di seconda specie sopra una superficie qualunque.

Gli integrali della forma

$$J = \int \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\right) dydz + \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\right) dzdx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\right) dxdy \tag{5}$$

sono impropri, gli altri propri. Il numero ϱ_0 degli integrali propri è uguale a

$$\varrho_0 = R_2 - (\varrho - 2), \tag{6}$$

---

[1] *Fondamenti per la geometria,* etc.

R_2 essendo la connessione *superficiale* della V_3 e ϱ il *numero di base* della V_3, cioè il numero delle superficie algebricamente distinte.

4. - *Integrali finiti dei vari ranghi delle* V_d.

Gli integrali k-pli hanno la forma

$$J=\int \sum A_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1},\ldots, dx_{i_k} \tag{1}$$

la somma essendo estesa a tutte le combinazioni degli dx indipendenti, le A essendo razionali e soddisfacenti alle condizioni d'integrabilità

$$B_{i_1,\ldots,i_{k+1}}=\frac{\partial A_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_{i_{k+1}}}+(-1)^k\frac{\partial A_{i_2,\ldots,i_{k+1}}}{\partial x_{i_1}}+\ldots=0. \tag{2}$$

SEVERI [1] generalizzando il risultato suo per le V_3 prova l'inegalità

$$N\leqq\delta, \tag{3}$$

δ essendo la deficienza del sistema canonico d'una sezione iperpiana della V_d. SEVERI ottiene così la formola

$$N\leqq q_1+q_2, \tag{4}$$

q_1, q_2 essendo le irregolarità d dimensionale e $d-1$ dimensionale.

Ne segue che una varietà completamente regolare

$$q_1=\ldots=q_{d-1}=0$$

non possiede integrali $d-i$-pli, $i=1,\ldots, d-1$ di 1ª specie.

SEVERI suppone che vale l'estensione del teorema di CASTELNUOVO-ENRIQUES, cioè che il numero degli integrali finiti $d-i$-pli, $i=2,\ldots, d-2$, $d-2$ è uguale al numero degli integrali analoghi di una generica V_{d-i}, $d>3$.

Se i_k è il numero degli integrali k-pli di 1ª specie della V_d SEVERI suppone la formola

$$P_a=i_k-i_{k-1}+\ldots\pm i_1, \tag{5}$$

che è certamente vera, se il secondo membro è un carattere *numerativo*.

5. - *Integrali di seconda specie delle* V_d.

Questi integrali sono stati introdotti dal LEFSCHETZ. Alla forma

$$F(x_1,\ldots, x_d, t)=0 \tag{1}$$

appartengono gli integrali

$$J=\int \sum A_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1},\ldots, dx_{i_k} \tag{2}$$

---

[1] *Fondamenti per la geometria*, etc.

soddisfacenti alle condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial A_{i_1,\ldots,i_k}}{\partial x_{i_{k+1}}} + (-1)^k \frac{\partial A_{i_2,\ldots,i_{k+1}}}{\partial x_{i_1}} + \ldots = 0. \tag{3}$$

Essi sono *impropri* se le A sono della forma

$$A_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{\partial B_{i_1,\ldots,i_{k-1}}}{\partial x_{i_k}} + (-1)^{k-1} \frac{\partial B_{i_2,\ldots,i_k}}{\partial x_{i_1}} + \ldots \tag{4}$$

e di *seconda specie*, se per ogni ipersuperficie d'infinità della (1) si comportano come gli integrali impropri.

Contrariamente a ciò che ha luogo per gli integrali doppi, esistono integrali di seconda specie per $d \geqq 3$ con residui.

Gli integrali di seconda specie determinano sopra le sezioni iperpiane integrali di seconda specie.

Il loro numero ϱ_0 è uguale al numero massimo dei cicli k-pli non incontranti un gruppo arbitrario d'ipersuperficie.

Per $k=d$ un integrale d-plo è di seconda specie se si comporta nell'intorno delle ipersuperficie d'infinità come

$$\int \sum \frac{\partial U_i}{\partial x_i} dx_1,\ldots, dx_d,$$

le U_i essendo razionali.

6. - *Relazioni tra gli integrali semplici e multipli finiti.*

SEVERI [1] ha mostrato come generalizzando la relazione di PICARD per le superficie si possa formare integrali finiti h-pli della V_k partendo dagli integrali semplici. Coll'aiuto degli integrali

$$J_j = \int \sum_{i=1}^{k} A_{j_i} dx_i, \qquad j = 0,\ldots, r \tag{1}$$

$r+1$ essendo l'irregolarità superficiale della V_k egli forma gli integrali h-pli

$$J = \int \sum_{\lambda_1,\ldots,\lambda_h} \begin{vmatrix} A_{1\lambda_1,\ldots,} & A_{1\lambda_h} \\ A_{h\lambda_1,\ldots,} & A_{h\lambda_h} \end{vmatrix} dx_{\lambda_1},\ldots, dx_{\lambda_h} \tag{2}$$

$\lambda_1,\ldots, \lambda_h$ essendo una disposizione semplice degli $1,\ldots, k$.

Questo risultato è basato sopra il teorema seguente:

TEOREMA. « Una V_k d'irregolarità bidimensionale $r+1>0$ o contiene un sistema ∞^{k-i} d'indice 1 di varietà V_i d'irregolarità $r+1$, $1 \leqq i \leqq k-1$ oppure è la trasformata razionale d'una varietà Φ della stessa irregolarità appartenente alla varietà Picardiana W della V_k. La prima ha luogo per $r+1<k$ ».

---

[1] *Relazioni fra gli integrali*, etc.

COMESSATTI estendendo il teorema di DE FRANCHIS per le superficie, prova il seguente:

TEOREMA. « Se $l+1 \leqq k$ integrali semplici (1) sono funzionalmente dipendenti senza che lo siano l, la V_k possiede un sistema ∞^l d'indice 1 di V_{k-l} di livello per questi integrali, dunque d'irregolarità superficiale $\geqq l+1$ ».

CAPITOLO III.
Varietà algebriche particolari.

È certamente superfluo insistere sopra l'importanza dello studio delle classi particolari di varietà. Basta ricordarsi che la classificazione delle superficie algebriche può considerarsi come il risultato della sintesi di una lunga serie di ricerche sopra le superficie particolari. Già le prime ricerche sopra classi particolari di varietà hanno confermato questa tesi, perchè le ricerche del FANO e poi dell'ENRIQUES hanno messo in luce l'insufficienza per lo scopo della classificazione degli invarianti numerici noti, cioè dei generi e dei caratteri del sistema canonico.

1. - *Razionalità delle varietà. Varietà con tutti generi nulli.*

Uno dei risultati i più rimarchevoli è senza dubbio la scoperta del FANO [1] di due classi di V_3 birazionalmente distinte e non razionali, cioè non rappresentabili sopra lo S_3 con tutti i generi nulli, delle V_3^4 del S_4 e delle V_3^6 del S_5 intersezioni di una quadrica con una cubica V_4^3.

ENRIQUES [2] ha poi dimostrato la rappresentabilità della V_3^6 di FANO sopra un'*involuzione* (non razionale) dello S_3, risolvendo così la questione della razionalità o meno delle involuzioni negli spazi superiori. Un esempio più semplice è dovuto all'APRILE.

Ma come ha fatto vedere ENRIQUES, esistono V_3 contenenti congruenze razionali d'indice 1 di curve razionali, dunque con tutti i generi nulli non rappresentabili in generale nemmeno sopra involuzioni del S_3.

Estendendo il teorema di PICARD sopra le superficie con sezioni piane razionali, FANO ha provato la razionalità delle V_3 con sezioni piane uni- o bidimensionali razionali, eccettuate in quest'ultimo caso le V_3 senza singolarità del S_4, rappresentabili sopra involuzioni doppie del S_3.

Le V_3 più generali con sistemi lineari generali di superficie razionali hanno fatto l'oggetto di ricerche dell'ENRIQUES [3].

---

[1] *Sopra alcune varietà algebriche*, etc.

[2] *Sopra un'involuzione non razionale*, etc.

[3] *Intorno alla risoluzione razionale*, etc.

2. - *Varietà cubica del S_4.*

Le ricerche sopra le varietà cubiche del S_4 potrebbero essere l'oggetto di un rapporto speciale, per la loro numerosità ed importanza. SEGRE, ENRIQUES, FANO, SNYDER, BERZOLARI, si sono occupati di questo tema, senza aver potuto risolvere il problema *principale* della razionalità delle varietà. Nè le ricerche del FANO sopra le superficie contenute nella V_3^3, nè quelle dello SNYDER sopra le trasformazioni in sè, nè le altre ricerche hanno dato la risposta alla questione.

3. - *Varietà contenenti solamente intersezioni complete di forme.*

Tali sono secondo KLEIN [1] le quadriche dello S_r, $r \geqq 4$, secondo FANO [2] la varietà cubica V^3 del S_4 priva di punti multipli o contenente al più 5 punti doppi, e più generalmente secondo SEVERI [3] le forme degli spazi S_r, $r \geqq 4$ senza punti multipli.

Il caso generale delle V_k *intersezioni complete* di $r-k$ forme dello S_r, è studiato dal FANO [4] e dal LEFSCHETZ [5]. Secondo il primo *in generale* le V_k con $k>2$ e le V_2 non razionali contengono solamente intersezioni complete. Secondo il secondo il teorema vale per tutte le V_k $k>2$ intersezioni complete non singolari, ed in *generale* per le V_2 non singolari, intersezioni complete e normali, e d'ordine $n>3$ se r è $=3$.

Come altre varietà appartenenti a questa categoria si può citare: la V_d di GRASSMANN rappresentante gli spazi S_k del S_r nello spazio S_R, $R=\binom{r+1}{k+1}-1$ studiata dal SISAM e dal SEVERI; la V_k rappresentante le k-ple di punti ordinate o no dello spazio come fu osservato dal SEVERI e sviluppato dal BORDIGA, etc.

4. - *Varietà rappresentanti gruppi di punti, spazi di uno spazio o gruppi di spazi.*

Appartengono qui le ricerche di SEVERI [6] e GODEAUX [7] sopra le V_3 rappresentanti le coppie di punti di una curva C di genere $p>0$ e di una superficie F senza curve eccezionali. I valori degli invarianti P_g, P_a, q_2, Ω_0, Ω_1, Ω_2, I_0, I_1 sono stati calcolati e la formola

(1) $$I=q_1+q_2$$

per il numero I degli integrali doppi di 1ª specie verificata.

---

(1) *Über einen liniengeometrischen Satz.*

(2) *Sulle superficie algebriche,* etc.

(3) *Una proprietà delle forme algebriche,* etc.

(4) *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni,* etc.

(5) *On certain numerical invariants,* etc.

(6) *Fondamenti per la geometria,* etc.

(7) *Sur les variétés,* etc.

SEVERI ([1]) ha anche calcolato gli invarianti della V_k rappresentante le k-ple non ordinate dei punti di una C di genere p verificando la formola

$$P_a = i_k - i_{k-1} + \ldots \pm i_1 \tag{2}$$

$i_a = \binom{p}{k-a}$ essendo il numero degli integrali di 1ª specie a-pli, che è forse sempre vera.

Appartengono qui i lavori sopra la *varietà di Segre* rappresentante le k-ple di punti ordinate di k spazi, nonchè quelli sopra la *varietà di Grassmann* V_d dello spazio S_R, $R = \binom{r+1}{k+1} - 1$. Essa contiene, come è già stato riferito, solamente V_{d-1} intersezioni complete, ma di più la stessa proprietà spetta alle sezioni con generici S_{R-i} che contengono solamente intersezioni complete colle forme dello S_{r-i} se è $i \leqq \chi$, dove χ è il numero maggiore dei due interi k e $r-k-1$ ([2]).

Queste sezioni sono tutte *normali* ed esiste un numero l tale che le sezioni cogli S_l hanno i generi $P_g = P_a = 1$, le sezioni cogli spazi superiori hanno il genere nullo, quelle cogli S_{l-1} sono canoniche e queste cogli S_{l-i}, $i > 1$ sottocanoniche.

5. - *Varietà con valori particolari dei generi.*

Sono qui da notare le ricerche sulle varietà di genere P_g nullo e sulle varietà V_k d'irregolarità superficiale $q < k$ del SEVERI ([3]). Ambedue contengono congruenze di V_{k-1} d'indice uno e d'irregolarità q, $1 \leqq i \leqq k-1$.

COMESSATTI ([4]) studia le V_3 soddisfacenti alle disuguaglianze

$$P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3), \tag{1}$$

o

$$P_g - P_a \leqq q - 4. \tag{2}$$

Le prime contengono fasci di superficie algebriche di genere $\geqq 2$, o congruenze di curve d'irregolarità $\geqq 3$, le seconde nel caso $q > 1$ fasci di genere $\geqq 2$ di superficie.

COMESSATTI estende il suo metodo alle V_k possedenti N_i integrali i-pli di 1ª specie se vale la disuguaglianza

$$N_i \leqq i(q-i) \tag{3}$$

nel qual caso la V_k contiene una congruenza d'indice 1 ∞^l di V_{k-l}, $1 \leqq l \leqq i-1$ d'irregolarità bidimensionale almeno $l+1$.

Questi risultati permettono di studiare completamente le V_k irregolari di genere $P_g = 1$ e le V_3 d'irregolarità tridimensionale negativa.

([1]) *Fondamenti per la geometria,* etc.

([2]) SEVERI: *Sulla varietà che rappresenta gli spazi,* etc.

([3]) *Sulle superficie e varietà algebriche,* etc.

([4]) *Sopra certe disuguaglianze,* etc.

I risultati del COMESSATTI sono precisati dal ROSENBLATT nel caso nel quale la formola (1) è una *disuguaglianza*, o sussistendo sempre la formola (1) la V_3 possiede un fascio di superficie di genere $\geqq 2$. Si può allora mostrare l'esistenza di una congruenza $\{c\}$ di curve d'irregolarità $q = p_g - p_a$, o $q-1$ (nel qual caso esiste un fascio ellittico di superficie) od infine $q-2$.

6. - *Varietà contenenti varietà o sistemi di varietà particolari.*

Sono qui da riferire le ricerche sopra le V_3^4 con piano doppio studiate dal MARLETTA, le ricerche dello stesso autore sopra le V_r con ∞^1 V_{r-1}^2 e le V_{r+1} con ∞^2 V_{r-1}^2, le ricerche dell'APRILE sopra le V_3^4 del S_4 con rigata cubica normale, sopra le V_3^5 dello stesso spazio con una siffatta rigata, sopra le V_3^4 e V_3^5 con infinite quadriche.

Appartengono qui le ricerche di ENRIQUES, CASTELNUOVO e SCORZA sopra le V_k a curve sezioni ellittiche, che o sono coni, o delle ∞^1 ellittiche di V_{k-1}, o forme cubiche del S_{k+1} o sono razionali e projezioni di una W_k^n normale dello S_{n+k-2}, k essendo arbitrario nel caso di $n=4$, e $\leqq 6$ se n è $\leqq 9$.

Appartengono poi le ricerche del D'AMICO sopra le V_4^4 con tre piani semplici, del BELLATALLA sopra le varietà razionali normali composte di ∞^1 spazi lineari, del VENERONI sopra le V_5^3 con 15 punti doppi, del BELLESINI sopra le V_3 a curve sezioni di genere 3, del TOGLIATTI sopra le varietà V_k con almeno ∞^k rette e le V_3 con almeno ∞^2 rette e molte altre ricerche.

INDICE BIBLIOGRAFICO

LIBRI E OPUSCOLI

PICARD-SIMART — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* T. I e II, 1897, 1906.

SEGRE — *Mehrdimensionale Raüme.* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, T. III, C. 7, 1918.

CASTELNUOVO-ENRIQUES — *Algebraische Flächen vom Gesichtspunkte der birationellen Transformationen aus.* Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, T. III, c. 6, b, 1915.

SEVERI — *Trattato di geometria algebrica.* Vol. I, Parte I, Bologna, Zanichelli.

BERTINI — *Introduzione alla geometria projettiva degli iperspazi.* Pisa, 1907.

KÖNIG — *Einleitung in die Theorie der algebraischen Grössen.* Leipzig, 1903.

MEMORIE

ALBANESE — *Sul genere aritmetico delle varietà algebriche a 4 dimensioni.* Rendiconti dei Lincei (5), 33, 1924.

D'AMICO — *Sulla varietà quartica con tre piani semplici dello spazio a quattro dimensioni.* Atti dell'Accademia di Catania (4), 18, 1903.

APRILE — *Sulla varietà dell'* S_4 *del quarto ordine con rigata cubica normale doppia.* Atti dell'Accademia di Catania (5), 7, 1914.

—— *Di una ipersuperficie dell'* S_4 *d'ordine sei con infinite quadriche.* Giornale di Matematiche (3), 54, 1916.

—— *Su alcune ipersuperficie razionali del* S_4 *d'ordine 5 o 6 e con infinite coniche.* Atti dell'Accademia di Catania (5), 12, 1918.

—— *Di una ipersuperficie dell'* S_4 *d'ordine cinque con rigata cubica normale doppia.* Atti dell'Accademia di Catania (5), 8, 1915.

—— *Sopra la involuzione non razionale di Enriques.* Rassegna di Mat. e Fis., 1, 1921.

ALEXANDER II — *Sur les cycles des surfaces algébriques et sur une définition topologique de l'invariant de Zeuthen-Segre.* Rendiconti dei Lincei (5), 23, 1914.

BORDIGA — *Sul modello minimo delle varietà delle* n^{ple} *non ordinate dei punti di un piano.* Annali di Mat., Ser. III, T. 27, 1918.

BELLATALLA — *Sulle varietà razionali normali composte di* ∞^1 *spazi lineari.* Atti di Torino, T. 36, 1901.

BELLESINI — *Sopra alcune varietà tridimensionali a curve sezioni del genere 3.* Atti dell'Accademia di Catania, (5), 13, 1921-22.

BERZOLARI — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni.* Rendiconti dei Lincei (5), 26, 1917. Due Note.

COMESSATTI — *Sulle trasformazioni involutorie delle varietà algebriche.* Atti dell'Istituto Veneto (9), 85, 1925-26.

—— *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti.* Rendiconti dei Lincei (5), 22, 1913.

—— *Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica.* Ibid. (5), 23, 1913. Due Note.

CHERUBINO — *Sopra un teorema della teoria dei moduli di forme algebriche.* Rendiconti dell'Accademia di Napoli (3), 21, 1915.

CHIZZONI — *Sugli spazi lineari contenuti in una varietà algebrica a più dimensioni.* Memorie di Modena (3), 5, 1905.

CASTELNUOVO ed ENRIQUES — *Sur les intégrales simples de première espèce d'une surface ou d'une variété algébrique à plusieurs dimensions.* Annales de l'École Normale Supérieure (3), 23, 1906.

ENRIQUES — *Sugli spazi pluritangenti delle varietà cubiche generali appartenenti allo spazio a 4 dimensioni.* Giornale di Matematiche, 31, 1893.

—— *Sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* Rendiconti dei Lincei (5), 3, 1894.

—— *Sulle irrazionalità di cui può farsi dipendere la risoluzione di un'equazione algebrica* $f(x, y, z) = 0$ *con funzioni razionali di due parametri.* Math. Ann., T. 49.

—— *Ancora sui sistemi lineari di superficie algebriche le cui intersezioni variabili sono curve ellittiche.* Rendiconti dei Lincei (5), 3, 1894.

—— *Sopra un'involuzione non razionale dello spazio.* Rendiconti dei Lincei (5), 21, 1912.

—— *Intorno alla risoluzione razionale di una classe di equazioni algebriche fra quattro variabili.* Annali di Mat. (3), 20, 1913.

—— *Sulle intersezioni di due varietà algebriche.* Rendiconti dell'Accademia di Bologna, 1914-15.

FANO — *Sulle superficie algebriche contenute in una varietà cubica dello spazio a quattro dimensioni.* Atti di Torino, 39, 1904.

—— *Ricerche sulla varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni e sopra i suoi spazi pluritangenti.* Annali di Mat. (3), 10, 1904.

FANO — *Sopra una varietà cubica particolare dello spazio a quattro dimensioni.* Rendiconti Ist. Lombardo (2), 37, 1904.

— — *Sul sistema ∞^2 di rette contenuto in una varietà cubica generale dello spazio a quattro dimensioni.* Atti di Torino, 39, 1904.

— — *Sopra alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli.* Atti di Torino, 43, 1908.

— — *Sulle varietà algebriche che sono intersezioni complete di più forme.* Atti di Torino, 44, 1909.

— — *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie sezioni razionali.* Annali di Mat. (3), 24, 1915 e Scritti offerti ad E. d'Ovidio, 1918.

— — *Sul sistema ∞^3 di rette contenuto in una quadrica dello spazio a quattro dimensioni.* Giornale di Battaglini, 43, (2), 1905.

FRANCHIS — *Sopra una certa classe di varietà razionali.* Rendiconti di Palermo, 28, 1909.

GIAMBELLI — *Sulle varietà rappresentate coll'annullare i determinanti minori contenuti in un determinante simmetrico ed emisimmetrico generico di forme.* Atti di Torino, 41, 1906.

— — *Le varietà rappresentate per mezzo di una matrice generica di forme e le varietà generate da sistemi lineari projettivi di forme.* Rendiconti dei Lincei (5), 14, 1906.

GODEAUX — *Sur les variétés à trois dimensions qui représentent les couples de points d'une courbe et d'une surface algébrique.* Mémoires de la Société Royale de Liége (3), 9, 1910.

— — *Sur l'invariant de Zeuthen-Segre.* Bulletin de l'Académie de Belgique, 1909.

HALPHEN — *Recherches de géométrie à n dimensions.* Bulletin de la Société Math. de France, 2, 1873.

HILBERT — *Über die Theorie der algebraischen Formen.* Math. Ann., 36, 1890.

KLEIN — *Über einen liniengeometrischen Satz.* Math. Ann., 22.

KRONECKER — *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* Journal für Math., 92, 1881.

LASKER — *Zur Theorie der Moduln und Ideale.* Math. Ann., 60, 1905.

LEFSCHETZ — *On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties.* Transactions Am. Math. Soc., 24, 1901.

— — *Sur les intégrales multiples des variétés algébriques.* C. R., 165, 1917.

— — *Sur les intégrales de seconde espèce des variétés algébriques.* C. R., 176, 1923.

— — *Sur les intégrales doubles des variétés algébriques.* Annali di Mat. (3), 26, 1917.

MARLETTA — *Sulle varietà del quarto ordine con piano doppio dello spazio a quattro dimensioni.* Giornale di Battaglini, 40, 1902; 41, 1903.

— — *Di una classe di forme dell'S_4 ognuna rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell'S_3.* Rendiconti dei Lincei (5), 27, 1918.

— — *Delle varietà algebriche con infinite V^2.* Atti di Catania (5), 9, 1916.

MARONI — *Sulla dimensione dei sistemi lineari sopra le varietà algebriche a $k+1$ dimensioni contenenti un fascio di S_k.* Annali di Mat. (4), 4, 1927-28.

MOLK — *Sur une notion qui comprend celle de la divisibilité et sur la théorie générale de l'élimination.* Acta Math., 6, 1885.

NOETHER — *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde von beliebig vielen Dimensionen.* Math. Ann., 2, 1874.

— — *Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde.* Zweiter Aufsatz. Math. Ann., 8, 1874.

— — *Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer Variabeln.* Göttinger Nachrichten, 1869.

— — *Zur Eliminationstheorie.* Math. Ann., 11, 1875.

PANNELLI — *Sopra un carattere di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rend. Pal., 32, 1911.

— — *Sopra gli invarianti di una varietà algebrica a tre dimensioni rispetto alle trasformazioni birazionali.* Rendiconti dei Lincei (5), 15, 1906.

— — *Sopra alcuni caratteri di una varietà algebrica a tre dimensioni.* Rendiconti dei Lincei (5), 15, 1906.

— — *Sul genere aritmetico di una varietà completa intersezione di forme.* Atti di Torino, 44, 1908-9.

— — *Sulla Jacobiana di una rete di superficie algebriche.* Giornale di Battaglini, 55 [(3), 8], 1917.

PIERI — *Sull'ordine della varietà generata di più sistemi lineari omografici.* Rendiconti di Palermo, 11, 1896.

PAGLIANO — *Sulle varietà algebriche a tre dimensioni costituite da una semplice infinità di piani.* Annali di Mat. (3), 5.

ROSATI — *Sugli spazi normali delle varietà algebriche.* Atti dell'Istituto Veneto, 68, 1908-9.

— — *Un'osservazione sugli inviluppi.* Rendiconti dei Lincei (5), 16, 1907.

ROSENBLATT — *Sopra i moduli delle varietà algebriche a tre dimensioni.* Rendiconti del Seminario Matematico della Facoltà di Scienze di Roma (2), 4, 1925-26.

— — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité* $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$. Comptes Rendus, T. 178, 1924; T. 181, 1925; T. 182, 1926.

— — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité* $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$. Prace matematyczno-fizyczne, 33, 1925.

— — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions.* Prace matematyczno-fizyczne, 26, 1914.

— — *Über die Invarianten der algebraischen Gebilde von drei Dimensionen.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 24, 1915.

— — *Sur quelques propriétés des systèmes algébriques d'espaces à* k *dimensions contenus dans un espace linéaire à* r *dimensions.* Annales de la Société Polonaise de Math., 3, 1925.

SCORZA — *Determinazione delle varietà algebriche a tre dimensioni di* S_r $(r \geqq 7)$ *i cui* S_3 *tangenti si tagliano a due a due.* Rendiconti di Palermo, 25, 1908.

— — *Le varietà a curve sezioni ellittiche.* Annali di Mat. (3), 15, 1908.

— — *Sulle varietà di Segre.* Atti di Torino, 45, 1909-10.

SISAM - *On algebraic hyperconical connexes in space of* r *dimensions.* Atti di Torino, 46, 1911.

SEVERI — *Le coincidenze di una serie algebrica* $\infty^{(k+1)(r-k)}$ *di coppie di spazi a* k *dimensioni immersi nello spazio ad* r *dimensioni.* Rend. Lincei (5), 9, 1900.

— — *Sugli spazi plurisecanti di una semplice infinità razionale di spazi.* Rend. Lincei (5). 11, 1902.

— — *Sulle intersezioni delle varietà algebriche e sopra i loro caratteri e singolarità proiettive.* Memorie di Torino (2), 52, 1902.

— — *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.* Rend. Lincei (5), 11, 1902.

— — *Su alcune proprietà dei moduli di forme algebriche.* Atti di Torino, 41, 1905.

— — *Su alcune questioni di postulazione.* Rend. Pal., 5, 1903.

— — *Osservazioni varie di geometria sopra una superficie algebrica e sopra una varietà.* Atti dell'Istituto Veneto, 65, 1905-6.

— — *Una proprietà delle forme algebriche prive di punti multipli.* Rend. Lincei (5), 15, 1906.

— — *Alcune proposizioni fondamentali per la geometria sulle varietà algebriche.* Rend. Lincei (5), 16, 1907.

— — *Sur les intégrales doubles de première espèce attachées à une variété algébrique.* C. R., 1909.

SEVERI — *Fondamenti per la geometria sulle varietà algebriche.* Rend. Pal., 28, 1909.
— — *Sulle superficie e varietà algebriche irregolari di genere geometrico nullo.* Rend. Lincei (5), 20, 1911.
— — *Relazione fra gl'integrali semplici e gl'integrali multipli di 1^a specie di una varietà algebrica.* Annali di Mat. (3), 20, 1913.
— — *Sulla varietà che rappresenta gli spazi subordinati di data dimensione immersi in uno spazio lineare.* Annali di Mat. (3), 24, 1915.
— — *Alcune relazioni di equivalenza tra gruppi di punti d'una curva algebrica o tra curve di una supeficie.* Atti Ist. Veneto. 70, 1910-11.
SEGRE — *Sulle varietà normali a tre dimensioni composte di serie semplici razionali di piani.* Atti di Torino, 21, 1885-86.
— — *Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni.* Atti di Torino, 22, 1887.
— — *Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi.* Rendiconti dei Lincei (4), 3, 1887.
— — *Sulle varietà cubiche dello spazio a quattro dimensioni e su certi sistemi di rette e certe superficie dello spazio ordinario.* Memorie di Torino (2), 39, 1887.
— — *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi.* Rendiconti di Palermo, 5, 1891.
— — *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito.* Annali di Mat. (2), 22, 1894.
— — *Intorno ad un carattere delle superficie e delle varietà superiori algebriche.* Atti di Torino, 31, 1896.
— — *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da da una data matrice.* Rendiconti dei Lincei (5), 9, 1900.
— — *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* Rendiconti di Palermo, 30, 1910.
SNYDER — *Un'involuzione d'ordine due dell'* S_3 *appartenente alla varietà cubica generale.* Giornale di Battaglini, 61, 1923.
— — *Birational transformations of the cubic variety in fourdimensional space.* Rend. Pal., 38, 1914.
SHARPE-SNYDER — *Certain types of involutorial space transformations.* Trans. Am. Math. Soc., 20, 1920.
TAFANI — *Sulle corrispondenze* (1, n) *trà varietà a 3 dimensioni.* Annali della Scuola Normale di Pisa, 12, 1913.
TOGLIATTI — *Sulle varietà algebriche a* k *dimensioni contenenti almeno* ∞^k *rette.* Atti di Torino, 57, 1921.
— — *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno* ∞^2 *rette.* Rend. Lincei (5), 30, 1921. Note I e II.
TORELLI — *Sugli spazi doppi dotati di integrali semplici di 1^a specie.* Rend. Ist. Lomb. (2), 43, 1910.
— — *Osservazioni di geometria sopra una varietà algebrica.* Rendiconti della Società reale di Napoli, (3), 17, 1911.
— — *Sopra certe estensicni del teorema di Noether* $Af + B\varphi$. Atti di Torino, 41, 1905.
— — *Sulla postulazione di una varietà e sui moduli di forme algebriche.* Ann. di Mat. (3), 18, 1911.
TERRACINI — *Sul modulo delle forme contenenti una varietà di Segre.* Rend. Lincei (5), 30, 1921.
— — *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà.* Atti di Torino. Note I; II. 51, 1915-16.

TERRACINI — *Sulla varietà degli spazi tangenti a una data varietà.* Rend. Lincei. Note I. (5), 29, 1920; II.

TANTURRI — *Un problema di Geometria numerativa sulle varietà algebriche luogo di* ∞^1 *spazi.* Atti di Torino, 35, 1910.

VENERONI — *Sopra una varietà cubica con quindici punti doppi dello spazio a cinque dimensioni.* Rendiconti Ist. Lomb. (2), 47, 1914.

— — *Intorno ad un fascio di varietà cubiche dello spazio a cinque dimensioni.* Rendiconti Ist. Lomb. (2), 38, 1904.

VERONESE — *Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Raüme von verschiedenen Dimensionen durch das Prinzip des Projizierens und Schneidens.* Math. Ann., 19, 1882.

-- — *Fondamenti di geometria a più dimensioni e a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare.* Padova, 1891.

G. FANO (Torino - Italia)

SULLE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI AVENTI TUTTI I GENERI NULLI

1. - La distinzione, che pareva tradizionale, tra scienze di ragionamento e scienze sperimentali è ormai sorpassata. In ogni scienza hanno parte l'esperienza e il ragionamento; la distinzione concerne solo le reciproche proporzioni. In matematica la parte riservata all'esperienza, piccola e limitata alla fase di scoperta, consiste essenzialmente nell'esame accurato di qualche caso particolare. Io mi propongo appunto di esporre qui il risultato di un po' di lavoro sperimentale, e di qualche congettura ulteriore, riguardo a una questione ardua e importante, che da tempo attende invano la soluzione.

Chi, anche per poco, si è occupato di geometria algebrica a più dimensioni ha incontrato già sui primordi la questione della razionalità o meno della varietà cubica generale dello spazio a 4 dimensioni (V_3^3 di S_4), cioè della possibilità di risolvere l'equazione generale di 3° grado fra 4 variabili mediante funzioni razionali di 3 parametri tali che una soluzione generica della detta equazione si ottenga altresì per una sola terna di valori di questi parametri. Tale questione, posta già da oltre 40 anni, non è ancora risoluta (1). In questo frattempo si è, tra altro, brillantemente sviluppata la teoria generale delle superficie algebriche; sono stati considerati, per le superficie, oltre al genere, sia geometrico che aritmetico, i vari plurigeneri, e sono state da CASTELNUOVO determinate le condizioni di razionalità di una superficie, consistenti nell'annullarsi di tutti gli anzidetti generi e plurigeneri, ma che si riducono a due sole condizioni distinte. In relazione a ciò, la questione della razionalità o meno della varietà V_3^3 di S_4 veniva assorbita dall'altra, più generale, della razionalità o meno delle diverse M_3 algebriche aventi gli analoghi caratteri, generi e plurigeneri, tutti eguali a zero.

Fra queste M_3 sono comprese la V_3^4 generale di S_4, e la M_3^6 di S_5 intersezione generale di una forma quadratica e di una forma cubica, la quale M_3^6, quando come forma quadratica si assuma, secondo concetti ben noti, l'insieme delle rette dello spazio S_3, si identifica col complesso cubico generale di questo stesso

(1) È noto però da tempo che l'equazione accennata sopra può risolversi mediante funzioni razionali di 3 parametri, in modo che una stessa soluzione si ottenga per un certo numero $k > 1$ di terne di valori dei parametri (e anche per $k = 2$).

spazio. È anche una proprietà nota da tempo, sebbene forse non consacrata in nessuna pubblicazione, che quando tale M_3^6 contenga *tre* piani di uno stesso sistema della quadrica passante per essa — ossia il complesso cubico contenga 3 stelle di rette, ovvero (dualmente) 3 piani rigati — questi enti divengono birazionalmente identici alla V_3^3 generale di S_4 (1). Bisogna dunque particolarizzare *molto* la detta M_3^6 (la quale in generale non contiene piani; ma a cui si può imporre di contenerne uno, o anche due, o tre, con un numero sempre crescente di condizioni) per renderla birazionalmente identica a una V_3^3 di S_4, e perciò forse ancora non razionale.

Da ciò la mia convinzione che, qualora le varietà in parola a generi nulli siano effettivamente non razionali, la M_3^6 di S_5, e così anche la V_3^4 di S_4, debbano essere *notevolmente più lontane dalla razionalità* che non la V_3^3 di S_4; e perciò per esse debba riuscire più facile l'assodarlo.

E infatti fino dal 1908, e più tardi, nel 1915, per altra via più semplice, mi riescì dimostrare che la V_3^4 generale di S_4 e l'anzidetta M_3^6 generale di S_5 *non sono razionali* (2). La V_3^4 generale non contiene altri sistemi lineari completi di superficie regolari a generi tutti eguali all'unità, all'infuori del sistema ∞^4 delle sue sezioni iperpiane; il che basta a differenziarla dallo spazio S_3. Inoltre, essa non ammette affatto trasformazioni birazionali. Nella M_3^6 generale di S_5 sopra accennata, i sistemi lineari completi di superficie regolari aventi i generi eguali all'unità sono soltanto il sistema ∞^5 delle sezioni iperpiane, e i suoi trasformati mediante proiezione doppia, una o più volte, dalle singole rette; e le trasformazioni birazionali si limitano appunto a queste proiezioni doppie, e ai loro prodotti. ENRIQUES ha poi dimostrato (3) che questa M_3^6 è riferibile a un'involuzione di S_3, donde appunto l'esistenza in S_3 di involuzioni irrazionali, di cui si aveva così un primo esempio. La M_3^6 è incontrata dai suoi S_3 tangenti secondo sestiche razionali; e in corrispondenza ai punti di una sua superficie razionale si ottiene una congruenza razionale, di ordine >1, di tali sestiche, con superficie unisecante, la quale conduce alla rappresentazione accennata. APRILE (4) ha determinato l'ordine di quella involuzione (di ENRIQUES), trovandolo $=216$; ma ha pure osservato che una lieve modificazione del procedimento stesso conduce a rappresentare la M_3^6 sopra un'involuzione I_{36}.

2. - Le due varietà ora considerate appartegono alla categoria delle varietà M_3^{2p-2} dello spazio S_{p+1}, aventi superficie-sezioni regolari coi generi tutti $=1$, e

---

(1) Alle ∞^5 superficie sezioni iperpiane di M_3^6 si possono far corrispondere le superficie intersezioni della V_3^3 colle quadriche del suo spazio passanti per 3 sue rette mutuamente sghembe.

(2) Atti R. Accad. di Torino, vol. 43 (1907-08), 50 (1914-15).

(3) Rend. R. Accad. dei Licei (5), vol. 21 (1912_1), p. 81.

(4) Rivista di Matem. e Fis., vol. 1 (1921), p. 133.

come curve-sezioni curve canoniche di genere p. Esse corrispondono ai due casi $p=3$ e $p=4$; un termine ancora precedente, nella loro successione, cioè per $p=2$, è dato dallo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione generale del 6° ordine, anch'esso non razionale, perchè la M_3^6 dianzi considerata si proietta da una sua retta appunto in un S_3 doppio, più particolare, del tipo indicato. Esistono varietà M_3^{2p-2} del tipo in parola anche per valori più elevati di p; però, in quanto non siano coni o almeno luoghi di una ∞^2 di rette, forse soltanto per un numero finito di altri valori di p (1). Non mi è nota, e potrebbe anche non esistere nemmeno, una loro legge di costruzione generale; come pure è tuttora dubbia la razionalità o meno di queste M_3^{2p-2} più generali non rigate ($p \geqslant 5$), ma con grande probabilità di una risposta negativa, almeno per parecchi valori di p. Il gruppo delle loro trasformazioni birazionali cresce e si complica rapidamente, al crescere di p.

Per $p=5$, si ha la M_3^8 di S_6 intersezione generale di tre quadriche, la quale non contiene altre superficie se non intersezioni complete con altre forme. Da una qualsiasi delle sue ∞^1 rette si proietta in una V_3^4 di S_4 contenente una rigata cubica R^3 e, come intersezioni ulteriori coi piani delle ∞^2 coniche di questa R^3, una congruenza del 1° ordine anche di coniche, aventi R^3 come quadrisecante. La M_3^8 si rappresenta quindi sopra un'involuzione I_4 di S_3 (mentre è dubbia l'esistenza di una bisecante razionale delle dette coniche, e quindi la rappresentabilità della detta M_3^8 generale sopra una I_2). Sopra questa M_3^8 esistono pertanto già infinite congruenze razionali, del 1° ordine, di curve razionali; quindi anche trasformazioni birazionali che spostano i punti sulle singole linee di una di queste congruenze; e aggiungendo a queste le ∞^2 proiezioni doppie della M_3^8 dai piani delle sue coniche, si perviene già ad un gruppo birazionale complessivo molto ampio.

Per $p=6$ e $p=7$, cioè negli spazi S_7 e S_8, rientrano in questa categoria le varietà intersezioni di M_4 razionali a curve-sezioni ellittiche (2) con quadriche.

Per $p=6$, si ha la M_3^{10} di S_7 immagine, nel senso Grassmanniano, della varietà ∞^3 di rette di S_4 intersezione generale di due complessi lineari e di un complesso quadratico. Essa si proietta da una delle ∞^1 sue rette in una particolare M_3^6 di S_5; e si può rappresentare sopra un'involuzione I_6 di S_3.

---

(1) Potrebbe verificarsi qui un fatto analogo a quello delle superficie a curve-sezioni di genere uno. Queste possono essere razionali, ma soltanto se di ordine $\leqslant 9$; in caso diverso, sono sempre rigate (in particolare coni), e possono avere ordine comunque elevato. Del pari, per p qualsiasi, esistono superficie F^{2p-2} di S_p regolari, con tutti i generi $=1$, e aventi come sezioni curve canoniche di genere p; quindi anche S_0-coni a 3 dimensioni (I_3^{2p-2}) di S_{p+1}, proiezioni delle dette superficie da un punto esterno al loro spazio. Ma potrebbe darsi che varietà M_3^{2p-2} di S_{p+1} *non rigate,* con superficie sezioni del tipo indicato, esistessero solo per alcuni valori di p, p. es. solo da un certo valore di p in giù.

(2) SCORZA, Annali di Matem. (3), vol. 15 (1908), p. 217.

Per $p=7$ si ha la M_3^{12} di S_8 intersezione di una quadrica con una M_3^6 « di SEGRE », rappresentante cioè in modo biunivoco senza eccezioni le coppie di punti di 2 piani fissi. Essa contiene due congruenze razionali del 1° ordine di coniche, ciascuna con una rete di superficie razionali bisecanti queste coniche e appartenenti all'altra congruenza; si rappresenta perciò su di un'involuzione I_2 di S_3.

Per $p=8$ rientra ancora in questa categoria, di dubbia razionalità, la M_3^{14} di S_9 immagine, nel solito senso Grassmanniano, della varietà di rette base per un sistema lineare ∞^4 generico di complessi lineari di S_5 (1).

Per $p=9$, si ha lo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione generale del 4° ordine, quando se ne consideri come immagine la M_3^{16} di S_{10} rappresentante il sistema (lineare, rispetto allo spazio doppio) delle F^4 tangenti alla superficie di diramazione lungo le curve di 8° ordine e genere 9 sue intersezioni con quadriche (incluse naturalmente, fra tali F^4, tutte le quadriche doppie).

Anche la V_3^3 di S_4 può trovar posto in questo elenco di M_3^{2p-2}, quando le si sostituisca la varietà birazionalmente equivalente che rappresenta, nel senso abituale, il sistema lineare ∞^{14} delle superficie intersezioni di V_3^3 colle quadriche del suo spazio (varietà M_3^{24} di S_{14}, onde $p=13$). Questa varietà è rappresentabile anch'essa sopra un'involuzione I_2 di S_3, e contiene congruenze razionali del 1° ordine di curve razionali con sistemi lineari ∞^4, di grado 3, di superficie razionali bisecanti quelle curve.

Esaminando queste diverse varietà, si ha l'impressione che esse, qualora non siano razionali, tuttavia, al crescere di p, pur con qualche restrizione, *vadano gradatamente accostandosi alla razionalità.* Si osservino le rappresentazioni sopra involuzioni di S_3, di ordine, generalmente, decrescente; la comparsa, per $p=5$, di congruenze razionali del 1° ordine di curve razionali, con superficie razionali prima quadrisecanti, poi bisecanti, e variabili entro sistemi progressivamente più ampi (2). Queste stesse varietà, dalle curve degli ordini minori in esse contenute, si proiettano in altre, ancora della stessa categoria M_3^{2p-2} di S_{p+1}, corrispondenti a valori più piccoli di p, e contenenti, come immagine della curva da cui si è fatta la proiezione, una rigata che *non* esiste nel caso più generale. (Se la proiezione è fatta da uno spazio incontrante la varietà secondo una curva di ordine n e genere π, l'ordine della M_3 diminuisce di $2(n+1-\pi)$ unità, e la rigata immagine della curva è di ordine $n+2-2\pi$). Vediamo così che, dal

---

(1) V. p. es. SEVERI, Annali di Matem. (3), vol. 24 (1915), p. 189. Questa M_3^{14}, come è dimostrato in una mia Nota posteriore al Congresso (Rend. Acc. dei Lincei (6), vol. 11 (1930), p. 329), è birazionalmente identica alla V_3^3 generale di S_4. Esistono però anche altre M_3^{14} di S_{14}, che presumo birazionalmente distinte dalla prima.

(2) Teniamo conto, naturalmente, delle sole involuzioni e congruenze riscontrate, cioè (sostanzialmente) di quelle che si presentano in modo semplice.

punto di vista birazionale (con qualche limitazione), *ciascuna delle varietà enumerate comprende come casi particolari le successive* (corrispondenti a valori più elevati di p), dalla seconda successiva in poi; sicchè il crescere di p implica, in massima, una progressiva *particolarizzazione* della M_3. Quasi tutte queste M_3 possono proiettarsi in particolari V_3^4, anche queste contenenti, caso per caso, una rigata che non esiste nella V_3^4 generale. La M_3^6 di S_5, quando contenga due o tre piani di uno stesso sistema della quadrica passante per essa, si identifica birazionalmente coi casi $p=8$ e $p=13$ dianzi accennati. Lo spazio S_3 doppio con superficie di diramazione del 4° ordine, qualora questa superficie ammetta un piano tangente lungo una conica, si identifica colla V_3^3 generale di S_4 (ossia ancora col caso $p=13$), potendosi quello spazio doppio considerare come proiezione di questa V_3^3 (1). Ecc.

3. - Poichè la V_3^4 generale di S_4 e la M_3^6 di S_5 dianzi considerata certamente non contengono sistemi lineari di superficie regolari di generi uno e di dimensione superiore rispett. a 4 o 5, mentre nello spazio S_3 esistono sistemi lineari di superficie regolari di genere uno di dimensione notevolmente superiore (p. es. il sistema ∞^{34} di tutte le superficie del 4° ordine; e anche, come vedremo, sistemi di dimensione superiore), è presumibile esistano altresì varietà M_3 a generi e plurigeneri nulli per le quali la dimensione massima di un sistema lineare di superficie regolari di generi uno abbia valori intermedi fra quelli testè indicati; varietà che evidentemente non sarebbero razionali. L'anzidetta dimensione massima costituirebbe per le varietà in parola un invariante assoluto, in base al quale potrebbe stabilirsi una prima loro classificazione. Assumendo per comodità come invariante, che designeremo con Δ, la dimensione stessa aumentata di un'unità, per le varietà M_3^{2p-2} dianzi enumerate sarebbe in ogni caso $\Delta \geqslant p+2$; ed è possibile, quasi direi probabile, che per le M_3^{2p-2} più generali sia precisamente $\Delta = p+2$ (come io ho dimostrato per i due casi $p=3$, $p=4$). A una possibile classificazione delle varietà M_3^{2p-2} anzidette, e probabilmente alla stessa testè accennata, si è pure guidati dalle considerazioni seguenti.

Per le superficie algebriche, si suole considerare, fra i diversi invarianti, il così detto *invariante* ω (di CASTELNUOVO-ENRIQUES) (2), che è un invariante relativo, ma il cui valore massimo per una data classe di superficie birazionalmente equivalenti costituisce un invariante assoluto, e precisamente il *genere lineare virtuale* $p^{(1)}$. In particolare, per le superficie con $p_g > 0$ è questo il genere virtuale delle curve canoniche. Per le superficie razionali è $p^{(1)}=10$; e per queste stesse superficie il valore $p^{(1)}-1=9$ è altresì la massima dimensione di un sistema lineare di curve ellittiche, o anche (il che fa lo stesso) la massima

(1) SEGRE, Mem. Accademia di Torino, ser. 2ª, t. 39 (1888).

(2) Annali di Matem. (3), vol. 6 (1901), p. 165.

dimensione che può raggiungere (in quanto sia effettivo) un sistema lineare $|C-C'|$, differenza fra un sistema lineare $|C|$ e il suo aggiunto $|C'|$.

Per le varietà M_3, il carattere analogo a ω è quello generalmente indicato con Ω_2, cioè il genere aritmetico virtuale della superficie canonica (superficie anch'essa « virtuale » per le M_3 in discorso). Anche Ω_2 è soltanto un invariante relativo; ma un suo valore estremo, per una data classe di varietà birazionalmente identiche, costituirà per la classe un invariante assoluto. In massima, le circostanze che tendono a far crescere ω tendono invece, per la diversa parità della dimensione, a far diminuire Ω_2; il quale, per le varietà qui considerate, è negativo. Sembra perciò che potrebbe convenire fissarsi, per ogni classe di varietà birazionalmente equivalenti (almeno nel campo che ora consideriamo), sul valore minimo di Ω_2, cambiato di segno.

Per le varietà M_3^{2p-2} dianze considerate risulta precisamente $\Omega_2=-(p+2)$; e per quelle del tipo più generale e loro trasformate birazionali è presumibilmente questo il valore minimo di Ω_2 stesso; con che questo nuovo invariante assoluto verrebbe a coincidere coll'invariante Δ di poc'anzi (analogamente a quanto avviene per le superficie razionali).

Il crescere di Δ, nei limiti qui considerati, implicherebbe, in massima, un avvicinamento alla razionalità.

Queste varietà, in quanto effettivamente non siano razionali, potrebbero chiamarsi *semirazionali*. Esse appaiono come intermedie fra gli enti razionali e quelli aventi almeno uno dei generi e plurigeneri maggiore di zero (e gli altri ancora nulli).

Osserviamo infine che, mentre per le superficie razionali l'invariante ω raggiunge il suo massimo ($=10$) nel caso del piano e delle superficie rappresentabili sul piano mediante corrispondenza biunivoca *senza eccezioni*, per le M_3 razionali il valore $\Omega_2=-35$ ottenuto nel caso dello spazio S_3 *non* è un minimo. Per il cono Γ^9 di S_{10} che proietta la superficie F^9 di S_9, rappresentante il sistema lineare di tutte le cubiche piane, da un punto non appartenente al suo stesso spazio S_9, è $\Omega_2=-39$; perciò per gli enti razionali sarebbe $\Delta\geqslant 39$. E d'altra parte esistono pure in S_3 sistemi lineari di superficie regolari di genere uno e di dimensione >34, cioè superiore a quella del sistema di tutte le F^4 (che sarebbero le analoghe, in S_3, delle cubiche nel piano). È tale il sistema delle F^6 aventi a comune un punto quadruplo e una conica doppia infinitesima infinitamente vicina a questo punto; sistema di dimensione 38, e equivalente a quello segato sul detto cono Γ^9 dalle quadriche del suo spazio (S_{10}). Questo sistema lineare ha la proprietà, non condivisa dal sistema di tutte le F^4, di contenere un sistema lineare di superficie razionali di dimensione inferiore alla propria di un'unità soltanto.

4. - Un altro tipo di varietà algebriche M_3 a generi e plurigeneri nulli, incontrato più volte da ENRIQUES, è quello delle varietà riferibili a M_3^n di S_4 con

retta $(n-2)^{pla}$, e contenenti perciò una ∞^2 razionale del 1° ordine di coniche, nei piani passanti per questa retta. Anche per questa varietà, se del tipo più generale, la razionalità o meno non è finora assodata, ma appare poco probabile. L'invariante relativo Ω_2, per $n \geqslant 4$, vale $-\frac{(n-6)(3n-17)}{2}$.

Per $n=4$, si ha la V_3^4 con retta doppia; poichè questa retta, bisecante le ∞^2 coniche, può pensarsi, nei riguardi di esse, come un piano doppio con quartica (generale) di diramazione, quindi razionale, la detta V_3^4 potrà rappresentarsi sopra un'involuzione I_2 di S_3. È un caso particolare della V_3^4 generale considerata ai num[i] prec.

Per $n=5$ è $\Omega_2=-1$. La retta tripla, nei riguardi delle ∞^2 coniche da essa bisecate, può pensarsi come un piano doppio con sestica di diramazione, quindi di genere uno. E forse non esistono in questa varietà superficie regolari di generi uno, se non isolate.

Per $n=6$ è $\Omega_2=0$, e forse non esistono affatto, sulla varietà più generale di questo tipo, superficie regolari di generi uno.

Queste varietà, che potrebbero chiamarsi *pseudorazionali*, avrebbero come analogo, nel campo delle superficie, qualcosa di intermedio fra le superficie razionali e le rigate irrazionali. Le rigate ammettono infinite trasformazioni birazionali, che spostano ogni singolo punto sulla generatrice che lo contiene, ma non altrimenti, salvo casi particolari; e altrettanto avviene per queste varietà, spostandosi ogni punto sulla conica che passa per esso. Per le rigate irrazionali vien meno la coicidenza, riscontrata per le superficie razionali, fra il genere lineare $p^{(1)}$ e il massimo numero di curve di genere uno linearmente indipendenti: sulle rigate ellittiche esistono sistemi lineari di curve ellittiche di dimensione comunque elevata, mentre sulle rigate di genere >1 non esistono affatto curve ellittiche. Così, nelle varietà ora considerate, per $n \geqslant 6$ è presumibile non esistano superficie regolari di generi uno; e cade, per $n>6$, la relazione fra queste superficie e l'invariante Δ, intraveduta per le M_3 del tipo precedente

Elementi per una classificazione di queste varietà pseudorazionali potrebbero essere forniti dal *genere minimo* delle superficie regolari contenute in esse e non appartenenti alla congruenza di coniche, e dalla dimensione del loro sistema. Per le varietà M_3^n più generali di questo tipo, quel genere minimo sarà dato probabilmente dalla retta $(n-2)^{pla}$, come bisecante le ∞^2 coniche; e sarebbe allora $=\frac{(n-3)(n-4)}{2}$.

A. ROSENBLATT (Kraków - Polonia)

SOPRA LE VARIETÀ ALGEBRICHE A TRE DIMENSIONI FRA I CUI CARATTERI INTERCEDONO CERTE DISUGUAGLIANZE

1. - Lo studio delle V_3 algebriche fra i cui caratteri intercedono certe disuguaglianze è stato intrapreso dal sig. COMESSATTI [1] in tre Note dell'Accademia dei Lincei. Mi sono poi occupato [2] delle V_3 studiate dal COMESSATTI fra i cui caratteri intercede la disuguaglianza

$$P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3) \tag{1}$$

senza aver potuto studiare completamente queste varietà.

Qui vorrei comunicare un nuovo complemento, sperando che le lacune rimanenti possano essere presto colmate.

Rappresentiamo gli integrali Picardiani di 1ª specie della V_3 con una varietà W_3 le cui coordinate non omogenee sono questi integrali

$$y_i = u_i(x_0, x_1, x_2), \qquad i = 0, \ldots, r, \tag{2}$$

$r+1 = p_g - p_a$, come ciò è stato fatto per le superficie dal COMESSATTI. Consideriamo le matrice degli T_3 tangenti alla W_3

$$M = \| u_i^j \|, \qquad j = 0, 1, 2; \; i = 0, \ldots, r, \tag{3}$$

$u_i^j = \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}$, denotando con X_{ijk} i minori della M, che possono essere considerati come coordinate Grassmanniane dei piani $\overline{S}_2$ all'infinito nei quali le T_3 sono segate dal $\overline{S}_r$ all'infinito. Il sistema $\overline{W}$ di questi piani soddisfa a

$$\delta \geqq \binom{r+1}{3} - 3(r-2) \tag{4}$$

equazioni di complessi lineari

$$\sum a_{ijk}^h X_{ijk} = 0, \qquad h = 1, \ldots, \delta. \tag{5}$$

---

[1] *Sulle varietà algebriche che posseggono integrali semplici funzionalmente dipendenti.* Rendiconti dei Lincei (5), 22, 1913. — *Sopra certe disuguaglianze fra i caratteri d'una varietà algebrica.* Ibid. Due Note.

[2] *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité* $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$. 3 Note nei Comptes Rendus, 1924-1926. — *Sur les variétés à trois dimensions dont les espaces tangents satisfont à certaines conditions différentielles.* Ibid. 1924. — *Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les genres satisfont à l'inégalité* $P_g \leqq 3(p_g - p_a - 3)$. Prace Matematyczno-fizyczne, 33, 1925.

Nei lavori citati sono pervenuto ai risultati seguenti:

1°) Se la V_3 non possiede fasci di superficie algebriche di genere $\geqq 2$ e se nella (1) vale il segno $<$, oppure se il sistema $\overline{W}$ possiede due spazi direttori infinitamente vicini, la congruenza $\{C\}$ di curve esistente sopra la V_3 è d'irregolarità $r+1$, oppure d'irregolarità r ed esiste un fascio ellittico di superficie algebriche.

2°) Se la V_3 contiene un fascio $\{F\}$ di genere $t+1 \geqq 2$ di superficie algebriche, ciò che avviene se due integrali di Picard di 1ª specie sono dipendenti e se è

$$t+1 \leqq r-3,$$

la V_3 possiede una *congruenza* $\{C\}$ d'irregolarità $r+1$ colla quale sono composte le F, oppure questa congruenza è d'irregolarità r ed esiste un'altro fascio $\{\Phi\}$ ellittico, dunque un'altra congruenza d'irregolarità $t+2$ colla quale sono composte le F e le Φ, oppure la $\{C\}$ è d'irregolarità $r-1$ ed esiste un'altra congruenza $\{\Gamma\}$ d'irregolarità $t+3$ colla quale sono composte le F. Se nella (1) vale il segno $<$ o nel caso $t+1<r-3$ si ha certamente uno dei due primi casi.

Supponendo il sistema $\overline{W}$ di dimensione 3 ho anche studiato il caso nel quale la $V_{\overline{W}}$ rappresentante $\overline{W}$ sopra la Grassmanniana $V_{3(r-2)}$ ha i suoi spazi osculatori S_τ di dimensione τ almeno uguale a 8. In questo caso esistono almeno ∞^1 spazi direttori e si può applicare i risultati precedenti.

Rimangono non studiati i casi seguenti:

A) Il sistema $\overline{W}$ è di dimensione 1 o 2 e nella (1) vale il segno $=$.

B) Il sistema $\overline{W}$ è di dimensione 3, si ha il segno $=$ e τ è minore di 8.

C) Infine rimane da studiare i casi esclusi nel caso di un fascio di superficie.

2. - *Studiamo dapprima il caso A.*

Se la W_3 è composta con ∞^1 *piani* S_2, ciò che avviene se $\overline{W}$ è di dimensione 1, le equazioni (2) sono della forma

$$y_i = \varphi_i(x_0) + x_1\psi_i(x_0) + x_2\sigma_i(x_0), \qquad i=0,\ldots,r. \tag{6}$$

Siano u_i, $i=r-2,\ r-1,\ r$ i tre integrali legati. Abbiamo

$$\frac{D(u_{r-2},\ u_{r-1},\ u_r)}{D(x_0,\ x_1,\ x_2)} = 0, \tag{7}$$

dunque risultano le tre relazioni

$$|\varphi_i', \psi_i, \sigma_i| = 0, \quad |\psi_i', \psi_i, \sigma_i| = 0, \quad |\sigma_i', \psi_i, \sigma_i| = 0,$$
$$i = r-2,\ r-1,\ r.$$

Si trae facilmente che due combinazioni lineari degli integrali u_i, $i=r-2,\ r-1,\ r$ sono sempre legate, dunque esiste *un fascio di genere* $\geqq 2$ di superficie algebriche.

Passiamo al caso della W_3 *composta di* ∞^2 *rette* l, ciò che avviene se $\overline{W}$ è di dimensione 2. Abbiamo le equazioni

$$y_i=\varphi_i(x_0, x_1)+x_2\psi_i(x_0, x_1), \qquad i=0,\ldots, r. \tag{8}$$

Secondo un teorema di SEGRE i ∞^2 piani $\overline{S}_2$ all'infinito:

1°) Passano per un punto fisso $\overline{S}_0$;

2°) o sono tangenti ad una curva $\overline{C}$;

3°) o sono tangenti ad una superficie $\overline{V}_2$.

Nel *primo* caso il punto $\overline{S}_0$ è direttore per il sistema $\overline{W}$. Dunque la congruenza $\{C\}$ possiede gli r integrali u_i, $i=0,\ldots, r-1$, l'integrale $r+1^{\text{mo}}$ u_r appartenente ad un *fascio ellittico.*

Nel *secondo* caso di una curva $\overline{C}$ all'infinito abbiamo

$$y_i=\varphi_i(x_0, x_1)+x_2\psi_i(x_1). \tag{9}$$

Gli T_3 essendo fissi lungo le rette l esiste una relazione

$$\alpha\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}+\gamma\psi_i+\delta\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}=0, \tag{10}$$

α, β, γ, δ essendo funzioni di x_0, x_1.

Nel caso $\beta=0$ si prova l'esistenza di due integrali dipendenti come conseguenza della relazione (7).

Nel caso $\beta\neq 0$ esiste una retta infinitamente vicina segante l. Esiste dunque une *superficie focale* V_2 che può degenerare in una *curva* C.

In questo ultimo caso abbiamo le equazioni

$$y_i=\varphi_i(x_0)+x_2\psi_i(x_1), \tag{11}$$

e si prova l'esistenza di due integrali di Picard dipendenti, o di tre integrali di Picard, i cui rapporti sono dipendenti. Nel primo caso esiste un fascio di genere $\geqq 2$; nel secondo caso esiste un fascio di genere $\geqq 3$.

Infatti, abbiamo il

TEOREMA AUSILIARE: Se sopra una superficie F algebrica i *rapporti* dei tre integrali di Picard di 1ª specie $\frac{u_1}{u_3}$, $\frac{u_2}{u_3}$ sono dipendenti, la superficie possiede un fascio irrazionale di curve $\{C\}$ cogli integrali u_i, $i=1, 2, 3$. Infatti, sia

$$\frac{u_1}{u_3}=f\left(\frac{u_2}{u_3}\right), \tag{10}$$

$$u_i=\int P_i dx_0+Q_i dx_1,$$

abbiamo differenziando

$$u_3(P_1-f'P_2)-P_3(u_1-f'u_2)=0.$$
$$u_3(Q_1-f'Q_2)-Q_3(u_1-f'u_2)=0.$$

Dunque è

$$\begin{vmatrix} P_1-f'P_2, & P_3 \\ Q_1-f'Q_2, & Q_3 \end{vmatrix}=0. \tag{11}$$

Dunque o gli integrali u_1, u_3 sono dipendenti, oppure sono dipendenti gli integrali u_2, u_3, oppure infine esiste un fascio lineare di curve algebriche

$$\frac{P_1Q_3 - P_3Q_1}{P_2Q_3 - P_3Q_2} = \text{const.} \tag{12}$$

lungo le quali $\frac{u_2}{u_3}$ è costante. Un ragionamento conosciuto (DE FRANCHIS) ci assicura l'esistenza del fascio.

Nel caso della superficie V_2 focale non degenere scegliendo appropriamente i parametri x_0, x_1 si arriva allo stesso risultato dell'esistenza di un fascio di genere $\geqq 2$.

Eccezionale è qui il caso nel quale la superficie V_2 è di traslazione, cioè quando le equazioni della W_3 assumono la forma

$$y_i = \varphi_i(x_0) + \sigma_i(x_1) + x_2\sigma_i'(x_1), \qquad i = 0, \ldots, r$$
$$\varphi_i(x_0) = 0, \qquad i = r-2, \ldots, r.$$

In questo caso non ho potuto dimostrare l'esistenza di un fascio di genere $\geqq 2$.

3. - Studiamo adesso il *terzo* caso, cioè il caso di una superficie $\overline{V}_2$ all'infinito. Esistono in generale due rette infinitamente vicine ad una retta l seganti la l in punti nel finito. Esistono dunque *due* superficie focali che possono degenerare in curve o (una) in un punto.

Se la superficie V_2 focale degenera in un punto P_0, abbiamo le equazioni

$$y_i = x_2\varphi_i(x_0, x_1), \qquad i = 0, \ldots, r \tag{13}$$

cioè W_3 è un cono. Si dimostra che i rapporti

$$\frac{u_{r-2}}{u_r}, \quad \frac{u_{r-1}}{u_r}$$

sono *dipendenti*. Secondo il teorema ausiliario esiste dunque un fascio di superficie algebriche sopra la V_3 di genere $\geqq 3$.

Se la superficie V_2 degenera in una curva focale C, abbiamo le equazioni

$$y_i = \varphi_i(x_0) + x_2\psi_i(x_0, x_1). \tag{14}$$

I punti

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}, \quad \psi_i, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial\psi_i}{\partial x_1}, \qquad i = 0, \ldots, r$$

sono in un piano, è dunque

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0} = \alpha\psi_i + \beta\frac{\partial\psi_i}{\partial x_0} + \gamma\frac{\partial\psi_i}{\partial x_1} \qquad i = 0, \ldots, r. \tag{15}$$

All'eccezione del caso $\beta = 0$ esiste un'*altra* superficie o curva focale. Ma nel caso $\beta = 0$ la V_3 è composta di ∞^1 piani.

Studiamo il caso di *due* curve focali C, C'. Abbiamo le equazioni

$$y_i=\varphi_i(x_0)x_2+\psi_i(x_1)(1-x_2), \qquad i=0,\ldots.. r. \tag{16}$$

Si dimostra l'esistenza di un fascio di genere $\geqq 2$.

Studiamo adesso il caso generale di una superficie V_2 focale non degenere. Le equazioni della varietà W_3 possono scriversi

$$y_i=\varphi_i(x_0, x_1)+x_2\frac{\partial\varphi_i(x_0, x_1)}{\partial x_0}, \qquad i=0,\ldots., r. \tag{17}$$

I punti

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_0\partial x_1}, \qquad i=0,\ldots., r$$

all'infinito sono in un piano. È dunque

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}=\alpha\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}+\beta\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_0^2}+\gamma\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_0\partial x_1}, \qquad i=0,\ldots., r$$

α, β, γ essendo funzioni di x_0, x_1. Nel caso $\gamma\neq 0$ esiste un'altra superficie focale V_2' che può degenerare in una curva focale C_2'.

Si prova che nel caso *generale* esiste un fascio di superficie di genere $\geqq 2$. Ma esistono casi *eccezionali* nei quali non ho potuto risolvere la questione.

4. - Supponiamo adesso il sistema $\overline{W}$ di piani $\overline{S}_2$ all'infinito composto di ∞^3 piani e studiamo il caso *B*), cioè il caso nel quale lo spazio S_τ osculatore in un punto della varietà $V_{\overline{W}}$ sopra la Grassmanniana rappresentante i piani $\overline{S}_2$ è di dimensione $\tau<8$.

1°) *Caso* $\tau=4$.

Secondo SEGRE e TERRACINI, $V_{\overline{W}}$ sta in uno S_4 oppure si compone di ∞^1 piani di una sviluppabile ordinaria.

Nel primo caso si può condurre per S_4 $\infty^{\binom{r+1}{3}-6}$ iperpiani corrispondenti a complessi lineari contenenti $\overline{W}$.

È dunque

$$\binom{r+1}{3}-3(r-2)=\binom{r+1}{3}-5,$$

cioè

$$r<4.$$

Nel secondo caso ai ∞^1 piani della sviluppabile corrispondono le stelle di piani dei $\overline{S}_3$ del $\overline{S}_r$ oppure le stelle di piani dei $\overline{S}_4$ per una retta $\overline{l}$ del $\overline{S}_r$. Il primo caso è escluso e nel secondo si prova che la W_3 è composta di ∞^1 piani S_2.

2°) *Caso* $\tau=5$.

Secondo TERRACINI si ha i casi seguenti:

a) V_W è in uno spazio S_5, ciò che è escluso se è $r\geqq 5$.

b) La V_W è composta con ∞^2 rette l cogli stessi T_3 tangenti lungo una retta. In particolare si può avere ∞^1 piani S_2 due infinitamente vicini segantisi in un punto.

c) Od infine la V_W giace sopra una sviluppabile V_4 (∞^1 di spazi S_3).

Studiamo il caso *c*). La V_4 non può appartenere alla Grassmanniana, talchè le superficie F della V_W sopra gli spazi S_3 sono incontrate delle rette di questi spazi in due punti al più. Le F sono dunque delle quadriche.

Considerando le coniche sezioni delle F coi piani S_2 della sviluppabile si dimostra che o la W_3 è composta di ∞^2 rette con ∞^2 T_3 tangenti, o con ∞^1 piani, od esistono infiniti spazi direttori del sistema $\overline{W}$ dei piani.

Rimangono dunque da studiarsi i casi

$$\tau=5, \text{ caso } b); \qquad \tau=6; \qquad \tau=7.$$

B. SEGRE (Roma - Italia)

SUI MODULI DELLE CURVE ALGEBRICHE

È noto che la varietà H i cui elementi sono le famiglie di curve algebriche di dato genere p, birazionalmente equivalenti, è algebrica ed irriducibile (1). Il prof. SEVERI, in una Nota lincea del 1915 (2), enunciò come probabile che la varietà H sia *razionale*, o quanto meno riferibile ad un'involuzione di gruppi di punti in uno spazio lineare (*unirazionale*, come per brevità diremo); o, in altri termini, che si possano ottenere modelli proiettivi piani di tutte le curve di dato genere p, da un'equazione in cui entrino razionalmente certi parametri variabili (i moduli) (3).

Egli soggiungeva che il fatto asserito è vero per $p<11$ (4) (per $p=1$ si vede anzi senz'altro che la varietà $H\infty^1$ è razionale), ed accennava che, appunto per $p<11$, la dimostrazione si ottiene subito considerando le curve piane minime di genere p. La dimostrazione cui l'A. alludeva, è manifestamente la seguente. L'ordine minimo di un modello piano di una curva a moduli generali di genere p, è il minimo intero n soddisfacente alla disuguaglianza

$$3(n-2)\geqslant 2p \quad (5).$$

Si hanno dunque per n, p, i seguenti valori

$$p=1,\ n=3;\ p=2,\ n=4;\ p=3,\ n=4;\ p=4,\ n=5;\ p=5,\ n=6;$$
$$p=6,\ n=6;\ p=7,\ n=7;\ p=8,\ n=8;\ p=9,\ n=8;\ p=10,\ n=9,$$

(1) Ciò segue subito ad esempio, dal modo come vengono introdotti i moduli nel Trattato di F. SEVERI, *Vorlesungen über algebraische geometrie* (Leipzig, Teubner, 1921), pp. 151 e 157. Può ovviamente supporsi $p>0$, poichè per $p=0$ non vi sono moduli, e la varietà H riducesi ad un solo elemento.

(2) F. SEVERI, *Sulla classificazione delle curve algebriche e sul teorema d'esistenza di Riemann,* Atti R. Acc. dei Lincei, serie V, 24 (1915), Nota I, p. 877, n. 2.

(3) Ciò è notoriamente possibile se ci si limita alle curve *iperellittiche* di genere p.

(4) Per errore di stampa nella Nota citata sta scritto $p\leqslant 11$ invece che $p<11$.

(5) È questo un ben noto risultato enunciato da BRILL e NOETHER, che nelle citate *Vorlesungen* del SEVERI (Anhang G, n. 10) si trova posto al riparo da ogni obiezione. Il SEVERI dimostra anzi (a p. 398) che la generica curva di quell'ordine e di quel genere possiede soltanto *nodi*.

e si verifica che il numero d dei nodi che la curva minima deve possedere per essere del genere voluto ($p<11$), è tale che $3d$ non supera $\frac{1}{2}n(n+3)$; perciò fino al genere $p=10$ si può costruire un modello piano minimo della curva più generale di genere p, assegnandone del tutto ad arbitrio i nodi.

Per un dato $p(p<11)$ le curve minime formano dunque un sistema continuo Σ, costituito da infiniti sistemi lineari di dimensione $k>0$, corrispondenti birazionalmente ai gruppi di d punti del piano (1). Il sistema Σ, pertanto, è *razionale.*

Le curve di Σ birazionalmente equivalenti ad una data, riempiono un sistema S, e la varietà W avente per elementi i sistemi S è birazionalmente equivalente ad H. Ora la varietà W è *razionale* od *unirazionale* (2), e tale è dunque H (3).

Il prof. SEVERI, richiamando la mia attenzione su questo procedimento, mi ha proposto di cercare s'esso possa estendersi a curve di genere superiore a 10, se cioè per $p>10$ si possan costruire sistemi razionali di curve a moduli generali del tipo di Σ. La risposta alla questione è negativa. In un prossimo lavoro, io dimostrerò infatti che *per* $p>10$ *la curva variabile in un sistema continuo* Σ *luogo di sistemi lineari i cui gruppi base sieno assegnabili ad arbitrio, è a* **moduli particolari** (4). All'uopo farò vedere che, se si supponessero le curve di Σ a moduli generali, sarebbe possibile di abbassare indefinita-

---

(1) Nello spazio lineare S_N, i cui punti rappresentano le curve di ordine n del piano, il sistema Σ ha per imagine una varietà V luogo di spazi *lineari* S_k, tale che per un punto generico della varietà passa un solo S_k generatore. E poichè la varietà è razionale quando se ne prendano come elementi quegli spazi lineari, *risulta razionale anche come luogo di punti* (il che, notoriamente, si vede considerando sulla varietà il sistema lineare ∞^k di varietà unisecanti degli spazi generatori, staccate su V dagli S_{N-k} per uno S_{N-k-1}).

(2) Invero il sistema Σ essendo razionale, le sue curve posson rappresentarsi coi punti di uno spazio lineare S_r, in cui i sistemi S hanno per imagini varietà algebriche M_s tali che per un punto generico di S_r ne passa una sola. Segando quelle M_s con uno spazio S_{r-s}, otteniamo in S_{r-s} un'*involuzione* birazionalmente equivalente all'insieme delle M_s, cioè dei sistemi S.

(3) Per $p=3$ il sistema Σ è addirittura un sistema *lineare.* Il ragionamento precedente trovasi sviluppato per tale caso in F. ENRIQUES - O. CHISINI, *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche,* vol. III (Bologna, Zanichelli, 1924), p. 376.

Però detto ragionamento, applicato alle curve di un sistema *lineare,* non si lascia estendere al di là del valore $p=6$ del genere, poichè io dimostrerò che *mentre per* $p\leqslant 6$ *esiston sistemi lineari di curve piane di genere* p *a moduli generali, sistemi lineari siffatti non esistono per* $p>6$.

(4) Per questa via, pertanto, non si riesce ad estendere oltre il valore $p=10$ del genere, la presunta razionalità od unirazionalità della varietà H.

Sotto forma meno precisa, ma più espressiva, la precedente proposizione può anche enunciarsi così:

Se una curva piana algebrica irriducibile, di genere $p>10$, *è* **a moduli generali,** *il gruppo dei suoi punti multipli occupa nel piano una posizione* **particolare.**

mente l'ordine delle curve del generico sistema lineare di Σ, mediante successive trasformazioni quadratiche, il che è manifestamente assurdo (1).

Considerazioni analoghe possono venir svolte per sistemi continui assai generali di curve piane di genere p, e precisamente per sistemi Ξ la cui curva generica individua un sistema lineare, la cui dimensione virtuale (che può essere negativa) non è inferiore a $-p$, per il che basta che quel sistema lineare sia *infinito*. A questo proposito farò vedere che le curve di un sistema Ξ siffatto, supposto il genere $p>36$, non possono essere a moduli generali, e quindi:

Le curve di un qualunque sistema continuo di curve piane di genere $p>36$ *a* **moduli generali**, *sono* **isolate**, *nel senso che una generica di esse individua un sistema lineare la cui dimensione effettiva è nulla; la dimensione virtuale di detto sistema lineare è* **inferiore a** $-p$.

Questo teorema verrà dimostrato per assurdo, ragionando su di un sistema Ξ qualunque in modo simile a quello indicato poc'anzi pel sistema Σ. Ora però si presenta un fatto nuovo, poichè i punti base del generico sistema lineare di Ξ non essendo necessariamente in posizione generica nel piano, posson anche esser fra loro infinitamente vicini, onde può accadere che non sia possibile di *abbassare l'ordine delle sue curve* mediante una sola trasformazione quadratica. Si supera questa difficoltà, mostrando che in tal caso lo stesso scopo può venir raggiunto per mezzo di una conveniente successione di trasformazioni quadratiche (di cui le prime innalzano l'ordine delle curve del sistema, e le ultime lo abbassano al di sotto del valore primitivo) (2).

---

(1) Giova avvertire che la validità della dimostrazione pei valori del genere compresi fra 11 e 36 (estremi inclusi), resta subordinata alla seguente proposizione: « *Un sistema « lineare di curve piane irriducibili i cui punti base sieno assegnati nel piano in modo « generico, è regolare* » proposizione che si ammette come ovvia in taluni sviluppi della teoria dei sistemi lineari di curve piane, ma della quale non son riescito fin'ora a trovare una dimostrazione esauriente.

(2) Tale processo è stato adoperato da O. CHISINI per vincere la difficoltà analoga che si presenta nel problema della decomposizione di una trasformazione cremoniana in fattori quadratici. [Tutto quanto precede trovasi compiutamente sviluppato nella Memoria *Sui moduli delle curve algebriche,* Annali di Mat., ser. IV, t. 7 (1929), p. 71].

O. ZARISKI (Baltimore - U. S. A.)

SOPRA IL TEOREMA D'ESISTENZA PER LE FUNZIONI ALGEBRICHE DI DUE VARIABILI

1. - Per le funzioni algebriche di due variabili si presenta un problema fondamentale d'esistenza, analogo a quello già risolto per le funzioni algebriche di una variabile.

Data una funzione z, definita implicitamente da un'equazione algebrica

$$f(x, y, z)=0, \tag{1}$$

si consideri nello spazio S_4 delle variabili complesse x e y la curva di diramazione D (superficie di Riemann, immersa nel S_4), lungo la quale due o più valori della funzione z coincidono. L'equazione di D si ottiene eliminando z tra la (1) e l'equazione

$$\frac{\partial f}{\partial z}=0,$$

e sopprimendo le eventuali curve di diramazione apparenti, che corrispondono a curve multiple della superficie (1). Questa curva D gode della proprietà che quando il punto (x, y) descrive un circuito unidimensionale, i rami della funzione z si riproducono, se il detto circuito si può ridurre a un punto, senza che esso incontri mai la curva D. Invece i rami della z subiscono generalmente una permutazione, se tale riduzione a un punto è impossibile.

Orbene, si domandi: data a priori la curva D, esiste una funzione algebrica z di cui essa sia curva di diramazione? Però, osserviamo subito che il problema così formulato manca di un senso determinato, se non si assegnano nello stesso tempo in un modo preciso le sostituzioni sui rami della funzione, in relazione ai varii circuiti unidimensionali. Si riesce a formulare il problema in una maniera precisa introducendo *il gruppo fondamentale* dello spazio residuo S_4-D. Per S_4-D intendiamo lo spazio dei punti di S_4 fuori di D. Il concetto di gruppo fondamentale di uno spazio è un importante carattere topologico, sfortunatamente poco studiato finora e anche difficile a studiarsi.

Fissiamo un punto O nello spazio S_4-D. Gli elementi del gruppo fondamentale G sono i varii circuiti unidimensionali tracciati in S_4-D, che partono dal punto O e sono percorsi in un senso determinato. Se g è un elemento di G, g^{-1} indica lo stesso circuito percorso nel senso inverso. Il prodotto $g_1 \cdot g_2$ è il circuito che si ottiene percorrendo successivamente i circuiti g_1 e g_2. In gene-

rale si ha $g_1 \cdot g_2 + g_2 \cdot g_1$. Due circuiti, riducibili per continuità uno all'altro (nello spazio considerato $S_4 - D$), *fisso rimanendo il punto O*, sono equivalenti e corrispondono a un medesimo elemento del gruppo G. Tutti i circuiti riducibili al punto O corrispondono all'identità del gruppo.

Si prova l'esistenza di un numero finito di *generatori di G*, cioè l'esistenza di un numero finito di elementi:

$$g_1, g_2, \ldots, g_n$$

tali che ogni altro elemento di G è un prodotto formato coi g_i. I generatori possono inoltre essere legati da un numero finito di *relazioni generatrici*, ciascuna del tipo

$$g_1^{r_1} g_2^{r_2} \ldots g_n^{r_n} g_1^{s_1} g_2^{s_2} \ldots g_n^{s_n} \ldots g_1^{t_1} g_2^{t_2} \ldots g_n^{t_n} = 1.$$

Gli elementi generatori e le relazioni generatrici definiscono il gruppo G, quale gruppo astratto, generalmente infinito.

È chiaro che basta assegnare le sostituzioni sui rami della funzione z, in relazione ai circuiti generatori. Queste però non possono prendersi ad arbitrio, ma debbono soddisfare alle stesse relazioni generatrici, perchè il primo membro di ognuna di tali relazioni indica un circuito riducibile al punto O.

In queste condizioni si domanda: le sostituzioni assegnate corrispondono a funzioni algebriche effettivamente esistenti? La risposta è affermativa, e ciò è mostrato del Prof. F. ENRIQUES in una sua memoria pubblicata negli « Annali di Matematica » (1), ove egli per primo ha posto il problema, pur senza introdurre esplicitamente il concetto di gruppo fondamentale.

Ma con ciò il teorema d'esistenza è lungi dall'essere stabilito in tutta la sua completezza. Si tratta appunto di studiare il gruppo fondamentale dello spazio residuo $S_4 - D$, o, brevemente, il gruppo fondamentale della curva D: trovare un sistema, possibilmente minimo, di generatori e scrivere le relazioni generatrici. Questa parte del problema, di natura puramente topologica, rappresenta anche l'elemento essenzialmente nuovo che subentra, quando si passa dal caso delle funzioni di una variabile a quello delle funzioni di due variablli, mentre invece la parte propriamente esistenziale, che importa un problema algebro-geometrico, si risolve, come ha mostrato ENRIQUES nella citata memoria, per mezzo del teorema classico d'esistenza di Riemann per le funzioni algebriche di una variabile.

2. - Cominciamo dalla questione dei generatori del gruppo G.

Si può mostrare con LEFSCHETZ (2) che ogni circuito unidimensionale passante per il punto fisso O è equivalente ad un circuito giacente sopra una retta

---

(1) *Sulla costruzione delle funzioni algebriche di due variabili possedenti una data curva di diramazione*, Annali di Matematica, serie IV, vol. I (1924).

(2) *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique*. Paris, Gauthiers-Villars, 1924.

arbitraria passante per O. Sopra questa retta (che è, notiamo, una sfera, un piano complesso), ogni circuito è equivalente ad una combinazione degli n cappii (n essendo l'ordine della curva D) g_1, g_2,...., g_n, che vanno dal punto O alle n intersezioni della retta con D. Quindi il gruppo G ammette un sistema — non necessariamente minimo — di n generatori. Si ha poi la prima evidente relazione generatrice:

$$g_1 g_2 \ldots g_n = 1. \tag{2}$$

Facciamo variare la retta considerata dentro il fascio di centro O. Anzi supponiamo per semplicità essere il detto fascio $x=$cost., di modo che O è il punto all'infinito sull'asse y. Per un cammino chiuso del punto x, gli n valori di y subiscono una permutazione, e supposto, p. es., che y_1 si muti in y_2, il cappio g_1 si muterà per continuità in un cappio g_2', trasformato di g_2. Avremo dunque

$$g_1 = g^{-1} g_2 g,$$

dove g è un certo prodotto dei g_i stessi ($i=1, 2, \ldots, n$).

Considerando tutti i possibili cammini chiusi nel piano x, a partire da un valore fisso di x, otteniamo tante relazioni del tipo ora scritto. In questo modo si ottengono tutte le relazioni generatrici.

Se la curva D è irreducibile, si riconosce che tutti i generatori sono i trasformati di uno tra essi. Da qui si può trarre una conseguenza immediata. Supponiamo che il gruppo G della curva *irreducibile* D sia abeliano. Allora si deduce che tutti i generatori sono eguali tra di loro, e per la (2) si conclude $g_1^n = 1$. Dunque, *se il gruppo fondamentale di una curva irreducibile d'ordine* n *è abeliano, allora esso è necessariamente il gruppo ciclico d'ordine* n.

Per la medesima ragione, se si aggiungono alle relazioni generatrici relazioni di permutabilità, il gruppo $\bar{G}$ che ne deriva è necessariamente ciclico d'ordine n. Si vede così, che partendo da curve di diramazione irreducibili, non si possono costruire funzioni z con un gruppo di monodromia abeliano non ciclico.

Per lo studio del gruppo fondamentale sono d'importanza i seguenti due principi, di cui il primo è evidente:

I. *Il gruppo fondamentale non cambia, quando la curva* D *con date singolarità varia con continuità, previsto che non nascano nuove singolarità, e che non avvenga l'avvicinamento di singolarità antiche*

II. *Se la curva* D *varia* **comunque** *e detta* $\bar{\text{D}}$ *la curva limite di* D, *i generatori del gruppo fondamentale di* D *soddisfano a tutte le relazioni generatrici del gruppo fondamentale di* $\bar{\text{D}}$. In altre parole, l'avvicinamento di punti semplici o multipli ha per sol effetto che cessano eventualmente di valere alcune relazioni generatrici, senza però che ne nascano delle nuove che non siano conseguenze delle relazioni antiche. Il gruppo fondamentale della curva limite è quindi eventualmente più generale del gruppo della curva primitiva.

Quanto più numerose e complicate sono le singolarità di una curva, tanto più ampia è la classe delle funzioni algebriche che l'ammettono come curva di diramazione.

Giovandomi dei due principi enunciati ho potuto dimostrare i teoremi seguenti:

a) Il gruppo fondamentale di una curva irreducibile d'ordine n *senza singolarità, è il gruppo ciclico d'ordine* n.

b) Il gruppo fondamentale di una curva spezzata, composta di k *curve senza singolarità e in posizione generica una rispetto all'altra, è abeliano. Esso ammette un sistema di* k *generatori* $g_1, g_2, \ldots, g_k$ *con una sola relazione generatrice*

$$\varrho g_1 = 1,$$

dove ϱ *è il m. c. d. degli ordini delle curve componenti.*

c) Il gruppo fondamentale di una curva irreducibile d'ordine n, *avente soli punti doppi a tangenti distinte, è ancora ciclico d'ordine* n.

3. - I teoremi enunciati mostrano che per ottenere gruppi fondamentali non ciclici, occorre passare a curve con cuspidi. Ci si rende facilmente conto del perchè l'esistenza di cuspidi influisca sulla natura del gruppo. Seguendo la variazione dei due cappii g_1, g_2, che si hanno da considerare nell'intorno di un punto doppio, si vede che nel caso di un punto doppio nodale essi soddisfano alla relazione $g_1 g_2 = g_2 g_1$, mentre nel caso di una cuspide si ha la relazione $g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2$ (1). Il nascere di cuspidi tende dunque a sopprimere le relazioni commutative tra i generatori.

Si trova che nel caso di una cuspide di n^{ma} specie i due generatori soddisfano alla relazione

$$(g_1 g_2)^n g_1 = g_2 (g_1 g_2)^n,$$

e che nel caso di un tacnodo di n^{ma} specie si ha invece la relazione

$$(g_1 g_2)^{n+1} = (g_2 g_1)^{n+1}.$$

Se si passa a singolarità d'ordine più elevato, le relazioni tra i cappii diventano man mano sempre più complicate. Così, p. es., nel caso di un punto r-plo a tangenti distinte, si hanno r cappii $g_1, g_2, \ldots, g_r$, legati tra di loro dalle r relazioni seguenti:

$$g_1 g_2 \ldots g_r = g_2 g_3 \ldots g_r g_1 = \ldots = g_r g_1 g_2 \ldots g_{r-1},$$

le quali ci dicono che l'elemento $g_1 g_2 \ldots g_r$ è permutabile con ognuno degli elementi g_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

La seguente costruzione, usata da alcuni autori, mette bene in rilievo la topologia dell'intorno di un punto singolare. Consideriamo nello spazio S_4 un intorno sferico di un punto singolare della curva D. La sfera a 3 dimensioni che limita

---

(1) Queste relazioni si trovano nella memoria citata di ENRIQUES.

l'intorno incontra la curva D lungo una o più linee chiuse, a seconda che per il punto singolare considerato passino uno o più rami della curva. Proiettando stereograficamente la sfera sopra lo spazio ordinario, la detta sezione si proietta in una o più curve, generalmente nodate e concatenate tra loro. Così, p. es., al punto doppio a tangenti distinte corrispondono due linee non nodate e concatenate.

La cuspide ordinaria dà luogo al noto nodo trifoglio (Dreiblattschlinge).

Uno studio topologico delle singolarità superiori si presenta come indispensabile, anche se si limita a considerare curve con sole cuspidi ordinarie, e ciò per la seguente ragione. Per determinare il gruppo fondamentale di una curva D d'ordine n è conveniente di far variare con continuità la curva per modo che essa venga ad avere precisamente n intersezioni riunite con una retta di un punto A. Se si può far in modo che A risulti un punto semplice della curva limite (flesso d'ordine $n-2$), allora si può provare facilmente che il gruppo di D è ciclico d'ordine n. Se invece A risulta necessariamente un punto r-plo, allora il gruppo di D ammette un sistema di r generatori, tra i quali si avranno poi le relazioni che caratterizzano il gruppo fondamentale della corrispondente o del sistema delle corrispondenti curve nodate dello spazio ordinario.

In base a queste osservazioni ho potuto provare che le curve irreducibili dei primi ordini da 1 fino a 4 hanno tutte il loro gruppo fondamentale ciclico, anche se posseggono cuspidi, eccezione fatta per la quartica tricuspidale, il cui gruppo fondamentale è generato da due elementi g_1, g_2, soddisfacenti alle relazioni seguenti: $g_1^2=g_2^2$; $g_1^4=1$; $(g_1g_2)^3=g_1^2$. Questa quartica, come è noto, è curva di diramazione della superficie cubica con retta doppia. Un altro esempio di una curva con un gruppo fondamentale non ciclico, è dato da una sestica con 6 cuspidi sopra una conica. Il gruppo corrispondente è generato da due elementi g_1, g_2, legati da due relazioni

$$g_1g_2g_1=g_2g_1g_2,$$
$$(g_1g_2)^3=1.$$

Le dette sestiche sono notoriamente curve di diramazione di superficî cubiche generali.

4. - Richiamo l'attenzione sopra due questioni importanti da risolvere:

a) Quale è il minimo numero di cuspidi che una curva d'ordine n *deve possedere affinchè il suo gruppo fondamentale non sia più ciclico?*

b) Il numero delle cuspidi basta a determinare univocamente il gruppo fondamentale di una curva di dato ordine, ovvero il gruppo dipende anche dalla posizione delle cuspidi?

Questa questione si presenta già nel caso delle sestiche con 6 cuspidi. Queste sestiche si distribuiscono in due distinti sistemi continui, ambedue ∞^{15}. Il primo sistema è costituito dalle sestiche con 6 cuspidi sopra una conica. Il secondo

sistema è costituito dalle sestiche con 6 cuspidi in posizione generica. Ebbene, le curve dei due sistemi hanno lo stesso gruppo fondamentale? In questo caso particolare sembra di dover rispondere negativamente, perchè i due sistemi non posseggono curve non degeneri a comune, che abbiano ancora non più di 6 cuspidi. Ma resta aperta la questione generale, sempre in vista del fatto che le curve di dato ordine e con dato numero di cuspidi si possono distribuire in più sistemi continui.

L. BRUSOTTI (Cagliari - Italia)

LE CURVE GOBBE ALGEBRICHE REALI COME MODELLI NELLA TOPOLOGIA PROIETTIVA DELL'ALLACCIAMENTO

1. - La parte reale di una curva C gobba algebrica reale, prescindendo da eventuali punti isolati, è costituita da un sistema Σ di k « circuiti », i quali, quando C sia priva di punti multipli a rami reali, saranno privi di singolarità e a due a due non secantisi.

Poichè di regola (e sempre quando l'ordine di C sia dispari) Σ possiede punti improprî, così lo studio dell'allacciamento (*Verkettung*) di Σ dovrà farsi nell'indirizzo della *Topologia projettiva*, cioè di quel capitolo dell'*Analysis situs* spaziale in cui non si fa distinzione essenziale fra punti proprî ed improprî (1).

Nella presente comunicazione mi propongo di dimostrare che reciprocamente, individuato sotto l'aspetto della Topologia projettiva un sistema Σ di k circuiti privi di singolarità e a due a due non secantisi, sempre esistono curve gobbe C algebriche reali (d'ordine abbastanza elevato) che coi sistemi dei rispettivi circuiti forniscono altrettanti *modelli* di Σ; brevemente che ogni sistema Σ ammette *modelli algebrici* (2).

Taluni risultati delle Memorie sopra citate (3) già lasciavano intravedere la possibilità di una siffatta proposizione ed in una recente Nota (4) io riuscivo a dimostrarla per i sistemi Σ ammettenti modelli al finito, restrizione questa inerente all'uso fatto della teoria delle *trecce* (5), la quale non è peranco stata estesa alla Topologia projettiva.

---

(1) In tale indirizzo si svolgono le mie ricerche contenute nelle due Memorie: a) *Sulle curve gobbe algebriche reali a circuiti concatenati* [Annali di Matematica, (3), 25, (1916), pag. 99-128]; b) *Sulle coppie di circuiti allacciati e sui loro modelli algebrici* [Memorie della R. Accademia Nazionale dei Lincei, classe di Scienze Fisiche Matematiche Naturali, Sez. 6ª, vol. III, Fas. II, pag. 18-76, (1928)].

(2) Anzi, secondo la terminologia usata nella citata Mem. b), *modelli algebrici completi*, cioè formati *con tutti* i circuiti di una curva algebrica (e non soltanto *con alcuni*).

(3) Cfr. specialmente Mem. a); §§ 1; 4; 6; e Mem. b) § 14.

(4) *Sull'esistenza di modelli algebrici per ogni sistema spaziale di* k *circuiti al finito* (Rendiconti R. Istituto Lombardo; vol. 61; 1928; pag. 177-186).

(5) Cfr. E. ARTIN: *Theorie der Zöpfe* (Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar des Hamburgischen Universität, Bd. IV: 1925; pag. 47-72); KLEIN-BLASCHKE: *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Berlin, Springer, 1926), §§ 88-93.

Ora posso prescindere da tale teoria e dimostrare la proposizione nella sua interezza, mediante un procedimento il quale, con quello seguito nella Nota ora ricordata, ha in comune soltanto l'andamento generale e cioè la divisione in due tempi: I. Costruzione di una proiezione piana del modello richiesto; II. Applicazione del metodo di JULIUS DE SZ. NAGY (1) alla determinazione del modello spaziale (2).

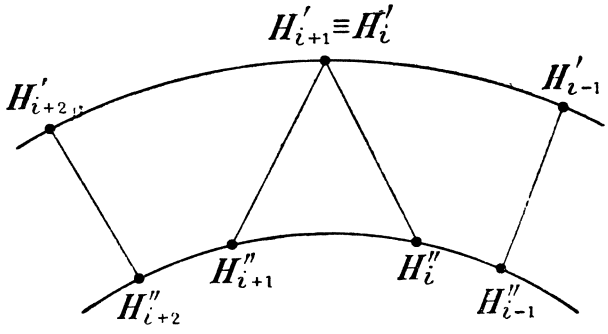


Fig. 1.

2. - Sia dunque Σ un sistema di k circuiti, privi di singolarità e a due a due non secantisi, individuato nel senso della Topologia projettiva; e sia Σ' la proiezione ortogonale di un suo modello sul piano reale π, genericamente posto rispetto al modello stesso; Σ' non avrà altre singolarità all'infuori di nodi, nè presenterà contatti colla retta impropria.

È allora possibile in π, fra i cerchi di centro O genericamente assegnato, fissare certi cerchi Ω in numero finito (fra i quali necessariamente quelli tangenti a circuiti o passanti per nodi di Σ') in modo che Σ' possa considerarsi come composto di *segmenti* « a », a due a due non secantisi e giacenti ciascuno in una delle regioni prodotte in π dai cerchi Ω, cogli estremi H sui cerchi stessi [*prima configurazione*]. Precisamente:

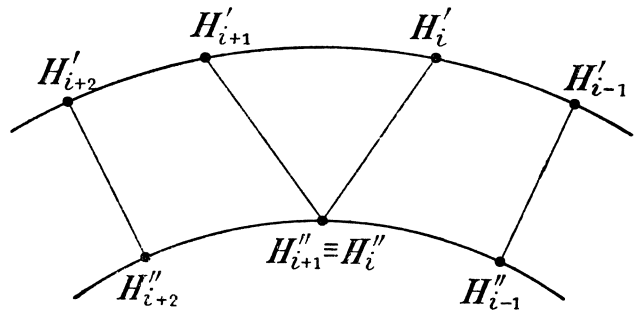


Fig. 2.

I. Nella regione R esterna a tutti i cerchi Ω si abbiano m segmenti $a=H_iH_{i+m}$ $(i=1,2,\ldots m)$, essendo i punti H_j ordinati su Ω^* (cerchio Ω di raggio massimo) secondo gli indici crescenti e ciascun segmento dotato di un sol punto improprio. Due

---

(1) J. DE SZ. NAGY: *Ueber die algebraische Darstellung der verknoteten und verketteten algebraischen Raumkurven* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereiniguug, 25, 1916, pag. 285-293). Il metodo si applica però con opportuni adattamenti.

(2) Un'esposizione meno succinta della dimostrazione troverà luogo in una Nota che verrà presentata per la pubblicazione nei Rendiconti del R. Istituto Lombardo.

consecutivi dei punti H_j (ed essi soli) possono coincidere in un contatto o in un nodo.

II. In ognuna delle corone circolari ciascun segmento a abbia un estremo sul cerchio esteriore ed uno sull'interiore; e gli estremi sian tutti distinti, fatta al più eccezione per una coppia di estremi su ciascun cerchio, il che avvenga allora dando luogo alla disposizione dell'una o dell'altra delle figg. 1 e 2.

III. Nella regione circolare non vi siano punti della configurazione.

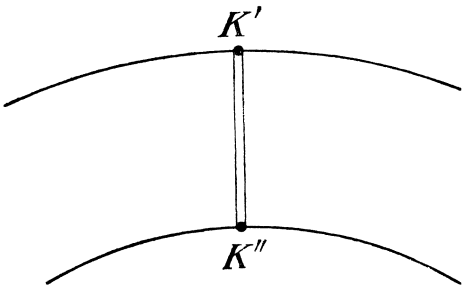


Fig. 3.

3. - Il passaggio alla *seconda configurazione* consiste nel far coincidere su ciascun cerchio Ω i punti H a coppie di punti consecutivi (nei punti K), nel lasciare del resto inalterato l'andamento generale in R, nel fare invece altrove coincidere a coppie anche i segmenti a (nei segmenti b).

Ciò può farsi con legge tale che in R si abbiano $\frac{m}{2}$ circuiti (bitangenti Ω^*) o se ne abbia uno solo (m—tangente Ω^*), secondo che m sia pari o dispari. I casi di figg. 1 e 2, a seconda della legge d'abbinamento, potranno dar luogo alla disposizione di fig. 3 oppure rispettivamente a quella di fig. 4 o di fig. 5.

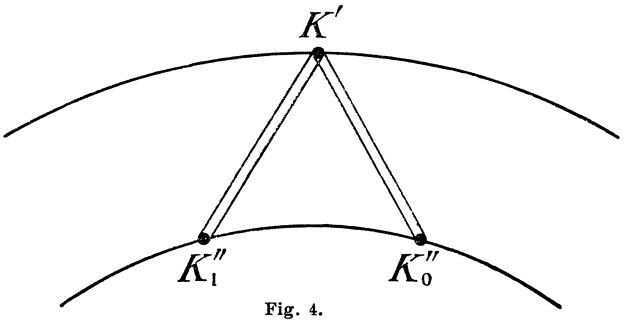


Fig. 4.

La disposizione di fig. 3 è pur quella corrispondente al caso di segmenti a con estremi tutti distinti.

Però l'arbitrarietà che ancora rimane nel realizzare la seconda configurazione permette di far sì che:

I. La parte della configurazione giacente in R sia costituita dai circuiti (m pari) o dal circuito (m dispari) di una curva θ algebrica reale.

II. I segmenti b nel caso di fig. 3 siano rettilinei.

III. I segmenti b di una coppia di fig. 4 (rispettivamente di fig. 5) si riuniscano in un solo arco di conica, arco avente gli estremi sul cerchio interiore (rispettivamente esteriore) e tangente all'esteriore (rispettivamente interiore).

4. - La *terza configurazione* si deduce dalla seconda lasciando inalterata la curva θ, ma applicando opportuni procedimenti di « piccola variazione » per

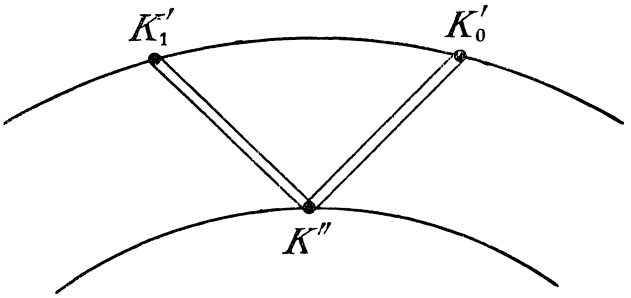


Fig. 5.

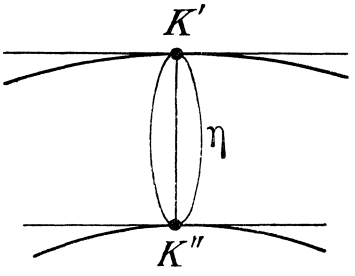


Fig. 6.

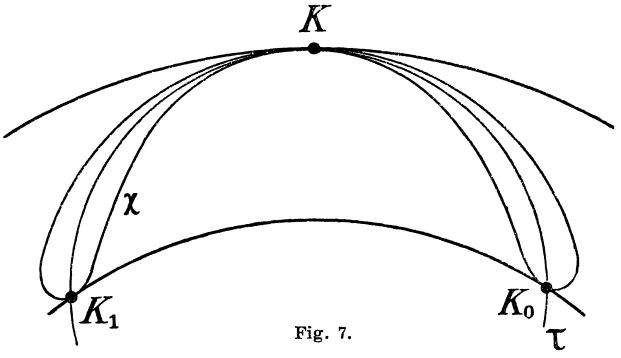


Fig. 7.

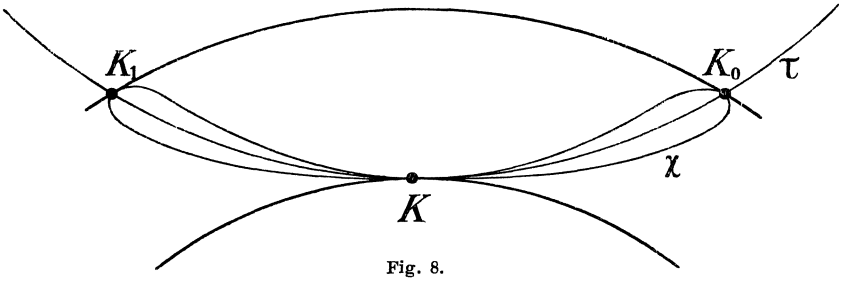


Fig. 8.

sdoppiamento, che sostituiscano a ciascun segmento b rettilineo una ellisse η, tangente nei punti K ai rispettivi cerchi Ω, ed a ciascuna coppia di segmenti b riuniti in un arco di conica una quartica χ con tacnodo nell'estremo comune e del pari tangente nei punti K ai rispettivi cerchi Ω.

Vedansi figg. 6, 7, 8.

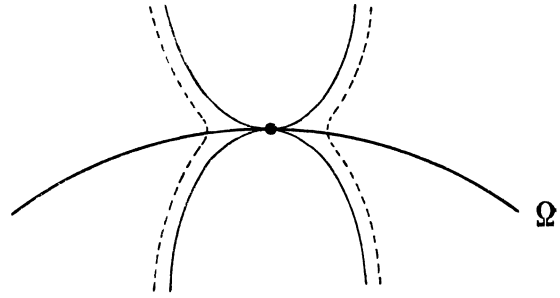


Fig. 9.

Gli sdoppiamenti neutralizzano gli abbinamenti introdotti passando dalla prima configurazione (da Σ') alla seconda; onde la *terza configurazione* si identifica, *all'infuori degli intorni dei punti K*, colla prima sotto l'aspetto topologico. Di più presenta il vantaggio di essere costituita dai circuiti della curva *algebrica* Γ composta con θ, colle η, colle χ.

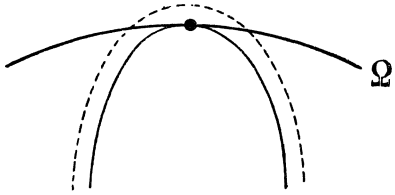


Fig. 10.

5. - L'eccezione riflettente gli intorni dei punti K si toglie col passaggio alla *quarta configurazione.*

Si introduca la curva $\overline{\Gamma}$ composta con θ, colle η, colle χ e (quando occorra) con un'ulteriore componente reale priva di punti reali. È allora lecito applicare alla $\overline{\Gamma}$ un procedimento di « piccola variazione » algebrica che restituisca anche nell'intorno dei punti K l'assetto della *prima configurazione* (cioè di Σ'). Vedansi perciò figg. 9, 10, 11, 12, 13 per i varî casi possibili nei singoli punti K, coll'avvertenza che fuori dei loro intorni la trasformata si svolge esternamente alle η ed ai cappî delle χ.

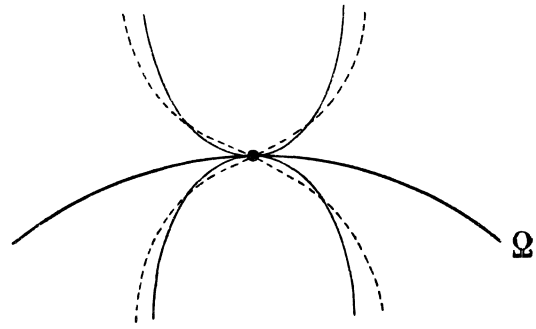


Fig. 11.

La trasformata (i cui circuiti costituiscono la *quarta configurazione*) potrà pensarsi dunque come possibile proiezione C' (ortogonale, su π) di una curva C gobba algebrica reale che fornisca un modello algebrico di Σ ed (esaurita la prima parte del procedimento) rimane a dimostrarsi l'esistenza effettiva di una tale curva C.

6. - Assunto π come piano xy in un riferimento spaziale cartesiano ortogonale, sia:

$$F(x, y)=0$$

l'equazione in π di C'.

La C dovrà determinarsi in modo che:

I. Ogni punto (reale) semplice di C' sia proiezione di un sol punto di C, proprio od improprio, secondo che tale sia quello di C'.

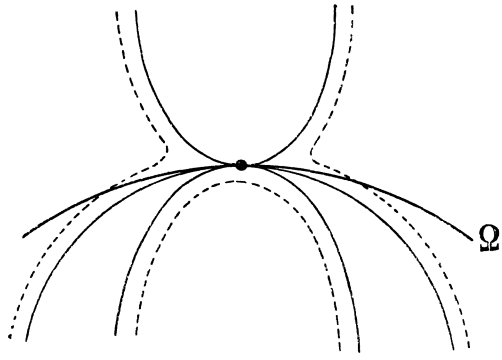


Fig. 12.

II. Ogni nodo (reale) di C' sia proiezione di due distinti punti proprî di C e, dei due rami di C' uscenti da un nodo, quello corrispondente al ramo di Σ' proiezione del ramo *superiore* (rispettivamente *inferiore*) di Σ, sia proiezione del ramo superiore (rispettivamente inferiore) di C.

III. Nessun ramo *reale* di C passi per il centro di proiezione (punto improprio della normale a π) (1).

Siffatte condizioni sono intese a garantire l'identità topologico-projettiva del sistema dei circuiti di C col proposto sistema Σ, ed esse possono essere soddisfatte assumendo come curva C quella fornita dalla rappresentazione monoidale

$$\begin{cases} F(x, y)=0 \\ z=\dfrac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)} \end{cases}$$

ove

$$\varphi(x, y)=0, \quad \psi(x, y)=0$$

siano in π *opportune* curve reali dello stesso ordine, la prima dotata di nodi e la seconda di punti isolati nei nodi della C' (riducendosi anzi per la seconda la parte reale a tali punti isolati).

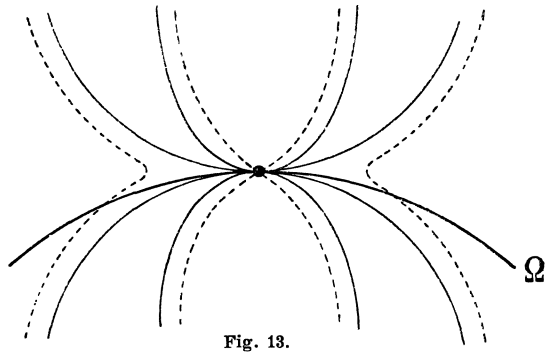


Fig. 13.

Il teorema è così dimostrato.

7. - Gioverà tuttavia qualche osservazione:

I. Il risultato può anche enunciarsi affermando che ogni sistema Σ può essere studiato su una rappresentazione algebrica del tipo:

$$F(x, y)=0, \quad z=R(x, y),$$

(1) Tale centro di proiezione potrà tuttavia essere punto isolato di C.

essendo F un polinomio ed R una funzione algebrica razionale (1), purchè le indeterminazioni della R vengano risolte con criterî di passaggio al limite.

II. E può anche Σ studiarsi su una rappresentazione fornita da un sistema di equazioni algebriche a coefficienti reali

$$f_i(xyz)=0 \qquad i=1, 2,....$$

in numero non superiore a quattro [essendo tale rappresentazione lecita per ogni curva gobba algebrica reale].

III. Le ricerche sui modelli algebrici di Σ mantengono il loro interesse quando vengono prefissati certi caratteri algebrici (ordine, genere...). In particolare per ogni sistema Σ ha interesse il problema del modello algebrico (o dei modelli algebrici) *d'ordine minimo* (2); oppure *di genere minimo.*

IV. L'ordine minimo, ed, entro l'ordine minimo, la considerazione dei modelli (in numero finito) distinti in senso topologico-projettivo, permettono una classificazione ed enumerazione dei tipi di sistemi Σ (il cui insieme risulta così numerabile).

V. Il procedimento svolto nei numeri da 2 a 6 mediante il quale, dato Σ', si costruisce la C', è indipendente dall'essere Σ' proiezione di Σ e permette di enunciare il seguente teorema, già interessante per sè: *Dato nel piano un sistema Σ' di circuiti, il quale non presenti altre singolarità all'infuori di nodi, esiste sempre una curva piana algebrica reale C', la cui parte reale è identica a Σ' sotto l'aspetto della topologia projettiva.*

VI. Nel ricordato procedimento, quando il numero dei circuiti dispari di Σ' sia pari, al fascio di cerchi Ω si può sostituire con vantaggio un fascio di rette. Ciò non è invece possibile quando il numero dei circuiti dispari sia dispari, avendosi allora su ciascuna retta un numero dispari di punti H, il che impedisce il passaggio per abbinamento dalla prima alla seconda configurazione. Si è quindi preferito, per uniformità far uso dei cerchi Ω in ogni caso.

---

(1) Ed i coefficienti numeri reali.

(2) L'ordine minimo risulta in generale differente, secondo che si imponga o non si imponga la *irriducibilità* della curva. Così per il sistema di due circuiti identificabile con quello di due rette sghembe tale ordine minimo sarà rispettivamente 4 o 2.

B. N. DELAUNAY (Leningrad - U. S. S. R.)

UEBER DIE REGULÄRE TEILUNG DES 4-DIMENSIONALEN RAUMES

Die Parallelopipede und die regulären 6-eckigen Prismen haben die Eigenschaft den ganzen Raum in paralleler Stellung lückenlos auszufüllen. Welche sind die allgemeinsten untereinander gleiche konvexen Körper die diese Eigenschaft haben?

Diese Frage wurde Gegenstand der Untersuchungen von FEDOROFF (1), KELVIN (2), MINKOWSKI (3) und VORONOÏ (4). Die Aufsuchung aller dieser Körper, welche man Paralleloeder nennt, ist von grosser Wichtigkeit für die Zahlentheorie und die Kristallographie. Es ist leicht zu zeigen das dies Polyeder sind. Ich werde eine solche, reguläre, Raumteilung normal nennen wenn alle seine Paralleloeder nur durch ganze Seitenräume einander berühren, d. h. zwei Paralleloeder der Teilung haben alle Punkte eines Seitenraumes gemein wenn sie einen inneren Punkt desselben gemein haben. Alle normalen Teilungen des 3-dimensionalen Raumes wurden von Federoff gefunden, er stellte aber eigentlich noch eine weitere Forderung, eben die, dass die Paralleloeder Körper mit Mittelpunkten seien. Den recht schwierigen Beweis der Existenz der Mittelpunkte zu geben ist es erst Minkowski gelungen. Voronoï hat eine höchst elegante und tiefsinnige Methode gefunden mit deren Hilfe er einen endlichen Algorithmus für die Bestimmung aller normalen Paralleloeder für jede Dimensionszahl n des Raumes gibt, aber dies nur für den Sonderfall wenn die Teilung primitiv ist. Unter einer primitiven Teilung versteht Voronoï eine solche normale Teilung bei welcher in allen Seitenräumen ihrer Paralleloeder die kleinste, für das gegebene n mögliche, Anzahl der Paralleloeder zusammentrifft. Z. B. sind für $n=2$ die regulären 6-ecke primitive und die Parallelogramme-nicht primitive Paralle-

---

(1) FEDEROFF. *Elements de la theorie des figures,* St.-Petersburg (1885) (russisch). *Reguläre Plan und Raumteilung,* Abh. der K. Bayer. Ak. der Wiss. II Cl. XX Bd. II Abt. München, 1899.

(2) KELVIN. Roy. Soc. Proc. 1894. Vol. LV, pp. 1-16 und Papers Vol. V, p. 333.

(3) MINKOWSKI. *Allgemeine Lehrsätze über convexe Polieder,* Ges. Abh. II S. 109 (1897) und *Geometrie der Zahlen.*

(4) VORONOÏ. *Recherches sur les paralléloèdres primiltfs.* Crelle 1909 Bd. 134, 136.

loeder, weil es sich in den Eckpunkten 4 Parallelogramme, bei einer normalen Teilung der Ebene in Parallelogramme, zusammentreffen.

Es sei im n-dimensionalen Raume ein n-dimensionales Punktgitter gegeben. Dann entspricht jedem Gitterpunkte das Gebiet der Raumpunkte, welche zu

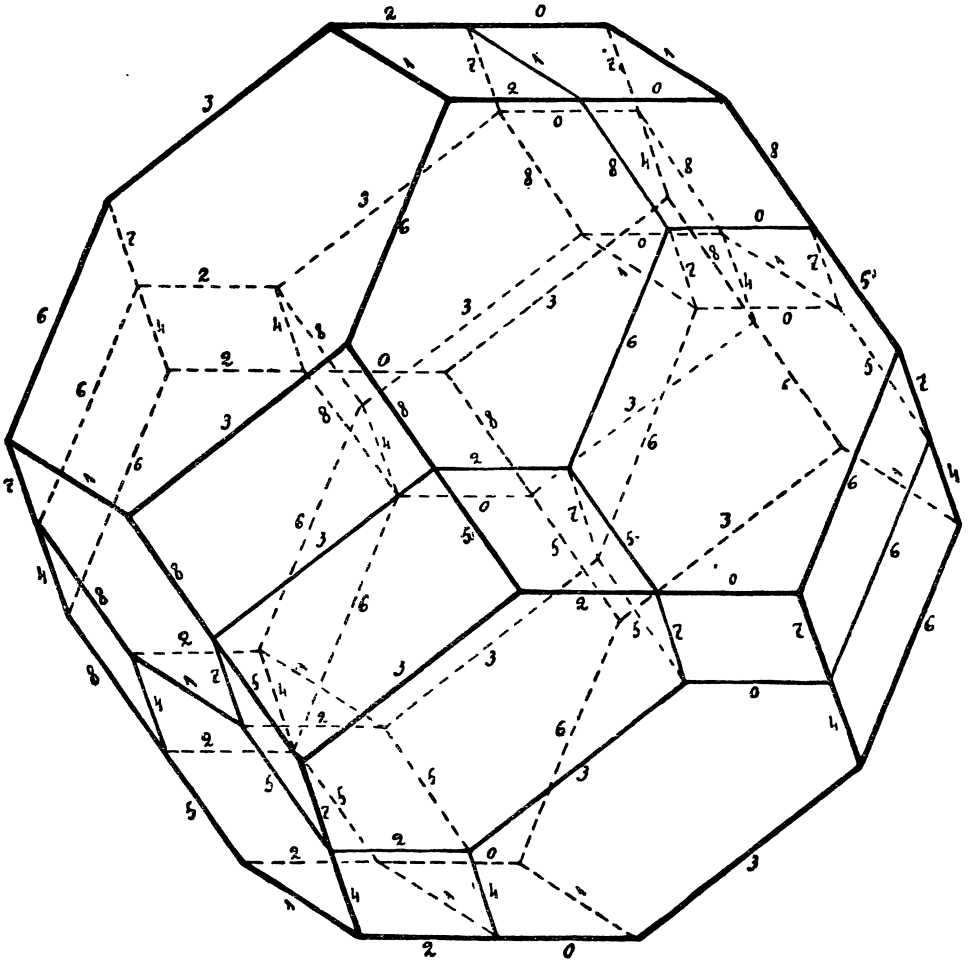


Fig. 1.

diesem Gitterpunkte näher sind als zu jedem anderen. Solche Gebiete nenne ich Dirichletsche Bereiche des Gitters. Für primitive Paralleloeder beweist Voronoï den Satz, dass es immer solche eine affine Transformation gibt welche diese Paralleloeder in Dirichletsche Bereiche des (Transformierten) Punktgitters ihrer Mittelpunkte verwandelt. Es wird so die ganze Frage auf die Teorie der Quadratischen Formen reduciert. Diese Methode kann noch etwas verallgemeinert werden,

wie das neurdings Jitomirski zeigte, man sieht aber nicht wie sie vervollständigt sein muss um die vollständige Lösung im allgemeinen Falle der nichtprimitiven Paralleloedern zu geben.

Ich habe tiefgehende Untersuchungen über die reguläre Teilung des 4-dimen-

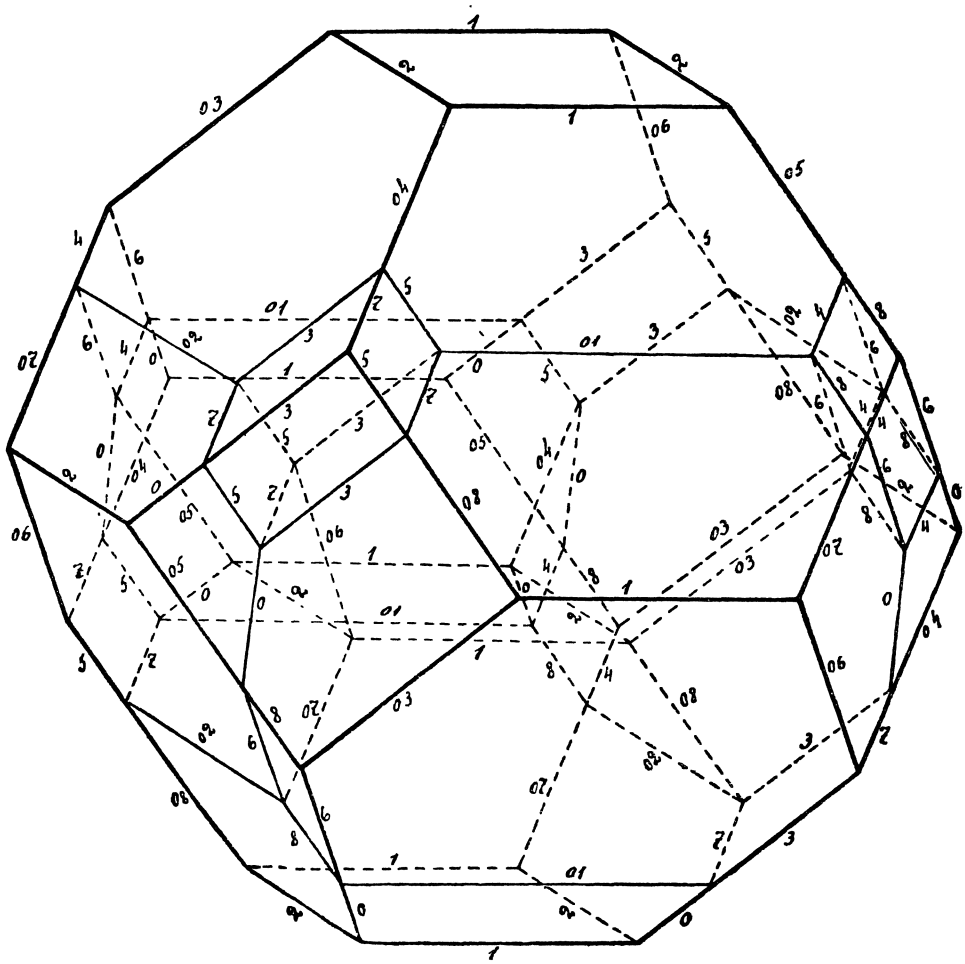


Fig. 2.

sionalen Raumes aufgestellt. Es ist mir zu zeigen gelungen das jeder 4-dimensionale Paralleloeder sich durch ein Rekursionsverfahren aus einem 3-dimensionalen erhalten lässt. Ob es auch für die 5-te und die höheren Dimensionen so ist, kann ich noch nicht entscheiden. Dieses Rekursionsverfahren ist das folgende: Sei eine normale Teilung der Ebene gegeben, seine Paralleloeder (Parallelogone) sind, wie bekannt, Parallelogramme oder 6-ecker mit Mittelpunkten. Wenn wir

auf allen diesen Vielecken gleiche Prismen konstruiren, für welche alle diese Vielecke die unteren Basen bilden, so werden alle oberen Basen eine Ebene und alle Prismen selbst eine Schichte bilden. Wenn wir eine ebensolche Schichte von Prismen auf diese erste auflegen, aber so dass sie eine seitliche parallele

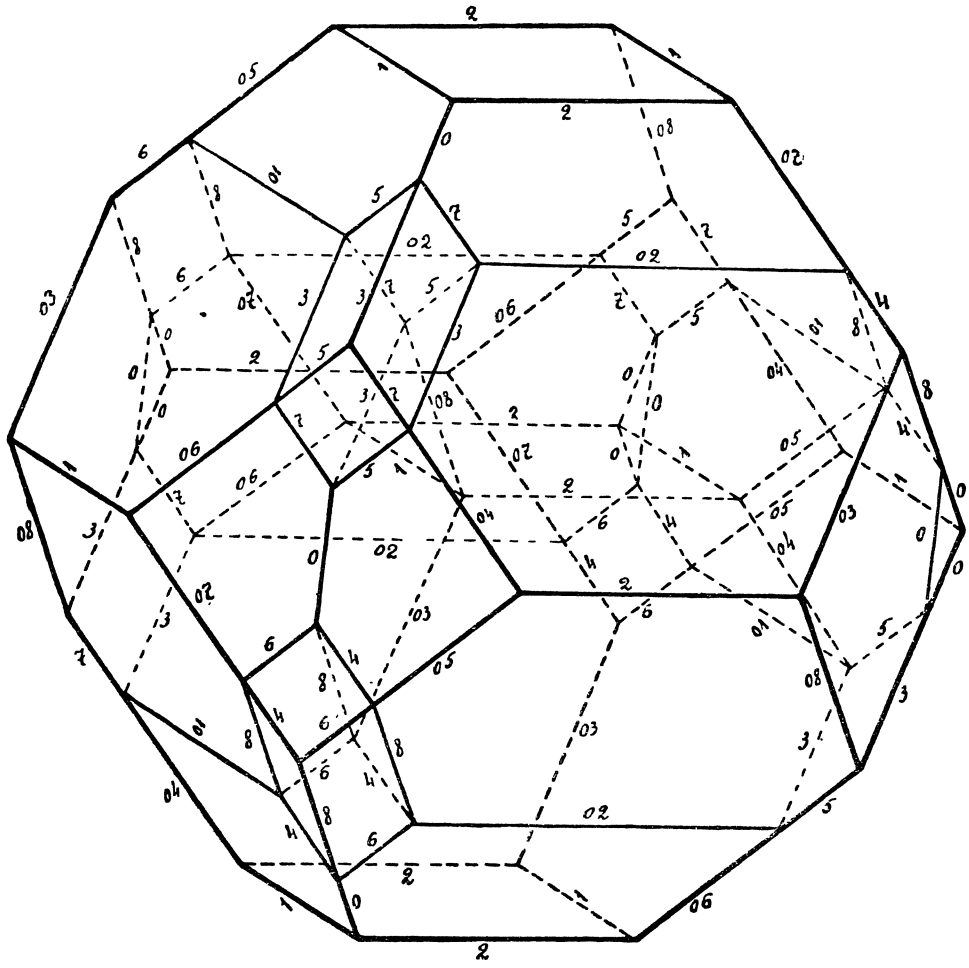
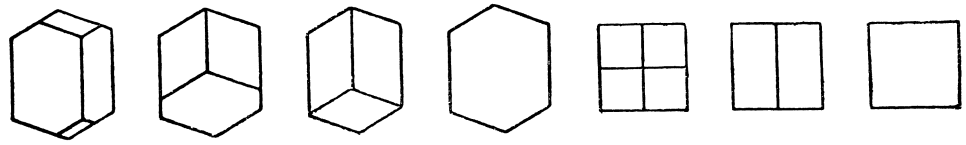


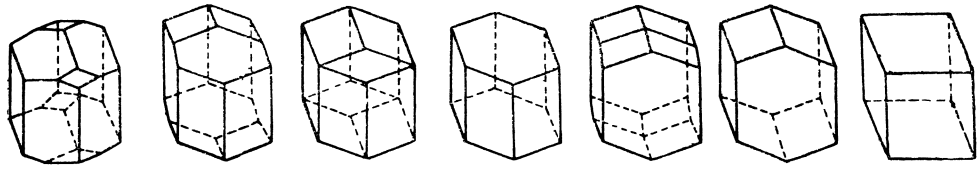
Fig. 3.

Verschiebung in Bezug auf dese erste Schichte erhält, und auf diese zweite eine dritte Schichte mit derselben Verschiebung, u. s. w., auflegen, so werden in jede obere Basis einer Prisme mehrere untere Basen der Prismen der nächsten Schichte eingreifen und sie so in partielle Vielecke zerteilen. Wenn wir alle diese partielle Vielecke ein wenig gegeneinander neigen, so dass sie verschiedene Flächen bilden, so wird bei jeder Prisme die obere und auch die untere Basis

durch eine Kalotte aus einem Komplex von diesen Flächen ersetzt. Ob und welche solche Neigungen möglich sind, das ist eine weitere Frage. Man kann aber leicht zeigen dass z. B. jede 3-dimensionale normale Teilung sich so aus einer 2-dimensionalen erhalten lässt. Um die Projectionen seiner Paralleloeder parallel zu den Seitenkanten der Prismen zu erhalten, genügt es auf einer und derselben Ebene zwei gleiche und parallele aber gegeneinander verschobene normalen Teilungen dieser Ebene zu betrachten. So erhält man die folgenden 5 Projectionen:



und also die folgende 5 dreidimensionale Paralleloeder:

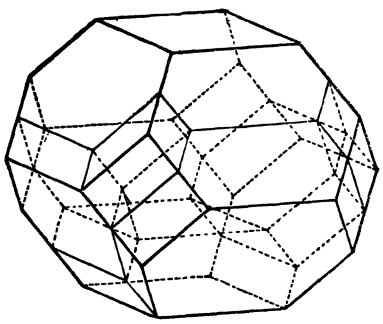


Es ist mir durch tiefgehende Untersuchungen im 4-dimensionalen Raume zu beweisen gelungen (1), das für einjeden 4-dimensionalen Paralleloeder $\square$ auch es solche Kantenrichtungen gibt (nicht alle seine Kantenrichtungen!), für welche er in derselben Weise sich aus einem 3-dimensionalen Paralleloeder erhalten lässt. Es erwies sich daraus u. a. dass für alle 4-dimensionalen Paralleloeder auch der Satz von Voronoï über die Möglichkeit der Verwandlung in Dirichletsche Bereiche richtig ist. Ich habe alle 4-dimensionalen Paralleloeder $\square$ bestimmt. Es ergab sich das es deren 51 gibt. Sie sind alle durch ihre Projectionen in den 3-dimensionalen Raum auf den folgenden Tafeln dargestellt. Die Paralleloeder N. 1, 2 und 3 sin die primitive, und alle anderen ihre Grenzfälle.

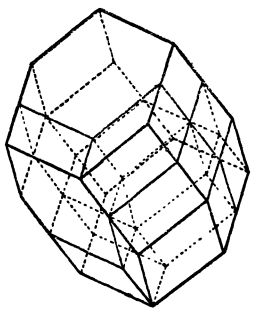
Um die Figuren zu verstehen, muss man folgendes bemercken: auf jeder Figur ist ein konvexer Polyeder $\overline{\square}$ dargestellt, welcher aus Teilpolyedern besteht, das ist die Projection eines $\square$, (1) die Teilpolyeder sind die Projectionen der Seitenpolyeder des $\square$, welche die, in Bezug auf die Projectionsrichtung, obere Kalotte des $\square$ bilden, (2) die Seitenpolyeder, welche die untere Kalotte von $\square$ bilden, sind dieselben aber simmetrisch zu diesen gelagert, (3) die inneren Flächen, Kanten und Ecken der Figur sin die Projectionen der Flächen, Kanten und Ecken in welchen sich die Polyeder der oberon Kalotte von $\square$ zusammentreffen, (4) die äusseren Flächen des ganzen Polyeders $\overline{\square}$ der Figur sind die Projec-

(1) Bulletin de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. (1929), S. 79-172.

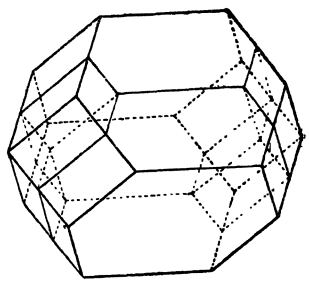
tionen der Zonalen Seitenpolyedern des $\sqcap$, d. h. von seinen Seitenpolyedern welche der Proiectionsrichtung parallel sind, (5) die Teilpolygone dieser Flächen sind die Projectionen der Seitenflächen dieser Seitenpolyeder, in welchen sie sich mit den Seitenpolyedern, die die obere Kalotte von $\sqcap$ bilden, zusammentreffen, (6) die Kanten (äusseren) des Polyeders $\overline{\sqcap}$ sind die Projectionen der Seitenflächen in welchen sich diejenigen Zonalen Seitenpolyedern des $\sqcap$ zusammentreffen deren Projectionen diejenigen Seitenflächen von $\overline{\sqcap}$ sind, welche in diesen Kanten von $\overline{\sqcap}$ sich zusammentreffen, (7) die Ecken des $\overline{\sqcap}$ (die äusseren Ecken) sind die Projectionen der zonalen Kanten von $\sqcap$. Um einen zonalen Polyeder zu reconstruiren genügt es nur zu bemercken: 1° dass jeder Seitenpolyeder von $\sqcap$ eine Mittelpunkt, 2° immer eine geschlossem Zone von seinen Seitenflächen besitzt, und 3° diese Zone sich in der Projection durch die Kanten der entsprechenden Seitenfläche von $\overline{\sqcap}$ darstellt. Man hat also dieselbe Reconstruction zu machen, wie wenn man von einer der Projectionen der Fig. 1 zu einem der Polyeder der Fig. 2 übergehen will.



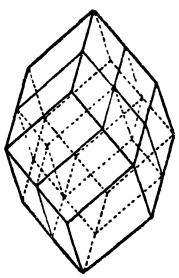
4



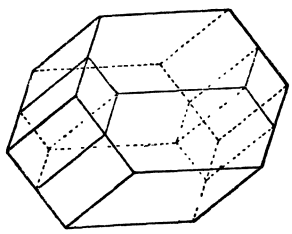
5



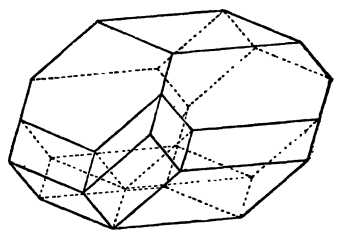
6



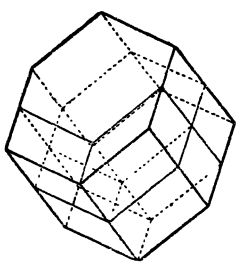
7



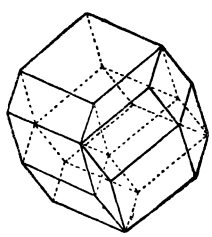
8



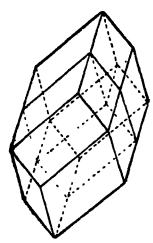
9



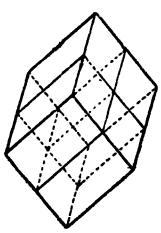
10



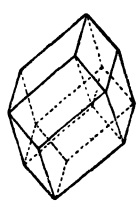
11



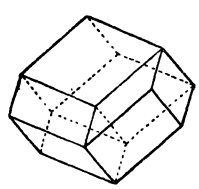
12



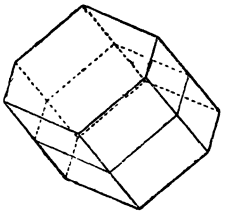
13



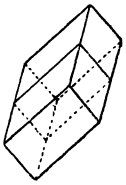
14



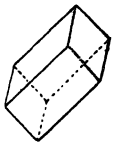
15



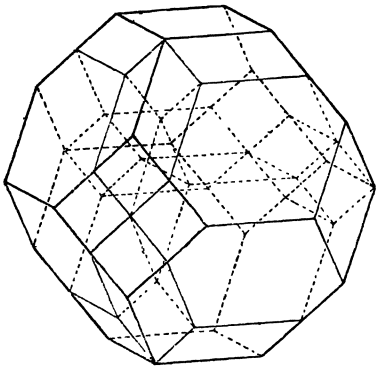
16



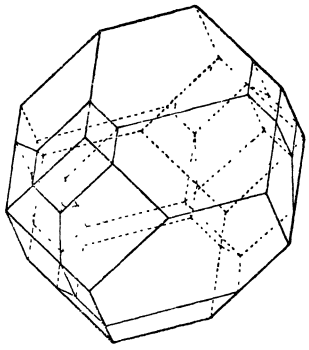
17



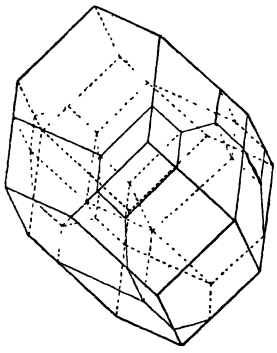
18



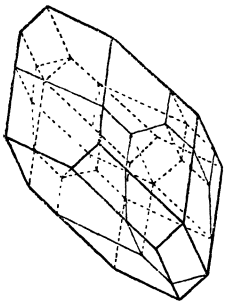
19



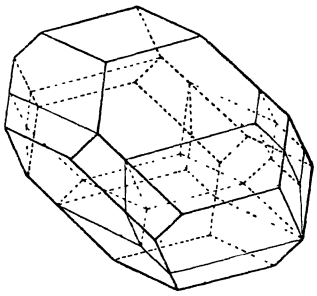
20



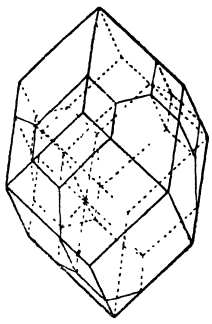
21



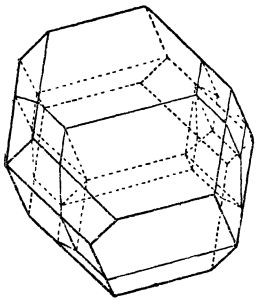
22



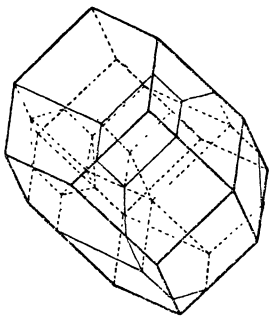
23



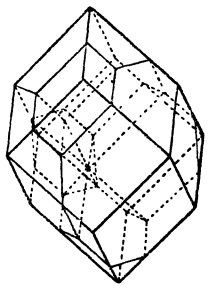
24



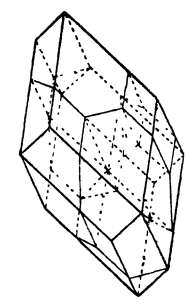
25



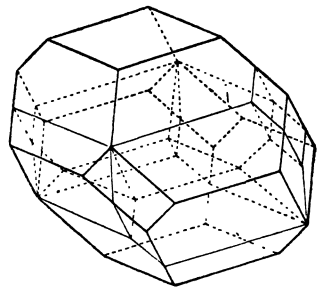
26



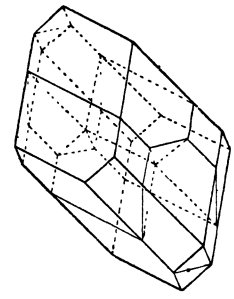
27



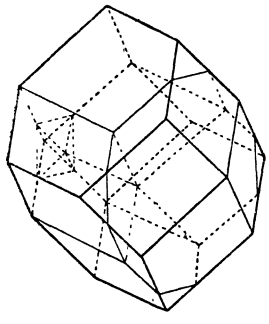
28



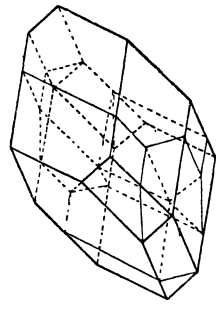
29



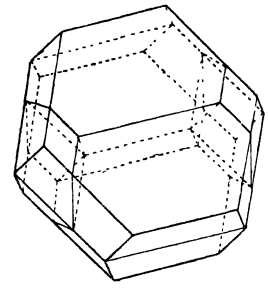
30



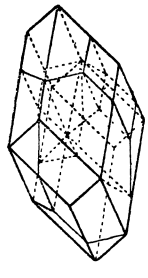
31



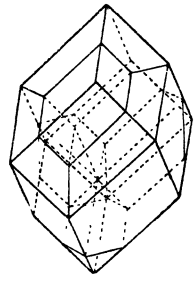
32



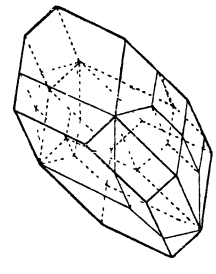
33



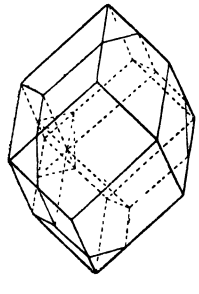
34



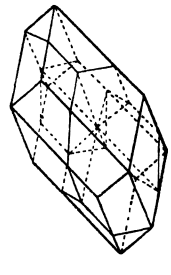
35



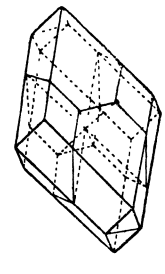
36



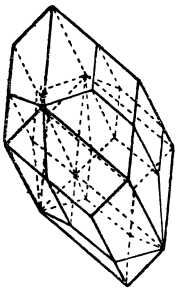
37



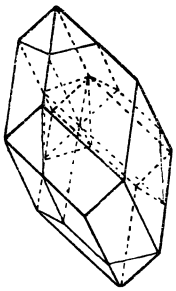
38



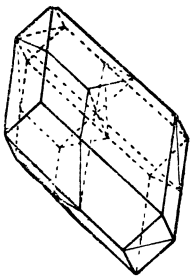
39



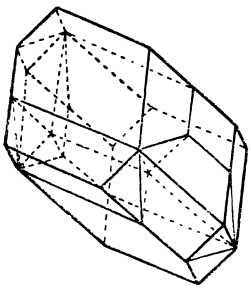
40



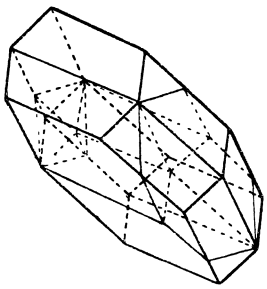
41



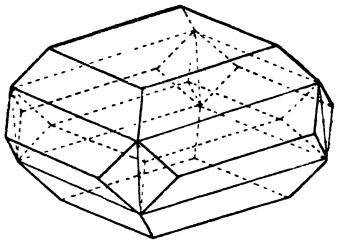
42



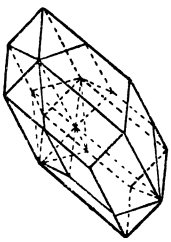
43



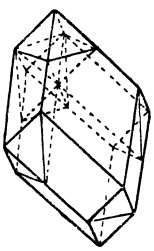
44



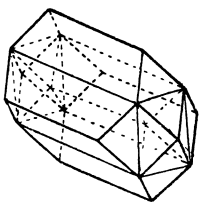
45



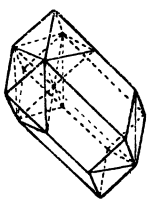
46



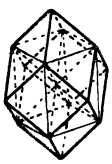
47



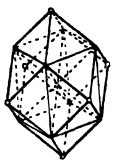
48



49



50



51

G. ALBANESE (Palermo - Italia)

LA TEORIA DELLA BASE E L'ANALYSIS SITUS

1. - In questo breve rapporto vogliamo esporre lo sviluppo della teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica, nei suoi aspetti analitici e topologici, e dei principali problemi che ad essa si collegano. Alcuni di questi problemi che toccano varie branche della matematica, meritano ulteriori sviluppi, altri sono ancora da risolvere; ed assieme offrono un campo di studi vasto e quanto mai attraente.

Il fondatore ed il principale cultore della teoria della base è il SEVERI, ma ad essa si collegano importanti ricerche di PICARD, POINCARÉ, BAGNERA, DE FRANCHIS, SCORZA, LEFSCHETZ, etc., e, in misura molto minore, due miei lavori del 1915 e del 1927 (1).

---

(1) SEVERI: *a) Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e certe classi di superficie,* « Memorie della R. Acc. delle Scienze di Torino », (2), t. LIV, 1903;

b) Sulla totalità delle curve algebriche tracciate sopra una superficie algebrica, « Math. Ann. », B. 62, 1906;

c) La base minima pour la totalité des courbes tracées sur une surface algébrique, « Ann. de l'École Normale », 3e série, t. XXV, 1908;

d) Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve tracciate sopra una superficie algebrica, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. XXX, 1910;

e) Sulla teoria degli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica, sette note dei « Rend. della R. Acc. dei Lincei », 5a serie, vol. V, 1921.

PICARD et SIMART: *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes,* t. II, chap. VII et suivants.

POINCARÉ: *Sur les courbes tracées sur une surface algébrique,* « Ann. de l'Éc. Normale », 3e série, vol. XXVII, 1910.

BAGNERA e DE FRANCHIS: *Sulle superficie iperellittiche,* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », vol. XXX, 1916.

SCORZA: *Le matrici di Riemann,* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », t. XLI, 1916.

LEFSCHETZ: *L'Analysis situs et la géométrie algébrique,* Collection BOREL. Gauthier-Villars, Paris, 1924.

ALBANESE: *a) Intorno ad alcuni concetti e teoremi fondamentali sui sistemi algebrici di curve sopra una superficie algebrica,* « Ann. di Mat. », t. XXIV, S. III, 1915.

b) Sul teorema fondamentale della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica, « Rend. R. Acc. dei Lincei », serie 6a, vol. V, 1927.

2. - Preliminari sui sistemi di curve di una superficie algebrica.

Sistemi algebrici effettivi. - Converrà anzitutto richiamare taluni concetti relativi ai sistemi di curve, appartenenti ad una superficie algebrica ed irriducibile F.

E in primo luogo ricordiamo che sopra F, una curva A appartiene (NOETHER) ad uno ed un solo sistema lineare $|A|$ e che due curve A e B, di uno stesso sistema lineare, si dicono linearmente equivalenti e si scrive $A \equiv B$ oppure $A - B \equiv 0$.

Se F è irregolare ($q = p_g - p_a > 0$) esistono su di essa sistemi *algebrici* di curve non contenute (totalmente) in nessun sistema lineare.

Un tale sistema Σ si può considerare come totalità delle sue curve e come totalità dei suoi sistemi lineari; si possono cioè considerare come elementi di Σ o le sue curve o i suoi sistemi lineari.

Un sistema completo Σ si compone di un numero finito di sistemi completi S, irriducibili come insieme di sistemi lineari. E a sua volta ogni tale sistema S si compone di un numero finito di sistemi completi S', irriducibili come totalità di curve.

La dimensione dell'insieme dei sistemi lineari, contenuti in un sistema completo di tipo S o di tipo S', è minore od uguale dell'irregolarità q della superficie (CASTELNUOVO, SEVERI) e vi sono sistemi S per i quali il massimo è raggiunto (CASTELNUOVO-ENRIQUES, POINCARÉ-SEVERI).

3. - *Sistemi algebrici virtuali.* - Sia S_c un sistema continuo completo composto d'∞^q sistemi lineari distinti, ed A una qualunque curva (anche virtuale) di F.

Si chiama sistema virtuale $\{A\}$ (individuato da A) la totalità delle curve degli ∞^q sistemi lineari $|A + C - C'|$ che si ottengono al variare comunque di C e C' in S_c (ALBANESE *a*)).

La definizione è indipendente dal sistema S_c di partenza.

Nel campo effettivo una curva A può appartenere a due o più sistemi S od S', ma nel campo virtuale essa appartiene ad uno ed un solo sistema $\{A\}$.

Il sistema $\{A\}$ contiene tutti i sistemi S ed S' che contengono A, e condizione necessaria e sufficiente perchè $\{A\}$ ed un sistema S_A coincidano, è che S_A sia composto di ∞^q sistemi lineari.

In generale però avviene che non tutti i sistemi $|A + C - C'|$ sono effettivi e in tal caso $\{A\}$ può contenere più sistemi algebrici S_A, S_B,.... Se ciò accade non è sempre possibile passare da A a B con una catena connessa di sistemi irriducibili di curve effettive: A e B sono allora legati da sistemi virtuali, come due punti reali di una curva algebrica possono, per es., essere legati da soli rami immaginari.

I sistemi lineari di un sistema virtuale $\{A\}$, hanno la loro immagine nei punti della varietà di PICARD, relativa ad F.

4. - Equivalenza algebrica. - Due curve A e B di uno stesso sistema $\{A\}$ si dicono algebricamente equivalenti (in senso virtuale), o semplicemente equivalenti, e si scrive (LEFSCHETZ) $A=B$.

La curva virtuale $A-B$ si dice allora equivalente alla curva zero e si scrive $A-B=0$.

Due curve A e B di uno stesso sistema S od S' sono equivalenti nel senso detto; ma quando si vuol porre in evidenza che A e B appartengono ad un sistema S, si scrive (SEVERI) $A\equiv B$ oppure $A-B\equiv 0$, e l'equivalenza si dirà effettiva.

Analogamente per indicare che due curve A e B appartengono ad un sistema di tipo S' si scrive (ALBANESE) $A\,|||\,B$ oppure $A-B\,|||\,0$, e l'equivalenza si dirà, in senso stretto.

L'equivalenza virtuale, $A=B$, gode della proprietà transitiva, mentre le altre due, $A\equiv B$ ed $A\,|||\,B$ non godono di tale proprietà.

Non è difficile poi dimostrare che se $A=B$ esistono su F curve E tali che sia $A+E\equiv B+E$, ed esistono curve D tali, che sia: $A+D\,|||\,B+D$. Viceversa, da una qualunque di queste due ultime relazioni, segue la prima.

Le proprietà dell'equivalenza virtuale si riducono per tanto a proprietà del campo effettivo.

L'importanza dei sistemi virtuali si rileva in tutta la teoria della base e particolarmente nei *sistemi coniugati* e nell'operazione di *divisione* (v. n. 13, 14 e 15).

5. - Curve algebricamente dipendenti (SEVERI). - Più curve di F, C_1, C_2,...., C_t si dicono (algebricamente) dipendenti quando una loro combinazione lineare a coefficienti interi positivi o negativi non tutti nulli, è algebricamente equivalente alla curva zero:

$$\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+ \ldots. +\lambda_t C_t=0. \tag{1}$$

Se tale relazione vale solo per valori tutti nulli delle λ, si dice che C_1, C_2,...., C_t sono indipendenti.

Nel campo effettivo la (1) equivale ad una relazione del tipo:

$$\lambda_1 C_1+ \ldots. +\lambda_r C_r+E\equiv \mu_{r+1} C_{r+1}+ \ldots. +\mu_t C_t+E,$$

le λ_i e μ_i, essendo interi positivi non tutti nulli ed E una curva opportuna di F.

6. - Notazioni. - Il numero dei punti comuni a due curve A e B si suole indicare (SEVERI) col simbolo $[AB]$: $[A^2]$ allora indicherà il grado virtuale della curva A.

Posto $n_{ik}=[C_iC_k]$ ed n_i l'ordine di C_i, si chiama *matrice discriminante* (SEVERI) dell'aggruppamento $(C_1, C_2,...., C_t)$, la matrice:

$$\begin{vmatrix} n_{11} \ldots. & n_{1t} \\ \ldots\ldots & \\ n_{t1} \ldots. & n_{tt} \\ n_1 \ldots. & n_t \end{vmatrix}.$$

7. - Premesse queste considerazioni, passiamo alla teoria della base.

Ad essa si può arrivare per varie vie. La prima è quella del SEVERI e si trova esposta nella memoria *b*) del 1905. La seconda, del 1910, è dovuta a POINCARÉ e nel 1921 è stata profondamente semplificata e messa in nuova luce dal SEVERI stesso. La terza, del 1924, si deve a LEFSCHETZ, ed è quella da me ripresa nel 1927 per ulteriori semplificazioni.

8. - **Criteri di equivalenza algebrica.** - Fondamento comune a questi procedimenti sono i criteri di equivalenza algebrica. Uno di questi criteri è di carattere geometrico, due sono di natura trascendente e il quarto di natura topologica. I primi tre sono del SEVERI, il quarto di LEFSCHETZ.

I. Criterio (SEVERI). *Se sopra una superficie algebrica* F *due curve* A *e* B *verificano le relazioni:*

$$[A^2]=[AB]=[B^2],$$

esistono numeri interi e positivi λ *per i quali si ha:*

$$\lambda A=\lambda B.$$

Più in generale: *Condizione necessaria e sufficiente perchè* t *curve* C_1, C_2,...., C_t, *siano algebricamente dipendenti, è che la matrice discriminante dell'aggruppamento* (C_1, C_2,...., C_t), *sia nulla.*

II. Criterio (SEVERI). *Condizione necessaria e sufficiente perchè* t *curve* C_1, C_2,...., C_t *siano algebricamente dipendenti è che esista su* F *un integrale semplice di III specie che non abbia alcuna singolarità logaritmica fuori delle curve* C_1, C_2,...., C_t.

9. - **Il teorema fondamentale della base.** - Questo criterio è il ponte di passaggio tra il teorema fondamentale di PICARD, sugli integrali semplici di terza specie appartenenti ad *F*, e la teoria della base del SEVERI.

TEOREMA DI PICARD. - *Per ogni superficie algebrica irriducibile* F, *è possibile fissare un numero intero* ϱ, *tale che prese comunque* $\varrho+1$ *curve algebriche di* F, *esistono integrali semplici di terza specie appartenenti alla superficie, non aventi singolarità logaritmiche fuori delle* $\varrho+1$ *curve assegnate; mentre il fatto analogo non si verifica per tutti i gruppi di* ϱ *curve di* F.

D'onde si deduce subito il:

TEOREMA DI SEVERI. - *Sopra una superficie algebrica irriducibile* F, *è possibile fissare* ϱ *curve algebricamente indipendenti,* C_1, C_2,...., C_ϱ, *tali che ogni altra curva* C *di* F *sia algebricamente legata ad esse, da una relazione del tipo:*

(2) $$\lambda C=\lambda_1 C_1+ \ldots. +\lambda_\varrho C_\varrho,$$

(λ essendo un numero intero positivo e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho$ interi positivi o negativi non tutti nulli).

Allo stesso teorema si giunge seguendo la via tracciata da POINCARÉ e semplificata dal SEVERI.

10. - Metodo Poincaré-Severi. - Supponiamo F, d'ordine m, dotata di singolarità ordinaria (linea doppia nodale con punti tripli ordinari). Indichiamo con $f(xyz)=0$ l'equazione di F, con $|Cy|$ il fascio delle sue sezioni coi piani $y=\text{cost}$, con p il genere di $|Cy|$.

È possibile allora fissare $p-q$ (e non più) aggiunte indipendenti, d'ordine $m-3$, ad F:

$$\varphi_{q+1}(xyz)=0, \quad \varphi_{q+2}(xyz)=0, \ldots, \quad \varphi_p(xyz)=0.$$

Gli integrali:

$$u_{q+i}=\int \frac{\varphi_{q+i}(xyz)}{fz'}\,dx \qquad (i=1, 2, \ldots, p-q)$$

formano su ogni Cy di genere p, un sistema di $p-q$ integrali abeliani di prima specie indipendenti, con $2p$ periodi (primitivi).

Indichiamo con $P_1^{(y)}(x_1, y, z_1)$, $P_2^{(y)}(x_2, y, z_2), \ldots, P_n^{(y)}(x_n, y, z_n)$ i punti dove una curva A, d'ordine n, incontra C_y, e formiamo le somme:

$$U_{q+i}(y)=u_{q+i}(x_1, y, z_1)+\ldots+u_{q+i}(x_n, y, z_n), \quad (i=1, 2, \ldots, p-q)$$

dette da POINCARÉ le funzioni normali della curva A, relative agl'integrali u_{q+i} (1).

Ciò detto si ha:

III. Criterio (SEVERI). *Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve* A *e* B *di* F *siano algebricamente equivalenti, è che le funzioni normali* $U_{q+1}, \ldots, U_p$ *relative ad* A *e le funzioni normali* $U'_{q+1}, \ldots, U_p'$ *relative a* B, *siano due a due congrue rispetto ai* 2p *periodi di* $u_{q+1}, \ldots, u_p$.

Questo criterio è a sua volta il ponte di passaggio tra il teorema di POINCARÉ sulle funzioni normali e il teorema della base.

TEOREMA DI POINCARÉ. - *Sopra una superficie algebrica irriducibile* F *è possibile fissare* ϱ *curve* $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$ (sistema di curve primitive) *tali che le funzioni normali* $U_{q+1}, \ldots, U_p$ *relative ad ogni altra curva* C *di* F, *siano combinazioni lineari a coefficienti numerici razionali, delle analoghe funzioni normali di* $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho$.

D'onde si ritrova per altra via il teorema di SEVERI.

---

(1) Il valore di U_{q+i} resta determinato (a meno di periodi di u_{q+i} quando per un valore iniziale y_0 di y, sono fissati, nella curva Cy_0, i cammini d'integrazione $\sigma_1^{(0)}, \ldots, \sigma_n^{(0)}$ che conducono da un punto base P di $|Cy|$ ai punti $P_1^{(y_0)}, \ldots, P_n^{(y_0)}$. Questi cammini s'intendono comuni a tutti gli integrali u_{q+i}, e al variare di y, si fanno variare con continuità. Il valore di $U_{q+i}(y)$ dipende dai cammini $\sigma_r^{(0)}$, scelti come iniziali, e dal cammino che, nel piano dove si suppone distesa la variabile complessa y, porta da y_0 al valore considerato per y.

11. - La (2) in fondo dice che le curve di F si possono ottenere da C_1, C_2,...., C_ϱ con sole operazioni di addizione e sottrazione, e perciò C_1, C_2,...., C_ϱ formano una base per le curve di F.

La condizione necessaria e sufficiente perchè ϱ *curve di* F *formino una base, è che il determinante del loro aggruppamento sia diverso da zero* (SEVERI).

Il numero ϱ si chiama *numero base* della superficie.

Di fronte alle trasformazioni birazionali ϱ è un invariante relativo e si comporta come l'invariante I di ZENTEN-SEGRE al quale è legato dalla formula fondamentale di PICARD:

$$\varrho+\varrho_0=I+4q+2, \tag{3}$$

ϱ_0 indicando il numero degli integrali doppi, indipendenti, di II specie appartenenti ad F.

La ricerca del numero ϱ per una data superficie, è in generale un problema difficile.

Calcolando il 2° membro della (3), è facile conoscere il valore complessivo della somma $\varrho+\varrho_0$; ma il calcolo separato di ϱ e ϱ_0 presenta spesso difficoltà non lievi.

Forse è più facile (usuffruendo dei mezzi analitici) calcolare prima ϱ_0 e poi ϱ. Molto istruttivo in tal senso è l'importante lavoro di BAGNERA e de FRANCHIS per la determinazione di ϱ e ϱ_0 sulle superficie iperellittiche.

Il numero ϱ oltre che sul piano e sulle superficie razionali, si conosce sulle superficie generali del loro ordine (NOETHER), sulla superficie di KUMMER (1), sulle rigate, sulle superficie iperellittiche, o sulle superficie che rappresentano le coppie di punti di due curve (SEVERI) etc. (2).

12. - La (2) è una relazione del campo virtuale, nel campo effettivo essa si traduce in una relazione del tipo:

$$\lambda C+E\equiv\lambda_1 C_1+\lambda_2 C_2+ \ldots. +\lambda_\varrho C_\varrho+E. \tag{4}$$

Sulla curva ausiliaria E, valgono le seguenti osservazioni (ALBANESE *a*)):

1°) Per una base arbitraria (C_1, C_2,...., C_ϱ) non è sempre possibile liberare

---

(1) Il caso della superficie K di KUMMER è molto istruttivo per il comportamento dei punti doppi rispetto alla base. Dal punto di vista proiettivo, in virtù di una nota proprietà di HUMBERT, per base su K si può prendere una curva qualunque per es.: una sua sezione piana e si ha $\varrho=1$; ma dal punto di vista birazionale bisogna aggiungere i 16 punti doppi di K, considerati come curve infinitamente piccole di grado virtuale -2, e si ha $\varrho=17$ (v. SEVERI *b*), n. 8).

(2) È stato anzi lo stadio di questa superficie, in relazione alla teoria delle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve distinte o coincidenti, che ha dato al SEVERI lo spunto della teoria generale della base (v. SEVERI *a*)).

la (4) dalla curva ausiliaria E. Essa però si può scegliere una volta per tutte e indipendentemente dalla base $(C_1,\ldots,C_\varrho)$ e dalla curva C.

2°) È possibile (e senza alterare il numero base ϱ) scegliere su F ϱ curve indipendenti $D_1, D_2,\ldots,D_\varrho$ tali, che per una qualunque curva D da F, si abbia una relazione del tipo:

$$\lambda D \equiv \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2 + \ldots + \lambda_\varrho D_\varrho,$$

senza intervento di alcuna curva ausiliaria. Anzi è possibile scegliere su F delle basi $(\Delta_1, \Delta_2,\ldots,\Delta_\varrho)$ tali, che per qualunque curva Δ di F, si abbia una equivalenza in senso stretto:

$$\lambda\Delta \equiv\equiv \lambda_1\Delta_1 + \lambda_2\Delta_2 + \ldots + \lambda_\varrho\Delta_\varrho.$$

13. - Basi intermediarie e relative forme quadratiche. - Il SEVERI chiama intermediaria una base $(C_1, C_2,\ldots, C_\varrho)$ quando per qualunque curva C di F, il coefficiente λ che compare nella (2) è un divisore dei coefficienti $\lambda_1, \lambda_2,\ldots,\lambda_\varrho$. La relazione tra C e le C_i diventa allora del tipo:

$$\lambda C = \lambda(\mu_1 C_1 + \mu_2 C_2 + \ldots + \mu_\varrho C_\varrho).$$

Il determinante $|n_{ik}|$ (con $n_{ik}=[C_iC_k]$) di una base intermediaria ha il minimo valore possibile e viceversa (SEVERI *c*)).

Ad ogni base intermediaria è poi coordinata una forma quadratica a coefficienti interi:

$$f(\mu_1, \mu_2,\ldots, \mu_\varrho) = \sum_{i,k=1} n_{ik}\mu_i\mu_k,$$

e la determinazione delle curve di F di grado virtuale n, si riduce al problema aritmetico, di rappresentare il numero intero n mediante la forma f.

Il passaggio da una base intermediaria $(C_1,\ldots, C_\varrho)$ ad un'altra base pure intermediaria $(C_1',\ldots, C_\varrho')$, si ottiene mediante una sostituzione lineare, intera, unimodulare (e viceversa):

$$\lambda_i C_i' = \lambda_i(\mu_{i1} C_1 + \mu_{i2} C_2 + \ldots + \mu_{i\varrho} C_\varrho) \quad (i=1, 2,\ldots, \varrho) \text{ e } |\mu_{ik}| = \pm 1.$$

Ne segue che la forma quadratica $f' = \sum n_{ik}'\mu_i'\mu_k'$ relativa a $(C_1',\ldots, C_\varrho')$, si ottiene da f con una sostituzione lineare a coefficienti interi di modulo ± 1; f ed f' sono, cioè, equivalenti propriamente od impropriamente. E perciò si può parlare di classe di forme quadratiche, o addirittura di forma quadratica, legata ad F.

Alla considerazione di tale forma si collega per es.: il problema dello studio delle superficie che ammettono gruppi infiniti discontinui di trasformazioni birazionali in se.

Il SEVERI ha dimostrato che *ad ogni gruppo infinito discontinuo* G, *di trasformazioni birazionali che mutano in se una superficie regolare* F,

corrisponde un gruppo isomorfo di sostituzioni lineari, intere, unimodulari, che mutano in se la forma quadratica f *relativa a* F.

Sarebbe evidentemente interessante estendere il teorema alle superfici irregolari.

Queste proprietà, insieme a classici risultati della teoria dei numeri, conducono il SEVERI alla *completa determinazione* del gruppo discontinuo, infinito delle trasformazioni birazionali in se, della superficie generale del quarto ordine che passa per una sestica di genere due.

L'esempio è molto notevole e mostra in un caso concreto la portata delle considerazioni generali sopra esposte.

Questo argomento aspetta evidentemente ulteriori sviluppi.

14. - Base minima. - Risultati ancora più importanti — per vari aspetti — sono quelli relativi alle basi minime (SEVERI).

Una base $(C_1, C_2, \ldots, C_\varrho)$ si dice minima, quando per ogni curva C di F, il coefficiente λ che compare nella (2), è uguale ad uno.

Per avere una base minima, occorre in generale accrescere il numero ϱ delle curve della base e interviene un nuovo carattere σ di F che si presenta in varie questioni.

Dal punto di vista geometrico, il numero σ si può introdurre, col SEVERI, alla maniera seguente:

Detta A_1 una qualunque curva di F, le curve A_i che insieme ad A_1 verificano le relazioni:

$$[A_1^2]=[A_1A_i]=[A_i^2], \tag{4}$$

si distribuiscono in un certo numero finito σ di sistemi virtuali, di curve dello stesso ordine:

$$\{A_1\},\quad \{A_2\},\ldots,\quad \{A_\sigma\}. \tag{5}$$

Il numero σ di questi *sistemi virtuali* è indipendente dalla curva A, di partenza.

Il gruppo dei sistemi (5) è individuato da uno qualunque di essi, e perciò essi si dicono *sistemi coniugati.* Le curve:

$$M_1=A_1-A_1,\quad M_2=A_2-A_1,\ldots,\quad M_\sigma=A_\sigma-A_1, \tag{6}$$

sono curve virtuali, d'ordine zero, grado zero, genere uno, che verificano le relazioni:

$$\{A_1\}=\{A_1+M_1\},\quad \{A_2\}=\{A_1+M_2\},\ldots,\quad \{A_\sigma\}=\{A_1+M_\sigma\}.$$

In generale $\{A_i+M_j\}$ è ancora un sistema (5), e qualunque sia la curva B_1 di F:

$$\{B_1+M_1\},\quad \{B_1+M_2\},\ldots,\quad \{B_1+M_\sigma\}$$

sono i sistemi coniugati di $\{B_1\}$.

Ne segue che le curve M_i non dipendono dalla curva di partenza A_1, che ci è servita per definirle. Inoltre,

$$+M_1, \quad +M_2,\ldots., \quad +M_\sigma,$$

si possono considerare come operazioni da applicare alle curve di F. In tal senso esse formano un gruppo abeliano G_σ di ordine σ. L'identità è rappresentata da $+M_1$.

Dette $+M_{i1}$, $+M_{i2}$,...., $+M_{i\tau}$ $(\tau \leqslant \sigma)$ le operazioni formanti una base di G_σ, una base minima su F è data dalle curve C_1, C_2,...., C_ϱ di una base intermediaria, e dalle curve M_{i1}, M_{i2},...., $M_{i\tau}$. Cosicchè detta C una qualunque curva di F dovrà aversi:

$$C=\mu_1 C_1+\mu_2 C_2+ \ldots. +\mu_\varrho C_\varrho+\nu_1 M_{i1}+\nu_2 M_{i2}+ \ldots. +\nu_\tau M_{i\tau}.$$

Il numero delle curve di una base minima è $\varrho+\tau$.

Se non dispiace avere più curve del necessario, come curve di una base minima si possono prendere le $\varrho+\sigma-1$ curve, C_1, C_2,...., C_ϱ, M_2, M_3,...., M_σ.

I numeri σ e τ sono invarianti assoluti di F.

Per meglio caratterizzare le curve (6), osserviamo che le curve A_i verificano le (4), e in virtù del 1° criterio, esisteranno interi λ tali che sia:

$$\lambda A_1=\lambda A_2= \ldots. =\lambda A_\sigma,$$

ossia:

$$\lambda(A_1-A_1)=\lambda(A_2-A_1)= \ldots. =\lambda(A_\sigma-A_1)=0,$$

Le curve M_i sono perciò divisori dello zero. Ed è facile vedere che esse sono tutte e sole le curve algebriche di F, che siano divisori dello zero.

15. - L'operazione di divisione (SEVERI). - Quando fra due curve A e B di F, sussiste una relazione del tipo:

$$\lambda A=B,$$

si dice che $\{A\}$ si ottiene dividendo $\{B\}$ per λ.

L'operazione di divisione non è sempre possibile, qualunque siano B e λ, e quando è possibile non sempre è univoca.

Ma se le curve di più sistemi $\{A_1\}$, $\{A_2\}$.... verificano le relazioni $\lambda A_1=B$, $\lambda A_2=B$,...., per la proprietà transitiva dell'equivalenza virtuale, sarà $\lambda A_1=\lambda A_2=$...., e A_1-A_1, A_2-A_1,.... coincidono con altrettante curve M_1, M_2,.... del gruppo G_σ.

Il numero dei sistemi quozienti distinti, non può perciò superare σ.

Il risultato è precisato dal SEVERI, col teorema:

Quando la divisione di un sistema $\{B\}$ *per un intero* λ *è possibile, il numero* μ *dei sistemi virtuali quozienti è uguale all'ordine di quel sottogruppo* G_μ, *di* G_σ, *le operazioni del quale, hanno per periodo* μ_i, *un divisore di* λ.

E poichè μ_i risulta allora un divisore di σ, e G_σ è abeliano, si ha che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la divisione di un sistema $\{B\}$ *per un intero* λ (supposta possibile) *sia univoca, e che* λ *sia primo con* σ.

Per questa proprietà il SEVERI chiama G_σ il gruppo della divisione di F e σ il suo carattere di divisibilità.

Le proprietà esposte nei n. 14 e 15, sui sistemi coniugati e sull'operazione di divisione, *valgono esclusivamente* nel campo dei sistemi virtuali e della corrispondente *equivalenza virtuale*. Nel campo dei sistemi algebrici effettivi di tipo S od S' esse in generale non sono vere, come ho luminosamente dimostrato con numerosi esempi, nella memoria *a*) citata in prefazione.

16. - La teoria della base e l'Analysis situs.

I teoremi della base hanno ricevuto un elegante ed interessantissima interpretazione, nel campo dell'Analysis situs, per opera principalmente di LEFSCHETZ.

Indichiamo con W la riemanniana a quattro dimensioni, i cui punti (reali) rappresentano biunivocamente i punti reali e complessi di F.

Ricordiamo che due cicli A' e B' (a due dimensioni) di W, si dicono omologhi (POINCARÉ) e si scrive $A' \sim B'$, quando è possibile, senza uscire da W, deformare con continuità A' fino a portarlo a cadere in B'.

Un ciclo A' si dice nullo, e si scrive $A' \sim 0$, quando per deformazione continua si può ridurlo ad un punto o ad una linea. E più cicli C_1', C_2',...., C_t' si dicono dipendenti, quando una loro combinazione lineare $\lambda_1 C_1' + ... + \lambda_t C_t'$, a coefficienti interi non tutti nulli, è omologa ad un ciclo nullo.

È fondamentale osservare che il numero dei cicli (a due dimensioni) di W fra loro indipendenti, raggiunge un *massimo finito* R_2, detto l'indice di connessione superficiale di W.

Un sistema (completo) di R_2 cicli indipendenti, C_1', C_2',...., C'_{R_2}, costituisce una base per i cicli di W; sicchè detto C' un qualunque altro ciclo analogo, si avrà una omologia:

$$\lambda C' \sim \lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2' + ... + \lambda_{R_2} C'_{R_2}.$$

E come è facile intendere anche qui si possono ripetere le considerazioni svolte per le basi intermediarie e per le basi minime.

17. - Torsione superficiale.

In particolare: un ciclo A' può non esser nullo ed un suo multiplo, $\lambda A'$, esser nullo. In tal caso si dice che A' è un divisore dello zero.

Il numero σ_2 dei divisori dello zero, è finito e si chiama (POINCARÉ) *indice di torsione superficiale di* W.

I cicli M_1', M_2',...., M_σ' di W, corrispondenti alle curve M_1, M_2,...., M_σ del n. 14, sono tutti divisori dello zero, anzi (vedasi più avanti) essi sono tutti e

soli i divisori dello zero di W. Ne segue che: *l'indice di torsione superficiale di* W, *uguaglia il carattere di divisibilità di* F: $\sigma_2 = \sigma$.

Anche qui i simboli $+M_1'$, $+M_2'$,.... $+M_\sigma'$, si possono considerare come operazioni da effettuarsi sui cicli di W. In questo senso essi formano un gruppo abeliano Γ_σ, detto il gruppo di torsione di W, perfettamente identico al gruppo G_σ del SEVERI.

18. - Cicli algebrici. - Ad ogni curva algebrica (effettiva o virtuale) A di F, corrisponde in W, un ciclo A', detto appunto ciclo algebrico. Più in generale si suol chiamare algebrico, ogni ciclo di W, che sia omologo ad un ciclo algebrico del tipo A'.

Ma non tutti i cicli di W sono omologhi a cicli algebrici.

La distinzione fra cicli algebrici e non algebrici si ha col seguente teorema di PICARD-LEFSCHETZ: *Condizione necessaria e sufficiente perchè un ciclo di* W *sia algebrico, è che il corrispondente periodo di ogni integrale doppio di prima specie appartenente ad* F, *sia nullo* (1).

Ne segue facilmente che ogni divisore dello zero di W è un ciclo algebrico e quindi come si era detto, $\sigma_2 = \sigma$.

Ma a fissare le relazioni, veramente intime, tra curve algebriche di F e corrispondenti cicli algebrici di W, vale il seguente criterio di equivalenza, che senza dubbio, rappresenta uno dei più bei risultati del LEFSCHETZ:

IV. Criterio (LEFSCHETZ). *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve algebriche* A *e* B *di* F, *siano equivalenti, è che i corrispondenti cicli* A' *e* B' *di* W, *siano omologhi.*

Da $A = B$ segue $A' \sim B'$ e viceversa.

Ciò detto indichiamo con ϱ, il massimo numero di cicli $(C_1', C_2', \ldots, C_\varrho')$ algebrici indipendenti di W, sarà $\varrho \leqslant R_2$, e per ogni altro ciclo algebrico C' di W, si dovrà avere una omologia:

$$\lambda C' \sim \lambda_1 C_1' + \lambda_2 C_2' + \ldots + \lambda_\varrho C_\varrho'.$$

Passando, in virtù del criterio IV, dai cicli alle corrispondenti curve di F, si ottiene ancora una volta il teorema fondamentale della base.

19. - Dimostrazione algebrica-topologica. - Il criterio IV è stato dimostrato dal LEFSCHETZ, seguendo un indirizzo segnato da POINCARÉ, e fondato sulle proprietà delle funzioni normali delle curve A e B, relative ai q integrali di prima specie appartenenti ad F.

In una recente nota lincea, sono riuscito a liberare la dimostrazione da ogni

---

(1) La parte diretta è stata notata da PICARD, la parte inversa, che è una proprietà molto più riposta, è stata dimostrata da LEFSCHETZ.

considerazione trascendente. Il criterio al quale arrivo, si presenta sotto forma leggermente diversa, e si può enunciare come segue:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè due curve A *e* B *di* F *siano legate da una relazione del tipo* $\lambda A = \lambda B$, *è che sopra* W *i corrispondenti cicli* A′ *e* B′, *differiscano per un divisore dello zero.*

E così la dimostrazione del teorema fondamentale della base viene ad essere contenuta nel suo dominio algebrico-topologico.

Ne conseguono nuove vie per pervenire al teorema di PICARD sulle curve logaritmiche degli integrali di terza specie appartenenti ad F, e al famoso teorema di HURWITZ, che assegna la base per la totalità delle corrispondenze sopra una curva algebrica. Anche in questo campo delle corrispondenze sopra una curva, la teoria della base di HURWITZ e l'Analysis situs sono intimamente legate fra di loro.

La prima dimostrazione algebrico-topologica del teorema di HURWITZ si deve al CHISINI (Rend. Istituto Lombardo, 1921).

20. - La natura puramente algebrica del teorema della base, fa però desiderare una dimostrazione contenuta nel solo campo algebrico. La via più naturale che a tale scopo si presenta, è quella di ridurre le curve di F a tipi determinati, usuffruendo dei criteri di *equivalenza lineare* del SEVERI (1).

In tal modo è facile ridursi a curve Γ che segano le curve di un fascio perfissato Σ, di genere p, fuori dei punti base, in $k \leqslant p$ punti.

Nasce allora il problema di conoscere l'ordine delle multiplicità di Γ nei punti base di Σ.

Supponendo che $\{\Gamma\}$ non contenga curve di Σ, tale ordine si mantiene finito? Oppure, è possibile ricondurci a tal caso con ulteriori riduzioni di Γ?

Io ho tentato più volte di arrivare in fondo, ma non vi sono riuscito.

L'indagine merita però di essere approfondita.

21. - Abbiamo detto che il numero ϱ è minore uguale R_2; la differenza $\varrho_0 = R_2 - \varrho$, è uguale al numero dei cicli non algebrici indipendenti, che incontrano in un numero algebricamente nullo, tutti i cicli algebrici di W.

Lo stesso numero, secondo un importante teorema di PICARD, è uguale al numero degli integrali doppi, di seconda specie, indipendenti che appartengono ad F.

$$\varrho + \varrho_0 = R_2 = I + 4q + 2.$$

---

(1) Vari sono i criteri di *equivalenza lineare* dovuti al SEVERI, fra i più importanti ricordiamo: *Se due curve* A *e* B *di* F *segano gruppi equivalenti sulle curve di un fascio* Σ, A *e* B *o sono linearmente equivalenti o differiscono per curve fondamentali di* Σ.

Quando $\varrho_0=0$, tutti i cicli di W sono algebrici ed ogni integrale I doppio di II specie da F, è improprio:

$$I=\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)dxdy$$

con U e V funzioni razionali di x, y, z e z funzione implicita di x ed y attraverso l'equazione, $f(xyz)=0$, della superficie.

A questo punto si presenta spontanea una domanda:

Quali sono le superficie Φ i cui integrali doppi di seconda specie, sono tutti impropri?

Il problema è analogo a quello più volte posto da PICARD, di caratterizzare cioè, le superficie Ψ i cui integrali semplici di terza specie si riducono tutti a combinazioni algebrico-logaritmiche. Il SEVERI ha risposto brillantemente al problema di PICARD, dimostrando, per mezzo del secondo criterio (memoria *b*), che le *superficie Ψ sono tutte e sole le superficie regolari.*

Il problema da me posto è evidentemente analogo. Si tratta di cercare le superficie Φ aventi $\varrho_0=0$ ossia $\varrho=R_2=I+4q+2$.

Secondo una mia congettura le Φ coincidono con le superficie di genere zero: $p_g=0$.

La proprietà è vera per le superficie razionali, le rigate, le superficie ellittiche, la superficie di ENRIQUES del 6° ordine passante doppiamente per i 6 spigoli di un tetraedro, etc., etc. L'inversione è però meno facile.

Si può però osservare che ogni integrale doppio di prima specie di Φ ha tutti i periodi nulli. Basta questa proprietà per concludere che $p_g=0$?

Secondo un recente lavoro di SEVERI [1], bisognerebbe dimostrare, che Φ non ha integrali semplici di prima specie *semiesatti.*

Dal punto di vista della base si può dire che su ogni Φ, deve essere possibile trovare due basi intermediarie $(C_1, C_2,\ldots, C_\varrho)$, $(\Gamma_1, \Gamma_2,\ldots, \Gamma_\varrho)$ tali che sia:

$$[C_i\Gamma_i]=1, \quad [C_i\Gamma_j]=0 \qquad (i\neq j).$$

Ma su questo argomento spero di ritornare con risultati definitivi.

22. - Estensioni alle varietà algebriche. - Il teorema della base si estende alla totalità delle V_{k-1} di una varietà V_k e l'estensione non presenta difficoltà, nè dal punto di vista algebrico, nè da quello topologico.

Più difficile, ma certamente più interessante, si presenta invece il problema della determinazione di una base per la totalità della V_{k-i}, con $i>1$, di una V_k, per es.: le curve di una V_3.

---

[1] SEVERI: *Sugli integrali semplici e doppi*, quattro note dei « Rend. R. Acc. dei Lincei », Serie VI, Vol. V, 1928.

La via da tentare è quella topologica, cercando, se è possibile, di estendere il criterio IV di LEFSCHETZ.

Le considerazioni esposte mettono in chiara evidenza il contributo che l'Analysis situs ha dato e può ancora dare alla teoria della base e come il campo delle ricerche sia lungi dall'essere esaurito.

E si afferma sempre più la convinzione che l'Analysis situs sia oggi il campo più fertile delle nuove ricerche geometriche e particolarmente di quelle che riguardano la geometria algebrica.

G. NICOLADZÉ (Tiflis - Géorgie - U. R. S. S.)

SUR LES SYSTÈMES CONTINUS DE COURBES ET DE SURFACES

En partant directement des équations en termes finis des systèmes continus des figures géométriques on peut découvrir plusieurs propriétés de ces systèmes. Le but de cette communication est d'enoncer quelques unes de ces propriétés générales. J'en ai fait l'étude plus detaillée dans un autre ouvrage (1).

Considérons l'équation:

$$F(x_i, \lambda_j)=0, \qquad \begin{pmatrix} i=1, 2,\ldots, n \\ j=1, 2,\ldots, p \end{pmatrix} \tag{1}$$

détérminant dans l'espace à n dimensions un système à p paramètres des hypersurfaces; par exemple, un système de courbes sur le plan. Supposons que F, ainsi que ses derivées partielles, sont des fonctions continues.

Pour faciliter l'étude d'un tel système, j'introduis quelques notions auxiliaires.

Je considère le système linéaire suivant:

$$F(x_i, \lambda_j^0)+\sum \eta_j \frac{\partial F(x_i, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_j}+\ldots+\sum_{j_1\ldots j_k} \eta_{j_1\ldots j_k} \frac{\partial^k F(x_i, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1}\ldots \partial \lambda_{j_k}}=0, \tag{2}$$

où les $\eta_{j_1\ldots j_q}$ sont les paramètres arbitraires. J'appelle ce système *le système linéaire osculateur d'ordre* k *du système donné* (1) *dans* $\lambda_j=\lambda_j^0$.

On peut d'ailleurs indiquer que la notion importante de M. SEVERI des points caractéristiques subit ici son extension naturelle. En effet, les points caractéristiques de M. SEVERI ne sont autre chose que l'ensemble des points bases de ce système osculateur du premier ordre. Il est donc naturel de nommer *points caractéristiques d'ordre k* l'ensemble de points bases du système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0).

La dimension $N_{k,p}$ du système linéaire (2) est, evidemment, égale au nombre des expressions linéairement indépendantes entre les expressions suivantes:

$$F(x_i, \lambda_j^0);\ \frac{\partial F(x_i, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_j};\ \ldots;\ \frac{\partial^k F(x_i, \lambda_j^0)}{\partial \lambda_{j_1}\ldots \partial \lambda_{j_k}}; \tag{3}$$

(1) G. NICOLADZÉ. *Sur les systèmes continus de figures géométriques.* Ed. A. Blanchard, Paris, 1928.

elle est donc, au plus, égale à $\binom{k+p}{p}-1$; c'est-à-dire :

$$N_{k,p} \leqslant \binom{k+p}{p}-1. \tag{4}$$

La seconde notion que j'introduis, est celle de *grade* du système donné (1).

Supposons que le système donné (1) est tel que pour une courbe générique (λ_j^0), appartenant à ce système, la dimension du système osculateur d'ordre $m+1$ dans (λ_j^0) est égale à celle du système osculateur d'ordre m, tandis que la dernière est plus grande que la dimension du système osculateur d'ordre $m-1$; c'est-à-dire soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_{m+1,p}=N_{m,p} \\ N_{m,p}>N_{m-1,p} \end{array} \right\}. \tag{5}$$

Dans ce cas je dis que le système osculateur d'ordre m est le *système linéaire d'appartenance du système* (1). J'appelle *le grade du système donné* (1), *l'ordre* m *de son système linéaire d'appartenance.*

J'introduis enfin la notion de la *courbe produite générique*, passant par le point (x_i^0) pour $\lambda_j=\lambda_j^0$. J'appelle ainsi la courbe, déterminée par l'équation (1), où à la place des paramètres λ_j, on a substitué les fonctions continues arbitraires

$$\nu_j(x_i), \tag{6}$$

soumises à la seule restriction suivante : elles doivent prendre les valeurs (λ_j^0) dans le point (x_i^0) de la courbe (λ_j^0) du système donné (1).

Nous avons donc pour la courbe produite générique les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} F[x_i,\ \nu_j(x_i)]=0 \\ F(x_i^0,\ \lambda_j^0)=0 \\ \nu_j(x_i^0)=\lambda_j^0 \end{array} \right\} \qquad \left(\begin{array}{l} i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p \end{array} \right) \tag{7}$$

où les fonctions continues $\nu_j(x_i)$, en déhors des conditions (7), sont supposées arbitraires.

Je démontre facilement les propositions suivantes :

THÉORÈME N. 1. - Pour que la courbe (λ_j^0) du système donné admette dans sont point *ordinaire* (x_i^0) un contact d'ordre s avec la courbe produite générique passant par (x_i^0) pour $\lambda_j=\lambda_j^0$, il faut et il suffit que toutes les courbes du système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) admettent dans le point (x_i^0) un contact d'ordre $(s-k)$ avec (λ_j^0) [1].

THÉORÈME N. 2. - Pour que la courbe produite générique, passant par le point (x_i^0) pour $\lambda_j=\lambda_j^0$, admette ce point comme un point multiple d'ordre s, il faut et il suffit que toutes les courbes du système osculateur d'ordre k dans (λ_j^0) admettent dans (x_i^0) un point multiple d'ordre $(s-k)$.

---

[1] Comptes Rendus, t. 186 (1928) p. 342.

L'interprétation géométrique des théorèmes énoncés est très simple dans l'espace représentatif E_{n+p} à $n+p$ dimensions dont les coordonnées non homogènes d'un point sont $(x_i; \lambda_j)$. Considérons par exemple le théorème N. 2, concernant les points multiples. Dans cet espace représentatif E_{n+p} l'hypersurface-image, interprétant le système donné (1), *admet dans son point* (x_i^0, λ_j^0) *un point multiple d'ordre s.*

Dans le cas général, les points (x_i^0, λ_j^0), multiples sur cette hypersurface sont des points distincts. Je dis dans ce cas que la courbe (λ_j^0) est une courbe *particulière* du système donné. Mais il se peut que ces points multiples tracent une suite continue de points d'un nombre de dimensions plus ou moins élevé et, au plus, égale à p. Il est évident que dans ce dernier cas, chaque courbe tracée sur l'hypersurface admettra nécessairement des points d'intersection avec cette suite p-dimensionnelle. Nous pouvons dire alors que (λ_j^0) est une courbe *générique* du système donné (1).

On voit, en effet, facilement que dans le cas de la courbe générique, les théorèmes réciproques sont vrais. Par exemple, pour les points multiples nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME N. 3. - Quand la courbe (λ_j^0) générique d'un système continu de courbes admet dans le point (x_i^0) un point multiple d'ordre s, la courbe produite générique, passant par ce point (x_i^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$, admet aussi un point multiple d'ordre s dans (x_i^0).

Les considérations précédentes mettent en évidence que souvent les théorèmes, concernant la courbe générique d'un système continu, ne sont que le cas particulier des théorèmes beaucoup plus généraux. Dans la suite, pour être plus bref, nous ne nous arrêterons que sur ce cas particulier de courbe générique, en nous souvenant toujours que ces théorèmes conservent leur validité pour les cas généraux mentionnés.

Les applications des théorèmes énoncés plus haut sont nombreuses. J'indiquerai ici seulement quelques exemples.

THÉORÈME: Un point multiple d'ordre s d'une courbe générique du système continu de grade m des courbes $(m<s)$ est un point multiple d'ordre $(s-m)$ (au moins) de la base de ce système.

Il s'ensuit donc le théorème suivant

THÉORÈME: Un point multiple d'ordre s d'une courbe générique du système algébrique d'ordre m des courbes $(m<s)$ est un point multiple d'ordre $(s-m)$ (au moins) de la base de ce système [1].

Il est évident que le théorème connu de M. BERTINI sur les points multiples d'une courbe générique, appartenant à un système linéaire, est un cas particulier du théorème précédent, où on a posé $m=1$.

---

[1] Comptes Rendus, t. 185 (1927) p. 1005.

Le cas de systèmes continus *à un paramètre* est particulièrement intéressant. Je les appelle brièvement *faisceaux continus*.

D'ailleur, en suivant ma méthode, nous obtenons immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME: Quand la courbe produite générique d'un faisceau continu donné admet dans le point (x_i^0) pour $\lambda_j = \lambda_j^0$ un point multiple d'ordre s, non seulement toutes les courbes du système osculateur d'ordre k admettent ce point comme point multiple d'ordre $(s-k)$ (au moins), *mais en outre, elles ont dans ce point les mêmes tangentes principales.*

Je démontre pour les directions de ces tangentes principales fixes quelques théorèmes, dont le principal est le suivant:

THÉORÈME: Soit donné sur le plan, un système continu des courbes, dont la courbe générique C admet dans (x_i^0) un point mobile, multiple d'ordre s. Alors, dans l'ensemble de droites passant par le point (x_i^0) le groupe de $(s-k)$ tangentes principales fixes dans (x_i^0) d'un des faisceaux osculateurs [1] d'ordre k en C, n'est qu'*un groupe polaire d'ordre k* de la tangente dans (x_i^0) au déplacement correspondant (à ce faisceau osculateur) du point multiple mobile (x_i^0) par rapport au groupe de s tangentes principales de la courbe C en (x_i^0).

Des théorèmes tout a fait analogues peuvent être établis pour le faisceau continu des surfaces. J'en citerai seulement deux:

THÉORÈME: Soit S une surface mobile, admettant dans le point mobile (x_i^0) un contact d'ordre $(s-1)$ avec la surface fixe Σ. La ligne caractéristique d'ordre k de la surface S admet dans (x_i^0) un point multiple d'ordre $(s-k)$ (au moins). Quand cela a lieu exactement, les $(s-k)$ tangentes principales dans le point (x_i^0) de cette caractéristique, forment *un groupe polaire d'ordre k* de la direction du déplacement correspondant, infiniment petit, du point (x_i^0) sur Σ par rapport au groupe de s directions de tangentes principales en (x_i^0) de la ligne d'intersection des surfaces: mobile S et fixe Σ.

Nous avons ainsi la démonstration directe et générale du théorème dont les cas particuliers sont souvent considérés dans la géométrie. Par exemple, dans la théorie d'application projective des surfaces:

Un autre théorème de ce groupe est le théorème suivant:

THÉORÈME: Soit donné dans l'espace à 3 dimensions un système continu des surfaces, dont la surface générique S admet dans (x_i^0) un point mobile, multiple d'ordre s. Alors, le cône tangent principal du faisceau osculateur d'ordre k dans S, correspondant au déplacement du point multiple (x_i^0) dans une direction quelconque n'est que *le cône polaire d'ordre k* de la droite, tangente à ce déplacement, par rapport au cône tangent principal dans (x_i^0) à la surface S.

---

[1] J'appelle brièvement ainsi (le faisceau osculateur) le système osculateur à un faisceau continu.

Considérons maintenant les faisceaux *algébriques* de courbes (ou de surfaces). Soit donné un tel faisceau et soit m son indice, c'est-à-dire que chaque point générique du plan détermine m courbes, appartenant au faisceau donné. Il découle immédiatement des théorèmes précédents que la courbe (ou la surface) générique, appartenant à un tel faisceau, ne peut pas avoir un point multiple d'ordre plus élévé que m, mobile en dehors de la base de ce faisceau. Mais il est en outre facile de démontrer la proposition suivante:

THÉORÈME: Quand la courbe générique, appartenant à un faisceau d'indice m admet un (au moins) point multiple d'ordre m, mobile en dehors de la base de ce faisceau, ce faisceau est nécessairement un *faisceau rationnel* d'ordre m et peut alors prendre la forme:

$$\varphi_0(x_i)+\lambda\varphi_1(x_i)+\ldots.+\lambda^m\varphi_m(x_i)=0. \tag{8}$$

En outre, il est nécessaire, que toutes les expressions $\varphi_j(x_i)$ soient linéairement indépendentes entre elles. Si c'est un faisceau des courbes algébriques d'ordre n, nous avons encore la rélation suivante entre le nombre p de points multiples d'ordre m de la courbe (ou surface) générique et l'ordre k du lieu de ces points multiples:

$$\boxed{pm=nk}, \tag{9}$$

en supposant qu'aucun point de ce lieu n'est un point base du faisceau donné.

J'ai trouvé encore plusieurs autres théorèmes intéressants, ayant de nombreuses applications, sur lesquelles je ne puis m'étendre ici (1).

Pour terminer, je donnerai l'exemple le plus simple d'application de théorèmes énoncés dans l'etude de courbes et surfaces algébriques.

Considérons dans le plan un polygone à n côtés, circonscrit à une conique donné. Il est très facile de démontrer que deux tels polygones arbitraires (circonscrits à la même conique) déterminent uniformement un faisceau algébrique d'ordre 2 de polygones. Il resulte donc immédiatement de la formule précédente (9) le théorème suivant:

THÉORÈME A. - $n(n-1)$ sommets de deux polygones arbitraires, circonscrits à une même cônique donnée C, sont placés sur une même courbe K d'ordre $n-1$, qui est le lieu des sommets du faisceau d'ordre 2 de polygones, ainsi déterminé. n points de contact décrivent dans ce faisceau une série linéaire g_n^1 sur la conique C.

Il est facile de voir que le lieu K n'est pas une courbe générale d'ordre $n-1$, mais qu'elle est, en général, une courbe non décomposée et même privée de points doubles.

---

(1) Voir pour cela l'ouvrage cité au début de cette communication et les Notes dans les Comptes Rendus, t.t. 185, 186 et 187.

Cette propriété des polygones, circonscrits à une conique donnée, peut être considerée comme une généralisation du problème des polygones de Poncelet.

Considérons maintenant une cubique gauche. J'appellerai brièvement *le n-èdre, circonscrit à cette cubique*, l'ensemble de ses n plans osculateurs. De la manière analogue à celle du précédent, j'obtiens facilement:

THÉORÈME B. - $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ sommets de *deux* n-èdres arbitraires, circonscrits à une même cubique gauche C^3, sont placés sur une même courbe K d'ordre $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ qui est le lieu des sommets du faisceau d'ordre 3 de n-èdres, ainsi determiné. n points d'osculation décrivent dans ce faisceau une série linéaire g_n^1 sur la cubique C^3 (1).

THÉORÈME C. - $\frac{n(n-1)(n-2)}{2}$ sommets de *trois* n-èdres arbitraires, circonscrits à une même cubique gauche C^3, sont placés sur une même surface Σ d'ordre $n-2$, qui est le lieu des sommets du système à deux paramètres de n-èdres, ainsi determiné. n points d'osculation décrivent dans ce système une série linéaire g_n^2 sur la cubique C^3 (1).

Considérons les mouvements de ce système, laissant fixe un des plans du n-èdre. La configuration des $n-1$ arêtes, appartenant à ce plan fixe, décrit dans ce mouvement un faisceau d'ordre 2, généralisant les polygones de Poncelet, considerés plus haut.

---

(1) Comptes Rendus, t. 187 (1928) p. 93.

R. DEAUX (Mons - Belgio)

SUR LES FAISCEAUX DE COMPLEXES LINÉAIRES

Le but de la présente note est d'établir géométriquement les propriétés descriptives d'un faisceau de complexes linéaires en les déduisant de celles d'un faisceau de paraboloïdes équilatères.

1. - *On considère deux génératrices réelles ou imaginaires conjuguées* p, q *d'un hyperboloïde à une nappe ou d'un paraboloïde hyperbolique* Σ, *et un espace* E. *L'espace* E_r *réciproque de* E *par rapport à* Σ *et l'espace* E_i *homologue de* E *dans l'involution gauche* (p, q) *ayant* p, q *pour directrices, constituent un espace focal* (Von STAUDT, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, art. 105, Nürnberg, 1856).

En effet, les espaces réciproques E_r, E_i sont tels que tout point de l'un est dans son plan homologue.

COROLLAIRES. - 1°) Toute directrice de Σ est un rayon du complexe linéaire défini par l'espace focal; il en est de même pour p, q. Deux génératrices de Σ qui se correspondent dans l'involution (p, q) sont conjuguées dans le complexe et on retrouve pour celui-ci la génération de CHASLES: l'ensemble des droites qui rencontrent un couple quelconque de génératrices en involution sur Σ.

2°) Le foyer du plan de l'infini est l'homologue du centre de Σ dans l'involution (p, q). Donc, *l'axe* h *du complexe est l'homologue dans l'involution* (p, q) *du diamètre de* Σ *réciproque de la droite à l'infini dans un plan normal à la direction de* h.

3°) Si Σ est un paraboloïde équilatère, prenons pour p une génératrice de striction et pour q la génératrice à l'infini dans le plan directeur normal à p: *l'espace* E_r *réciproque d'un espace* E *par rapport à un paraboloïde équilatère constitue avec l'espace* E_i, *déduit de* E *par rotation de* 180° *autour d'une génératrice de striction* p, *un espace focal ayant même axe que le paraboloïde.*

2. - Si, Σ se composant de deux plans qui se coupent suivant une droite h, on prend p, q dans ces plans, la réciprocité des espaces E_i, E_r, est dégénérée.

Mais la construction indiquée permet, à cause de l'indétermination du plan polaire d'un point quelconque de la droite h, de faire correspondre celle-ci à toute droite qui ne la rencontre pas, tandis que toute droite qui s'appuie sur h est sa propre homologue. On obtient un *complexe linéaire spécial.*

3. - Les paraboloïdes équilatères Σ qui ont une génératrice de striction donnée p et qui forment un faisceau ont en commun, outre la droite à l'infini q du plan directeur normal à p, deux droites u, v réelles ou imaginaires conjuguées ou coïncidentes. Dans les deux premiers cas, les paraboloïdes sont circonscrits au quadrilatère gauche $pvqu$ de diagonales $x=(pv, qu)$, $y=(pu, qv)$; dans le troisième cas ils se raccordent le long de $u=v=x=y$.

En associant à l'involution (p, q) (1) successivement chaque paraboloïde du faisceau, on obtient un faisceau de complexes linéaires. Les droites x, y sont conjuguées dans tous ces complexes qui ont en commun la congruence linéaire dont x, y sont les directrices ou bien ces complexes ont en commun une congruence linéaire spéciale dont la directrice unique est $x=y$; dans ce cas les rayons de la congruence situés dans le plan tangent a aux paraboloïdes en un point quelconque A de x passent par le symétrique de A par rapport au point px (1).

Les paraboloïdes Σ forment un faisceau à la fois ponctuel et tangentiel, les pôles d'un plan quelconque et les plans polaires d'un point quelconque forment une ponctuelle et un faisceau projectifs au faisceau des paraboloïdes. La construction du foyer d'un plan et du plan focal d'un point (1) prouve que *les foyers d'un plan quelconque et les plans focaux d'un point quelconque par rapport aux complexes d'un faisceau forment une ponctuelle et un faisceau projectifs au faisceau des paraboloïdes* Σ: on dira qu'*ils sont projectifs au faisceau de complexes* (REYE-CHEMIN, *Géométrie de position*, t. II, p. 295; CAPORALI-DEL PEZZO, *Memorie di Geometria*, p. 278).

4. - *Le lieu des axes des complexes du faisceau est celui des axes des paraboloïdes équilatères* Σ (1, 3). *Par une rotation de* 90° *autour de* p, *il se superpose au lieu des secondes génératrices de striction* s *de ces paraboloïdes.* On distingue les cas suivants: x, y sont à distance finie distincts ou coïncidents, y est à l'infini, x et y coïncident à l'infini. Ces quatre cas sont étudiés analytiquement dans la *Liniengeometrie* (erster Teil, pp. 279-296) de M. K. ZINDLER.

5. - PREMIER CAS. - Soient X, Y les points px, py; X_1, Y_1, P les points à l'infini sur x, y, p; I, J les points cycliques sur q; H le sommet, sur p, d'un paraboloïde Σ; H_1, S_1 les points à l'infini sur l'axe h et sur la seconde génératrice de striction s de cette quadrique.

Les points H_1, S_1 sont conjugués harmoniques par rapport à I, J et tels que

$$X_1Y_1H_1S_1 \overline{\wedge} YXPH$$

car v, u, PH_1, s sont des génératrices de Σ.

Si $X_1 \equiv I$, $Y_1 \equiv J$, le groupe $YXHP$ est harmonique et H est fixe au *point principal* M, milieu du segment XY. Donc, *si les directrices* x, y *de la congruence linéaire de base sont isotropes, les axes des complexes forment un faisceau dont le sommet est le point principal de la congruence et dont le plan* (plan principal) *est normal à* p. *Ce faisceau est projectif au faisceau de complexes*, car il est perspectif à la ponctuelle des centres des paraboloïdes Σ (3).

Supposons x, y non isotropes. Construisons H_1 connaissant H. Soient X_0, Y_0, H_0, P_0 les projections de X, Y, H, P sur un plan normal à p et faites parallèlement à une direction quelconque; Q le point (X_0X_1, Y_0Y_1); H_0', P_0', H_1', S_1' les projections des points H_0, P_0, H_1, S_1 faites du point Q sur le cercle (C) passant par X_0, Y_0, Q. Les points H_1', S_1' sont diamétralement opposés sur (C) et tels que

$$X_0Y_0H_1'S_1' \overline{\wedge} Y_0X_0P_0'H_0'.$$

Les droites X_0Y_0, $P_0'H_1'$, $H_0'S_1'$ sont donc concourantes. Or, si A, B sont deux points diamétralement opposés et variables sur (C), les points $(P_0'A, H_0'B)$, $(P_0'B, H_0'A)$ décrivent le cercle (ω) qui rencontre orthogonalement (C) en P_0', H_0'. Donc, si (ω) rencontre la droite X_0Y_0 aux points H_1'', H_2'', les points H_1', H_2' de (C) situés sur les droites $P_0'H_1''$, $P_0'H_2''$ sont projetés de Q suivant deux droites parallèles aux axes HH_1, HH_2 des deux paraboloïdes du faisceau et de sommet H.

Ces constructions prouvent que si H décrit p, la ponctuelle engendrée par ce point est projective aux ponctuelles décrites par H_0, H_0' sur X_0Y_0, (C), donc aussi au faisceau des cercles (ω) tangents en P_0', par suite également aux involutions que décrivent les couples $H_1''H_2''$, $H_1'H_2'$ sur X_0Y_0, (C) et, enfin, à l'involution marquée sur la droite à l'infini q par le couple H_1, H_2. Si $H \equiv P$, les points H_1, H_2 sont aux points cycliques I, J et si $H \equiv X$, on a $H_1 \equiv X_1$, tandis que H_2 est à l'infini dans la direction QX_2 normale à QY_1. Les axes HH_1, HH_2 joignent les éléments homologues de la ponctuelle et de l'involution projectives

$$(P, X, Y, H, \ldots) \overline{\wedge} (IJ, X_1X_2, Y_1Y_2, H_1H_2, \ldots)$$

et engendrent donc une surface cubique ayant p pour droite double et q pour droite simple: c'est un cylindroïde car q est dans un plan normal à p et les génératrices PI, PJ sont tangentes au cercle imaginaire à l'infini.

Dès lors, *si* x, y *ne sont pas isotropes, les axes* h *des complexes sont situés sur le cylindroïde d'axe* p *et qui contient* x, y *ainsi que les perpendiculaires en* X, Y *aux plans* py, px.

Le lieu de la seconde génératrice de striction s *d'un paraboloïde équilatère qui admet une génératrice de striction donnée* p *et qui contient deux droites données* u, v *non isotropes et normales à* p *se déduit du lieu précédent en remplaçant* x *par* u *et* y *par* v.

6. - Soit K le sommet du paraboloïde du faisceau dont l'axe et la seconde génératrice de striction sont KS_1, KH_1 (5). On a les projectivités

$$X_1Y_1H_1S_1 \overline{\wedge} YXPH, \qquad X_1Y_1H_1S_1 \overline{\wedge} YXKP$$

et par suite l'involution

$$XY, \qquad HK, \qquad PP.$$

Dès lors, *deux génératrices orthogonales du cylindroïde rencontrent l'axe de celui-ci en deux points symétriques par rapport au point principal* M (5). *Celui-ci est donc le milieu du segment déterminé sur l'axe par les génératrices torsales. Les génératrices* (principales) *issues de* M *sont perpendiculaires entre elles et font des angles de* 45° *avec les génératrices torsales.*

7. - Considérons un paraboloïde équilatère Σ' qui se raccorde au cylindroïde Γ le long d'une génératrice quelconque g de celui-ci. Les génératrices de Γ et celles de Σ' qui rencontrent p marquent sur q une involution et une ponctuelle projectives qui ont trois éléments incidents dont deux coïncident sur g à cause du raccordement. Construisons la seconde génératrice commune l à Γ et Σ'. Soient π le centre de Σ'; γ, λ les points à l'infini de g, l; G, L les points pg, pl; G_1, G_2 et L_1, L_2 leurs homologues dans l'involution sur q. On a (5)

$$(P, G, L, \ldots) \overline{\wedge} (IJ, G_1G_2, L_1L_2, \ldots)$$

donc aussi

$$(\pi, \gamma, \lambda, \ldots) \overline{\wedge} (IJ, G_1G_2, L_1L_2, \ldots)$$

et sur le cercle (C)

$$(\pi', \gamma', \lambda', \ldots) \overline{\wedge} (IJ, G_1'G_2', L_1'L_2', \ldots).$$

Le faisceau $G_2'(\pi'\gamma'\lambda', \ldots)$ et le faisceau de droites parallèles IJ, $G_1'G_2'$, $L_1'L_2'$,.... sont projectifs et perspectifs car par hypothèse $G_1' \equiv \gamma'$; deux rayons homologues se coupent sur une droite qui rencontre (C) aux points incidents G_1', λ' des formes projectives, et cette droite est parallèle à $G_2'\pi'$. Les points λ', π' ne sont diamétralement opposés sur (C) que si G_1', G_2' le sont aussi. Donc, *pour qu'un paraboloïde équilatère de raccordement avec un cylindroïde ait sa seconde génératrice de striction sur cette surface, il faut et il suffit que le raccordement ait lieu suivant une génératrice principale du cylindroïde.*

8. - DEUXIÈME CAS. - Soient $x = u = m_1$ la directrice unique de la congruence; q la droite à l'infini du plan asymptote; p la normale à ce plan menée

par le point central M; P le point à l'infini sur p; I, J les points cycliques sur q; m_2 la normale en M au plan pm_1.

Dans la congruence, tout plan a qui contient m_1 est associé à un point A de m_1; on substitue à A son symétrique A' par rapport à M (3) et on considère les paraboloïdes équilatères de raccordement le long de m_1, de façon que A' soit le point de contact de a. Il existe un seul cylindroïde ayant p pour axe et m_1, m_2 pour génératrices principales avec a pour plan tangent en A', car une surface cubique réglée est déterminée par sa droite double p, sa droite simple q, quatre génératrices PI, PJ, m_1, m_2 et le plan tangent en un point de l'une d'elles. Les paraboloïdes se raccordant au cylindroïde le long de m_1, cette surface est le lieu de la seconde génératrice de striction (7). Donc (4), *le lieu des axes des complexes est un cylindroïde d'axe* p, *ayant* x *pour génératrice principale et tangent aux rayons de la congruence.*

9. - TROISIÈME ET QUATRIÈME CAS. - Si, x étant à distance finie, y est à l'infini, u est aussi à l'infini. Les axes des paraboloïdes passent par le point à l'infini X_1 et sont les réciproques d'une droite à l'infini d dans un plan normal à x et passant donc par Y. Par suite, *si* y *est dans un plan normal à* x, *tous les complexes ont même axe* x; *sinon les axes sont parallèles à* x.

Si x *coïncide avec* y *à l'infini, un raisonnement semblable prouve que les axes forment un faisceau de droites parallèles perpendiculaire à* p *et projectif au faisceau de complexes.*

10. - Un cylindroïde étant le lieu des axes ou des génératrices de striction des paraboloïdes équilatères d'un faisceau, on a les propriétés classiques suivantes:

1°) *Un cylindroïde donné est le lieu des axes des complexes linéaires pris dans une infinité simple de faisceaux; les directrices* x, y *de la congruence linéaire définissant l'un de ces faisceaux sont deux génératrices non orthogonales du cylindroïde et s'appuyant sur l'axe de celui-ci en deux points symétriques par rapport au point principal. Il y a une seule congruence orthogonale et deux congruences spéciales* (6, 8) (ZINDLER, *op. cit.*, p. 296). Les génératrices x, y sont dites *associées.*

2°) *Si* p *est la perpendiculaire commune aux directrices non isotropes* u, v *d'une congruence linéaire, la perpendiculaire commune* s *à* p *et à un rayon quelconque* r *de la congruence engendre un cylindroïde ayant* u, v *pour droites associées,* car s est génératrice de striction du paraboloïde équilatère contenant u, v, p, r (ZINDLER, id.).

3°) *Le lieu de la perpendiculaire commune à une droite fixe* p *et à un rayon variable d'un faisceau dont le plan n'est ni parallèle ni perpendiculaire à* p *est un cylindroïde d'axe* p (5, 8) (CH. MICHEL, *Compléments de Géométrie moderne,* p. 247).

4°) *La perpendiculaire commune à une génératrice fixe* p *d'un hyperboloïde* η *et à une génératrice variable engendre en général un cylindroïde d'axe* p *et qui a pour génératrices associées les directrices* u, v *de* η *qui rencontrent normalement* p; *si* η *est équilatère,* u, v *sont les génératrices torsales; si* η *est de révolution et si l'angle de son cône asymptote est droit,* u=v *est une génératrice principale; si,* η *étant orthogonal,* p *est normal à un plan cyclique, la perpendiculaire considérée décrit un faisceau* (5). Le point *pu* étant le sommet d'un trièdre trirectangle dont les faces sont tangentes à η, appartient à la sphère de MONGE et le point principal M est la projection orthogonale sur p du centre de η. Donc, *si* p *varie, le lieu du point principal du cylindroïde est la quartique gauche de seconde espèce, podaire du centre de* η, *relativement aux génératrices* p; *si* η *est équilatère, le lieu des points cuspidaux du cylindroïde appartient à la sphère de* MONGE.

5°) *Au point central* M *d'une directrice quelconque* m *d'une quadrique, on mène la tangente* p *perpendiculaire à* m. *La perpendiculaire commune à* p *et à une génératrice variable engendre un cylindroïde* (8). *On peut substituer à la quadrique une surface gauche ayant* m *pour génératrice, les génératrices de la quadrique étant remplacées par les tangentes menées à un système de lignes tracées sur la surface, aux points où celles-ci rencontrent* m.

11. - Toute droite d qui s'appuie sur deux génératrices associées x, y d'un cylindroïde Γ rencontre encore celui-ci en un point H; la génératrice h issue de H est l'axe d'un complexe linéaire passant par la congruence linéaire dont x, y sont les directrices (10, 1°), et est donc normale au rayon d du complexe. Réciproquement, toute droite qui rencontre normalement h s'appuie sur deux génératrices associées. Dès lors, *le complexe* (K) *des droites qui rencontrent normalement les génératrices d'un cylindroïde est aussi celui des droites qui s'appuient sur deux génératrices associées* (DARBOUX, *Théorie des surfaces,* I, p. 103).

Le plan focal δ_n d'un point D à distance finie, par rapport à un complexe linéaire C_n du faisceau (C_n) considéré contient la droite d qui, issue de D, s'appuie sur x, y, ainsi que la perpendiculaire d_n abaissée de D sur l'axe h_n de C_n. Si C_n décrit (C_n), le plan δ_n engendre un faisceau d'axe d qui, étant projectif à (C_n) (3), l'est aussi à la ponctuelle que décrit le point à l'infini de h_n et est, par suite, projectif au faisceau des plans projetant les droites d_n de la parallèle p' menée par D à l'axe p de Γ. Donc, *les perpendiculaires abaissées d'un point fixe* D *sur les génératrices d'un cylindroïde se trouvent sur un cône* (D) *du second ordre, et le complexe* (K) *est du second ordre.*

Pour que le plan $p'd_n$ coïncide avec δ_n et, par suite, pour que (D) dégénère en deux plans, il faut et il suffit que h_n soit normal à δ_n, donc que D soit

sur h_n. Lorsque D est à l'infini, δ_n est parallèle à h_n; (D) comprend le plan de l'infini et le plan que forme d avec la génératrice de Γ qui la rencontre normalement. Dès lors, *le cylindroïde et le plan de l'infini forment la surface des singularités du complexe* (K).

Le plan tangent au cône (D) le long de p' est normal au plan pp' car celui-ci contient une génératrice de Γ. Comme l'angle droit formé par les droites h_n, d_n a un côté h_n normal à p, la parallèle à p menée par le point $h_n d_n$ engendre un cylindre de révolution tangent au cône (D) le long de p', et le point $h_n d_n$ décrit donc une ellipse. Par suite, *les projections orthogonales d'un point quelconque* D *sur les génératrices d'un cylindroïde* Γ *se trouvent sur une ellipse; si* D *est sur* Γ, *le plan de la conique contient la génératrice associée à celle qui passe par* D. *Si une droite* p *est parallèle à une génératrice* p' *d'un cône du second ordre* (D) *et est dans le plan normal au cône le long de* p', *la perpendiculaire commune à* p *et à une génératrice variable de* (D) *engendre un cylindroïde d'axe* p.

Le foyer D_n d'un plan quelconque δ non parallèle à p par rapport au complexe C_n est sur la droite d du plan δ et qui s'appuie sur x, y. La droite d_n du plan δ issue de D_n et qui rencontre l'axe h_n de C_n est un rayon du complexe (K); son point à l'infini est dans le plan π_n mené par p normalement à h_n. Si C_n décrit (C_n), le point D_n engendre sur d une ponctuelle projective à celle que marque π_n sur la droite à l'infini du plan δ; la droite d_n enveloppe donc en général une parabole (δ). Si D_n est à l'infini sur d, l'axe h_n est parallèle à δ; l'axe de la parabole est donc normal à l'intersection de δ avec un plan perpendiculaire à p. Lorsque le plan δ est parallèle à p, l'enveloppe de d_n comprend le point à l'infini sur p et le pied de la génératrice de Γ normale à δ.

12. - *Étant données une parabole* (δ) *dans un plan* δ *et une droite* p *qui, n'étant ni parallèle ni perpendiculaire à* δ, *croise à angle droit la tangente au sommet de* (δ), *le lieu de la perpendiculaire commune* h *à* p *et à une tangente variable* d *de* (δ) *est un cylindroïde ou un paraboloïde équilatère suivant que les plans isotropes passant par* p *ne sont pas ou sont tangents à* (δ).

Soient D le point hd; (δ'), P, D' les projections orthogonales de (δ), p, D sur un plan $\tilde{\omega}$ normal à p; la droite $i = \tilde{\omega}\delta$ est normale aux axes des paraboles (δ), (δ'). Le lieu de D', podaire de (δ') relativement à P, est en général une cubique circulaire C_3' de point double P et dont l'asymptote réelle est parallèle à i. Le lieu de D est donc en général une cubique C_3 de point double $p\delta$ et dont une asymptote est parallèle à i, les deux autres points à l'infini étant sur les tangentes a, b au cercle imaginaire à l'infini et qui s'appuient sur p. La droite h rencontre C_3, p et la droite à l'infini q du plan $\tilde{\omega}$ qui s'appuie

sur C_3 au même point que i; elle engendre donc un conoïde cubique droit d'axe p (E. WEYR, *Regelflächen dritter Ordnung,* p. 27) qui, ayant a, b pour génératrices, est un cylindroïde.

Si P est le foyer de (δ'), C_3' comprend les droites isotropes issues de P et la tangente au sommet de (δ'), ce qui achève la démonstration.

13. - La conjuguée l_n d'une droite l, réelle, à distance finie et non orthogonale à p, par rapport à un complexe C_n variable dans le faisceau (C_n) (11) engendre l'hyperboloïde η passant par x, y, l (3). La perpendiculaire commune l_n' à l, l_n rencontre orthogonalement l'axe h_n de C_n et engendre en général un cylindroïde (10, 4°), d'où le théorème de PETERSEN (*Nouveau principe pour études de géométrie des droites,* Bulletin de l'Académie Royale de Copenhague, 1898; DARBOUX, *loc. cit.,* p. 106; P. LIBOIS, *Mathesis,* 1928, p. 169): *le lieu des perpendiculaires communes aux génératrices rectilignes d'un cylindroïde Γ et à une droite* l *non orthogonale à l'axe de Γ est en général un cylindroïde.*

l_n' engendre un faisceau si, η étant orthogonal, l est normale à un plan cyclique (10, 4°). Le sommet D du faisceau se trouve sur Γ (11) et est un sommet du grand axe de η. Comme un cylindroïde est défini par deux génératrices associées, *le lieu des sommets des grands axes des hyperboloïdes orthogonaux passant par deux droites gauches données* x, y *est le cylindroïde ayant* x, y *pour génératrices associées.*

14. - Une involution de génératrices sur un hyperboloïde Σ définit un complexe linéaire (1). Les directrices u, v de Σ qui s'appuient sur l'axe h du complexe rencontrent normalement cet axe, et tout paraboloïde équilatère qui contient u, v coupe Σ suivant un couple de l'involution. Par suite (5), *les perpendiculaires communes aux couples de génératrices en involution sur un hyperboloïde Σ sont en général sur un cylindroïde dont l'axe* h *est celui du complexe linéaire défini par l'involution et qui a pour génératrices associées les directrices* u, v *de Σ qui rencontrent* h; *leurs pieds sont sur une biquadratique gauche de seconde espèce. Si* h *est normal à un plan de section circulaire, les perpendiculaires considérées engendrent un faisceau.*

R. DEAUX (Mons - Belgio)

SULLE QUARTICHE GOBBE

In questa nota deduciamo una quartica gobba C_2^4 di seconda specie da una quartica gobba C_1^4 di prima specie; mostriamo allora che la podaria di un punto rispetto a un sistema di generatrici d'un iperboloide ad una falda e la linea di stringimento del sistema sono C_2^4 che si possono ottenere agevolmente per mezzo di due C_1^4.

1. - *Se i piani tangenti di un cono quadrico corrispondono proiettivamente alle generatrici di una schiera rigata, il luogo geometrico dei punti d'intersezione delle coppie di elementi corrispondenti è in generale una* C_2^4.

(REYE-CHEMIN, *Leçons sur la géométrie de position,* t. II, p. 245).

Siano $(S)=(\alpha, \beta, \gamma,....)$ il fascio di secondo ordine dei piani tangenti del cono dato e avente per vertice il punto S; $(\Sigma_2)=(a, b, c,....)$ la schiera rigata data sopra la quadrica Σ_2; p una direttrice qualunque della (Σ_2). Il luogo geometrico delle ∞^1 rette d'intersezione delle coppie di piani corrispondenti nei fasci proiettivi del secondo e del primo ordine

$$(S)=(\alpha, \beta, \gamma,....)\,\overline{\wedge}\,p(a, b, c,....)$$

è una rigata Σ_3 di terzo grado avente p per retta doppia (E. WEYR, *Regelflächen dritter Ordnung,* p. 43; R. DEAUX, *Mathesis,* 1928, p. 145), ed il punto aa descrive la quartica C_2^4 comune alle superficie Σ_2 e Σ_3.

Sono fra loro proiettivi il fascio (S) ed il fascio di piani del primo o del secondo ordine che proiettano (Σ_2) dal punto S; se i fasci hanno un elemento unito a, la retta a si stacca dal luogo cercato. Dunque, *secondochè si trovino uno, due o tre elementi uniti nel fascio* (S) *e nel fascio dei piani che dal punto* (S) *proiettano i raggi della schiera* (Σ_2), *la* C_2^4 *si compone di un raggio della* (Σ_2) *e di una cubica gobba, o di due raggi e di una conica, o di tre raggi e di una direttrice della schiera.*

Se il cono (S) *è circoscritto alla* Σ_2, *la* Σ_3 *è in generale una superficie di* CAYLEY (E. WEYR, *op. cit.,* p. 114); le forme proiettive (S), (Σ_2) danno sopra p due punteggiate proiettive, e per ciascun punto doppio di queste forme passa un raggio della (Σ_2) che giace nel piano corrispondente del $(S.)$

Dunque, *se le forme* (S), (Σ_2) *non sono prospettive, il luogo cercato si spezza in due raggi della* (Σ_2) *ed in una conica.*

2. - *Sopra una quàdrica* Σ_2 *si considerino una schiera rigata* $(\Sigma_2)=(a,b,c...)$, *la punteggiata* $(p)=(A, B, C,...)$ *sezione della* (Σ_2) *prodotta da una sua direttrice* p *ed una quartica gobba reale o immaginaria* C_1^4. *Il luogo geometrico del punto* A_0 *coniugato armonico del punto* A *rispetto ai punti* A', A'' *dove il raggio* a *si appoggia alla* C_1^4 *è in generale una cubica gobba* C^3.

Infatti, quando A percorre la retta p, il suo piano polare α rispetto ad una quadrica fissa Σ_2' che contiene la C_1^4 ruota intorno ad una retta q e genera un fascio che, essendo proiettivo alla punteggiata (p), lo è anche alla schiera (Σ_2). Siccome $A_0=a\alpha$, rimane dimostrata la suddetta proprietà (si veda G. LORIA, *Curve sghembe*, I, p. 71).

La retta q è la polare della retta p rispetto alla Σ_2' ed incontra la C^3 in due punti. Ne segue che *la* C^3 *è l'intersezione della* Σ_2 *colla quadrica luogo delle rette polari della retta* p *rispetto alle quadriche che passano per la* C_1^4.

Esistono quattro raggi r della (Σ_2) che toccano la C_1^4. Emerge da ciò che *la* C^3 *passa per i quattro punti* R *di contatto della* C_1^4 *coi raggi* r *della* (Σ_2) *che toccano la* C_1^4; *essa contiene anche i due punti dove la retta* p *si appoggia alla* C_1^4.

È interessante di sapere quando dalla C^3 si stacca una retta. Se nel piano α sta il raggio a, questo piano è allora tangente alla Σ_2' nel punto A e contiene la tangente t alla C_1^4 nello stesso punto; se le rette a, t sono distinte tutte le quadriche che passano per la C_1^4 sono tangenti nel punto A e la C_1^4 ammette A per punto doppio; se quelle rette coincidono, o il punto A è un punto R, o la retta a fa parte della C_1^4. Concludiamo dunque che *la cubica* C^3 *si compone di un raggio della* (Σ_2) *e di una conica se la retta* p *contiene un punto doppio della* C_1^4 *o un punto* R, *od anche se un raggio della* (Σ_2) *fa parte della* C_1^4; *la* C^3 *si spezza in due raggi ed una direttrice della* (Σ_2), *se sono realizzate due delle precedenti ipotesi.*

3. - *Se la direttrice* p (2) *della* (Σ_2) *viene surrogata con un piano qualunque* $\tilde{\omega}$, *avremo una punteggiata del secondo ordine* $(\tilde{\omega})=(A, B, C,....)$ *ed il punto* A_0 *descriverà in generale una* C_2^4.

Infatti quando A percorre la conica $(\tilde{\omega})$, il suo piano polare α rispetto alla quadrica Σ_2' (2) genera un fascio del secondo ordine che, essendo proiettivo alla punteggiata $(\tilde{\omega})$, lo è anche alla schiera (Σ_2). Siccome $A_0=a\alpha$, rimane dimostrata la suddetta proprietà (1).

Il ragionamento del n. 2 prova che *la* C_2^4 *contiene i quattro punti* R, *passa per i quattro punti nei quali la* C_1^4 *è tagliata dal piano* $\tilde{\omega}$, *e si spezza in un raggio della* (Σ_2) *ed in una cubica gobba se il piano* $\tilde{\omega}$

contiene un punto doppio della C_1^4 *o un punto* R, *od anche se un raggio della* (Σ_2) *fa parte della* C_1^4; *se vengono realizzate due o tre di queste ultime ipotesi, la* C_2^4 *si compone di due rette e di una conica, o di tre raggi e di una direttrice della* (Σ_2).

OSSERVAZIONE. - La C_1^4 dalla quale si deduce una C_2^4 può comporsi di una cubica gobba e di una sua bisecante, o ancora di due coniche che hanno due punti comuni.

4. - *Se i piani di un fascio del primo ordine corrispondono proiettivamente alle coppie di generatrici in involuzione sopra una quadrica, il luogo geometrico dei punti d'intersezione d'un piano del fascio colle generatrici della coppia corrispondente è in generale una* C_2^4.

Siano q l'asse del fascio dato $(q)=(\alpha, \beta, \gamma,....)$; $(\Sigma_2)=(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2,....)$ l'involuzione di generatrici sopra la quadrica Σ_2; p una direttrice della (Σ_2). Le rette d'intersezione a_1', a_2' del piano α coi suoi piani corrispondenti pa_1, pa_2 nelle forme proiettive

$$(q)=(\alpha, \beta, \gamma,....) \overline{\wedge} p(a_1a_2, b_1b_2, c_1c_2,....)$$

generano una rigata Σ_3 di terzo grado avente p per retta doppia e q per retta semplice, ed i punti $a_1\alpha=a_1a_1'$, $a_2\alpha=a_2a_2'$ descrivono la quartica C_2^4 comune alle superficie Σ_2 e Σ_3.

Indichiamo con x, y i raggi della (Σ_2) uscenti dai punti X, Y dove l'asse q incontra la Σ_2. Questi punti appartengono alla C_2^4. Secondochè uno o due raggi x, y si trovino nei loro piani omologhi, la C_2^4 si compone di x e di una cubica gobba, o di x, y e di una conica.

Non enunceremo i risultati che si hanno supponendo l'asse q raggio o direttrice della (Σ_2).

5. - Nella ricerca del luogo geometrico del punto A_0 (2, 3), è interessante di sostituire a questo punto un punto A_0' tale che il birapporto $(A'A''AA_0')$ abbia un valore costante k. In questo lavoro supporremo solamente che la data C_1^4 sia composta di due coniche. Otterremo così una dimostrazione semplicissima del seguente teorema, scoperto da L. VIETORIS (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie*, t. CXXV, 1916, pp. 259-283). *Se un raggio variabile* a *di una schiera rigata* (Σ_2) *è tagliato dalle facce* $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}'$, $\tilde{\omega}''$ *d'un triedro, il cui vertice non giace sulla quadrica, in tre punti* A, A', A'' *che descrivono tre coniche non degeneri, il luogo del punto* A_0' *tale che, essendo* k *una data costante, sia* $(A'A''AA_0')=k$, *è una* C_2^4.

Infatti un piano α che ruota attorno alla retta $\tilde{\omega}'\tilde{\omega}''$ genera un fascio proiettivo all'involuzione formata dalle coppie di raggi della (Σ_2) uscenti dai punti A, A_1 ove α taglia la conica del piano $\tilde{\omega}$; questa involuzione è, quindi, proiettiva al

fascio generato dal piano a_0' tale che sia $(\tilde{\omega}'\tilde{\omega}''aa_0')=(A'A''AA_0')=k$, c. d. d. (4). Si trovano agevolmente i casi nei quali si spezza la C_2^4 (1).

6. - Si consideri la quartica gobba C_1^4 intersezione di un iperboloide ad una falda Σ_2 con una sfera di centro arbitrario O e di raggio qualunque. Essendo la proiezione ortogonale di O su una generatrice arbitraria a della Σ_2 il punto medio del segmento definito dai punti d'appoggio di a alla C_1^4, essa è, rispetto a questi punti, il coniugato armonico del punto all'infinito sulla retta a.

Segue da ciò, considerando il teorema del n. 3, che *la podaria di un punto qualunque rispetto alle generatrici di un iperboloide ad una falda è in generale una* C_2^4 *i cui punti all'infinito sono ciclici* (G. LORIA, *op. cit.*, pp. 316-318).

OSSERVAZIONE. - Quando il punto O si trova in un piano di simmetria, è possibile di scegliere la sfera, dimodochè la C_1^4 si componga di due cerchi.

7. - Affinchè venga spezzata la quartica C_2^4 (6), è necessario che la tangente in un suo punto ciclico sia una generatrice isotropa r_1' della schiera rigata (Σ_2) (3) e, quindi, che il punto O si trovi in un piano isotropo passante per r_1'; siccome supponiamo reale il punto O, così questo giace allora anche nel piano isotropo passante per la generatrice isotropa r_1'' coniugata della r_1', e la podaria di O comprende le due rette r_1', r_1''. Dunque, *preso un punto sulla perpendicolare comune a due generatrici isotrope coniugate di un iperboloide ad una falda, la sua podaria consta di tali generatrici e di un cerchio.*

È facile assicurarsi che, prendendo il punto d'incontro della detta perpendicolare coll'asse massimo dell'iperboloide, la sua podaria rispetto al secondo sistema di generatrici è anche un cerchio.

8. - Supponiamo che la quàdrica Σ_2 (6) sia un paraboloide; essa tocca il piano all'infinito. Ne segue (2), facendo un ragionamento analogo a quello dei numeri 6, 7, che *la podaria di un punto qualunque* O *rispetto alle generatrici di un sistema d'un paraboloide* Σ_2 *è in generale una cubica gobba circolare* C^3 (G. LORIA, *op. cit.*, p. 165).

Se il punto O *sta sulla perpendicolare comune alle due generatrici isotrope, la podaria consta di tali generatrici e della direttrice uscente dal vertice della quadrica.*

Il punto reale all'infinito della C^3 è, sulla generatrice all'infinito a della schiera (Σ_2), il coniugato armonico A_0 del centro A della Σ_2 rispetto ai punti

(1) Dell'anzidetto teorema furono date due altre dimostrazioni geometriche dalla Signorina NELLY TRIVIER (*Mathesis*, 1927, p. 173). — Per una dimostrazione analitica, si vegga G. LORIA, *op. cit.*, p. 278.

ciclici A', A'' situati sulla a. Dunque, *l'asintoto reale della cubica è parallelo alla direttrice della* (Σ_2) *uscente dal vertice del paraboloide ed incontra l'asse di questo.*

Cerchiamo ora quando la cubica sarà una curva oroptera.

9. - *Una curva oroptera è una cubica gobba circolare situata sopra un cilindro di rotazione.*

Essendo a e b due costanti, le equazioni parametriche della detta curva sono

$$x=\frac{a}{1+\lambda^2},\quad y=\frac{a\lambda}{1+\lambda^2},\quad z=b\lambda$$

(M. STUYVAERT, *Mathesis*, 1903, pp. 153-162; G. LORIA, *op. cit.*, p. 170).

Se ne trae

$$xz=by,\quad x^2+y^2-ax=0,$$

epperò la curva è l'intersezione d'un cilindro di rivoluzione con un paraboloide iperbolico equilatero per il quale sono generatrice di stringimento e piano direttore una generatrice del cilindro ed il piano tangente corrispondente.

Questa generazione conduce alla proprietà da dimostrare. Infatti per la suddetta cubica, il suo asintoto reale e la congiungente dei suoi punti ciclici passa un paraboloide equilatero: l'asintoto è generatrice di stringimento ed il piano tangente al cilindro lungo quella linea è piano direttore, perchè essendo questo piano osculatore alla cubica nel suo punto all'infinito, esso è un piano asintoto del paraboloide.

Affinchè sia di rotazione il cilindro prospettivo alla C^3 (8), è necessario e sufficiente che il punto A_0 sia il polo, rispetto all'assoluto, della direttrice all'infinito della (Σ_2) e, quindi, che Σ_2 sia equilatero. Ne concludiamo che *la podaria d'un punto qualunque rispetto alle generatrici di un sistema d'un paraboloide equilatero è una curva oroptera.*

NOTA. - Abbiamo dimostrato (*Mathesis*, 1927, p. 346) che considerando in una correlazione nulla (*Nullsystem*) tutte le rette l uscenti da un punto P e che sono ortogonali alle loro reciproche l', il punto d'appoggio sulla l della perpendicolare comune alle due rette l, l' descrive anche una curva oroptera.

10. - Ogni sfera S il cui centro O coincide col centro d'un iperboloide ad una falda Σ_2 taglia questa quàdrica secondo una C_1^4 che può servire alla costruzione della podaria di O rispetto alle generatrici di un sistema $(\Sigma_2)=(a, b, c,....)$ della Σ_2 (6). Nella polarità la cui quadrica direttrice è Σ_2, al fascio delle sfere S corrisponde un fascio d'ellissoidi S'; Σ_2 e S' sono coassiali ed il cono asintoto Γ' comune agli S' è il reciproco dell'assoluto Γ. Le quartiche C_1^4 d'intersezione della Σ_2 cogli S' sono le linee di contatto della Σ_2 colle sviluppabili circoscritte alla Σ_2 ed alle sfere S; sono dunque le curve L di DE LA GOURNERIE (G. LORIA,

op. cit., p. 251), analoghe alle polodie di POINSOT per un ellissoide. Fra quelle curve L figura la linea di contatto I_1^4 della Σ_2 colla sua sviluppabile isotropa circoscritta; la otterremo considerando nel fascio tangenziale delle sfere l'assoluto Γ. La I_1^4 contiene i punti di contatto A', A'' dei due piani tangenti isotropi condotti alla Σ_2 da ogni generatrice a, ed è noto che il punto medio A_0 del segmento $A'A''$ è il punto centrale della a. Siccome gli ellissoidi S' incontrano a in coppie di punti appartenenti ad una involuzione un cui punto doppio si trova all'infinito, così resta dimostrato (3) che *la linea di stringimento d'un sistema di generatrici d'un iperboloide è il luogo del punto medio del segmento staccato su una generatrice variabile da una curva qualunque di* DE LA GOURNERIE. *Essa è dunque una* C_2^4 *i cui punti all'infinito si trovano nei piani asintoti isotropi della quadrica; essa contiene i punti di contatto dei piani isotropi passanti per le generatrici isotrope.*

Affinchè la detta C_2^4 si spezzasse, bisognerebbe che fosse all'infinito il punto di contatto della I_1^4 con una generatrice isotropa (3); la Σ_2 è allora di rotazione, la I_1^4 si compone di due cerchi immaginari i cui piani sono perpendicolari all'asse di rivoluzione e concludiamo dunque che *la linea di stringimento d'un iperboloide di rotazione è il cerchio di gola.*

11. - Le suindicate genesi della podaria centrale e della linea di stringimento per mezzo di una sfera S e della sua reciproca S' (6, 10) permettono d'ottenere le equazioni di quelle curve con lo stesso procedimento di calcolo, giustificando così l'analogia che presentano dette equazioni (G. LORIA, *op. cit.*, p. 317).

Essendo

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

l'equazione della Σ_2, consideriamo il sistema di generatrici rappresentate al variare di t dalle equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}=\dfrac{z}{c}\operatorname{sen} t+\cos t \\ \dfrac{y}{b}=-\dfrac{z}{c}\cos t+\operatorname{sen} t \end{cases}$$

e la sfera S

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

L'equazione dell'ellissoide S' sarà

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=1$$

e ha dunque, come quella della sfera, la forma

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1.$$

Questa quadrica taglia la Σ_2 secondo una quartica che determina su una generatrice della Σ_2 un segmento il cui punto medio ha per coordinate i seguenti valori

$$x = a\alpha^2 \cos t \, \frac{b^2\gamma^2 + c^2\beta^2}{a^2\beta^2\gamma^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\alpha^2\gamma^2 \cos^2 t + c^2\alpha^2\beta^2}$$

$$y = b\beta^2 \operatorname{sen} t \, \frac{c^2\alpha^2 + a^2\gamma^2}{a^2\beta^2\gamma^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\alpha^2\gamma^2 \cos^2 t + c^2\alpha^2\beta^2}$$

$$z = c\gamma^2 \operatorname{sen} t \cos t \, \frac{b^2\alpha^2 - a^2\beta^2}{a^2\beta^2\gamma^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2\alpha^2\gamma^2 \cos^2 t + c^2\alpha^2\beta^2}$$

Facendo ivi $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = 1$ e poi $\alpha^2 = a^4$, $\beta^2 = b^4$, $\gamma^2 = c^4$ si ottengono le equazioni parametriche

$$x = a \cos t \, \frac{b^2 + c^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2}$$

$$y = b \operatorname{sen} t \, \frac{c^2 + a^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2}$$

$$z = c \operatorname{sen} t \cos t \, \frac{b^2 - a^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2}$$

della podaria centrale e quelle

$$x = a^3 \cos t \, \frac{b^2 + c^2}{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + c^2a^2 \cos^2 t + a^2b^2}$$

$$y = b^3 \operatorname{sen} t \, \frac{c^2 + a^2}{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + c^2a^2 \cos^2 t + a^2b^2}$$

$$z = c^3 \operatorname{sen} t \cos t \, \frac{a^2 - b^2}{b^2c^2 \operatorname{sen}^2 t + c^2a^2 \cos^2 t + a^2b^2}$$

della linea di stringimento.

12. - Fra le tre sfere di centro O che tagliano la Σ_2 (10) secondo cerchi, una sola dà cerchi reali, situati in due piani diametrali. Siccome quella sfera è la polare reciproca della Σ_2 rispetto ad una quadrica avente O per centro, così la sviluppabile circoscritta alla sfera e alla Σ_2 si compone di due cilindri che necessariamente sono di rotazione. Ciò prova che *fra le curve di* DE LA GOURNERIE (10) *si trovano le tre coppie di coniche, lungo le quali sono circoscritti alla quadrica tre coppie di cilindri circolari retti.*

Il seguente teorema del DANZER (*Sitzungsberichte der Wiener Akademie,* 1913, II^a, 122, pp. 1107-1134) è dunque un caso particolare di quello che abbiamo stabilito nel n. 10: *la linea di stringimento di un sistema di generatrici d'un iperboloide è il luogo dei punti medi dei segmenti determinati sulle generatrici dalle coniche di contatto dei cilindri di rotazione circoscritti alla quadrica.*

13. - Il centro d'un paraboloide è il vertice del cilindro immaginario polare reciproco dell'assoluto rispetto al paraboloide; quel punto è, quindi, doppio sulla quartica I_1^4 di contatto del paraboloide colla sviluppabile isotropa circoscritta.

Siccome la I_1^4 tocca le due generatrici isotrope di ciascun sistema sulla retta polare della loro perpendicolare comune, possiamo asserire (2, 10) che *la linea di stringimento di un sistema di generatrici d'un paraboloide non equilatero è una conica che contiene il vertice della quadrica e i punti d'intersezione di questa colla retta polare della perpendicolare comune alle generatrici isotrope.*

14. - I punti di contatto A, A_0 di due piani tangenti ortogonali passanti per una generatrice $\grave{a}$ di una quadrica sono coniugati armonici rispetto ai due punti A', A'' d'appoggio di a alla quartica immaginaria I_1^4 (10, 13). Tenendo conto del fatto che i punti di contatto R_1', R_1'' della I_1^4 con due generatrici isotrope coniugate r_1', r_1'' (7) della schiera $(\Sigma_2)=(a, b, c,....)$ considerata si trovano sulla retta polare r_p della perpendicolare comune alle r_1', r_1'', ed applicando i numeri 2, 3, otterremo le seguenti proprietà: *in ogni punto* A *di una conica* $(\tilde{\omega})$ *tracciata sopra una quadrica* Σ_2 *si consideri il piano normale passante per la generatrice* a *d'un sistema dato: il luogo del punto di contatto di quel piano colla* Σ_2 *è una quartica* C_2^4 *o una conica secondochè il piano della* $(\tilde{\omega})$ *sarà qualunque o conterrà una retta* r_p; *in questo caso il piano normale inviluppa un cono del secondo ordine. Se, essendo* Σ_2 *un paraboloide, il piano della* $(\tilde{\omega})$ *è parallelo all'asse, si ottiene per luogo una cubica gobba* perchè il centro della quadrica è un punto doppio della I_1^4.

Se il punto A *descrive una direttrice* p *della rigata, il luogo considerato è in generale una cubica gobba* (2).

C. H. SISAM (Colorado - U. S. A.)

ON RULED THREE-DIMENSIONAL VARIETIES OF ORDER FIVE

Every algebraic three-dimensional variety of order not greater than three is known to be ruled. The determination of those of order four which are ruled was carried out by TOGLIATTI (1). In this paper, we consider the classification of the non-composite, non-conical, three-dimensional varieties, V_3^5, of order five, which are generated by right lines but not by planes.

If such a variety belongs to a space of more than four dimensions, its curve sections are of genus two, at most, and the variety is, accordingly, ruled. If V_3^5 is a ruled hypersurface in four dimensions it is known (2) that it must contain a multiple curve or a multiple surface and our classification is based on the nature of this multiple locus. We denote by p the genus of the generic plane sections of V_3^5 and we find that the variety is ruled under the following conditions:

$p=6$. There is (α) a triple curve C^5 of order five and genus one of which V_3^5 is the locus of the bisecant lines or (β) a fourfold right line or (γ) a triple conic, or a triple right line, along which two sheets of V_3^5 touch each other.

$p=5$. There is a double plane π and also (α) a fourfold right line in π or (β) a triple line in π along which two sheets of V_3^5 touch each other or (γ) a triple line skew to π or (δ) a triple conic with one point in π.

$p=4$. If the double surface is two planes with just one point in common, V_3^5 is ruled.

If the double surface is two planes π_1 and π_2 with a line l in common, V_3^5 is ruled if (α) l is a fourfold line or (β) there is, in π_1, a triple line along which two sheets of V_3^5 touch or (γ) there is a triple line skew to π_1 but meeting π_2 or (δ) there is a triple conic which meets π_1 and π_2, each in one point.

---

(1) TOGLIATTI: *Sulle varietà a tre dimensioni e di quart'ordine che son luoghi di almeno ∞^2 rette.* Rendiconti dei Lincei, Ser. 5, Vol. 30, 1921, Sem. 1, pp. 252-5, Sem. 2, pp. 22-5.

(2) C. SEGRE: *Preliminari di una teoria delle varietà luoghi di spazi.* Rendiconti di Palermo, Vol. 30, 1910, pp. 87-121.

If the double surface is a quadric, V_3^5 is ruled (α) if there is on the quadric a triple conic or a triple right line along which two sheets of V_3^5 touch each other or (β) if there is a triple conic, or a triple right line, which does not lie on the quadric.

$p \leqslant 3$. The variety is always ruled except when the multiple surface is three planes with a line l in common. In this last case, V_3^5 is ruled if l is a fourfold line.

C. JUEL (Copenhagen - Danimarca)

BEISPIELE VON ELEMENTARKURVEN UND ELEMENTARFLÄCHEN

Vorwort.

Die folgende Arbeit enthält zwei wesentlich verschiedene kleine Aufsätze über Beispiele von den Kurven und Flächen, welche ich Elementarkurven und Elementarflächen genannt habe. Eine ebene Elementarkurve ist kurz gesprochen eine aus einer endlichen Zahl von Konveksbögen zusammengesetzte Kurve; ebenso ist eine elementare Raumkurve aus einer endlichen Zahl der einfachsten Raumbögen, nämlich Bögen dritter Ordnung, zusammengesetzt; endlich ist eine Elementarfläche aus einer endlichen Zahl von Flächenstücken (zweiter und) dritter Ordnung zusammengesetzt. Hierzu kommt noch naheliegende Stetigkeitsbedingungen, sowie die Forderung, dass die Gebilde geschlossen sein sollen.

Wenn man nun für eine elementare Raumkurve die Zahlen zu bestimmen wünscht, welche den sogen. Cayly-Plückerschen Zahlen für algebraische Kurven entsprechen, muss man jedenfalls der Kurve eine bestimmte Ordnung-*Realitätsordnung*-zulegen. Diese ist die grösste und erreichbare Zahl von — selbstverständlich reellen — Schnittpunkten mit einer Ebene, und ist im Allgemeinen selbst für algebraische Kurven nicht mit der algebraischen Ordnung der Kurve zusammenfallend.

Aus der Definition folgt, dass man jeden solchen Punkt M als singulär zu betrachten hat, wo die oskulierende Ebene μ mehr als drei zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat, was so zu verstehen ist, dass es μ naheliegende Ebenen giebt, welche mit der Kurve mehr als drei M naheliegende Punkte gemein haben.

Die spezielle Elementarkurve, die ich in dieser Arbeit betrachte, ist eine Raumkurve vierter Ordnung mit einer Spitze. Diese Kurve hat also singuläre Punkte, und es ist deshalb notwendig die wesentlichsten Eigenschaften solcher Punkte etwas näher zu untersuchen. Ich thue dies in § 1, und es geschieht durch eine variierte Anwendung von Projektionen auf eine Ebene. Ich erlaube mir hervorzuheben, dass es sich hierbei nirgend um unendlich kleine naheliegende Bögen handelt, es dreht sich immer nur um endliche Bögen der vorgelegten Kurve. Wenn man noch einige passende Bedingungen hinzufügt, erhält man eine

Kurve, für welche die genannten Zahlen sich sämtlich bestimmen lassen und — was wesentlich ist — noch so, dass der nicht-analytische Typus der Kurve sich festhalten lässt.

Als Beispiel einer Elementarfläche nehme ich in § 4 ein cyklisches Ovaloid, d. h. ein Ovaloid, das von jedem Kreis in höchstens vier Punkten geschnitten wird; ich setze noch voraus, dass die Krümmungen sich überall stetig ändern.

Hier giebt es der Definition nach keine singulären Punkte, sodass man sogleich die spezielle Fläche in Angriff nehmen kann. Hier endigt aber die Sache ganz anders als früher. Es zeigt sich, dass eine solche Fläche im Allgemeinen notwendigerweise algebraisch sein muss. Der Ausnahmefall ist der, wo die Fläche eine cirkuläre Krümmungslinie hat. In diesem Falle habe ich die Frage dahinstehen lassen müssen.

Die inverse Fläche eines cyklischen Ovaloids ist eine Fläche dritter Ordnung, wenn das Inversionszentrum auf der Fläche gewählt wird. Ich hätte deshalb eine von mir früher entwickelte Theorie der Flächen dritter Ordnung anwenden können (1). Aber selbst davon abgesehen, dass eine direkte Behandlung mehr systematisch ist, ist die Theorie der Geraden auf einer Fläche dritter Ordnung tiefer liegend als die Theorie der Kreise auf einem Ovaloid.

Es war ursprünglich meine Absicht die allgemeine Cyklide in Angriff zu nehmen. Definiert man diese als eine mit passenden Stetigkeitsbedingungen versehene Fläche, welche von einem Kreis in höchstens vier Punkten geschnitten wird, kann man mittels der oben genannten Theorie wesentlich schon durchschauen, dass die Fläche im Allgemeinen algebraisch sein muss. Aber die vollständige Durchführung erfordert doch einige weitere Betrachtungen, sodass ich dies anderen überlassen muss. Interessant wäre es hier genau zu wissen, ob die Dupin'schen Cyklide wirklich eine Ausnahmestellung einnehmen sollten, was sonderbar aber nicht ganz unmöglich wäre.

§ 1. - Einleitende Definitionen und Sätze.

Zwischen den reellen algebraischen Kurven und *reellen* Kurven allgemeinerer Art, z. B. den Jordankurven, können verschiedene Kurvenspezies eingeschoben werden. Für die Untersuchungen, mit welchen ich mich in dieser Richtung beschäftigt habe, hat es sich als fruchtbar erwiesen, die *Elementarkurven* hervorzuheben, eine Kurvenklasse, welche die regulären analytischen Kurven umfasst. Eine ebene Elementarkurve ist eine stetige Kurve, welche in jedem Punkt eines Bogens derselben eine und nur eine mit dem Berührungspunkt sich stetig ändernde Tangente hat, und aus einer endlichen Zahl von *getrennten Bögen zweiter Ordnung* zusammengesetzt ist; es wird weiter vorausgesetzt, dass die Kurve kein

(1) *Einleitung in die Elementarflächen dritter Ordnung* (Math. Ann., Bd. 76, p. 548 (1915).

Geradenstück enthält. Im folgenden ist nur von *geschlossenen* Kurven die Rede. Auf der Kurve giebt es ausser den *allgemeinen* Punkten, d. h. innere Punkte eines Bogens zweiter Ordnung, auch eine der Definition nach endliche Zahl von singulären Punkten: Inflexionspunkte und Spitzen erster und zweiter Art. Als singuläre Punkte kann man auch die Doppelpunkte rechnen, welche auch mit den obengenannten kombiniert auftreten können. Eine Elementarkurve ist endlicher Ordnung und endlicher Klasse. Die Zahl der aus einem Punkt P ausgehenden Tangenten ändert sich um 2 wenn P entweder die Kurve in einem gewöhnlichen Punkt oder eine Wendetangente derselben ausserhalb des Berührungspunktes in einem Punkt P_0 überschreitet. Wenn P sich P_0 nähert, sodass beim Ueberschreiten von P_0 zwei Tangenten verschwinden, dann laufen die Berührungspunkte dieser zwei Tangenten in entgegengesetztem Sinn auf der Kurve.

Wenn umgekehrt ein Punkt P_0 festliegt, und eine Kurve K in einem stetigen Kurven System von Elementarkurven K entweder durch P_0 geht, oder eine Wendetangente durch P_0 sendet, dann entstehen entweder zwei neue durch P_0 gehende Tangenten an K oder es verschwinden zwei. Sind a_1 und a_2 die zwei Tangenten, welche in der genannten Weise verschwinden, dann drehen sich diese, wenn K sich K_0 nähert, in entgegengesetztem Sinn um P_0.

Es sei, was zusammenfallende Lösungen betrifft, beispielsweise bemerkt, dass durch eine Spitze A erster Art drei Tangenten gehen, welche in eine Gerade a zusammenfallen. Damit ist gemeint, dass es in der Nähe von A Punkte P giebt, aus denen drei (und höchstens drei) Tangenten gehen, welche nach a konvergieren, wenn P nach A konvergiert.

Die Definition einer Elementarkurve ist projektiver Natur. Man ersieht daraus leicht, dass man das Dualitätsprinzip anwenden kann, wobei sich die singulären Punkte in bekannter Weise korrespondieren, und dass die Sätze für Kegelflächen mit fester Spitze ihre analogen haben.

Eine Raumkurve ist eine Elementarkurve, wenn sie stetig ist und in jedem Punkt eine und nur eine Tangente, sowie auch eine un nur eine oskulierende Ebene hat, welche beide sich mit dem Punkt stetig ändern. Die in einem Punkt M oskulierende Ebene wird als die eindeutig bestimmte Grenzlage einer Ebene definiert, welche durch drei nach M konvergierende Punkte geht. Diese Definition wird hinfällig, wenn die Grenzlagen der drei Punkte in derselben Gerade zusammenfallen; in dem Falle wird die Oskulationsebene als die Grenzlage jener Ebenen bestimmt, welche durch die Tangente in M und einen nach M konvergierenden Punkt geht. Es ist noch zu bemerken, *dass die Kurve keinen ebenen Bogen enthält.* Aber hierzu kommt ferner die wesentliche Bedingung, dass *die Kurve aus einer endlichen Zahl von Raumbögen dritter Ordnung* — wir nennen sie *Elementarbögen* — *zusammengesetzt sein soll.* Es ist diese Bedingung in der Tat sehr naheliegend und natürlich. Es sei nämlich AB ein Bogen einer Kurve. Wird diese von jeder Ebene in höchstens drei Punkten geschnitten, dann

ist sie schon ein Elementarbogen. Ist dies nicht der Fall, dann teile man den Bogen in zwei. Wenn noch keine von den Teilbögen elementar sind, dann setze man die Teilung fort, und man sieht so, dass die genannte Bedingung damit äquivalent ist, dass die Kurve nur eine endliche Zahl von solchen Oskulationsebenen enthält, welche Grenzlagen sind von Ebenen, die in wenigstens vier nach einem festen Punkt konvergierenden Punkten schneiden.

Es ist unschwer zu beweisen, dass ein Raumbogen dritter Ordnung immer als Teilbogen einer geschlossenen Kurve dritter Ordnung betrachtet werden kann. Man kann deshalb die direkt entwickelte Theorie der Kurven dritter Ordnung — und damit auch der Devellopablen dritter Klasse — auf die elementaren Raumkurven anwenden; diese werden wir uns im folgenden immer als *geschlossen* denken.

Jeder innere Punkt eines Elementarbogens ist ein gewöhnlicher Punkt der Kurve, und diese hat hier eine gewöhnliche Tangente und Oskulationsebene. Die Tangenten der Kurve bilden die zur Kurve gehörige Devellopable, für welche die gegebene Kurve die *Spitzkante* ist. Die Oskulationsebenen der Kurve sind Tangentenebenen der Devellopablen.

Eine Raumkurve dritter Ordnung ist auch dritter Klasse, deshalb ist die Definition einer elementaren Raumkurve in leicht verständlicher Weise selbstdualistisch. Die Projektion einer Elementarkurve aus einem Punkt sind elementare ebene Kurven, ebenso wie die Schnittkurven der zur Raumkurve gehörigen Devellopablen mit einer Ebene π. Ist die Schnittkurve φ, hat diese Spitzen in den gewöhnlichen Punkten, welche sie mit der Raumkurve gemein hat. Geht π durch eine Tangente m ohne mit der Oskulationsebene μ zusammenzufallen, wird m eine Wendetangente, wenn aber π mit μ zusammenfällt, dann ist der Berührungspunkt ein gewöhnlicher Punkt.

Das ebene Bild einer Elementarkurve aus einem Punkt P erhält eine Wendetangente, wenn eine Oskulationsebene (aber nicht die zugehörige Tangente) durch P geht; wenn aber diese Tangente durch P geht, erhält das Bild eine Spitze.

Ferner sieht man, dass wenn ein Punkt P die Devellopable der Raumkurve in einem Punkt einer gewöhnlichen Tangente — aber nicht in dem Berührungspunkt und nicht der Oskulationsebene derselben entlang — überschreitet, dann zwei durch P gehende Oskulationsebenen verloren oder gewonnen werden; dazu kommt noch, dass *gleichzeitig damit bezichungsweise* eine durch P gehende Doppelsekante der Kurve neu auftreten oder verschwinden wird. Dies folgt daraus, dass eine ebene Kurve dritter Ordnung im Allgemeinen drei Wendetangenten hat, wenn aber nur eine, dann muss sich auf der Kurve entweder ein Doppelpunkt oder eine Spitze befinden.

Die Projektion der Kurve aus einem allgemeinen Punkt einer Oskulationsebene μ zeigt, dass die zwei Raumbögen, welche in einem gewöhnlichen Punkt an einander stossen, auf verschiedenen Seiten von μ liegen.

Wir verlassen nun die gewöhnlichen Punkte der Raumkurve und betrachten die nicht gewöhnlichen oder *singulären* Punkte. Ein solcher Punkt M_0 — mit der Tangente m_0 und der Oskulationsebene μ_0 — ist ein gemeinsamer Endpunkt zweier Elementarbögen α und β, von welchen keiner sich als solcher über M_0 fortsetzen lässt. Weil μ_0 zugleich eine gemeinsame Oskulationsebene zweier Developablen dritter Klasse ist, von welchen keine sich als solche über μ_0 fortsetzen lässt, wird die zu einem singulären Punkt dualistisch entsprechende Ebene eine in einem singulären Punkt berührende *singuläre Ebene* sein.

Die in M_0 oskulierende Ebene μ_0 muss jedenfalls wie oben gesagt Grenzlage einer Reihe von Ebenen μ sein, welche nach μ_0 konvergieren und in vier getrennten Punkten schneiden. Damit ist selbstverständlich nicht gesagt, dass jede μ_0 naheliegende Ebene die Kurve in vier M_0 naheliegenden Punkten schneidet, aber wenn μ in drei nach M_0 konvergierenden Punkten schneidet, dann muss es noch (mindestens) ein nach M_0 konvergierender Schnittpunkt geben. Wenn es mehrere solche Schnittpunkte giebt, betrachten wir das als extraordinär; wir betrachten im folgenden nur die *ordinären* singulären Punkte, wo dies nicht auftritt.

Wenn also ein Punkt M der Kurve entlang gegen einen singulären Punkt M_0 konvergiert, muss die in M oskulierende Ebene die Kurve noch in einem Punkt N schneiden, der auch nach M_0 konvergiert, — wobei zu bemerken ist, dass man immer durch eine kleine Aenderung eine Reihe von Ebenen μ herstellen kann, welche nach μ_0 konvergieren und in vier *getrennten* Punkten schneiden. Aber wesentlich ist es, dass man hieraus sieht, dass man *alle* ordinäre singuläre Punkte erhalten kann als Zusammenfallspunkte der eben genannten Punkte M und N. Noch bemerken wir, dass diese Punkte in der Nähe von M_0 sich in entgegengesetzten Sinn bewegen müssen, denn die Oskulationsebene in einem Punkt M eines Elementarbogens kann ausser M keinen weiteren Punkt mit demselben gemein haben.

Wenn nun eine Ebene π einen (ins Endliche liegenden) Bogen in vier getrennten Punkten M_1, M_2, M_3, M_4 schneidet, welche in dieser Ordnung auf einander folgen, dann muss der vor M_1 liegende und der nach M_4 liegende Teilbogen auf verschiedenen Seiten von π liegen. Durch Grenzübergang, der nach den Voraussetzungen eindeutig ist, folgt also:

In der Nähe einer ordinären singulären Ebene μ_0 liegen die zwei angrenzenden Elementarbögen auf derselben Seite von μ_0.

Projiziert man also die Kurve φ aus einem in einer singulären Ebene μ_0 aber nicht in der Tangente m_0 liegenden Punkt P, wird die Projektion von φ im Bilde M_0' von M_0 entweder eine Spitze zweiter Art oder auch einen gewöhnlichen Kurvenpunkt haben, denn die in M_0' an einander stossenden Bögen liegen auf derselben Seite der Tangente in M_0'. Weil im projektiven Sinn die Ebene μ_0 nicht durch die Tangente m_0 in getrennten Gebieten geteilt wird, werden die genannten Verhältnisse dieselben sein, wo man auch P in μ_0 ausserhalb m_0 wählt.

Der singuläre Punkt wird im ersten Fall eine *Spitze* im letzten Fall einen *Hyperoskulationspunkt* genannt. Die in dem letztgenannten Punkt oskulierende Ebene nennt man auch eine *stationäre* (oskulierende) *Ebene.*

Wir betrachten zuerst den Fall einer Spitze, und legen durch diesen Punkt M_0 eine nicht durch die Tangente m_0 gehende Ebene ν. Mittels einer Projektion der Kurve φ auf eine Ebene π aus einem von M_0 verschiedenen Punkt der Schnittlinie $(\mu_0\nu)$ sieht man, erstens dass die Kurve von ν zweimal in M_0 geschnitten wird, und zweitens, dass die zwei Bögen a_1 und a_2 von φ, welche in M_0 an einander stossen, auf derselben Seite von ν liegen. Hieraus folgt, dass wenn man die Kurve aus dem Punkt M_0 projiziert, dann die Bilder der Bögen a_1 und a_2 auf derselben Seite von $(\mu_0\pi)$ liegen (1). In der Projektion muss demnach $M_0' = (m_0\pi)$ entweder ein gewöhnlicher Kurvenpunkt oder auch eine Spitze zweiter Art sein. Das letztere ist aber unmöglich, wenn wir, wie schon gesagt, nicht-ordinäre Singularitäten auslassen. Die Tangente in einer ebenen Spitze zweiter Art kann man nämlich immer als Grenzlage einer Reihe von Geraden auffassen, welche die Kurve φ' in vier (wenn man will) getrennten Punkten schneiden. Die in M_0 oskulierende Ebene würde dann als Grenzlage einer Reihe von Ebenen auftreten, welche in mehr als vier Punkten schneiden, sodass M_0 keine ordinäre Singularität wäre.

Aus der hier gefundenen Projektion folgt noch, dass die M_0 naheliegenden Bögen auf verschiedenen Seiten einer beliebigen durch m_0 gehenden aber nicht mit μ_0 zusammenfallenden Ebene liegen. Hieraus folgt dann noch weiter, dass die Projektion von M_0 aus einem beliebigen nicht in μ_0 liegenden Punkt eine Spitze erster Art sein muss. Man hat also zusammenfassend:

Eine ordinäre Spitze M_0 — mit der Tangente m_0 und der oskulierenden Ebene μ_0 — wird aus einem beliebigen nicht in μ_0 liegenden Punkt in eine Spitze erster Art projiziert. Aus einem in μ_0 aber nicht in m_0 liegenden Punkt wird es in eine Spitze zweiter Art, und aus M_0 selbst — übrigens auch aus jedem Punkt von m_0 — in einen gewöhnlichen Kurvenpunkt projiziert.

Es ist leicht einen Hyperoskulationspunkt in ganz ähnlicher Weise zu behandeln. Legt man durch M eine beliebige durch M_0 aber nicht durch die Tangente m_0 gehende Ebene ν, schneidet diese nur einmal in M_0, und die naheliegenden Bögen von φ liegen auf verschiedenen Seiten von ν. Die Projektion aus einem beliebigen nicht in μ_0 liegenden Punkt P ist ein gewöhnlicher Punkt. Wir erwähnen noch: Wählt man P in M_0 erhält die Projektion in M_0' eine Inflexion, und liegt P in m_0 ausserhalb M_0, erhält sie in M_0' eine Spitze zweiter Art.

Wir haben schon früher bemerkt, dass durch eine dualistiche Tranformation jeder singuläre Punkt in eine singuläre Ebene transformiert wird. Aber eine Spitze

(1) Man sicht vielleicht dies am besten, wenn man ν parallel mit π wählt.

wird nicht in die Oskulationsebene einer Spitze übergehen können. Es sei nämlich l eine Gerade, welche durch eine Spitze M_0 geht und nahe an m_0 und μ_0 aber nicht in μ_0 liegt. Die Projektion aus M_0 zeigt, dass l von 0 oder 2 Tangenten, welche m_0 nahe liegen, geschnitten wird. Wir nehmen nun eine Gerade l_1, welche in μ_0 und nahe an M_0 und m_0 liegt, aber nicht durch M_0 geht. Die Projektion aus einem Punkt von l_1 zeigt, dass diese Gerade von 0, 2 oder $4m_0$ naheliegenden Tangenten geschnitten werden kann. Man hat also:

Durch eine dualistische Transformation geht eine Spitze mit ihrer oskulierenden Ebene in eine stationäre Ebene mit ihrem Berührungspunkt über.

Dreht man in einem bestimmten Sinn eine Ebene um eine Gerade l, welche keinen Punkt mit der Tangente in einer Spitze M_0 gemein hat, dann werden durch Ueberschreiten der Lage (lM_0) zwei Schnittpunkte M_1 und M_2 mit der Kurve gewonnen oder verloren. Das Dualitätsprinzip giebt dann:

Bewegt ein Punkt P sich in einem bestimmten Sinn auf einer Geraden l, welche keinen Punkt mit der Tangente in einem Hyperoskulationspunkt gemein hat, dann werden durch Ueberschreiten der Hyperoskulationsebene nur durch P gehende Oskulationsebenen gewonnen oder verloren.

Dreht man eine Ebene um eine Gerade, welche keinen Punkt mit der Tangente in einem Hyperoskulationspunkt M_0 gemein hat, sieht man mittels der Projektion aus einem Punkt $(l\mu_0)$, dass sowohl vor wie nach dem Ueberschreiten der Lage (lM_0), ein M_0 naheliegender Schnittpunkt auftreten wird. Man hat also:

Bewegt ein Punkt P sich in einem bestimmten Sinn auf einer Geraden l, die keinen Punkt mit der Tangente in einer Spitze M_0 gemein hat, dann geht sowohl bevor wie nach der Ueberschreitung der Ebene μ_0 eine und nur eine μ_0 naheliegende Oskulationsebene.

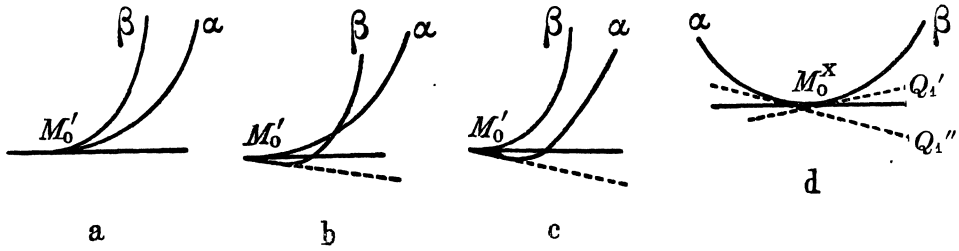
Durch den Uebergang geschieht also keine Aenderung in der Zahl der durch P gehenden Oskulationsebenen.

Wir wollen nun noch untersuchen, wie sich die Zahl h der durch einen Punkt P gehenden Doppelsekanten der Kurve ändern kann. Wie wir schon oben gesehen haben, ändert sich die Zahl um $+2$ oder -2, wenn P die Devellopable der Kurve in einen nicht mit dem Berührungspunkt zusammenfallender Punkt einer gewöhnlichen Tangente überschreitet. Aber eine Aenderung um $+2$ oder -2 wird im Allgemeinen auch eintreten, wenn P in einem nicht der Kurve angehörigen Punkt P_1 die doppel umgeschriebene Devellopable der Kurve überschreitet. Projiziert man nämlich aus P_1, werden die Bilder von zwei Bögen der Kurve sich berühren, und durch Ueberschreiten von P_1 werden diese zwei Bögen in der Projektion entweder ganz auseinander gehen oder auch einander — im Allgemeinen — in zwei Punkten schneiden.

Es erübrigt noch zu untersuchen, wie es sich verhält, wenn P eine singuläre Ebene μ_0 ausserhalb der in dieser liegenden Tangente m_0 überschreitet.

Es kann nun erstens keine Aenderung in h eintreten, wenn P in der genannten Weise eine stationäre Ebene μ_0 überschreitet, denn die Gerade PM_0 hat in M_0 nur einen einfachen Punkt mit der Kurve gemein.

Aber es verhält sich anders, wenn P die Oskulationsebene μ_0 einer Spitze M_0 in einem Punkt P_1 überschreitet. Indem wir uns denken, dass P sich in einem bestimmten Sinn auf einer Geraden l gewegt, seien P_1' und P_1'' zwei P_1 naheliegende aber auf verschiedenen Seiten von P_1 liegende Punkte von l. Projiziert man die Kurve aus P_1, erhält die Projektion im Bilde M_0' von M_0 eine Spitze zweiter Art, projiziert man aus P_1' oder aus P_1'', erhält man im Bilde von M_0 eine Spitze erster Art. Ferner haben wir oben gesehen, dass bei den zwei letztgenannten Projektionen *eine* in der Nähe von M_0' liegende Wendetangente auftritt



Dies giebt für die zwei genannten Projektionen nur die zwei Möglichkeiten, welche in Fig. *b* und *c* angegeben sind, während Fig. *a* die Projektion aus P_1 angiebt. In einer und nur einer dieser Projektionen tritt ein neuer Doppelpunkt hervor. Durch den Uebergang über P_1 wird also eine durch P gehende Doppelsekante gewonnen oder verloren, wenn man sicher sein kann, dass nicht eine der zwei Figuren nach dem Uebergang sich wiederholt. Das ist aber nicht der Fall. Es seien α und β die zwei Bögen der Raumkurve, welche in M_0 an einander stossen; diese mögen aus P_1, P_1' und P_1'' bezw. in α_1, β_1; α_1', β_1' und α_1'', β_1'' abgebildet werden. Es kommt darauf an zu zeigen, dass in den Projektionen aus P_1' und P_1'' nicht die zwei von dem Bilde der Spitze ausgehenden und in der Nähe derselben berührenden Tangenten *denselben* der zwei in der Spitze an einander stossenden Bögen berühren. Aber das sieht man, wenn man noch die Projektion aus M_0 zu Hilfe nimmt. In dieser Projektion wird das Bild M_0^* von M_0 ein gewöhnlicher Kurvenpunkt, und P_1' und P_1'' werden in zwei Punkte Q_1' und Q_1'' projiziert, welche in der Nähe der Tangente in M_0 liegen, aber auf verschiedenen Seiten derselben — nicht in unmittelbarer Nähe an M_0^*. Hier sieht man sogleich (siehe Fig. *d*), dass die zwei genannten Tangenten in Punkten berühren, welche auf verschiedenen Seiten von M_0^* berühren, d. h. die in der Nähe von M_0' berührenden Tangenten der Raumkurve, welche M_0P_1' und M_0P_1'' schneiden, berühren nicht denselben der Bögen α und β.

Man hat also:

Wenn ein Punkt P die in einer Spitze oskulierende Ebene überschreitet — aber nicht in der Spitztangente — wird hierdurch eine durch P gehende Doppelsekante gewonnen oder verloren.

Es erübrigt noch den für unsere Untersuchungen wichtigen Satz zu nennen, den man den *nicht-analytischen Korrespondenzsatz* nennen kann.

Er lautet für Punkte auf einer Geraden ausgesprochen:

Es entspreche auf einer Geraden jedem Punkt X ausnahmslos m getrennte Punkte Y und jedem Punkt Y ausnahmslos n getrennte Punkte X, und es sei die Beziehung überallstetig. Es werde noch vorausgesetzt, dass (wenigstens) in einer Lage ein Punkt X und einer der entsprechenden Punkte Y in entgegengesetztem Sinn laufen.

Dann wird jeder Punkt X mit jedem seiner entsprechenden Punkte Y in entgegengesetzten Sinn laufen, und es werden in m+n getrennten Punkten ein Punkt X mit einem der entsprechenden Punkte Y zusammenfallen. Für den Beweis dieses Satzes verweise ich auf folgende Arbeit hin: Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurwen Det Danske Vidensk Selskabs Skrifter XI, 2 (1914).

§ 2. - Die elementare Raumkurve vierter Ordnung mit einer Spitze.

Wenn eine Raumkurve vierter Ordnung eine Spitze hat, wird sie aus diesem Punkt A durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projiziert, denn eine durch A gehende Ebene, welche nicht die Tangente a in A enthält, schneidet ausser in A höchstens nur noch in zwei Punkten. Eine beliebige durch a gehende Ebene schneidet ausser in A noch in einem Punkt, wenn die Ebene keine in A oskulierende Ebene ist. Die Oskulationsebene in A hat aber nur A mit der Kurve gemein.

Die Kurve kann keine dreimal schneidende Sekante s haben, denn eine durch s und die Spitze gehende Ebene würde mehr als vier Punkte mit der Kurve gemein haben. Ebenso sieht man, dass die Kurve keinen Doppelpunkt haben kann. Die Projektion der Kurve aus einem von A verschiedenen Punkt derselben ist also eine Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze. Diese hat einen und nur einen Inflexionspunkt. Man hat also:

Durch einen beliebigen von der Spitze und von eventuellen Hyperoskulationspunkten verschiedenen Punkt M der Kurve geht eine und nur eine ausserhalb M berührende Oskulationsebene.

Ist N der Berührungspunkt, fallen M und N in A zusammen; jeder andere Zusammenfall muss in dem Berührungspunkt B einer hyperoskulierenden Ebene geschehen. Die Verbindung $(M-N)$ ist aber $1-1$ deutig, und in der Nähe von B laufen M und N in entgegengesetzen Sinn. Man hat also:

Eine Raumkurve vierter Ordnung mit einer Spitze hat eine und nur eine hyperoskulierende Ebene.

Aber diese zwei nach § 1 einzig möglichen singulären Punkte kann man auch in anderer Weise erhalten. Die Tangente m in einem gewöhnlichen Punkt M schneidet immer eine und nur eine andere Tangente sagen wir in einem Punkt Q. Dies sieht man, wenn man die Kurve aus M projiziert, und erinnert, dass aus einem gewöhnlichen Punkt M' einer ebenen Elementarkurve dritter Ordnung mit einer Spitze immer eine und nur eine Tangente geht, welche ausserhalb M' berührt. Die Tangenten m und m_1 bestimmen eine Ebene, und wenn sie zusammenfallen, erhält man als Grenzlage eine vierpunktig schneidende also eine singuläre Ebene. Die Punkte M und Q fallen also in A und in B zusammen. Zugleich sieht man, dass M und Q in der Nähe von A oder B — und deshalb überall — in entgegengesetztem Sinn laufen, denn zwei Tangente desselben Elementarbogens können sich nicht schneiden. Hieraus folgt:

Schneiden die Tangenten in zwei Punkten M und Q einander, werden diese Punkte durch A und B getrennt.

Wir wollen nun versuchen die Zahl der durch einen Punkt P gehenden Oskulationsebenen zu bestimmen. Wir lassen P in einem bestimmten Sinn auf einer gewöhnlichen Tangente m laufen vom Berührungspunkt M bis zu M zurück. Die Schnittkurve der oskulierenden Ebene μ in M mit der Devellopablen der Kurve hat nach § 1 in M einen gewöhnlichen Punkt mit m als Tangente. Aus einem Punkt P von m in der Nähe von M geht also *auf beiden Seiten von M* eine in der Nähe — von M berührende oskulierende Ebene — im ganzen also zwei Oskulationsebenen.

Wenn nun P auf m fortschreitet kann eine Änderung in der Zahl n der durch P gehenden Oskulationsebenen nur dann geschehen, wenn P einen der Punkte $(m\beta)=B_1$ oder $(mm_1)=Q_1$ überschreitet, wo m_1 einem schneidende und in Q berührende Tangente ist; jedesmal wird n um plus 2 oder minus 2 verändert. Indem wir die Punkte MQ_1B_1 in der geschriebenen Ordnung nehmen, gehen durch einen Punkt der offenen Strecke MQ_1 zwei Oskulationsebenen, aus einem Punkt deroffenen Strecke Q_1B_1 also entweder 4 oder 0. Wir wollen aber zeigen, dass die erstere Möglichkeit auszulassen ist. Das erfordert aber einige weitere Betrachtungen.

Erstens hat man, indem wir den Punkt $(m\alpha)$ mit A_1 bezeichnen:

Die Punkte M und Q_1 werden durch A_1 und B_1 getrennt.

Dies sieht man direkt, wenn M in der Nähe von A oder B liegt. Projiziert man nämlich aus A, ist die Projektion eine Kurve zweiter Ordnung, und die Bilder M' und Q' von M und Q liegen dem vorigen Satz zufolge auf verschiedenen Seiten des Bildes A' von A. Hier trennen sich also die Paare MQ_1 und A_1B_1, denn B_1 muss jedenfalls in endlicher Entfernung von A_1 liegen. Ebenso verhält es sich, wenn M in der Nähe von B liegt. Man erhält nochzudem ganz dieselbe

Figur, wie im ersten Fall, wenn man die Kurve aus einem in β aber nicht in b liegenden Punkt projiziert.

Wenn nun M sich auf der Kurve stetig fortbewegt, werden die Paare MQ_1 und A_1B_1 nur dann in zwei einander nicht trennenden Paare übergehen können, wenn entweder M mit A_1 oder B_1 oder auch Q_1 mit einem dieser Punkte zusammenfällt. Die ersteren dieser Möglichkeiten haben wir schon berücksichtigt; es kommt nur darauf an zu sehen, dass Q_1 weder in α noch in β fallen kann. Denken wir uns erst, dass φ_1 in α fallen könnte, d. h. dass durch einen Punkt von α zwei nicht in α liegende Tangenten gehen. Die Unmöglichkeit hiervon sieht man sofort, wenn man die Kurve aus A in eine Kurve zweiter Ordnung projiziert. Ganz ebenso sieht man, dass φ_1 nicht in β fallen kann, indem man die Kurve aus einem allgemeinen Punkt von β projiziert.

Aber ehe wir zu den Oskulationsebenen zurückkehren, müssen wir noch gewisse Verhältnisse der Doppelsekanten in Betracht ziehen. Wir lassen wieder einen Punkt P in einem bestimmten Sinn sich auf einer festen Tangente m fortbewegen von Punkt M aus. Nun können wir den oben bewiesenen Satzes wegen den Sinn so wählen, dass die Punkte M, A_1, φ_1, B_1 in dieser Ordnung auf einander folgend von P überschritten werden. Die Oskulationsebene μ in M hat ausser M noch einen Punkt N mit der Kurve gemein. Dreht man μ einen kleinen Winkel um m, erhält man eine Ebene, welche in einem Nachbarpunkt zu M und in einem Nachbarpunkt zu N schneidet. Die Verbindungslinie dieser zwei Punkte giebt eine durch eine Nachbarpunkt M_1 zu M gehende Doppelsekante — *auf beiden Seiten von* M. Durch M_1 kann nur diese eine Doppelsekante gehen, denn wenn M_1 nach M konvergiert, wird die Doppelsekante entweder nach MN oder nach eine dreifach schneidende Gerade konvergieren, und das letztere ist hier ausgeschlossen.

Wir lassen nun wie oben einen Punkt P die Gerade m in dem vorgeschriebenen Sinn durchlaufen. Eine Änderung in der Zahl h der durch P gehenden Doppelsekanten geschieht teils in den Punkten S_1, S_2... wo P die doppel umgeschriebene Devollopable überschreitet, teils in dem Punkt Θ_1, wo m eine andere Tangente schneidet oder in dem Punkt A_1, wo m die Ebene a schneidet. In den erstgenannten Punkten geschieht jedesmal eine Änderung in h um plus 2 oder minus 2, in den beiden letzteren um plus 1 oder minus 1. Wenn nun P von M aus fortschreitet, geht erst nur eine Doppelsekante durch P, und ehe er A_1 erreicht, wird er eine gewisse Zahl von Punkten S überschritten haben. Durch Überschreitung von A_1 wird eine Doppelsekante gewonnen oder verloren, so dass aus jedem Punkt der Strecke $A_1\varphi_1$ eine paare Zahl von Doppelsekanten geht. Aus dem Punkt φ_1 kann aber keine Doppelsekante gehen. Schneidet nämlich diese die Kurve in U und V, und projiziert man diese aus U, wird das Bild V' von V ein Punkt der Projektion sein, und aus diesem kann nur *eine* ausserhalb V' berührende Tangente der Projektion gehen. Daraus folgt, dass auf

der einen Seite von φ_1 keine, auf der anderen Seite eine Doppelsekante geht. Aber auf der Strecke $A_1\varphi_1$ gingen Doppelsekanten in paarer Zahl, d. h. auf dieser Strecke und in unmittelbarer Nähe von φ_1 geht *keine* Doppelsekante, so dass *durch Überschreitung von φ_1 in dem gewählten Sinn ausdrücklich eine durch P gehende Doppelsekante gewonnen werden muss.*

Jetzt endlich kehren wir zur Bestimmung der durch P gehenden Oskulationsebenen zurück. Wir lassen den Punkt P *in dem gewählten Sinn* die feste Tangente m durchlaufen und fragen um die Zahl der durch P gehenden oskulierenden Ebenen, wobei wir die in M berührende auslassen. Aus einem Punkt der Strecke MQ_1 gehen, wie wir früher gesehen haben, zwei Oskulationsebenen, denn eine Überschreitung von A_1 spielt hier keine Rolle. Beim Überschreiten von Q_1 soll die Zahl um plus 2 oder minus 2 verändert werden. Es muss aber hier eine *Verminderung* sein, denn durch den Übergang wird, wie wir eben gesehen haben, die Zahl der durch P gehenden Doppelsekanten vergrössert. Aus einem Punkt der Strecke Q_1B_1 geht also keine Oskulationsebene. Beim Überschreiten von B_1 muss dann wieder zwei Oskulationsebenen gewonnen werden, denn in der Nähe von M gehen wieder zwei. Durch einen beliebigen Punkt einer Tangente m gehen also ausser die in M berührende entweder zwei Oskulationsebenen oder auch keine.

Hieraus folgt, dass aus einem Punkt im Raume, welcher der Tangentenfläche der Kurve naheliegt — entweder 0, 2 oder 4 Oskulationsebenen gehen. — Aber aus einem beliebigen Punkt P des Raumes kann auch nur höchstens vier Oskulationsebenen gehen. Legen wir nämlich durch P eine Ebene π, welche die Tangentenfläche in einer Kurve ψ schneidet, und verbinden wir P mit einem allgemeinen Punkt Q von ψ mit einer Geraden l. Diese schneidet ψ in einer gewissen Zahl von Punkten und die einzige Wendetangente $(\pi\beta)$ von ψ in *einem* Punkt. Man kann dann immer einen Punkt von P aus die Gerade l so durchlaufen lassen, dass er die Kurve das erste Mal in einem Punkt Q erreicht, ehe er die Wendetangente Überschritten hat. Aus Q gehen aber höchstens zwei Tangenten, welche nicht in Q berühren; deshalb können aus P höchstens vier Tangenten an ψ gehen.

Man hat also:

Aus einem Punkt P des Raumes gehen 0, 2 *oder* 4 *Oskulationsebenen der Kurve.*

Zwei dieser Ebenen fallen zusammen, wenn P in der Tangentenfläche der Kurve oder in einer stationären Ebene derselben liegt.

Eine dualistiche Transformation des Raumes führt Spitze einer Raumkurve in eine stationäre Ebene über. Weil wir hier noch gefunden haben, dass Ordnung und Klasse unserer Kurve beide gleich vier sind, hat man:

Eine dualitische Transformation des Raumes führt eine Raumkurve vierter Ordnung mit Spitze in eine ebensolche Kurve über.

Hieraus folgt sofort:

Die Tangentenfläche der Kurve schneidet die stationäre Ebene in einer Kurve zweiter Ordnung.

Ebenso sieht man, dass die Tangentenfläche der Kurve eine beliebige oskulierende Ebene derselben (ausser in einer doppel zu rechnender Geraden) noch in einer Kurve dritter Klasse mit einer Wendetangente schneidet. Aber, wie leicht zu sehen, ist die letztgenannte Kurve zugleich eine Kurve dritter Ordnung mit einer Spitze. Man hat also:

Die Tangentenfläche der Kurve hat mit einer allgemeinen oskulierenden Ebene ausser einer doppel zu rechnenden Tangente noch eine Kurve dritter Ordnung mit Spitze gemein.

Jetzt können wir noch den Rang der Kurve angeben. Um die Zahl der Tangenten zu bestimmen, welche eine Gerade l schneiden, lege man durch diese eine Ebene π, welche die Tangentenfläche in einer Kurve ψ schneiden möge. Eine beliebige Tangente t dieser Kurve hat ausser dem Berührungspunkt T dem obigen Satz zufolge noch höchstens drei Punkte mit ψ gemein; dies sieht man sogleich, wenn man durch t eine in T oskulierende Ebene legt. Die Kurve ψ hat Spitzen in den Schnittpunkten N von π mit der Raumkurve. Eine durch einen solchen Punkt N gehende und in π liegende Gerade l_1 kann ausser N nur noch drei Punkte mit ψ gemein haben. Projiziert man nämlich die Raumkurve aus N, ist die Projektion eine Kurve dritter Klasse, so dass eine durch N gehende Gerade höchstens drei Tangenten schneiden kann.

Um nun die Zahl der Schnittpunkte von l mit ψ zu finden, drehe man l um einen festen in l aber nicht in ψ liegenden Punkt, bis diese Gerade das erste Mal entweder ψ berührt oder auch durch eine Spitze von ψ geht. Hieraus sieht man, dass l entweder 1, 3 oder 5 Punkte mit ψ gemein haben kann; diese Punkte können auch in gewöhnlicher Weise zusammenfallen. Man hat also:

Eine beliebige Gerade des Raumes schneidet höchstens 5 *Tangenten einer Raumkurve vierter Ordnung mit einer Spitze.*

Klasse und Rang der betrachteten Kurve haben wir also bestimmen können, aber die Zahl der durch einen Punkt gehenden Doppelsekanten oder doppel berührenden Ebenen blieb völlig unbestimmt. Es ist aber wohl nicht so sehr sonderbar, dass eben diese Zahlen nicht zu bestimmen waren. In einer nicht analytischen Kurve sind die einzelnen Bögen von einander vollständig unabhängig. Die hinzugefügte Bedingung, dass die Kurve von bestimmter endlicher, nämlich hier vierter, Ordnung sein soll, ist schon eine starke Bedingung, aber also doch nicht stark genug, um auch die Doppelsekanten — welche, wie man kurz sagen kann, von zwei in endlicher Entfernung von einander liegenden Bögen abhängig sind — zu beherschen. Hier muss man naach weitere Bedingungen hinzufügen, welche übrigens, wie wir sehen werden, noch nicht den nicht-analytischen Charakter der Kurve beeinträchtigen.

§ 3. - Die Raumkurve vierter Ordnung mit Spitze als Schnittkurve zweier Kegelflächen zweiter Ordnung.

Der Grund dafür, dass wir im allgemeinen Fall nicht die Zahl der durch einen Punkt gehenden Doppelsekanten angeben konnten, war der, dass wir nichts über die der Kurve doppel umgeschriebenen Devellopablen sagen könnten. Dass kommt man über, wenn wir noch die neue Voraussetzung machen, dass die Kurve r^{IV} auf einer Kegelfläche (K) zweiter Ordnung liegen soll, deren Spitze K nicht auf der Kurve liegt. Damit die Schnittkurve von (K) mit der früher genannten Kegelfläche (α) im Scheitel A den letzteren eine Spitze erhält, muss A auf (K) liegen, und die zwei Kegelflächen in A dieselbe berührende Ebene α haben. Die Berührungslinie von α mit (α) wird die Spitztangente in A sein. Jeder anderer Erzeuger von (α) hat ausser A noch einen Punkt mit r^{IV} gemein. Dagegen hat nicht jeder Erzeuger von (K) Punkte mit der Kurve gemein. Durch die Gerade AK geben nämlich zwei (α) berührende Ebenen, von welchen die eine α ist, während die andere β mit der Kurve einen Punkt B gemein hat. Von zwei Erzeugern von (K), welche durch KA und KB getrennt sind, wird der eine zwei Punkte mit der Kurve gemein haben, der andere aber keinen Punkt. Die Ebene β ist die stationäre Ebene der Kurve.

Aus den jetzigen Voraussetzungen folgt, dass durch einen beliebigen Punkt P des Raumes entweder zwei doppel berührende Ebenen gehen oder auch keine- nämlich die durch P gehenden Tangentenebenen an (K). Dass man so alle doppel berührende Ebenen erhält, folgt wieder daraus, dass eine Tangente nur eine andere Tangente schneidet.

Weil ferner jede Tangente der Kurve ganz ausserhalb (K) liegt, existieren die im vorigen Fall lästig auftretenden Punkte S hier gar nicht. Man hat also den dortigen Betrachtungen zufolge:

Durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehen entweder 0, 1 *oder* 2 *Doppelsekanten.*

Um die ebenen Schnittkurve ψ der Devellopablen der Kurve völlig charakterizieren zu können, möchte man noch die Doppelpunkte und die Doppeltangenten dieser Kurve zu bestimmen wünschen. Die ersteren sind die Schnittpunkte mit der Doppelkurve der Devellopabler. Einen Punkt dieser Kurve erhält man, indem man durch AK eine Ebene legt, welche (K) (ausser in AK) in einem Erzeuger und (α) in zwei Erzeugern r_1 und r_2 schneidet. Die Schnittlinie r der in r_1 und r_2 berührenden Ebenen enthält einen Punkt R. Die Geraden bilden eine Kegelfläche, aber diese kann, wenn r^{IV} als nicht-analytisch angenommen wird, von beliebig hoher Ordnung sein.

Um weiter zu kommen, muss man *noch eine weitere Voraussetzung machen,* und wir wählen diese so, dass wir annehmen, dass die aus K projizierende Kegelfläche algebraisch also eine Kegelschnittskegelfläche ist.

In diesem Fall liegen die Gerade r alle in einer Ebene, nämlich in der Polarebene ϱ zu AK in Bezug auf (α). In dieser Ebene liegt dann auch die gesuchtz Doppelkurve, und diese muss zweiter Ordnung sein, weil eine Gerade *höchstens* fünf Punkte mit der Devellopablen gemein haben kann. Die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Ebene π sind die Doppelpunkte der in π liegenden Kurve ψ.

Appliziert man an die *jetzt* betrachtete Kurve eine dualistiche Transformation, erhält man die Devellopable einer Kurve, welche auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung liegt, deren Scheitel ausserhalb der Kurve liegt nämlich in demjenigen Punkt, welcher ϱ entspricht. Einer in einer Ebene π liegenden Doppeltangente der Kurve ψ entspricht eine durch einen Punkt P gehende Doppelsekante. Man hat also:

Die ebene Schnittkurve der Devellopablen der zulettzt betrachteten Kurve r^{IV} *hat höchstens zwei Doppelpunkte und zwei Doppeltangenten.*

Wir wollen nun die nicht-analytische Existenz der betrachteten Kurven klar machen. Was den in § 2 behandelten Kurven betrifft, wo nur Klasse und Rang in Betracht kamen, ist eine Existenzfrage trivial. Man braucht nur von einer algebraischen Kurve auszugehen und einen oder mehrere kleine Bögen derselben durch passend gewählte kleine Elementarbögen zu ersetzen, so dass die Kurve immer völlig stetig und vierter Ordnung bleibt.

Wenn man aber ausser n und r noch die anderen Bestimmungen mithaben will, dann sind andere Existenzbeweisse nötig.

Wir sollen also eine Kurve als Schnittkurve zweier Kegelflächen zweiter Ordnung so herstellen, dass sie eine Spitze hat und vierter Ordnung ist. Wir betrachten besonders den Fall, dass die eine dieser Kegelflächen algebraisch ist. Wir nehmen also in einer Ebene π einen Kegelschnitt α als Leitlinie einer Kegelfläche (α), deren Scheitel A sein möge. Auf einem Erzeuger von (α) wählen wir einen Punkt K als Scheitel einer Kegelfläche (K), deren Spur k in π ein nicht-analytischer Oval sein soll. Wählt man K so, dass die Tangentenebene β in K an (α) auch (K) berührt, dann hat die Schnittkurve schon eine Spitze. Es fragt sich nur, ob man K und α so wählen kann, dass die Kurve vierter Ordnung wird.

Um weiter zu kommen benützen wir ein elliptisch gekrümmtes Oval, d. h. ein Oval, dessen oskulierende Kegelschnitte alle Ellipsen sind. Diese Bedingung erfordert die Existenz einer gewissen Zahl von Differentialkvotienten und gewisse Ungleichungen zwischen diesen, aber durchaus nicht, dass das Oval analytisch sein soll. Ein solches Oval hat nun die Eigenschaft, dass es von jedem Hyperbel und von jeder Parabel im höchsten vier Punkten geschnitten wird. Projiziert man das Oval auf eine andere Ebene, erhält man ein Oval ω und eine Gerade l (die entsprechenden der unendlich fernen Geraden) so, dass jeder Kegelschnitt, welcher durch einen beliebigen festen Punkt L von l geht, höchstens vier Punkte mit ω gemein haben kann; hierbei ist vorausgesetzt, dass l und ω einander *nicht* schneiden oder berühren, so dass L ausserhalb ω liegt. Aber wir können

durch eine hinzugefügte Änderung leicht bewirken, dass die Höchstzahl der Schnittpunkte unverändert bleibt, auch wenn l und ω einander schneiden. Wendet man nämlich eine ebene duale Transformation an, erhält man ein Oval ω_1 und eine ω_1 *schneidende* Gerade, so dass jeder Kegelschnitt, der l_1 berührt, höchstens vier Tangenten mit ω_1 gemein hat, und hier wird ω_1 von l_1 geschnitten. Aber zwei Ovale, welche höchstens vier Tangenten mit einander gemein haben, werden auch höchstens vier Punkte mit einander gemein haben (1).

Um nun endlich zu sehen, ob man in der obigen Konstruktion α und K so wählen kann, dass die Schnittkurve vierter Ordnung wird, betrachte man eine beliebige Ebene, welche (K) und (α) in zwei Kurven schneidet, und projiziere diese aus K auf π. Die Schnittkurven mit (K) werden in k projiziert, die Schnittkurven mit (α) in Kegelschnitten welche alle die Gerade $(\pi\alpha)$ berühren. Wählen wir also diese Gerade als die oben genannte Gerade l_1 und k als das Oval ω_1, dann sind alle die genannten Erforderungen erfüllt.

§ 4. - Das cyklische Ovaloid.

Eine Elementarfläche ist eine überall stetige Fläche — sowohl in Beziehung auf Punkten wie auf berührenden Ebenen — welche aus einer endlichen Zahl von Flächenstücken (zweiter oder) dritter Ordnung zusammengesetzt ist.

Ein *Ovaloid* ist eine in der genannten Weise stetige überall konvekse ins Endliche liegende Fläche, und ist demnach eine Elementarfläche. Wir *voraussetzen* hier noch, dass die Krümmungsradien in den Normalschnitten der Fläche überall endlich und von Nul verschieden sind, und dass sie sich mit dem Flächenpunkt stetig ändern.

Ein solches Ovaloid nennen wir *cyklisch,* wenn es von jedem Kreis in höchstem vier Punkten geschnitten wird, wobei zusammenfallende Punkte in gewöhnlicher Weise gerechnet werden. Die Fläche darf auch keinen kugelformigen Teil enthalten.

Eine Kugelfläche, welche das Ovaloid in zwei Punkten berührt und noch andere Punkte mit demselben gemein hat, schneidet in zwei Kreisen.

Der Kreis, der die zwei Berührungspunkte mit einem anderen Schnittpunkt verbindet, hat nämlich mindestens 5 Punkte mit dem Ovaloid gemein, und muss demnach auf demselben liegen. Mehr als zwei Schnittkreise kann es nicht geben, denn die ganze Schnittkurve eines cyklischen Ovaloids mit einer Kugelfläche kann offenbar höchstens vierter Ordnung sein. Zwei Kreise müssen aber dasein, weil die Berührungspunkte Doppelpunkte der Schnittkurve sein müssen. Den Fall, dass die zwei Kreise zusammenfallen, schliessen wir im folgenden ganz aus ; die

---

(1) *Einige Sätze uber ein-und mehrteilige Elementarkurven vierter Ordnung.* Math. Ann., Bd. 76, p. 343 (1915).

Berührungskurve der Kugelfläche und des Ovaloids würde in dem Fall eine Krümmungslinie der Fläche sein. Wir behandeln also im folgenden *nur Flächen ohne cirkulare Krümmungslinie.*

Eine Kugelfläche, welche das Ovaloid in einem Punkt M berührt und in einem durch M gehenden Kreise α schneidet, wird noch in einen anderen durch M gehenden Kreise β schneiden. Die ganze Schnittkurve der zwei Flächen muss nämlich in M einem Doppelpunkt haben — mit getrennten oder zusammenfallenden Tangenten. — Ein beliebiger durch M gehender und auf der Kugelfläche liegender Kreis hat deshalb ausser M nur noch einen Punkt mit der Restkurve gemein. Eine solche Restkurve muss aber ein durch M gehender Kreis sein, ebenso wie eine ebene Linie, welche mit jeder Geraden höchstens einen Punkt gemein hat, eine Gerade sein muss. Ist s die Schnittlinie der Ebenen der zwei Kreise α und β, haben diese zwei Punkte M und N mit einander gemein, in welchen das Ovaloid Φ von s geschnitten wird, und die Kugelfläche berührt Φ in M und N. Die zwei Punkte fallen speziell zusammen, wenn die Kugelfläche das Ovaloid in M oskuliert.

Es ist nnsere Hauptaufgabe, die durch einen beliebigen Flächenpunkt M gehenden Kreise der Fläche zu finden. Diese werden dem obigen zufolge jedenfalls paarweise auftreten und in Kugelflächen liegen, welche die Fläche Φ in M und in noch einem Punkt N berühren der speziell auch mit M zusammenfallen kann.

Eine beliebige Kugelfläche, welche Φ in M berührt, und noch andere Punkte mit Φ gemein hat, schneidet diese in einer Kurve vierter Ordung. Diese Kurve wird aus M durch eine Kegelfläche zweiter Ordnung projiziert, denn eine durch M gehende beliebige Ebene schneidet Φ und die Kugelfläche in einem Oval und in einem Kreise, welche sich in M berühren und also ausser M nur höchstens zwei Punkte gemein haben können. Wenn die Kugelfläche das Ovaloid ausser in M noch in einem anderen Punkt N berührt, dann stehen zwei Möglichkeiten offen. Entweder haben die Flächen ausser M und N andere Punkte mit einander gemein; dann reduziert sich die genannte Kegelfläche dem obigen zufolge in zwei Ebenen, oder auch haben sie ausser M und N keine andere Punkte gemein; dann reduziert sich die Kegelfläche in eine unendlich dünne Kegelfläche, welche mit der Geraden MN zusammefällt. Wir suchen nun die in M berührenden Kugelflächen, welche noch in einem anderen Punkt N die Fläche berühren.

Es sei t eine feste Gerade, welche Φ in dem Punkt M berührt. Diese Gerade ist Erzeuger in einer und nur einer der Kegelflächen. Dies wird nämlich der Fall sein, wenn die Kugelflächen und das Ovaloid von der durch t gehenden Normalebene an Φ in einem Kreis und in einem Oval geschnitten wird, welche sich in der Richtung von t oskulieren. In allen anderen Fällen liegt t ausserhalb der Kegelflächen.

Durch t legen wir nun an jeder der Kegelflächen die zwei berührenden Ebenen ν und ν_1, und fragen, wie oft ν und ν_1 zusammenfallen. Dies geschieht

erstens, wenn die Kegelfläche durch t geht, was dem obigen zufolge einmal der Fall sein kann. Zweitens geschiet es, wenn ein Kegelfläche sich in eine Doppelgerade MN oder in ein durch MN gehendes Ebenenpaar sich auflöst. Um die ganze Zahl finden zu können, benutzen wir das elementare Korrespondenzprincip in zweimaliger Anwendung. Wir legen dementsprechend durch t eine feste Ebene ν und suchen die Zahl der entsprechenden Ebenen ν_1, d. h. die Zahl der Kegelflächen, welche ν berühren. Das geschieht, wenn der Kreis K und das Oval ω, in welchen die Kugelfläche und das Ovaloid von ν geschnitten werden, sich ausser in M noch in einem Punkt N berühren. Ein in ν liegender Kreis K, der in M berührt und in einem Punkt N_1 das Oval ω schneidet, wird dasselbe noch in einem Punkt N_2 schneiden, d. h. die Verbindung $N_1 - N_2$ ist gegenseitig eindeutig. Es giebt nun Kreise K welche ω schneiden, aber auch Kreise K, welche ω ganz im Inneren enthalten, und also nicht schneiden. In einem Übergang zwischen schneidenden und nicht schneidenden Kreisen müssen N_1 und N_2 in einen Punkt N zusammenfallen und in der Nähe von N in entgegengesetztem Sinn laufen. Es giebt alzo zwei Punkte N, wo ω von K berührt wird, d. h. jeder Ebene ν entsprechen zwei Ebenen ν_1, oder die Verbindung $\nu - \nu_1$ ist gegenseitig $1-2$ deutig. Nun haben wir oben gesehen, dass t *einmal* in einer der Kegelflächen liegt, und wie früher bemerkt, werden in der Nähe dieser Lage die Ebenen ν und ν_1 in dem entgegengesetzten Sinn sich um t drehen. Es fallen demnach im ganzen ν und ν_1 4 Mal zusammen, und es giebt 3 Kugelflächen, welche in M und in noch einem Punkt N berühren. Aber zwei von diesen werden ausser M und N keine weitere Punkte mit dem Ovaloid gemein haben. Weil wir nämlich vorausgesetzt haben, dass die in M berührenden Krümmungskreise in den Normalschnitten in M alle endlich und von Nul verschieden sind, giebt es eine kleinste Kugelfläche, welche Φ ganz in seinem Inneren enthält, und eine grösste, welche ganz im Inneren des Ovaloids liegt. Diese Flächen haben ausser M und N keine andere Punkte mit dem Ovaloid gemein. Es giebt also eine und nur eine Kugelfläche, welche in M und in noch einem Punkt das Ovaloid berührt, und ausserdem andere Punkte mit demselben gemein hat.

Wir haben jetzt bewiesen:

Durch jeden Punkt eines cyklischen Ovaloids gehen zwei und nur zwei auf der Fläche liegende Kreise.

Es seien α und α' zwei Kreise der Fläche, welche durch einen Punkt P gehen. Durch Punkte P, P_1, P_2,...., P_n auf α, welche eine Folge bilden, gehen Kreise α', α_1', α_2',...., α_n'.... So kann man fortsetzen, bis man einen Kreis erreicht, der α berührt. Aber man konstruiert dann einen Kreis α_1, der α_n' schneidet und setzt mit diesen so fort, wie zuvor mit α. In dieser Weise kann man jeden Kreis α' erreichen, der auf der einen Seite von α' liegt - und ebenso auch alle Kreise auf der anderen Seite derselben. Die Konstruktion endet in der Tat erst,

wenn man einen (unendlich kleinen) Kreis erreicht, dessen Ebene das Ovaloid berührt; es ist nämlich der Winkel, welchen die Ebene eines Kreises α mit der Ebene eines ihn schneidenden Kreises bildet, immer endlich, und kann *nicht gegen Nul konvergieren.* In dem Fall würde nämlich ein Kreis als Grenzlage bestimmt werden, durch dessen Punkte zwei zusammenfallende Kreise α und α' gehen würden, und diese Möglichkeit haben wir ausgeschlossen.

Die Folge der Kreise α kann man sich in derselben Weise konstruiert denken, so dass man von zwei Systemen von Kreisen auf dem Ovaloid sprechen kann.

Wenn also ein cyklisches Ovaloid *vorgelegt* ist, dann ist das ganze System seiner Kreise, und damit die ganze Fläche, durch drei Kreise α_1, α_2, α_3 welche alle einen Kreis α' schneiden, vollständig bestimmt. Durch jeden Punkt P von, sagen wir, α_2 kann nämlich *höchstens* ein Kreis α' gehen, welcher α_1 und α_3 zweimal schneidet, und dieser Kreis muss auch noch α_2 in noch einem (evtl. mit P zusammenfallenden) Punkt schneiden, weil die Fläche zweiter Ordnung ist. Die oben genannte Fortsetzung ergiebt dann sämmtliche Kreise *eindeutig.*

Es seien nun α_1 und α_2 zwei Kreise des einen Systems, welche von zwei Kreisen α_1' und α_2' des anderen Systems geschnitten werden. Die Schnittlinie p der Ebenen der zwei Kreise α_1 und α_2 muss ausserhalb des Ovaloids liegen, weil sonst je zwei der drei Kreise α_1, α_2, α_1' zwei Punkte mit einander gemein haben würden, und somit alle auf einer Kugelfläche liegen würden, was wir auslassen. Es möge p von der Ebene des Kreises α_1' in einem Punkt O geschnitten werden, den wir uns erst als im Endlichen liegend denken. Dieser Punkt hat dieselbe Potenz in Bezug auf α_1 und α_2, nämlich dieselbe wie in Bezug auf α_1'. Wenn nun die Ebene von α_2' nicht durch O geht, wird sie die Gerade p in einem Punkt O_1 schneiden, der auch dieselbe Potenz in Bezug auf α_1 und α_2 hat. Die Radikalachse der zwei Kreise α_1 und α_2 wird also $OO_1=p$ sein. Aber zwei Kreise in verschiedenen Ebenen, welche die Schnittlinie dieser als Radikalachse haben, liegen, wie leicht zu sehen, auch in einer Kugelfläche. Weil diese auch α_1' enthalten wird, ist dies wieder unmöglich, d. h. die Ebenen der vier Kreise müssen alle durch denselben Punkt O gehen. Hieraus folgt schon, dass die Ebenen aller Kreise α', welche zwei Kreise des anderen Systems schneiden, durch denselben Punkt gehen müssen, und auch noch, dass alle Kreise, welche zwei Kreise α^1 und α^2 schneiden, durch denselben Punkt O gehen müssen. Die schon oft erwähnte Fortsetzungskonstruktion zeigt dann, dass die Ebenen aller auf dem Ovaloid liegenden Kreise durch denselben Punkt gehen müssen. Für diesen Punkt als Inversionscentrum geht die Fläche durch passende Wahl des Inversionspotenzes in sich über.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, dass die Ebenen der Kreise α_1, α_2, α_1' einer und derselben Gerarden a parallel sind, so dass O ins Unendliche fällt. Es mögen M_1N_1 und M_2N_2 die Schnittpunkte von α_1' mit bzw. α_1 und α_2 sein. Die Linienstücke M_1N_1 und M_2N_2 sind parallele Korden im Kreise α_1', und

eine und derselbe Ebene π_1 steht auf beiden in ihren Mittelpunkten senkrecht. Ersetzt man α_1' mit einem anderen α_1 und α_2 schneidenden Kreis, erhält man in analoger Weise eine entsprechende Ebene π_2. Die Ebenen π_1 und π_2 müssen aber zusammenfallen, denn sie sind beide auf der Geraden p senkrecht und gehen beide durch die Mittelpunkt der Kreise α_1 und α_2. In diesem Fall wird π_1 eine Symmetriebene des Ovaloids sein.

Man hat also:

Die Ebenen sämmtlicher Kreise auf einem cyklischen Ovaloid gehen alle durch einen ins Endliche oder ins Unendliche liegenden Punkt.

Jetzt sind wir in der Lage beweisen zu können, dass ein cyklisches Ovaloid, wenn die genannten Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind, im Allgemeinen algebraisch sein muss. Der Ausnahmefall, wo die hier benutzten Hilfsmittel versagen, ist der, wo die durch einen Punkt gehenden zwei Kreise der Fläche zusammenfallen können.

Es sei also ein cyklisches Ovaloid *als gegeben vorgelegt,* und es seien α_1, α_2, α_3 drei Kreise des einen Systems, welche von einem Kreis α_1' des anderen Systems, geschnitten werden. Alle vier Kreisebenen gehen durch denselben Punkt O, und dieser Punkt hat dieselbe Potenz in Bezug auf alle die genannten Kreise. Es möge α_1' von den drei anderen in P_1, P_2, P_3 geschnitten werden. Die zwei Kugelflächen $(\alpha_1 P_2)$ und $(\alpha_3 P_2)$ schneiden einander in α_1'. Ersetzt man P_2 mit einem anderen auf α_2 und in der Nähe von P_2 liegenden Punkt P_2', schneiden die zwei Kugelflächen $(\alpha_1 P_2')$ und $(\alpha_3 P_2')$ einander in einem Kreis α_2', welcher α_3 in einem P_3 naheliegenden und α_1 in einem P_1 naheliegenden Punkt schneidet. Die Ebene von α_2' geht auch durch O, und die Gerade $OP_1' = p_1'$ schneidet α_1 in einem Punkt Q_1', und die Gerade $OP_3' = p_3'$ schneidet α_3' in einem Punkt Q_3', welche zwei neue Punkte beide auf α_2' liegen, so dass α_2' ein Kreis des Ovaloids sein muss.

Wenn nun P_2' immer in der Nähe von P_2 seine Lage auf α_2 ändert, hat man:

$$\alpha_1(P_1') \barwedge (p_1') \barwedge (p_3') \barwedge \alpha_2(P_3').$$

Die zwei projektiven Kugelbüchsel erzeugen aber eine algebraische Fläche, eine Cyklide. Aus der Theorie *dieser* Flächen weiss man, dass diese zwei Systeme von Kreisen α und α' enthält, dass *jeder* Kreis des einen Systems mit *jedem* Kreise des anderen auf einer Kugelfläche liegt, und dass die Kugelbüchsel, welche zwei beliebige feste Kreise des einen Systems mit einem veränderlichen des anderen verbinden, mit einander projektiv sind. Das gegebene Ovaloid hat also mit der Cyklide jedenfalls alle die Kreise α' gemein, welche die Kreise α_1, α_2, α_3 schneiden, was einen endlichen Teil der Ovaloids ausmacht. Um weiter zu kommen ersetze man wie oben α_1, α_2, α_3 durch drei neue Kreise desselben Systems, welche statt α_1' einen neuen Kreis α_2' schneiden. Die Kreise α', welche die drei neuen Kreise α schneiden, werden auch sowohl dem Ovaloid wie auch der Cyklide angehören, denn durch die drei neuen Kreise α geht nur ein Ovaloid. Man wird

so — in beiden Sinnen von a_1' aus — fortsetzen können, bis man einen Kreispunkt der Fläche erreicht.

Man hat also:

Ein cyklisches Ovaloid, dessen Punkte, berührende Ebenen und oskulierende Kreise stetig auf einander folgen, und keine cirkuläre Krümmungslinie hat, ist eine algebraische Cyklide, oder ein Ellipsoid.

Die Bedingung, dass auch die oskulierende Kreise stetig auf einander folgen sollen, ist notwendig. Man nehme z. B. ein Umdrehungsellipsoid und schneide durch eine auf der Umdrehungsachse senkrechte Ebene ein Segment *ab*, ersetze dieses durch ein Segment eines anderen Umdrehungsellipsoids, so dass die Punkte und die berührenden Ebenen auf der neuen und der alten Fläche stetig auf einander folgen. Diese Fläche ist, wie leicht zu sehen, cyklisch und nicht analytisch, aber die Krümmungskreise folgen nicht überall stetig auf einander.

Ob die in dem Satz zuletzt angegebene Bedingung notwendig ist, muss ich dahin stehen lassen.

Algebraische Cykliden, welche Ovaloide sind, existieren sicher. Man hat als einfachstes Beispiel die durch eine passende Inversion aus einem Ellipsoid abgeleitete Fläche. Diese ist selbstverständlich cyklisch; es kommt nur darauf an, das Inversionscentrum so zu wählen, dass sie ein Ovaloid wird. Aber die inverse Kurve einer Ellipse ist ein Oval, wenn durch das Inversionscentrum kein der Ellipse oskulierender Krümmungskreis geht, denn die Kurve hat dann keine Doppelpunkte, Spitzen oder Inflexionspunkte. Man braucht also nur das Inversionscentrum ausserhalb des grössten Krümmungskreisen zu wählen. Daraus folgt, dass die inverse Fläche eines Ellipsoids ein Ovaloid wird, wenn das Inversionscentrum ausserhalb des grössten oskulierenden Kugels des Ellipsoids gewählt wird. Dieses Ovaloid hat als algebraische Fläche vierten Grades betrachtet einen isolierten Doppelpunkt.

Welche unter den von Hrn. Gino Loria (Mem. d. Reale Acc. di Torino, 1885, p. 199 et sequ.) angegebenen Typen von Cykliden Ovaloids enthalten können, und welche Ungleichungen die Koefficienten der gefundenen Gleichungen erfüllen müssen, damit die algebraische Fläche wirklich ein reelles ovaloidisches Netz enthält, ist eine Frage, welche ausserhalb den Rahmen dieser Untersuchung liegt.

R. ZUPANČIČ (Ljubljana - Jugoslavia)

SUR UNE DÉCOMPOSITION DES HOMOGRAPHIES

M. BERTINI a imaginé une méthode géométrique très élégante pour traiter la composition d'une collinéation de deux espaces S_n et S_n' par une suite de projections centrales dans un espace ambiant S_{n+1}. Examinant ensuite le cas particulier des homographies, c'est à dire le cas où les espaces S_n et S_n' sont confondus, l'illustre auteur obtient le résultat qu'alors cette composition peut être effectuée toujours avec $n+2$ projections au maximum.

Nous allons préciser ce dernier cas.

Étudions dans l'espace S_r à r dimensions la projection centrale éxécutée du centre $C=(C^0, C^1,...., C^r)$ sur l'espace γ à $(r-1)$ dimensions:

$$\gamma/x \equiv \gamma_0 x^0 + \gamma_1 x^1 + ... + \gamma_r x^r = 0.$$

À ce but considérons sur la droite qui joint le point donné $x=(x^0, x^1,...., x^r)$ au point C le point $\bar{x}$ aux coordonnées:

$$\bar{x}^i = (C/\gamma)x^i - (x/\gamma)C^i, \qquad i=0, 1,...., r$$

qui est évidemment la représentation du point donné. On a en effet: $\bar{x}/\gamma=0$.

Soient en particulier $\gamma_i=0$, $i \neq k$, $\gamma_k=1$; notre formule devient

$$\bar{x}^i = C^k x^i - C^i \bar{x}^k. \tag{1}$$

Cela étant, considérons dans un espace donné S_n une homographie, en nous bornant pour plus de simplicité dans l'énoncé des résultats au cas où toutes les racines de l'équation caractéristique sont différentes. Nous écrivons l'homographie:

$$\bar{y}^i = \varrho^i y^i$$
$$\varrho^i \neq \varrho^k, \quad i \neq k; \qquad i=0, 1,...., n$$

qui aura les points doubles indépendants: P_0, P_1,...., P_n. Choisissons dans un espace ambiant S_{n+1}, en dehors de l'espace S_n encore un point P_{n+1} et soient dans S_{n+1} les points $P_0, P_1,...., P_{n+1}$ les sommets du polyèdre fondamental. Prenons ensuite dans S_{n+1}, toujours en dehors de S_n, les points:

$$C_1, \; C_2,...., \; C_{n+1},$$

de manière que les droites C_kC_{k+1} passent par les points P_k respectivement, ce qui donne les relations:

$$C_k^i C_{k+1}^j - C_k^j C_{k+1}^i = 0, \qquad i \neq k,\ j \neq k. \tag{2}$$

Nous avons en outres les espaces à n dimensions γ^k du polyèdre fondametal:

$$\gamma_i^k = 0, \qquad i \neq k,\ \gamma_k^k = 1.$$

Écrivons en partant du point C_1 comme centre la projection d'un point quelconque x de l'espace S_{n+1} sur l'espace γ^1, nous obtenons le point:

$$x_1^i = C_1^1 x^i - C_1^i x^1.$$

Projetons ce point du centre C_2 sur γ^2, nous aurons:

$$x_2^i = C_2^2 x_1^i - C_2^i x_1^2,$$

en général:

$$x_k^i = C_k^k x_{k-1}^i - C_k^i x_{k-1}^k$$

qui est la projection exécutée du centre C_k sur l'espace γ^k.

Maintenant portons les x_1^i dans les x_2^i:

$$x_2^i = C_2^2 C_1^1 x^i - C_2^2 C_1^i x^1 - C_2^i C_1^1 x^2 + C_2^i C_1^2 x^1$$

ou bien, en vertu des équations (2):

$$\begin{aligned} x_2^0 &= C_1^1 C_2^2 x^0 - C_1^1 C_2^0 x^2 \\ x_2^1 &= C_1^2 C_2^1 x^1 - C_1^1 C_2^1 x^2 \\ x_2^2 &= C_1^1 C_2^2 x^2 - C_1^1 C_2^2 x^2 = 0 \\ x_2^3 &= C_1^1 C_2^2 x^3 - C_1^1 C_2^3 x^2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Définissons les nombres C_0^0 et C_0^1 comme il suit:

$$C_0^0 = 1; \qquad C_0^1 C_1^0 = C_1^1.$$

Si nous posons:

$$\begin{aligned} A_k^i &= C_0^0 C_1^1 \ldots C_{i-1}^{i-1} C_i^{i+1} C_{i+1}^i C_{i+2}^{i+2} \ldots C_k^k, \quad i < k, \\ &= C_0^0 C_1^1 \ldots C_k^k, \qquad i \gtrless k, \\ B_k^i &= C_0^0 C_1^1 \ldots C_{k-1}^{k-1} C_k^i; \qquad \text{donc } A_k^k = B_k^k, \end{aligned}$$

nous pourrons écrire:

$$x_2^i = A_2^i x^i - B_2^i x^2.$$

Cela nous suggère la formule générale:

$$x_k^i = A_k^i x^i - B_k^i x^k. \tag{3}$$

Demontrons la de proche en proche:

$$\begin{aligned} x_{k+1}^i = C_{k+1}^{k+1} x_k^i - C_{k+1}^i x_k^{k+1} = A_k^i C_{k+1}^{k+1} x^i - B_k^i C_{k+1}^{k+1} x^k - \\ - A_k^{k+1} C_{k+1}^i x^{k+1} + B_k^{k+1} C_{k+1}^i x^k. \end{aligned}$$

Or, étant donné:

$$B_k^{k+1}C_{k+1}^i - B_k^i C_{k+1}^{k+1} = 0, \quad i \neq k$$

par la définition même des A_k^i et des B_k^i, et en vertu de la condition (2); puis étant encore:

$$A_k^i C_{k+1}^{k+1} = A_{k+1}^i$$
$$A_k^{k+1} C_{k+1}^i = B_{k+1}^i.$$

notre formule est établie pour $i \neq k$, mais pour $i=k$ les deux premiers termes du second membre se détruisant, on a évidemment aussi:

$$x_{k+1}^k = A_{k+1}^k x^k - B_{k+1}^k x^{k+1}.$$

Dans les formules (3) faisons $k=n+1$ et bornons-nous à la projection des points $x^{n+1}=0$, les formules (3) deviennent:

$$x_{n+1}^i = A_{n+1}^i x^i,$$

ce qui donne dans l'espace S_n une homographie qui peut être mise sous la forme:

$$\bar{y}^i = A_{n+1}^i y^i, \qquad y^i = x^i$$
$$\bar{y}^i = x_{n+1}^i, \qquad i=0, 1, \ldots, n$$

et qui sera l'homographie donnée $\bar{y}^i = \varrho^i y^i$ à condition qu'on ait encore:

$$A_{n+1}^i = \varrho^i$$

ou bien

$$\begin{aligned} &C_1^1 C_2^2 \ldots C_{n+1}^{n+1} = \varrho^0 \\ &C_1^2 C_2^1 C_3^3 \ldots C_{n+1}^{n+1} = \varrho^1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1^1 C_2^2 \ldots C_n^{n+1} C_{n+1}^n = \varrho^n. \end{aligned} \tag{4}$$

Je dis que les nombres figurant dans le premier membre de ce système, en dépit des conditions (2), peuvent être choisis arbitrairement et par conséquent de manière à satisfaire au système (4). Vérifions le pour le cas de $n=4$:

$$\begin{matrix} C_1^0 \bar{C}_1^1 \bar{C}_1^2 \overset{*}{C}_1^3 \overset{*}{C}_1^4 \overset{*}{C}_1^5 \\ C_2^0 \bar{C}_2^1 \bar{C}_2^2 \bar{C}_2^3 \overset{*}{C}_2^4 \overset{*}{C}_2^5 \\ C_3^0 \overset{*}{C}_3^1 \bar{C}_3^2 \bar{C}_3^3 \bar{C}_3^4 \overset{*}{C}_3^5 \\ C_4^0 \overset{*}{C}_4^1 \overset{*}{C}_4^2 \bar{C}_4^3 \bar{C}_4^4 \bar{C}_4^5 \\ C_5^0 \overset{*}{C}_5^1 \overset{*}{C}_5^2 \overset{*}{C}_5^3 \bar{C}_5^4 \bar{C}_5^5 \end{matrix}$$

A supposer choisis les nombres barrés, la proportionnalité qui, en vertu des relations (2), existe entre les nombres de deux premières lignes, à la seule exception de C_1^1 et C_2^1, nous donne le nombre C_1^3 marqué par un astérisque. Une proportionnalité analogue entre les nombres de la deuxième et la troisième ligne donne C_2^4 et C_3^1, et on remonte encore à C_1^4, et ainsi de suite. On peut donc

bien satisfaire aux relations (2) par un choix arbitraire des nombres barrés; en outre C_1^0 reste arbitraire.

Considérant que C_1^0 n'est entré dans notre démonstration que pour plus de symmétrie, nous pourrons faire enfin $C_1^0=0$, c'est à dire placer tous les points C dans l'espace $(P_1, P_2,\ldots, P_{n+1})$.

Voici dons le résultat:

Une homographie $\overline{y}^i=\varrho^i y^i$, $\varrho^i\neq\varrho^k$, $i\neq k$ *de l'espace* S_n, *aux points doubles* P_0, $P_1,\ldots, P_n$ *peut être obtenue par la composition des* $n+1$ *projections centrales dans un espace ambiant* S_{n+1}.

Après avoir choisi dans S_{n+1} et en dehors de S_n un point arbitraire P_{n+1}, les centres $C_1, C_2,\ldots, C_{n+1}$ de ces projections peuvent être placés tous dans l'espace à n dimensions défini par les points $P_1, P_2,\ldots, P_{n+1}$ et de manière que les droites C_kC_{k+1} passent par les points P_k respectivement. Les projections s'exécutent sur les espaces à n dimensions définis par les n-uples de points:

$$(P_0, P_2,\ldots, P_{n+1}),\quad (P_0, P_1, P_3,\ldots, P_{n+1}),\ldots,\quad (P_0, P_1,\ldots, P_n).$$

L. LABOCCETTA (Roma - Italia)

ESTENSIONE DEI METODI DELLA GEOMETRIA ANALITICA ALLA RAPPRESENTAZIONE DELLO SPAZIO FISICO

I metodi usuali della geometria analitica permettono, mediante una relazione fra due variabili, di rappresentare una linea del piano e mediante una relazione fra tre variabili una superficie dello spazio.

Mi propongo di mostrare come sia possibile, facendo uso solo di variabili reali e con equazioni della stessa forma di quelle della geometria ordinaria, estendere i metodi di questa anche alla rappresentazione di linee e di superfici formate da porzioni diverse aventi ciascuna espressione analitica propria, nonchè delle regioni del piano e dello spazio delle quali esse formano il contorno, ed inoltre, come è necessario nelle questioni concernenti lo spazio fisico reale o figurativo, alla rappresentazione di quelle grandezze che sono espresse da funzioni diverse in domini del piano e dello spazio della specie anzidetta aventi forma e posizione assegnate ad arbitrio; infine, di estendere il metodo anche al caso in cui le configurazioni da rappresentare variano col tempo o nelle relazioni considerate appariscono come variabili delle grandezze fisiche come la massa, le cariche elettriche etc. che, a differenza delle coordinate ordinarie, linee ed angoli, sono essenzialmente discontinue.

* * *

1. - Il problema della rappresentazione di una grandezza il cui valore, in diversi intervalli del campo assegnato alla variabile da cui dipende, ha espressioni analitiche diverse, si può risolvere quando si sappiano costruire quelle funzioni che Fourier denominò « *fonctions séparées* » ed anche « *parties de fonctions* » il cui valore coincide con quello di una funzione $f(x)$ arbitrariamente data quando la variabile x è compresa in uno degli intervalli dati, ed è invece sempre nullo per ogni altro valore della variabile [1].

La costruzione in ogni singolo caso di una particolare funzione di questo genere sarebbe malagevole e complicata. Fortunatamente, per formare tutte le altre che in pratica occorrono, bastano tre sole funzioni fondamentali con il

[1] *Théorie analytique de la Chaleur*, § 428, p. 530.

valore costante $+1$ nell'intervallo di esistenza. Esse possono anzi farsi tutte derivare dall'unica funzione sgn x, e sono come questa, esprimibili mediante integrali definiti. Si ha infatti, come è noto (1)

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{sgn} x = \varphi_0(-1, +1) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} xa}{a}\,da$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{sem}\ \operatorname{sgn} x = \varphi_0(0, 1) = \frac{1}{\pi}\,e^{xk}\int_0^\infty \frac{a\operatorname{sen} xa + k\cos xa}{k^2 + a^2}\,da$$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Dir} x = \varphi_{-1,+1}(0, 1, 0) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} a}{a}\cos xa\,da.$$

Cambiando x in $-x$ nella (2) si ha $\varphi_0(1, 0)$: le due funzioni $\varphi_0(0, 1)$ e $\varphi_0(1, 0)$ che propongo di chiamare « *semisegno di* x » e « *semisegno di* $-x$ » sono qui indicate con *sem sgn* x e *sem sgn* $(-x)$.

La terza funzione (3) è il cosiddetto « *fattore discontinuo di Dirichlet* » che, per brevità, è stato qui indicato con Dir x.

2. - Ciò posto, se in n successivi intervalli

$$-\infty x_1,\ x_1x_2,\ldots,\ x_{i-1}x_i,\ldots,\ x_{n-1}+\infty$$

la funzione y deve coincidere rispettivamente con

$$y_1 = f_1(x),\ldots,\ y_i = f_i(x),\ldots,\ y_n = f_n(x)$$

formando il polinomio

$$\text{(4)} \qquad f_1(x)\varphi_{x_1}(1, 0) + f_2(x)\varphi_{x_1x_2}(0, 1, 0) + \ldots + f_n(x)\varphi_{x_{n-1}}(0, 1)$$

è chiaro che questo nel primo intervallo coinciderà con la funzione $f_1(x)$, nel secondo coinciderà con quella $f_2(x)$ e così via, e costituirà perciò la funzione y cercata (2).

L'analogia della (4) con le formole d'interpolazione è evidente; solo che qui invece di n punti e di n valori son dati n segmenti in ciascuno dei quali la funzione ha espressione analitica diversa e si è formato un polinomio i cui valori coincidono con quelli della funzione da rappresentare in ciascuno dei detti segmenti.

Questa specie d'interpolazione potrebbe perciò esser chiamata *segmentale* per distinguerla da quella *puntuale* ordinaria.

---

(1) Indico con $\varphi_{x_1x_2}(a_1, a_2,\ldots)$ la funzione che ha costantemente il valore a_1 nell'intervallo $-\infty x_1$, il valore a_2 nell'intervallo x_1x_2 etc.

(2) V. per la (4) la mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 18. VI, 1922.

A differenza però dei fattori interpolari delle formole di Newton e di Lagrange, quelli della (4) presentano la proprietà di restare invariati, conservando la stessa forma semplice, qualunque sia il numero degli intervalli. Se questo diventa infinito, il polinomio si trasforma in una serie, la quale potrebbe esser chiamata « *serie d'interpolazione segmentale* ».

3. - Le più semplici funzioni esprimibili con queste serie sono quelle periodiche i cui diagrammi comprendono in ogni periodo uno o più archi di curve assegnate ad arbitrio.

Nel caso di un arco solo, se il primo periodo si estende da 0 a c la serie è

$$y=\sum_{-\infty}^{+\infty} f(x-nc)\varphi_{nc,(n+1)c}(0,1,0). \tag{5}$$

Così per la funzione di Riemann, « *eccesso di x* », indicata anche con $R(x)$, si ha

$$R(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}(x-n)\varphi_{(2n-1)/2,(2n+1)/2}(0,1,0). \tag{6}$$

Se il periodo comprende più di un intervallo, ogni termine della serie si muta in un polinomio di tanti termini per quanti sono gli archi diversi contenuti nel periodo.

Così la serie che dà la « *poligonoide* » [1], comprendente due intervalli in ciascun periodo è

$$\mathrm{Plg}\,x=\sum_{-\infty}^{+\infty}\{(x-2n)\varphi_{2n-1,2n+1}(0,1,0)+(2n+2-x)\varphi_{2n+1,2n+3}(0,1,0)\}. \tag{7}$$

La poligonoide si ottiene dalla funzione di Riemann moltiplicando questa per un « *fattore alternante* » per un fattore cioè che nei successivi periodi abbia alternativamente i valori $+1$, -1

$$\mathrm{Plg}\,x=2R(x)i^{2I\frac{2x+1}{2}}. \tag{8}$$

Applicando alla stessa funzione $R(x)$ un fattore alternante che cambia valore ogni mezzo periodo, si ha invece la poligonoide raddrizzata:

$$\mathrm{Plg}_R\,x=2R(x)i^{2I2x}. \tag{9}$$

Con queste serie sono rappresentabili anche quelle funzioni che variano periodicamente con legge assegnata, restando costanti in ogni intervallo:

$$y=\sum_{-\infty}^{+\infty} f(n)\varphi_{n,n+1}(0,1,0). \tag{10}$$

---

[1] Ho così chiamato questa funzione in un mio scritto « Politecnico » n. 11-12, 1923.

4. - Le serie ora considerate si possono rappresentare con espressioni di forma finita a mezzo delle due funzioni Ix e Frx (1). Infatti essendo, per qualunque n intiero $x-nc=cFr\frac{x}{c}$, la serie (5) si può scrivere

$$y=f\left(cFr\frac{x}{c}\right) \tag{11}$$

che è perciò l'espressione generale in forma finita delle funzioni i cui diagrammi sono costituiti da uno o più archi di curve di natura qualsiasi periodicamente ripetuti (2) e rappresentati nel primo periodo da $y=f(x)$, f potendo anche essere un polinomio del tipo di quello (4).

5. - Il metodo è estensibile al caso di due o tre variabili per formare delle funzioni doppiamente o triplamente periodiche aventi nei rettangoli o nei parallelepipedi fondamentali espressioni assegnate ad arbitrio. Basta perciò nelle espressioni date

$$z=f(x, y), \qquad \Delta=f(x, y, z)$$

sostituire ad x, y, z rispettivamente $cFr\frac{x}{c}$, $pFr\frac{y}{p}$, $qFr\frac{z}{q}$ se, c, p e q sono i periodi, e si ha (3)

$$z=f\left(cFr\frac{x}{c},\ pFr\frac{y}{p}\right) \tag{12}$$

$$\Delta=f\left(cFr\frac{x}{c},\ pFr\frac{y}{p},\ qFr\frac{z}{q}\right). \tag{13}$$

Così, per esempio, se nell'equazione di una retta $\varrho=r(\cos\theta-\varphi)^{-1}$ si rende periodica la variabile θ assegnando ad essa il periodo 2φ si ha in

$$\varrho=r\left\{\cos\varphi\left(2Fr\frac{\theta}{2\varphi}-1\right)\right\} \tag{14}$$

l'equazione del poligono regolare il cui lato sottende un angolo 2φ.

E, data l'equazione di un piano $\varrho=a(1+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta)^{\frac{1}{2}}$ se si rendono periodiche entrambe le variabili assegnando ad esse il periodo $\frac{\pi}{2}$ si ha in

$$\varrho=a\left\{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\left(2Fr\frac{4\alpha+\pi}{2\pi}-1\right)+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\left(2Fr\frac{4\beta+\pi}{2\pi}-1\right)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{15}$$

l'equazione del cubo con il centro nell'origine, e gli spigoli paralleli agli assi coordinati.

Infine, data l'equazione dell'ottaedro (4), $x\operatorname{sgn}x+y\operatorname{sgn}y+z\operatorname{sgn}z=a$, ren-

---

(1) Indico con Ix la funzione « *intiero di x* » e con Frx la funzione $x-Ix$.

(2) V. per la (11) la mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 22. IV, 1923; maggiori particolari ed applicazioni nel mio scritto « Elettrotecnica », N. 19-20-21, 1924.

(3) V. per le (12), (13) la mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 17. VI, 1923.

(4) V. la mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 1. VI, 1927.

dendo periodicamente variabili le tre coordinate, tutte col periodo $2a$, l'origine essendo punto medio dei tre primi periodi, poichè è $x \operatorname{sgn} x = |x|$ si ha in

$$a = \left| 2aFr\frac{x+a}{2a} - a \right| + \left| 2aFr\frac{y+a}{2a} - a \right| + \left| 2aFr\frac{z+a}{2a} - a \right| \tag{16}$$

la rappresentazione di uno spazio cellulare ottaedrico.

6. - Anche le serie più generali (10) si possono rappresentare con espressioni di forma finita, ponendo $cI\frac{x}{c}$ invece di x in $f(x)$ e si ha, in

$$y = f\left(cI\frac{x}{c}\right) \tag{17}$$

una linea « *scalariforme* » costituita da tanti trattini uguali paralleli all'asse delle x, e con il loro estremo sinistro sulla linea rappresentata dalla equazione $y = f(x)$. Perciò se questa linea è, per es. sempre crescente in un intervallo dato a, b le due equazioni

$$y_i = f\left(cI\frac{x}{c}\right) \qquad y_e = f\left(cI\frac{x+1}{c}\right) \tag{18}$$

rappresentano le due poligonali scalariformi appoggiantesi la prima a sinistra e la seconda a destra, alla linea $y = f(x)$ che esse comprendono fra di loro e quindi la differenza

$$y_e - y_i = f\left(cI\frac{x+c}{c}\right) - f\left(cI\frac{x}{c}\right) \tag{19}$$

è la funzione che rappresenta il valore della « *oscillazione* ».

* * *

7. - Data una funzione $y = f(x)$, il cui integrale è $Y = F(x)$, la corrispondente funzione periodica (11) ha per integrale

$$Y = F\left(cFr\frac{x}{c}\right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} k_n \varphi_{n-1,n}(0, 1, 0) \tag{20}$$

k_n essendo la costante arbitraria per il periodo n^{mo}.

Se si indica con ω il valore dell'area di un periodo si dirà *integrale normale* quello nel quale delle costanti k_n si dispone in modo che risulti soddisfatta la relazione

$$Y = F\left(cFr\frac{x}{c}\right) + \omega I\frac{x}{c} + C. \tag{21}$$

La differenza delle ordinate di questa funzione, fornisce il valore dell'area della curva (11) fra i punti di ascisse corrispondenti come nel caso di un integrale ordinario. Ma l'integrale più generale, che occorre considerare in molte questioni di fisica, si ottiene aggiungendo all'integrale normale un termine di *scostamento*, funzione del numero di ordine del periodo

$$Y_G = F\left(cFr\frac{x}{c}\right) + \omega I\frac{x}{c} + G\left(I\frac{x}{c}\right) + C. \tag{22}$$

L'integrale normale (21) definito di una funzione periodica si semplifica se i limiti si fanno coincidere con quelli dei periodi, perchè allora sparisce il primo termine e così, ad esempio, come integrale della poligonoide raddrizzata si ha

$$\int_0^{2n} \left\{ Frxi^{2Ix} + I\left(2Fr\frac{x}{2}\right) \right\} dx = n \tag{23}$$

risultato da tener presente nello sviluppo dell'area di una curva in serie di poligonoidi col metodo di esaustione.

8. - Il metodo di esaustione adoperato dagli antichi geometri per determinare l'area racchiusa da una curva decomponendola in elementi, per esempio triangolari, costituenti i termini di una serie convergente, può servire anche ad esprimere mediante una serie il valore dell'ordinata del diagramma di una funzione costituita da un arco di curva periodicamente ripetuto. Se infatti da un punto dell'asse delle ascisse si conduce una parallela all'asse delle y che incontra la curva in un punto nel quale non cade il vertice di alcun triangolo, si scorge che l'ordinata stessa risulta uguale alla somma dei segmenti che tutti i triangoli incontrati dalla retta staccano su di essa, e questi segmenti sono in numero infinito. Se la retta incontra la curva in un punto nel quale cade il vertice di un triangolo, il numero dei triangoli diventa finito e la serie si trasforma in un polinomio.

Prendendo come esempio l'arco della parabola

$$y = \frac{c^2}{4} - \left(x - \frac{c}{2}\right)^2$$

che trovasi al di sopra dell'asse delle x e la cui corda è c, e giovandosi delle proprietà di questa curva, si trova come sviluppo in serie di poligonoidi raddrizzate per il valore dell'ordinata

$$y = \frac{c^2}{2^2}\,\mathrm{Plg}_R\frac{2x}{c} + \frac{c^2}{2^4}\,\mathrm{Plg}_R\frac{2^2x}{c} + \ldots + \frac{c^2}{2^{2(n+1)}}\,\mathrm{Plg}_R\frac{2^{n+1}x}{c} + \ldots \tag{24}$$

Poichè il metodo è applicabile a qualsiasi curva e la funzione espressa dalla serie così formata è periodica col periodo c, così si scorge che con essa si giunge a rappresentare analiticamente una funzione periodica avente nel periodo forma arbitrariamente assegnata.

Dal valore dell'ordinata si passa a quello dell'area, corrispondente all'intero periodo, tenendo presente che nell'n^{ma} successione di triangoli inscritti sovrapposti al primo ve ne sono 2^n e la corrispondente poligonoide ha per periodo $\frac{c}{2^n}$ e ampiezza $\frac{c^2}{2^{2(n+1)}}$, quindi

$$A = \frac{c^3}{8}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots\right) = \frac{c^3}{8}\int_0^{\infty} 2^{-2Ix}dx. \tag{25}$$

Questo integrale normale della funzione 2^{-2Ix} periodicamente variabile con legge assegnata è già noto, essendo la somma della progressione geometrica fra parentesi della (25) e quindi $A=\frac{c^3}{6}$.

* * *

9. - Per la rappresentazione di aree piane, o di solidi, mediante relazioni fra due, o tre, variabili analoghe a quelle in uso per la rappresentazione di linee e di superfici, è necessario che, fissato il valore di una delle variabili, o di una coppia di esse, si ottenga per l'altra variabile un insieme di valori, di misura non nulla, corrispondente all'intervallo che rappresenta il segmento, intersezione dell'area, o del solido, con la parallela condotta dal punto dato, x o xy, all'asse delle y, o delle z.

Delle funzioni che posseggono tale proprietà di far corrispondere a un punto un segmento sono le inverse di quelle funzioni che conservano un valore costante, presentano cioè dei tratti di invariabilità, per tutti i valori della variabile compresi in un intervallo, finito o infinito; infatti se $f(x)$ è una funzione che ha costantemente il valore a per $x_1<x<x_2$ ed è poi per es. zero per $x<x_1$ e $x_2<x$, la funzione inversa $f^{-1}(a)$ rappresenta evidentemente l'insieme di valori costituenti l'intervallo x_1x_2. Occorrerà qui la considerazione di tre tipi soltanto di queste funzioni, e cioè quelli già incontrati (1), (2), (3), le cui inverse forniscono gli insiemi di valori costituenti uno dei segmenti infiniti $-\infty 0$, $0+\infty$ o il segmento finito -1, $+1$.

Con le notazioni adottate i due segmenti infiniti $-\infty a$ e $a+\infty$ possono essere rappresentati rispettivamente con

(26) $\qquad a+\mathrm{sem}\ \mathrm{sgn}^{-1}(0), \qquad a+\mathrm{sgn}^{-1}(-1)$

e con

(27) $\qquad a+\mathrm{sem}\ \mathrm{sgn}^{-1}(1), \qquad a+\mathrm{sgn}^{-1}(+1)$

ed il segmento finito a, b, con

(28) $$\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}\,\mathrm{Dir}^{-1}(1).$$

Questo può però essere rappresentato anche con la funzione inversa di Ix cioè con $I^{-1}N$ la quale rappresenta l'insieme dei numeri che hanno N come parte intera cioè l'intervallo N, $(N+1)$, e si ha così per il segmento finito a, b

(29) $$a+(b-a)I^{-1}0.$$

10. - Tenendo presente quanto precede si scorge che l'equazione

(30) $$y=F(x)+\mathrm{sgn}^{-1}(1)$$

rappresenta tutta la regione del piano al disopra della linea $y=F(x)$. E se si ha una seconda linea $y=f'(x)$, con $f'(x)=F(x)+f(x)$ sarà

$$y=F(x)+f(x)I^{-1}0 \tag{31}$$

l'equazione della regione del piano compresa fra le due linee $y=F(x)$ e $y=f'(x)$.

Equazioni analoghe a quelle (30) e (31) valgono a rappresentare regioni dello spazio, e così in coordinate polari si ha che l'equazione

$$\varrho=F(\lambda, \varphi)+f(\lambda, \varphi)I^{-1}0 \tag{32}$$

rappresenta lo strato solido compreso fra le due superfici

$$\varrho_1=F(\lambda, \varphi) \quad \text{e} \quad \varrho_2=F(\lambda, \varphi)+f(\lambda, \varphi).$$

11. - Un solido, anzichè come insieme di segmenti paralleli all'asse delle z, può essere considerato come insieme delle sue sezioni piane, parallele al piano XOY, per esempio, così

$$x^2+y^2=k^2z^2I^{-1}0 \tag{33}$$

rappresenta il cono solido determinato dalla superficie conica $x^2+y^2=k^2z^2$ come insieme delle sue sezioni rette circolari.

E più generalmente, adoperando un parametro segmentale, si può rappresentare un'area come insieme di una famiglia di curve e un solido come insieme di una famiglia di superfici, così l'area circolare come insieme di circonferenze

$$x^2+y^2=R^2I^{-1}0 \tag{34}$$

e la sfera solida come insieme di superfici sferiche

$$x^2+y^2+z^2=(RI^{-1}0)^2. \tag{35}$$

12. - Sulle equazioni delle aree piane e dei solidi si può operare allo stesso modo come sulle usuali equazioni delle linee e delle superfici e perciò:

a) l'intersezione di una retta, con un'area piana, è la corda corrispondente rappresentata dalla equazione

$$\{a+bx-y\}^2+\{F(x, yI^{-1}0)\}^2=0; \tag{36}$$

b) l'intersezione di un piano con un solido fornisce la corrispondente sezione rappresentata dalla equazione

$$\{ax+by+cz-1\}^2+\{F(x, y, zI^{-1}0)\}^2=0; \tag{37}$$

c) l'intersezione di due aree del piano fornisce come risultato la regione comune ad entrambe

$$\{f(x, yI^{-1}0)\}^2+\{F(x, yI^{-1}0)\}^2=0; \tag{38}$$

d) l'intersezione infine di due solidi è anche un solido, cioè la parte dello spazio comune ad entrambi (1)

$$\{f(x, y, zI^{-1}0)\}^2 + \{F(x, y, zI^{-1}0)\}^2 = 0. \tag{39}$$

* * *

13. - Nelle questioni fisiche non basta adoperare equazioni che indicano la forma dei corpi ed i limiti delle porzioni di spazio considerate, ma affinchè la rappresentazione di questi dominii sia completa bisogna che le equazioni stesse forniscano anche i valori delle grandezze fisiche che importa conoscere e che sono espresse da funzioni diverse nei detti dominii del piano e dello spazio.

Il problema è analogo a quello già trattato al § 2 e si risolve con un analogo procedimento. Infatti dati nel piano o nello spazio un certo numero di dominii D_1, D_2,...., D_i.... di forma, dimensione e posizione arbitrariamente assegnate, nei quali la grandezza considerata debba assumere i valori dati dalle funzioni delle coordinate (x, y) o (x, y, z) F_1, F_2,...., F_i.... si costruiscano altrettante funzioni $\varphi_1\binom{1}{0}$, $\varphi_2\binom{1}{0}$,...., $\varphi_i\binom{1}{0}$.... tali che ognuna di esse abbia il valore $+1$ in tutti i punti del dominio ad essa corrispondente ed il valore zero in ogni altro punto del campo, e si formi quindi la funzione

$$\Delta = F_1\varphi_1\binom{1}{0} + F_2\varphi_2\binom{1}{0} + ... + F_i\varphi_i\binom{1}{0} + ... \tag{40}$$

Questa prenderà nel primo dominio D_1 i valori della funzione F_1; nel dominio D_2 quelli della funzione F_2, e così successivamente avendo il valore zero in ogni altro punto dello spazio; e perciò sarà la rappresentazione analitica della grandezza di cui si tratta (2).

Un metodo generale per la costruzione di funzioni di questo tipo, che da C. DE LA VALLÉE POUSSIN erano state chiamate « *funzioni caratteristiche* » è il seguente: supposto che l'equazione del contorno C del dominio di cui si tratta sia $G(x, y, z) = 0$ e che la funzione $G(x, y, z)$ conservi sempre lo stesso segno, per esempio positivo, per tutti i punti interni al contorno ed abbia sempre il segno opposto, negativo, per i punti esterni, allora la funzione

$$\varphi_C\binom{1}{0} = \frac{1}{2}[1 + \operatorname{sgn} G(xyz)] = \operatorname{sem}\operatorname{sgn} G(x, y, z) \tag{41}$$

godrà appunto la proprietà di avere il valore $+1$ per tutti i punti interni al contorno ed il valore zero per tutti i punti esterni.

---

(1) Circa i §§ 10, 11, 12 v. la mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 1. VI, 1927.

(2) V. la mia Nota R. C. Acc. dei Lincei, 6, III, 1927 ed applicazioni particolari in due Note del Boll. Un. Mat. Italiana, N. 2 e 4, 1927.

14. - Il metodo di rappresentazione non cambia se i dominii D_i o le funzioni F_i sono variabili col tempo: basta in tal caso nelle equazioni già trovate esprimere in funzione del tempo, secondo le leggi assegnate, i parametri e le coordinate variabili. Così mentre l'equazione

$$\Delta = \frac{\delta}{2}[1+\operatorname{sgn}(R^2-\varrho^2)] \tag{42}$$

rappresenta la sfera materiale omogenea di densità δ e raggio R, l'equazione

$$\Delta = \frac{\delta}{2}[1+\operatorname{sgn}\{R^2-(x-ut)^2-y^2-z^2\}] \tag{43}$$

rappresenta la stessa sfera in moto uniforme con la velocità u nella direzione dell'asse delle x.

* * *

15. - Infine è da osservare che le relazioni fra i valori delle grandezze che entrano a far parte di una legge fisica si presentano sotto forma di equazioni riconducibili nel caso generale al tipo

$$G = F(L,\ T,\ldots.\ \mu M,\ \varepsilon E,\ \pi P,\ldots.\ N) \tag{44}$$

nel quale L, T,.... indicano grandezze continue, lunghezza, tempo,....; μ, ε, π,.... indicano delle quantità elementari, masse di molecole od atomi, elettroni, protoni,.... e M, E, P,.... N sono dei numeri interi.

È chiaro che solo in casi del tutto particolari queste relazioni sono rappresentabili coi soliti diagrammi costituiti da linee continue. In genere esse corrispondono a delle funzioni discontinue rappresentabili con diagrammi puntiformi, scalariformi e simili, come ho già indicato in una mia nota [1] e mi propongo di trattare più ampiamente in apposito scritto. Qui mi limiterò alla semplice osservazione seguente.

Se una grandezza, come *la quantità di materia*, è essenzialmente discontinua, essa non può variare che per multipli di quanti elementari, i quali sono invariabili.

Se invece si ha una grandezza la quale non è per se stessa essenzialmente discontinua ma, come ad esempio l'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2}v^2 \cdot \mu M \tag{45}$$

è funzione di diverse grandezze una delle quali $m=\mu M$ è discontinua, e se mentre le altre grandezze restano fisse varia solo la grandezza discontinua m, anche E_c varia per quanti. Non esistono perciò valori di E_c in corrispondenza

---

[1] R. C. Acc. Naz. dei Lincei, 1. IV, 1928.

di valori della massa m che non siano della forma μM. Affinchè la relazione (45) esprima questo fatto bisogna scrivere

$$E_c = \frac{1}{2} v^2 \mu m (I^{-1} m)^{Frm}. \tag{46}$$

I quanti $q = \left(\frac{1}{2} v^2 \mu\right)$ in questo caso di una grandezza *quantificata* sono non più costanti, ma variano ogni volta che varia il fattore continuo qui $\frac{1}{2} v^2$ (1).

(1) Per ragioni di spazio nel presente scritto è omessa qualsiasi considerazione circa le singolarità delle funzioni adoperate nei punti, lungo le linee e sulle superfici di discontinuità.

Sezione Seconda B

B. DE KERÉKJÁRTÓ (Szeged - Ungheria)

NOTE ON THE GENERAL TRANSLATION THEOREM OF BROUWER

1. - If we consider a topological transformation of a surface into itself, the problem arises of characterizing the structure of the transformation. In this connection there are two definitive results thus far, namely the plane translation theorem of BROUWER and the last geometric theorem of POINCARÉ in its general form, as stated and proved by BIRKHOFF (see below). Both of these theorems are related to the notion of *transformation-field* (due to BROUWER) which may be explained as follows: a transformation-field is a region which lies completely outside its image and is not contained in any larger region possessing the same property.

In this paper I wish to outline a general method of constructing a transformation-field which enables us to give a systematic proof of the above mentioned two theorems, and, moreover, to establish a more general theorem enounced by BROUWER but not yet proved.

2. - Consider a topological transformation of the plane into itself which preserves the sense of orientation and has no invariant point.

Through an arbitrary point take a straight line and describe it in both senses as far as the first points at which the described segment and its image meet. The figure formed by the corresponding segment b of the straight line and by its direct and inverse images a and c has necessarily one of the forms represented by fig. 1. (Any other configuration of a, b, c would involve the existence of an invariant point). The extremities of a and c divide the segment b into three parts, two of wich have an extremity in common with b. Let these two be called the *free segments* on b.

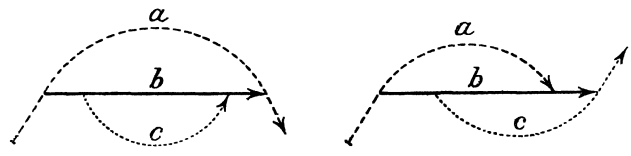


Fig. 1.

On each of the free segments we choose a *base-point*; that is, a point for wich there exists a segment perpendicular to the free segment, starting from

the base-point and meeting its own image, but not meeting the direct and inverse images of the free segment, Starting from the base-point we describe the perpendicular to the free segment, as far as the first point for which the described path and its image meet. We obtain a configuration which is essentially the same as fig. 1. On the segment determined in this way there is a new free segment; on this we choose a base-point and take the perpendicular, and so on.

By indefinite continuation of the above process, in both senses, we obtain a line (b) which has no double point and is distinct from its images (a) and (c).

3. - A modification of the above process, to which we refer as a *deviation of the path* by a line l, may be explained as follows. If the line (b) constructed by the above process reaches the line l, we go on l in both senses as far as the first points at which the described path and its image meet; on one of the free segments thus obtained (which may consist of one, two or three straight segments) we determine a base-point in such a way that if the path crosses the line l, the corresponding base-point lies on a *translation-arc* of the line l. (A translation-arc is an arc whose extremities correspond to each other by the transformation and which does not contain any other pair of corresponding points).

The choice of the lines l by which we deviate the path depends upon the nature of the special problem. For instance, in order to prove the *plane translation theorem of Brouwer*, we deviate the path by a sequence of homothetic and concentric squares whose sides have the lengths 1, 2, 3,.... (It is, howerer, sufficient to deviate the path by these squares only if the path reaches the square from outside). Then it follows that the line (b) obtained by the above construction is a *simple open line.*

Represent the plane by a stereographic projection on a sphere: to the point at infinity of the plane corresponds a point U of the sphere, invariant under the corresponding transformation. The translation theorem of BROUWER states the existence of a transformation-field (containing any given point of the sphere) whose boundary is formed by two simple closed curves passing through the point U, one of which is the image of the other. By the above reasoning this theorem is proved

The deviation of the path in this case can be looked upon as a method for preventing the path from leaving the neighborhood of the invariant point U since it comes arbitrarily near to it. In other words, if the path has points arbitrarily near to the point U, then by indefinite continuation of the construction it converges to the single point U.

4. - The *last geometric theorem of Poincaré* may be stated es follows: let a ring-shaped plane surface be mapped on itself by a topological transfor-

mation in such a way that points on the inner boundary are regressed, those on the outer boundary advanced by the transformation; then either there exists at least one invariant point, or else there exists a transformation-field whose boundary is formed by two simple closed curves corresponding to each other by the transformation, each of which separates the two boundary-circles of the ring-shaped surface. This theorem enounced by POINCARÉ has been proved by BIRKHOFF (Acta Math., vol. 47, p. 297).

A second proof of the theorem results from the above reasoning. Consider the simply connected covering surface of the ring and a topological transformation of this surface into itself corresponding to the given transformation of the ring. Assume that no point of the ring is invariant and construct by the method described in § 2 a line (b) on the covering surface, which does not intersect its image. Deviate the path by all the lines which correspond to a given cross-section of the ring. The transformation-field obtained in this way is periodic: it is a transformation-field on a certain covering surface of the ring composed of a finite number of sheets. From this transformation-field, a similar transformation-field in the ring-shaped plane surface can be obtained immediately.

5. - Consider a closed orientable surface F and a topological transformation T of the surface into itself, having a finite number of invariant points. We omit the invariant points and upon the open surface F_1 thus obtained we construct the simply connected covering surface $\overline{F}$. We map the surface $\overline{F}$ by the normal representation due to NIELSEN (Acta Math., vol. 50, p. 195) on the interior of the unit circle, considered as a hyperbolic plane. To the given transformation T corresponds in this way a topological transformation of the hyperbolic plane into itself, and to the group of the surface F_1 a discontinuous group of transformations Γ of the hyperbolic plane into itself. By the method of § 2 we construct a line (b) which does not intersect its image; at every instant we consider all the lines obtained from (b) by the transformations of the group Γ. We deviate the path (b) by its images under Γ; furthermore if the line (b) approaches one of the invariant points (on the boundary of the unit circle) we deviate the path in such a way that it remains in the neighborhood of this invariant point (cf. § 3). The construction leads either to *a transformation-field which is periodic and has for boundary two curves corresponding on the surface F to two closed curves,* or else to *a transformation-field bounded by two open curves, both converging in the two directions to two invariant points* (which may coincide). The result obtained in this way forms the content of the *general translation theorem of Brouwer* enounced by him in Mathem. Annalen (vol. 69, p. 178) but not yet proved. This theorem contains evidently as special cases the plane translation theorem of BROUWER and the last geometric theorem of POINCARÉ.

The details of the method outlined above have been developed in a recent paper of the author (Acta Lit. ac Scient., Szeged, vol. 4, p. 86); its applications to the general translation theorem of BROUWER and further problems of morphology will be developed in another paper of the author soon to be published.

C. KURATOWSKI (Lwów - Polonia)

UN SYSTÈME D'AXIOMES POUR LA TOPOLOGIE DE LA SURFACE DE LA SPHÈRE

§ 1. - Je considère un ensemble que j'appelle espace et dont les éléments sont dits des points. A chaque ensemble de points A correspond un ensemble de points $\overline{A}$ (que l'on peut, dans le cas d'espace ordinaire, identifier avec la « fermeture de A », c'est-à-dire avec l'ensemble composé des points de A et de leurs points d'accumulation).

Je dirai, pour abréger les notations et en me servant d'une terminologie habituellement admise, qu'un ensemble A est *fermé*, lorsque $A=\overline{A}$, qu'il est *ouvert*, lorsque son complémentaire est fermé, qu'il est *connexe*, lorsqu'il ne se laisse pas décomposer en deux ensembles non-vides M et N tels que $\overline{M}N+\overline{N}M=0$. Un ensemble fermé et connexe sera dit un *continu*; un ensemble ouvert et connexe sera dit une *région*.

J'admets les axiomes suivants (1):

I. $\overline{\overline{A+B}}=\overline{A}+\overline{B}$, quels que soient les ensembles des points A et B (2);

II. p et q étant deux points différents, il existe deux ensembles ouverts P et Q contenant ces points respectivement et n'ayant aucun point en commun (3);

III. il existe une suite dénombrable de régions différentes telle que tout ensemble ouvert s'obtient par la réunion d'un certain nombre de ces régions (4);

IV. chaque ensemble infini contient un sous-ensemble non-fermé (5);

V. C étant un continu dont le complémentaire est une région, C jouit de

---

(1) Pour d'autres ouvrages concernant l'axiomatisation de la topologie, on consultera: R. L. MOORE, Trans. Amer. Math. Soc., 17 (1916) et 20 (1919) ainsi que Proc. Nat. Acad. Sc., 2 (1916); J. GAWEHN, Math. Ann., 98 (1927).

(2) Cet axiome équivaut aux deux suivants: $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$ et $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ (axiomes I et IV de ma note de Fund. Math., III, p. 182).

(3) C'est l'axiome de la « séparation » dans sa forme la plus faible. Cf. l'axiome (D) de M. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914, p. 213 et P. URYSOHN, Math. Ann., 94, p. 265.

(4) Cet axiome est la réunion de deux axiomes: de l'axiome de « dénombrabilité » (cf. l'axiome F de M. HAUSDORFF, l. c., p. 263) et de l'axiome de « connexité locale » (« Zusammenhang im kleinen »).

(5) L'axiome IV équivaut à l'hypothèse de compacticité de l'espace considéré.

la propriété suivante: si l'on décompose C en deux continus, le produit de ces continus est un continu (1);

VI. le complémentaire d'un point est une région (2).

§ 2. - *La surface de la sphère satisfait aux axiomes* I-VI, lorsqu'on attribue le sens habituel au symbole $\overline{A}$.

La démonstration de ce fait pour le cas d'axiomes I-IV et VI est tout-à-fait élémentaire. Quant à l'axiome V, sa validité sur la surface de la sphère résulte directement du II^me théorème de JANISZEWSKI sur les coupures du plan (3).

Le système d'axiomes I-VI *est complet* (« catégorique ») dans ce sens que chaque espace qui lui satisfait est homéomorphe à la surface de la sphère.

Cette proposition est établie par moi dans une note qui paraîtra prochaînement dans « Fundamenta Mathematicae », XIII.

Le système d'axiomes I-VI *est irréductible*, c'est-à-dire que chaque axiome est indépendant du système de tous les autres.

Pour s'en convaincre, on envisagera les exemples suivants:

1°) $\overline{A}$ a le sens habituel sauf lorsque $A=O$; en outre: $\overline{O}=$ l'espace tout entier (=surface sphérique);

2°) l'espace est un ensemble dénombrable où l'on pose, pour A fini, $\overline{A}=A$; pour A infini, $\overline{A}=$ l'espace tout entier;

3°) l'espace se compose de trois parties: de la surface

$$z^2+\left(y-\sin\frac{\pi}{x}\right)^2=x^2, \qquad 0<x\leqslant 1,$$

du cercle $z^2+y^2\leqslant 1$, $x=1$ et du segment $(-1, 1)$ de l'axe Y; $\overline{A}$ a le sens habituel (de même dans les exemples suivants) (4);

---

(1) C'est-à-dire que C est « uni-cohérent ». La notion d'uni-cohérence correspond (dans le cas des régions), à peu près, à celle de « einfach zusammenhängendes Gebiet ». Cf. ma note de Fund. Math., XII, p. 24 et L. VIETORIS, Proc. Akad. Wet. Amsterdam, 29 (1926), p. 445.

(2) C'est-à-dire qu'aucun point « ne coupe » l'espace considéré.

(3) Prace Mat.-fiz., 26 (1913). Cf. S. STRASZEWICZ, Fund. Math., VII, p. 159. Il est à remarquer que si l'on décompose un espace métrique compact possédant la propriété V en sous-continus de façon semi-continue, l'hyper-espace la possède également (voir ma note de Fund. Math., XI, p. 181 ss.). De là résulte directement, en vertu du fait que les axiomes I-VI caractérisent la surface de la sphère, le théorème de M. R. L. MOORE (Trans. Amer. Math. Soc., 27, p. 416): si les sous-continus ne coupent pas l'espace et si cet espace est une surface de sphère, l'hyper-espace lui est homéomorphe.

(4) L'indépendance de l'axiome III résulte d'ailleurs du fait que c'est le seul axiome d'existence. Il est aussi à remarquer que le continu « indécomposable » de BROUWER-JANISZEWSKI (voir sa définition dans ma note de Fund. Math., III, p. 210) prouve son indépendance. L'exemple du texte a l'avantage d'être autant que possible rapproché de la surface de la sphère: il s'obtient de celle-ci par une transformation biunivoque qui — sauf aux points d'un certain arc — est bicontinue.

4°) plaçons sur la base supérieure d'un cube une suite de cônes à hauteur constante et dont les bases (situées sur le cube) convergent vers un point; la surface (non-compacte) de cette figure constitue l'espace considéré (1);

5°) le plan projectif (c'est-à-dire cercle où les points opposés du contour sont identifiés) (2);

6°) segment d'une droite (3).

---

(1) Comme on voit, cette surface s'obtient de celle de la sphère à l'aide d'une transformation biunivoque qui — sauf en un point — est bicontinue. Cet exemple est dû à M. KNASTER.

(2) La circonférence d'un cercle peut aussi servir pour prouver l'indépendance de l'axiome V. Le plan projectif a l'avantage d'être uni-cohérent.

(3) Plus généralement: une dendrite (courbe localement connexe ne renfermant aucune courbe fermée).

E. CARTAN (Paris - Francia)

SUR LES ESPACES CLOS ADMETTANT UN GROUPE TRANSITIF CLOS FINI ET CONTINU

Il existe une catégorie importante d'espaces clos, ce sont ceux à l'intérieur desquels il existe un groupe fini et continu transitif *clos*; nous les appellerons les espaces clos *isogènes*. Il est remarquable que dans un tel espace il est possible de déterminer par voie algébrique un système orthogonal complet de fonctions. Cette détermination sera exposée dans un mémoire plus étendu qui paraîtra dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (1). Elle repose sur une propriété fondamentale des espaces clos isogènes, à savoir qu'ils peuvent être doués d'une métrique riemmannienne (définie) partout régulière. C'est la démonstration de cette propriété que je me propose d'indiquer ici; je déterminerai en outre tous les espaces clos isogènes à $n \leqslant 4$ dimensions.

On considère souvent en géométrie des espaces clos isogènes; qu'il suffise de citer l'espace sphérique et l'espace projectif réel à un nombre quelconque de dimensions, l'espace projectif complexe, les différentes quadriques de l'espace projectif réel ou complexe, etc. Les espaces ou variétés qui viennent d'être indiqués admettent du reste des groupes de transformations transitifs *ouverts*, mais qui contiennent des sous-groupes *clos* transitifs.

I.

1. - J'ai démontré (2) que tout groupe fini et continu clos (3) G est semi-simple, ou bien se décompose (4) en un groupe semi-simple G_1 et un groupe clos commutatif G_2. Plaçons-nous dans le cas général. Soient X_1, X_2,...., X_ϱ les

(1) Ce mémoire a paru t. 53, 1929, p. 217-252.

(2) E. CARTAN: *Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne.* (Journal de Math. pures et appl., t. 8, 1929, p. 10-11).

(3) Un groupe G est clos lorsque tout ensemble infini de transformations de G admet au moins dans G un élément d'accumulation; cela signifie qu'il existe au moins une transformation S de G telle que tout voisinage de S contienne une infinité de transformations de l'ensemble.

(4) Cela signifie que toute transformation de G suffisamment voisine de la transformation identique peut, d'une manière et d'une seule, être regardée comme le produit d'une

transformations infinitésimales de G_1, et soient $X_{\varrho+1},\ldots, X_r$ celles de G_2; chacune de ces dernières est échangeable avec toutes les transformations du groupe total G.

Le groupe adjoint linéaire Γ_1 du groupe G_1 laisse, comme on sait, invariante une forme quadratique définie positive $\varphi(e_1, e_2,\ldots, e_\varrho)$, à savoir la somme changée de signe des carrés des racines de l'équation caractéristique de la transformation $e_1X_1+\ldots+e_\varrho X_\varrho$; on a du reste

$$\varphi(e_1, e_2,\ldots, e_\varrho)=-\sum_{i,j,\lambda,\mu}^{1,2,\ldots,\varrho} e_ie_jc_{i\lambda\mu}c_{j\mu\lambda}.$$

Soit maintenant $\psi(e_{\varrho+1},\ldots, e_r)$ une forme quadratique définie positive *arbitraire* des $r-\varrho$ variables $e_{\varrho+1},\ldots, e_r$. Le groupe adjoint Γ de G (qui se confond avec Γ_1) laisse donc invariante la forme quadratique définie positive [1]

$$\Phi(e_1, e_2,\ldots, e_r)=\varphi(e_1,\ldots, e_\varrho)+\psi(e_{\varrho+1},\ldots, e_r).$$

Nous conviendrons de dire que deux transformations infinitésimales $\sum_i e_iX_i$ et $\sum_i e_i'X_i$ de G sont *orthogonales* si l'on a

$$\sum_i e_i'\frac{\partial\Phi}{\partial e_i}=0.$$

2. - Supposons que le groupe clos G opère transitivement dans un espace clos à n dimensions E. Soit g le sous-groupe de G qui laisse invariant un point donné A de E. Les transformations de G qui amènent A en un point M de E sont alors de la forme Sg, c'est-à-dire s'obtiennent en effectuant d'abord une transformation arbitraire du sous-groupe g, puis une transformation particulière S amenant A en M. A chaque point de E est donc attaché d'une manière biunivoque un ensemble Sg de transformations de G. Nous pouvons dire encore que E est l'espace des *éléments* Sg.

Le sous-groupe g n'est pas quelconque. D'abord il ne contient aucun sous-groupe continu invariant dans G, sinon toutes les transformations de ce dernier sous-groupe laisseraient invariants tous les points de l'espace [2]. En second lieu le sous-groupe g est *clos*; en effet tout ensemble infini de transformation de g

---

transformation de G_1 et d'une transformation de G_2, ces deux transformations étant échangeables entre elles.

[1] Le groupe linéaire Γ étant clos laisse *a priori* invariante au moins une forme quadratique définie positive; le raisonnement du texte indique *effectivement* une telle forme.

[2] Il peut arriver que le sous-groupe g contienne un sous-groupe γ *proprement discontinu* invariant dans G; chaque opération de γ serait alors échangeable avec toutes les transsformations de G et laisserait invariants tous les points de l'espace. L'espace serait en réalité transformé par le groupe G/γ; mais ce groupe est infinitésimalement isomorphe à G.

admet, dans le groupe G *qui est clos*, au moins un élément d'accumulation S_0; la transformation S_0, qui peut être regardée comme limite de transformations de g, laisse invariant le point A; elle fait donc partie de g.

Réciproquement, soit g un sous-groupe clos de G ne contenant aucun sous-groupe continu invariant dans G. L'espace des *éléments* Sg [1] est clos, et le groupe G opère transitivement dans cet espace, l'élément Sg étant transformé, par la transformation S_0 de G, dans l'élément $(S_0S)g$. La transformation S_0 ne laisserait invariants tous les points de l'espace que si elle appartenait à g et était échangeable avec toutes les transformations de G.

Le sous-groupe g peut être continu, mais il peut aussi être *mixte*, c'est-à-dire formé de plusieurs familles continues distinctes. Le nombre de ces familles est en tous cas *fini*, sans quoi le groupe g ne pourrait être clos.

II.

3. - Nous allons, pour démontrer le théorème que nous avons en vue, nous placer dans les conditions un peu plus générales que les précédentes.

Soit G un groupe *clos* ou *ouvert* et g un de ses sous-groupes jouissant de deux propriétés suivantes:

1°) il est clos;

2°) il ne contient aucun sous-groupe continu invariant dans G.

Il existe alors un espace E transformé transitivement par G et tel que le plus grand sous-groupe de G laissant invariant un point particulier O de l'espace soit précisément g. Nous allons montrer qu'on peut douer l'espace E d'une métrique riemannienne partout régulière invariante par G.

En effet soit γ le sous-groupe du groupe linéaire adjoint de G qui correspond à g. Le groupe g étant clos, il en est de même *a fortiori* de γ. Par suite il existe au moins une forme quadratique définie positive en $e_1, e_2, \ldots, e_r$ invariante par γ. Nous pouvons supposer que cette forme est

$$\Phi(e) \equiv e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2$$

et que les transformations infinitésimales de g dérivent linéairement de $X_{n+1}, \ldots, X_r$.

4. - Cela posé, désignons par $e_1, e_2, \ldots, e_n$ des quantités infiniment petites et appliquons au point O de l'espace la transformation infinitésimale $e_1X_1 + \ldots + e_nX_n$; soit A le point obtenu. Nous conviendrons de définir la distance des deux points

---

[1] Pour que les éléments Sg engendrent une variété continue, il faut et il suffit que le sous-groupe g soit *fermé* dans G, c'est-à-dire qu'aucune suite infinie de transformations de g ne puisse tendre vers une transformation de G n'appartenant pas à g. Si G est clos, il faut et il suffit pour cela que g soit clos.

infiniment voisins O et A par l'expression $\sqrt{e_1^2+e_2^2+\ldots+e_n^2}$. Si l'on effectue une transformation R du sous-groupe g, le point A est transformé en A' et on peut passer de O à A' par la transformation infinitésimale transformée de $\sum e_iX_i$ par R. Comme l'opération du groupe adjoint qui correspond à R laisse invariante le groupe g, c'est-à-dire la famille linéaire des transformations $\lambda_{n+1}X_{n+1}+\ldots+\lambda_rX_r$, elle laisse aussi invariante la famille linéaire des transformations $\lambda_1X_1+\ldots+\lambda_nX_n$. La transformation infinitésimale transformée de $e_1X_1+\ldots+e_nX_n$ par R est donc de la forme $e_1'X_1+\ldots+e_n'X_n$, et l'on a

$$e_1'^2+e_2'^2+\ldots+e_n'^2=e_1^2+e_2^2+\ldots+e_n^2.$$

Cela montre que la distance OA se conserve par les transformations de g.

Soient maintenant M et N deux points infiniment voisins quelconques. Appliquons à ces deux points une quelconque S des transformations de G qui amènent M en O; soit A le point transformé de N; nous conviendrons de dire que la distance MN est égale à la distance OA. Une autre transformation S' amenant M en O aurait amené N en A', mais alors on pourrait passer de OA à OA' par la transformation $S'S^{-1}$ qui, laissant fixe le point O, appartient à g. On arrive donc toujours à la même valeur pour la distance MN.

La distance ainsi définie est invariante par G; la démonstration est immédiate.

5. - Analytiquement, si S_a et S_{a+da} sont deux transformations amenant O en deux points infiniment voisins M et N, la transformation infinitésimale $S_a^{-1}S_{a+da}$ amène N en un point A infiniment voisin de O tel que $MN=OA$. Soit $\sum_i \omega_iX_i$ le symbole de cette transformation infinitésimale. On voit immédiatement que l'on a, pour le carré de la distance MN,

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2.$$

On peut ajouter que les géodésiques de l'espace riemannien E sont données par les équations différentielles

$$\frac{du_i}{ds}=\sum_{j,k}^{1,2,\ldots,n} c_{ijk}u_ju_k \qquad (i=1,2,\ldots,n),$$

où l'on a posé

$$\omega_1=u_1ds, \quad \omega_2=u_2ds,\ldots, \quad \omega_nu_nds.$$

Dans le cas particulier où G *est clos* et où on a pris pour $\Phi(e)$ une forme quadratique définie positive invariante par le groupe adjoint de G, on a, si $\Phi(e)$ est réduite à une somme de carrés,

$$c_{ijk}+c_{ikj}=0,$$

de sorte que les équations des géodésiques s'obtiennent en donnant aux u_i des valeurs constantes (la somme de leurs carrés étant égale à 1). Il en résulte qu'on obtient les différentes géodésiques issues de O en appliquant à ce point

les transformations du groupe à un paramètre engendré par une transformation infinitésimale de la forme $e_1X_1 + ... + e_nX_n$. Plus généralement *les géodésiques passant par un point* M *sont les trajectoires des transformations infinitésimales orthogonales au sous-groupe de* G *qui laisse le point* M *invariant.*

III.

6. - Le résultat général démontré dans le paragraphe précédent admet une réciproque, qui est la suivante:

Si un espace de Riemann admet un groupe G *de transformations isométriques, le plus grand sous-groupe* g *de* G *laissant invariant un point de l'espace est clos.*

Soit O le point considéré. Toute transformation isométrique laissant fixe le point O est parfaitement déterminée par la rotation qu'elle effectue sur les vecteurs issus de O. Le groupe g est donc isomorphe holoédrique d'un groupe orthogonal $\overline{g}$. Le groupe orthogonal complet étant clos, on peut de tout ensemble infini de transformations de $\overline{g}$ déduire une suite infinie de transformations R_1, R_2,...., R_n,.... tendant vers une rotation déterminée R_0. Cette rotation, qui porte sur les vecteurs issus de O, définit une transformation ponctuelle déterminée $\mathfrak{T}$ dans l'espace: il suffit de faire correspondre à tout point M (suffisamment voisin de O) le point M' obtenu en considérant la géodésique OM, effectuant la rotation R_0 sur la direction en O de cette géodésique, construisant la géodésique tangente en O à la direction transformée et portant sur cette géodésique un arc OM' de même longueur que l'arc OM. Le point M' est la limite du point M_n transformé de M par l'isométrie qui laisse le point O fixe et qui effectue sur les vecteurs issus de O la rotation R_n. Il en résulte immédiatement que la transformation $\mathfrak{T}$ conserve la distance MN de deux points infiniment voisins.

Le raisonnement précédent, qu'on peut étendre à tous les points M de l'espace (1), montre que tout ensemble infini de transformations de g admet au moins un élément d'accumulation appartenant à g, autrement dit que g est clos. C. q. f. d.

7. - On peut démontrer par un raisonnement analogue que le plus grand groupe de transformations isométriques d'un espace de Riemann *clos*, à métrique partout régulière, est *clos*. Il en résulte en particulier que l'espace ne peut admettre qu'un nombre fini de familles continues distinctes d'isométries.

---

(1) Pour que le raisonnement puisse s'étendre en toute rigueur, il est nécessaire de supposer que l'espace de Riemann est *normal*, c'est-à-dire que tout ensemble infini *borné* de points admet au moins un point d'accumulation. (Voir: E. CARTAN, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*. Paris, Gauthier-Villars, 1928, p. 64-65).

IV.

8. - Les espaces clos isogènes transformés par un groupe clos *commutatif* sont faciles à déterminer; le sous-groupe g ici se réduit à la transformation identique et l'espace E n'est autre que l'espace des paramètres du groupe. Or, si n est le nombre des paramètres, toute transformation du groupe peut être représentée par un point de l'espace euclidien à n dimensions; seulement si G est clos, il existe dans cet espace un réseau de parallélépipèdes tel que deux points homologues par rapport à ce réseau représentent la même transformation. Autrement dit tout point de l'espace E peut être défini analytiquement par n nombres réels, définis chacun à un entier près. On peut encore établir une correspondance biunivoque continue entre les points de l'espace et les ensembles de n points pris sur n circonférences données (tore pour $n=2$).

9. - Convenons de dire d'une manière générale qu'un espace clos isogène E est *imprimitif* si l'on peut établir une correspondance biunivoque continue entre un point de E et un couple de points pris dans deux espaces clos isogènes E_1 et E_2. On dit alors que E est le produit topologique de E_1 et de E_2. Nous voyons que si G est commutatif, l'espace E est imprimitif, à moins que l'on n'ait $n=1$ (circonférence).

Nous allons montrer que si G se décompose en un groupe commutatif clos G_1 et un groupe semi-simple clos G_2, l'espace E, sous certaines restrictions, est imprimitif. Chaque transformation S de G peut se mettre, d'une manière et d'une seule, sous la forme S_1S_2, S_1 appartenant à G_1 et S_2 à G_2. Soit g le sous-groupe clos de G qui laisse invariant un point particulier de E. L'espace E est le lieu des *éléments* S_1S_2g. Or toute transformation R de g est le produit R_1R_2 de deux transformations appartenant respectivement à G_1 et G_2.

Les transformations R_1 engendrent un sous-groupe *clos* g_1 de G_1, *que nous supposerons connexe* (*non mixte*). Or, dans l'espace de G_1 doué de son réseau de parallélépipèdes, le sous-groupe clos g_1 est représenté par un réseau de variétés planes parallèles et on peut trouver, et même d'une infinité de manières, un sous-groupe connexe γ_1 de G_1 tel que toute transformation de G_1, regardée comme translation de l'espace, soit d'une manière et d'une seule, le produit d'une translation de γ_1 et d'une translation de g_1.

10. - Cela posé, parmi les transformations S_1R_1 entrant dans l'ensemble S_1S_2g qui correspond à un point de E, *une et une seule*, soit σ_1, appartient à γ_1. Quand S_1R_1 se confond avec σ_1, le second facteur S_2R_2 de S_1S_2g est de la forme $\overline{S}_2g_2'$, en désignant par $\overline{S}_2$ une transformation fixe de G_2 et par g_2' un sous-groupe déterminé de G_2, à savoir celui qui est formé des transformations R_1R_2 de g pour lesquelles $R_1=1$. On voit ainsi qu'on peut faire correspondre à l'élé-

ment Sg de E un couple de deux éléments, σ_1 d'une part, $\bar{S}_2 g_2'$ d'autre part. La correspondance est du reste biunivoque. Comme σ_1 engendre un espace clos isogène E_1 à groupe commutatif γ_1 et $\bar{S}_2 g_2'$ un espace clos isogène à groupe semi-simple G_2, cela montre bien que l'espace E est imprimitif.

11. - Si le sous-groupe g_1 est mixte, l'espace E peut être primitif, mais alors il peut être recouvert un nombre fini de fois par un espace imprimitif, produit topologique d'un espace admettant un groupe commutatif et d'un espace admettant un groupe semi-simple. On peut même toujours se ramener au cas où g_1 ne contient qu'un nombre fini d'opérations.

V.

12. - La détermination des espaces clos isogènes primitifs à groupe semi-simple est facilitée par les remarques suivantes.

Nous pouvons d'abord écarter le cas où G se décomposant en deux groupes simples ou semi-simples G_1 et G_2, la transformation R_1 de G_1, qui entre dans l'expression $R_1 R_2$ de la transformation la plus générale de g, coïnciderait successivement avec toutes les transformations de G_1. S'il en était ainsi en effet et si g_2' était le sous-groupe formé des transformations de g qui appartiennent à G_2 (c'est-à-dire pour lesquelles $R_1 = 1$), il y aurait une correspondance biunivoque et bicontinue entre les *éléments* $S_1 S_2 g$ et les *éléments* $S_2 g_2'$. Or ces derniers engendrent un espace clos isogène transformé par G_2.

13. - Une deuxième remarque est la suivante. Considérons un groupe semi-simple clos G d'ordre r et un de ses sous-groupes g d'ordre $r-n$. Conservons les hypothèses faites au N.° 3. Les constantes de structure c_{ijk} forment un trivecteur (1). Désignons par les lettres $i, j, \ldots$, les n premiers indices et par les lettres $\alpha, \beta, \ldots$, les $r-n$ derniers. Les constantes $c_{\alpha\beta i}$ sont nulles; par suite les crochets $(X_i X_\alpha)$ ne dépendent que de $X_1, \ldots, X_n$.

Prenons dans la transformation infinitésimale E_α du groupe adjoint:

$$E_\alpha = \sum_{i,\,k} c_{i\alpha k} e_i \frac{\partial f}{\partial e_k} + \sum_{\lambda,\,\mu} c_{\lambda\alpha\mu} e_\lambda \frac{\partial f}{\partial e_\mu},$$

la partie $\bar{E}_\alpha$ représentée par la première somme:

$$\bar{E}_\alpha = \sum_{i,\,k} c_{i\alpha k} e_i \frac{\partial f}{\partial e_k}.$$

---

(1) Cela signifie qu'elles se reproduisent, avec ou sans changement de signe, suivant qu'on effectue sur les indices une permutation impaire ou paire. Cette propriété tient à ce que le groupe adjoint est orthogonal.

Les $\overline{E}_\alpha$ engendrent un groupe orthogonal à n variables : *c'est celui qui indique comment le groupe* g *transforme entre eux les vecteurs issus du point invariant par* g.

Il est impossible qu'une combinaison linéaire des $\overline{E}_\alpha$ soit identiquement nulle; supposons, ce qui est permis, que les crochets

$$(X_i X_{n+1}),\ldots,\quad (X_i X_{n+h})$$

soient tous nuls quel que soit $i \leqslant n$, c'est-à-dire $\overline{E}_{n+1} = \ldots = \overline{E}_{n+h} = 0$, mais que $\overline{E}_{n+h+1},\ldots, \overline{E}_r$ soient linéairement indépendantes. Alors les crochets $(X_i(X_{n+1}X_\alpha))$ seront tous nuls, par suite les transformations $X_{n+1},\ldots, X_{n+h}$ engendreront un sous-groupe invariant de G, lequel serait contenu dans g, ce qui est impossible.

Il résulte de ce qui précède que $r-n$ est au plus égal à l'ordre du groupe orthogonal de n variables

$$r-n \leqslant \frac{n(n-1)}{2},$$

ou

$$\frac{n(n+1)}{2} \geqslant r. \tag{1}$$

Cette inégalité limite inférieurement n.

Si en particulier G est *simple*, aucun sous-groupe g de G ne contient de sous-groupe invariant dans G, par suite l'*inégalité* (1) *limite supérieurement l'indice* r−n *des sous-groupes d'un groupe simple clos.*

14. - Supposons maintenant que G se décompose en deux sous-groupes simples G_1 et G_2 d'ordres r_1 et r_2. Soit r_1-n_1 la limite supérieure de l'ordre d'un sous-groupe de G_1 et r_2-n_2 la limite supérieure de l'ordre d'un sous-groupe de G_2. L'ordre d'un sous-groupe g de G susceptible de donner naissance à un espace clos isogène sera, en tenant compte de la restriction faite au N.° 12, au plus égal à $r_1+r_2-n_1-n_2$ et par suite l'*espace sera au moins à* n_1+n_2 *dimensions.*

15. - Pour le groupe simple clos à 3 paramètres, on a $n \geqslant 2$; pour le groupe simple du type (A) d'ordre 8, et le groupe simple du type (B) d'ordre 10, on a $n \geqslant 4$. On a $n \geqslant 5$ pour les groupes simples d'ordre supérieur à 10.

Ces remarques permettent de limiter le choix du groupe clos G susceptible d'engendrer un espace clos isogène primitif à $n \leqslant 4$ dimensions. On pourra toujours se placer dans les cas suivants :

$n=2$, G est simple d'ordre 3 ;

$n=3$, G est simple d'ordre 3 ;

$n=4$, G est semi-simple, formé de deux groupes simples d'ordre 3, ou bien simple d'ordre 8, ou bien simple d'ordre 10.

Nous allons passer tous ces cas en revue.

VI.

16. - Les espace clos isogènes primitifs à 2 dimensions s'obtiennent en partant du groupe G unimodulaire de la forme d'Hermite définie positive $x\bar{x}+y\bar{y}$, et d'un sous-groupe g à 1 paramètre dont la partie continue peut être ramenée à la forme

$$x'=e^{ia}x, \quad y'=e^{-ia}y.$$

Si g est continu, l'espace E est la *sphère.* Si g est mixte, il faut ajouter une seconde famille de transformations

$$x'=e^{ia}y, \quad y'=-e^{-ia}x;$$

l'espace E est le *plan elliptique* ou *plan projectif réel.*

17. - Pour $n=3$, il faut partir du même groupe G et prendre pour g la transformation identique ou un groupe discontinu et fini de transformations de G. Ces groupes ont été déterminés par F. KLEIN dans ses *Leçons sur l'icosaèdre.* Les espaces E correspondants sont l'*espace sphérique* à 3 dimensions et un certain nombre d'autres espaces dont le groupe de connexion est précisément le groupe discontinu g. Si g est le groupe de l'icosaèdre, il existe dans l'espace 120 catégories de contours fermés irréductibles les uns aux autres par déformation continue (1).

18. - Pour $n=4$, il y a plusieurs cas à distinguer.

Si G est d'ordre 6, il se décompose dans le groupe unimodulaire de la forme d'Hermite $x\bar{x}+y\bar{y}$ et dans le groupe unimodulaire de la forme d'Hermite $u\bar{u}+v\bar{v}$. Le sous-groupe g est d'ordre 2; la partie continue de g qui contient la transformation identique peut être définie par les équations

$$x'=e^{ia}x, \quad y'=e^{-ia}y, \quad u'=e^{ib}u, \quad v'=e^{-ib}v.$$

Si g est continu, l'espace est imprimitif, chaque point étant identifiable à un couple de points pris sur deux sphères. Le seul espace primitif qu'on puisse obtenir se déduit du précédent en regardant deux couples de points comme identiques si les points du second sont les antipodes des points du premier (2).

Si G est simple d'ordre 8, c'est, par exemple, le groupe unimodulaire de la

---

(1) Le seul espace primitif à 3 dimensions dont le groupe ne soit pas semi-simple s'obtient en faisant le produit topologique d'une sphère et d'une circonférence et en regardant comme identiques deux points (M, N) et (M', N') lorsque M et M' sont diamètralement opposés sur la sphère, N et N' étant aussi diamètralement opposés sur la circonférence.

(2) Le groupe g contient alors deux familles continues, dont la seconde est

$$x'=e^{ia}y, \quad y'=-e^{-ia}x, \quad u'=e^{ib}v, \quad v'=-e^{-ib}u.$$

forme d'Hermite $x\bar{x}+y\bar{y}+z\bar{z}$. Il est de rang 2, et par suite on ne peut pas trouver 3 transformations infinitésimales indépendantes échangeables entre elles deux à deux (1). Tout sous-groupe g de G, se décomposant en groupes simples et groupes à un paramètre (2), il faut ici que g, qui est d'ordre 4, contienne un sous-groupe simple à 3 paramètres et que ce sous-groupe soit échangeable avec un sous-groupe à un paramètre de G. Or il n'y a que deux types de sous-groupes d'ordre 3 de G. Le premier a pour représentant le sous-groupe de G qui laisse invariante la variable z et par suite aussi la forme d'Hermite $x\bar{x}+y\bar{y}$; il existe un groupe à un paramètre échangeable avec lui, à savoir

$$x'=e^{ia}x, \quad y'=e^{ia}y, \quad z'=e^{-2ia}z.$$

Le sous-groupe à quatre paramètres ainsi obtenu est celui qui laisse invariant le point $x=y=0$ du plan projectif complexe; il donne naissance à un espace clos isogène qui n'est autre que le *plan projectif complexe*. Il n'existe pas de groupe mixte correspondant (3).

Le second type de sous-groupes simples d'ordre 3 de G a pour représentant le groupe orthogonal réel en x, y, z; mais il n'est échangeable avec aucun sous-groupe à un paramètre de G.

Au groupe simple G *d'ordre* 8 *ne correspond donc qu'un seul espace clos isogène à 4 dimensions, le plan projectif complexe.*

Si G est simple d'ordre 10, on obtient un espace de Riemann doué de la mobilité maxima: c'est l'*espace sphérique* ou l'espace elliptique (*espace projectif réel*) à 4 dimensions.

---

(1) Cela résulte d'un théorème général. Voir: E. CARTAN, *La géométrie des groupes simples.* (Annali di mat., 4e série, t. 4, 1926-27, p. 213).

(2) Cela tient (N.° 13) à ce que g est isomorphe holoédrique d'un groupe orthogonal. Or la propriété indiquée appartient à tous les groupes orthogonaux. Voir: E. CARTAN: *Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann* (Bull. Soc. Math. de France, t. 54, 1926, p. 239).

(3) Considéré avec sa métrique riemannienne, c'est le *plan hermitien elliptique*, qui est un des espaces de Riemann *symétriques*. Voir: E. CARTAN, *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple.* (Ann. Ec. Norm., 3e série, t. 44, 1927, p. 446).

E. CARTAN (Paris - Francia)

SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS NON HOLONOMES

1. - Considérons un système matériel dont la position dépend de n paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$; nous supposerons qu'il est assujetti à des liaisons non holonomes indépendantes du temps, définies par $n-m$ équations aux différentielles totales indépendantes

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{11}dq_1 + \ldots + a_{1n}dq_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-m,1}dq_1 + \ldots + a_{n-m,n}dq_n = 0, \end{cases}$$

n'admettant aucune combinaison intégrable.

Soit

$$(2) \qquad 2T = \sum_{i,j}^{1,\ldots,n} g_{ij}q_i'q_j'$$

la force vive du système, q_i' désignant la dérivée de q_i par rapport au temps.

Supposons le système soumis à des forces dont on connaisse le travail élémentaire $\sum_i P_i\delta q_i$ pour un déplacement élémentaire compatible avec les liaisons. Les équations différentielles du mouvement sont, comme il est bien connu,

$$(3) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = P_i + \sum_{\varrho=1}^{\varrho=n-m} \lambda_\varrho a_{\varrho i} \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

avec $n-m$ inconnues auxiliaires λ_ϱ; à ces équations doivent être jointes les équations (1).

2. - On peut interpréter les équations (2) de la manière suivante. Considérons un espace de Riemann à n dimensions défini par l'élément linéaire

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}dq_idq_j,$$

et un point matériel fictif de masse 1 mobile dans cet espace et soumis à une force $\vec{F}$ de composantes covariantes P_i. Les équations (3) expriment que la différence géométrique entre l'accélération du point et la force $\vec{F}$ est un vecteur normal à l'élément plan à m dimensions défini par les équations (1).

Attachons à chaque point M de l'espace de Riemann un repère rectangulaire (R) dont les m premiers axes soient tangents à l'élément plan (1), les $n-m$ derniers lui étant normaux. Désignons par

$$\omega_1,\ \omega_2,\ldots,\ \omega_n$$

les projections sur ces axes d'un déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ de l'origine M du repère (R), et par

$$\omega_{ij}=-\omega_{ji} \qquad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

les composantes de la rotation infinitésimale qui amène le repère (R) à être parallèle au repère (R') attaché au point M' infiniment voisin de M. Désignons enfin, à partir de maintenant, les indices 1, 2,...., m par les lettres i, j, k,....; les indices $m+1$,...., n par les lettres α, β, γ,....

Avec ces notations, la force vive du système devient

$$\frac{\omega_1^2+\omega_2^2+\ldots+\omega_n^2}{dt^2};$$

les quantités $p_1=\frac{\omega_1}{dt},\ldots,\ p_n=\frac{\omega_n}{dt}$ sont les *caractéristiques des vitesses* du système. Les équations (1) deviennent

$$(1') \qquad \omega_\alpha=0 \quad \text{ou} \quad p_\alpha=0.$$

Les équations (3) expriment que les m premières composantes de l'accélération sont égales aux composantes correspondantes de la force; les équations (1) expriment que les $n-m$ dernières composantes de la vitesse sont nulles.

3. - La représentation géométrique précédente, dans laquelle les différentes positions du système ont pour images des points d'un espace de Riemann, est essentiellement la seule qui ait été considérée jusqu'à présent (1). Elle serait complètement adéquate s'il n'existait que des liaisons holonomes; les équations (1), étant complètement intégrables, définiraient en effet une variété à m dimensions plongée dans l'espace de Riemann; cette variété, elle-même riemannienne, représenterait intégralement, abstraction faite de l'espace ambiant, le système donné.

Si les liaisons au contraire ne sont pas holonomes, il n'existe pas de variété à m dimensions définie par les équations (1); on est obligé de faire intervenir tout l'espace ambiant, si du moins, comme nous l'avons supposé, les équations (1) n'admettent aucune combinaison intégrable. Seulement *il est possible en général de modifier cet espace sans que les propriétés mécaniques du système soient altérées*; d'une manière plus précise, sans que les équations finies qui donnent

(1) Les espaces non holonomes de G. VRANCEANU (*Comptes Rendus*, 183, 1926, p. 852) ne sont autres que des espaces de Riemann dans lesquels on se donne un *connexe* défini par les équations non intégrables (1).

q_1, q_2,...., q_n en fonction de t dans les différents mouvements soient changées, et sans que la force vive du système dans ces mouvements soit altérée. Rien en effet n'empêche d'effectuer sur les ω_α une substitution linéaire arbitraire et même, dans certains cas, d'ajouter aux ω_i des combinaisons linéaires des ω_α, pourvu que les m premières composantes covariantes de l'accélération ne soient pas altérées par ces opérations.

Le vrai problème de la représentation géométrique d'un système matériel non holonome consiste donc dans la recherche d'un schéma géométrique lié d'une manière invariante aux propriétés mécaniques du système, telles qu'elles viennent d'être définies.

4. - Portons d'abord notre attention sur la force vive. Elle n'est pas altérée dans les mouvements réels du système si nous effectuons sur les formes ω_i et ω_α la substitution linéaire

$$(4)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}_\alpha = \sum_{\lambda=m+1}^{\lambda=n} A_{\alpha\lambda}\omega_\lambda, \\ \overline{\omega}_i = \sum_{k=1}^{k=m} C_{ik}\omega_k + \sum_{\lambda=m+1}^{\lambda=n} B_{i\lambda}\omega_\lambda, \end{cases}$$

les coefficients A et B étant regardés comme des paramètres arbitraires, les coefficients C étant ceux d'une substitution orthogonale arbitraire. L'étude des propriétés du système liées d'une manière invariante à l'expression de la force vive dans les mouvements compatibles avec les liaisons revient donc à la recherche des invariants d'un système d'expressions de Pfaff vis-à-vis d'un certain groupe de substitutions linéaires effectuées sur ces expressions: c'est un problème que j'ai traité dans toute sa généralité (1). La méthode consiste à former les covariants bilinéaires des formes $\overline{\omega}_i$ et $\overline{\omega}_\alpha$, qui dépendent maintenant de q_1, q_2,...., q_n et des paramètres auxiliaires introduits. Ces covariants sont de la forme

$$(5)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}_i' = \sum_{k=1}^{k=m} [\overline{\omega}_k\omega_{ki}] + \sum_{\lambda=m+1}^{\lambda=n} [\overline{\omega}_\lambda\omega_{\lambda i}], \\ \overline{\omega}_\alpha' = \sum_{i,j}^{1,\ldots,m} c_{ij\alpha}[\overline{\omega}_i\overline{\omega}_j] + \sum_{\lambda=m+1}^{\lambda=n} [\overline{\omega}_\lambda\omega_{\lambda\alpha}]. \end{cases}$$

Il s'introduit ainsi autant de nouvelles formes $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\omega_{\lambda i}$, $\omega_{\lambda\alpha}$, qu'il y a de paramètres auxiliaires nouveaux et ces nouvelles formes sont linéaires par rapport aux différentielles des variables et des nouveaux paramètres.

---

(1) E. CARTAN: *Les sous-groupes des groupes continus de transformations.* (Ann. Ec. Norm., 3e série, t. 25, 1908; chap. I, p. 60-83.

5. - Supposons maintenant que, les paramètres auxiliaires ayant des valeurs numériques données, on considère l'espace de Riemann défini par l'élément linéaire

$$ds^2 = \overline{\omega}_1^2 + \ldots + \overline{\omega}_m^2 + \overline{\omega}_{m+1}^2 + \ldots + \overline{\omega}_n^2.$$

Si l'on considère un point mobile dans cet espace et si l'on pose

$$\overline{\omega}_i = v_i dt, \qquad \overline{\omega}_a = 0,$$

l'accélération du point a pour m premières composantes

$$\gamma_i = \frac{dv_i}{dt} + \sum_k v_k \frac{\omega_{ki}}{dt}.$$

Il faut donc restreindre le choix des coefficients $B_{i\lambda}$ de la substitution linéaire (4) par la condition que, les coefficients C_{ik} étant fixés, les formes ω_{ij} restent les mêmes, *à des combinaisons linéaires près des* ω_a. On peut encore dire que la forme ω_i' ne peut s'altérer que de termes contenant en facteur l'une au moins des expressions ω_a. On doit donc avoir

$$\sum_\lambda B_{i\lambda} c_{jk\lambda} = 0 \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Nous allons, dans ce qui suit, nous borner au cas où les équations homogènes

$$\sum_\lambda c_{jk\lambda} u_\lambda = 0 \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, m)$$

aux $n-m$ *inconnues* $u_{m+1}, \ldots, u_n$ *n'admettent que la solution* $u_a = 0$. Cela revient à dire que le système *dérivé* du système (1) se réduit à zéro (1).

6. - Dans l'hypothèse précédente, on voit que les coefficients $B_{i\lambda}$ doivent être tous nuls. Autrement dit *les équations*

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \ldots, \quad \omega_m = 0 \tag{7}$$

sont liées d'une manière invariante aux propriétés mécaniques du système. Nous dirons qu'un déplacement élémentaire du système satisfaisant aux équations (7) est *normal aux liaisons*; les déplacements compatibles avec les liaisons

---

(1) Le système dérivé d'un système de Pfaff

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_2 = 0, \ldots, \quad \theta_r = 0$$

est formé des combinaisons linéaires

$$a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + \ldots + a_r\theta_r = 0$$

pour lesquelles la quantité

$$a_1\theta_1' + a_2\theta_2' + \ldots + a_r\theta_r'$$

est nulle en tenant compte du système donné. On est amené à former ce système dérivé quand on cherche les combinaisons intégrables du système donné.

seront dits encore *tangents aux liaisons*. Tout déplacement élémentaire virtuel se décompose en un déplacement tangent aux liaisons et en un déplacement normal aux liaisons.

Les $B_{i\lambda}$ étant nuls, les formules (5) sont à remplacer par les suivantes:

$$(8)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}_i' = \sum_k [\overline{\omega}_k \omega_{ki}] + \sum_{k,\lambda} \gamma_{k\lambda i} [\overline{\omega}_k \overline{\omega}_\lambda] + \sum_{\lambda,\mu} s_{\lambda\mu i} [\overline{\omega}_\lambda \overline{\omega}_\mu], \\ \overline{\omega}_\alpha' = \sum_{i,j} c_{ij\alpha} [\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j] + \sum_\lambda [\overline{\omega}_\lambda \omega_{\lambda\alpha}]. \end{cases}$$

Les formes $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ sont alors déterminées à des combinaisons linéaires près des $\overline{\omega}_\alpha$. On peut en profiter pour modifier les coefficients $\gamma_{k\lambda i}$. En effet si on ajoute à ω_{ij} la combinaison linéaire

$$\sum_\lambda p_{ij\lambda} \overline{\omega}_\lambda \qquad (p_{ij\lambda} = -p_{ji\lambda}),$$

le coefficient $\gamma_{k\lambda i}$ s'augmente de $p_{ki\lambda}$; d'autre part le coefficient $\gamma_{i\lambda k}$ s'augmente de $p_{ik\lambda} = -p_{ki\lambda}$; on peut donc s'arranger pour que ces deux coefficients deviennent égaux.

Les expressions $\overline{\omega}_i$ étant fixées, on peut donc choisir, d'une manière et d'une seule, les formes $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ de manière à satisfaire aux relations de symétrie

$$(9)\qquad \gamma_{j\lambda i} = \gamma_{ij\lambda}.$$

Quant aux coefficients $s_{\lambda\mu i}$, ils sont évidemment bien déterminés.

7. - Avant d'aller plus loin, nous pouvons donner des résultats précédents une interprétation géométrique remarquable, qui aura en outre l'avantage de mettre en évidence le caractère invariant des relations (9). La connaissance des formes $\overline{\omega}_i$ et ω_{ij} nous permet de *développer* l'espace à n dimensions de toutes les positions possibles du système sur un espace euclidien à m dimensions. Imaginons pour cela, dans l'espace des q_i, un chemin quelconque (C); attachons idéalement à chaque point de ce chemin un repère rectangulaire de l'espace euclidien à m dimensions défini par son origine P et ses m vecteurs unitaires $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$. Nous poserons par convention, en nous déplaçant le long de (C),

$$(10)\qquad \begin{cases} dP = \overline{\omega}_1 \mathbf{e}_1 + \overline{\omega}_2 \mathbf{e}_2 + \ldots + \overline{\omega}_m \mathbf{e}_m, \\ d\mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{k=m} \omega_{ik} \mathbf{e}_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

On voit que, dans le développement, à un déplacement élémentaire $(\overline{\omega}_i, \overline{\omega}_\alpha)$ correspond la seule composante $(\overline{\omega}_i)$ tangente aux liaisons, la composante normale étant laissée de côté. Quant aux formes ω_{ij}, elles définissent le transport par parallélisme, pour un déplacement élémentaire quelconque, compatible ou non avec les liaisons, d'un vecteur quelconque tangent aux liaisons.

Par le développement précédent, toute courbe (C) de l'espace des q_i se développe suivant une courbe déterminée de l'espace euclidien à m dimensions. En particulier *la trajectoire du système matériel, supposé soumis à des forces données de travail élémentaire* $\sum \overline{P}_i\overline{\omega}_i$, *se développe suivant la trajectoire d'un point matériel de masse* 1 *placé dans l'espace euclidien à m dimensions et soumis à la force de composantes* $\overline{P}_i$. Dans le cas où le système n'est soumis à aucune force, les mouvements spontanés du système se développent suivant des mouvements rectilignes et uniformes.

8. - On peut interpréter les coefficients $\gamma_{k\lambda i}$ et $s_{\lambda\mu i}$ des formules (8). Le développement de l'espace des q_i sur l'espace euclidien à m dimensions n'est pas *holonome*; il comporte en particulier une *torsion* définie par les coefficients $\gamma_{k\lambda i}$ et $s_{\lambda\mu i}$. Considérons dans l'espace des q_i un parallélogramme élémentaire construit sur deux vecteurs infiniment petits d'origine P. Si ces deux vecteurs sont tangents aux liaisons, le point P, après développement du contour du parallélogramme, revient à son point de départ: *les parallélogrammes tangents aux liaisons ne comportent donc pas de torsion.* Si le premier vecteur est tangent aux liaisons, avec les composantes $(a_i, 0)$, et si le second vecteur est normal aux liaisons, avec les composantes $(0, b_a)$, le point P subit, après description du cycle, la translation dont la $i^{\text{ième}}$ composante est

$$\sum_{k,\,\lambda} a_k b_\lambda \gamma_{k\lambda i};$$

on remarquera qu'étant donnés deux petits vecteurs δ_1, δ_2 tangents aux liaisons et un vecteur δ_n normal aux liaisons, le produit scalaire du vecteur δ_2 par le vecteur qui représente la torsion du cycle $[\delta_1, \delta_n]$ est égal au produit scalaire du vecteur δ_1 par le vecteur qui représente la torsion du cycle $[\delta_2, \delta_n]$; *on a ainsi une interprétation de la loi de symétrie* (9). Enfin la torsion d'un parallélogramme élémentaire normal aux liaisons est définie par les coefficients $s_{\lambda\mu i}$, qui ne satisfont *a priori* à aucune condition.

En même temps qu'une torsion, le développement comporte une *courbure,* dont il est inutile d'écrire l'expression analytique.

9. - *La connexion euclidienne* à m dimensions définie dans l'espace à n dimensions des q_i n'épuise pas toutes les propriétés mécaniques du système. Cet espace ne jouit jusqu'à présent de propriétés métriques que dans les directions tangentes aux liaisons. Nous pouvons aller plus loin et définir un second développement de l'espace des q_i sur un espace euclidien à $n-m$ dimensions, en portant cette fois notre attention sur les composantes *normales aux liaisons* des déplacements élémentaires.

Remarquons pour cela qu'à chaque indice a correspond un *bivecteur* c_{ija} de l'espace euclidien à m dimensions. Nous pouvons effectuer sur les $\overline{\omega}_a$ une

substitution linéaire telle que les $n-m$ bivecteurs correspondant aux $n-m$ indices $m+1,\ldots,n$, *bivecteurs qui sont linéairement indépendants*, soient tous de mesure égale à 1 et que leurs produits scalaires mutuels soient tous nuls, ce qui se traduit par les relations

$$(11)\qquad \begin{cases} \sum_{i,j} c_{ija}^2 = 1, \\ \sum_{i,j} c_{ija} c_{ij\beta} = 0 \end{cases} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Les $\overline{\omega}_a$ sont alors définies *à une substitution orthogonale près,* ce qui définit une métrique intrinsèque pour les déplacements normaux aux liaisons. Les dernières équations (8) prennent alors la forme

$$(8')\qquad \overline{\omega}_a' = \sum_{i,j} c_{ija}[\overline{\omega}_i \overline{\omega}_j] + \sum_{k,\lambda} \delta_{k\lambda a}[\overline{\omega}_k \overline{\omega}_\lambda] + \sum_{\lambda} [\overline{\omega}_\lambda \omega_{\lambda a}],$$

avec

$$\omega_{a\beta} = -\omega_{\beta a}.$$

Les quantités $\omega_{a\beta}$ ne sont pas déterminées sans ambiguité: on peut encore leur ajouter des combinaisons linéaires des $\overline{\omega}_i$ de telle sorte que les coefficients $\delta_{k\lambda a}$ satisfassent aux relations de symétrie

$$(12)\qquad \delta_{ka\beta} = \delta_{k\beta a}.$$

On peut maintenant développer l'espace des q_i sur un espace euclidien à $n-m$ dimensions par les formules

$$(13)\qquad \begin{cases} dQ = \sum_a \overline{\omega}_a \mathbf{e}_a, \\ d\mathbf{e}_a = \sum_\lambda \omega_{a\lambda} \mathbf{e}_\lambda. \end{cases}$$

Ce développement comporte une torsion nulle pour les cycles construits sur deux vecteurs normaux aux liaisons, et jouissant, pour les cycles construits sur un vecteur tangent et un vecteur normal aux liaisons, d'une loi de réciprocité analogue à celle qui a été indiquée pour le premier développement. Remarquons que tout mouvement du système compatible avec les liaisons se développe maintenant suivant un point.

Les mouvements spontanés du système sont caractérisés par la propriété de donner, dans le premier développement, un mouvement rectiligne et uniforme et de donner, dans le second développement, le repos.

Il est clair que *les deux connexions euclidiennes successivement définies épuisent toutes les propriétés mécaniques du système.*

10. - Un cas particulièrement intéressant est celui où le premier développement ne comporte pas de torsion, de manière qu'on ait

$$\overline{\omega}_i' = \sum_k [\overline{\omega}_k \omega_{ki}].$$

La forme $\overline{\omega}_1^2 + ... + \overline{\omega}_m^2$ peut alors s'exprimer au moyen de m variables seulement (qu'on peut supposer être $q_1, q_2, ..., q_m$) et de leurs différentielles. Si alors dans l'expression de la force vive du système on tient compte des équations des liaisons, on obtient une forme quadratique en $q_1', q_2', ..., q'_m$, avec des coefficients fonctions de $q_1, q_2, ..., q_m$. *On peut appliquer les équations de Lagrange ordinaires*; elles fournissent $q_1, q_2, ..., q_m$ en fonction de t, et l'intégration des équations (1) achève la détermination du mouvement.

Dans ce cas, les formes ω_{ij} ne dépendent que de $\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, ..., \overline{\omega}_m$; par un déplacement élémentaire normal aux liaisons, tout point P reste fixe dans le premier développement, *ainsi que tout vecteur issu de ce point.*

11. - Si le système dérivé de (1) n'est pas identiquement nul, le problème de la représentation géométrique du système matériel devient plus compliqué. On est obligé de distinguer différents cas, dans chacun desquels, par des conventions plus ou moins artificielles, on peut arriver à trouver un schéma géométrique approprié. Nous n'entreprendrons pas cette étude générale, dont l'intérêt géométrique s'évanouirait rapidement à mesure que les cas envisagés deviendraient plus compliqués.

Contentons-nous de citer un exemple du cas envisagé dans les pages précédentes; c'est celui d'une sphère homogène assujettie à rouler sans glisser sur un plan fixe. Soient ξ, η les composantes de la vitesse du centre de la sphère suivant deux directions rectangulaires fixes parallèles au plan; soient p, q, r les composantes de la rotation autour du centre, rapportées aux deux directions précédentes et à une troisième direction normale au plan. La liaison est ici définie par

$$\begin{cases} \xi - aq = 0, \\ \eta + ap = 0, \end{cases} \tag{13'}$$

a désignant le rayon de la sphère. La force vive est, en supposant la masse de la sphère égale à 1,

$$2T = \xi^2 + \eta^2 + k^2(p^2 + q^2 + r^2).$$

On a ici $m=3$, $n=5$. Le calcul donne [1], comme expressions possibles des formes $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$,

$$\begin{cases} \omega_1 = \dfrac{a\xi + k^2 q}{\sqrt{a^2 + k^2}}\, dt, \\ \omega_2 = \dfrac{a\eta - k^2 p}{\sqrt{a^2 + k^2}}\, dt, \\ \omega_3 = krdt; \end{cases} \tag{14}$$

[1] On arrive à ces formules, d'une part en remarquant que ξdt, ηdt sont des différentielles exactes; d'autre part en exprimant que les équations aux différentielles totales

$$dx = qdt \cdot z - rdt \cdot y, \quad dy = rdt \cdot x - pdt \cdot z, \quad dz = pdt \cdot y - qdt \cdot x$$

sont complètement intégrables, les fonctions inconnues étant x, y, z, les variables indépendantes étant les 5 paramètres de position de la sphère.

$$(15)\qquad \begin{cases} \omega_4 = \dfrac{k}{a}\sqrt{a^2+k^2}(\xi - aq)dt, \\ \omega_5 = \dfrac{k}{a}\sqrt{a^2+k^2}(\eta + ap)dt; \end{cases}$$

les seconds membres sont en réalité des combinaisons linéaires des différentielles des cinq paramètres dont dépend la position de la sphère.

Les formules (8) deviennent ici

$$(16)\qquad \begin{cases} \omega_1' = [\omega_2\omega_{21}] + [\omega_3\omega_{31}], \\ \omega_2' = [\omega_1\omega_{12}] + [\omega_3\omega_{32}], \\ \omega_3' = [\omega_1\omega_{13}] + [\omega_2\omega_{23}] + \dfrac{a^4}{k(a^2+k^2)^3}[\omega_4\omega_5], \\ \omega_4' = [\omega_2\omega_3] + [\omega_5\omega_{54}], \\ \omega_5' = [\omega_1\omega_3] + [\omega_4\omega_{45}], \end{cases}$$

avec

$$\omega_{23} = -\frac{k}{2(a^2+k^2)}\omega_1 + \frac{a^2}{(a^2+k^2)^2}\omega_4,$$
$$\omega_{31} = -\frac{k}{2(a^2+k^2)}\omega_2 + \frac{a^2}{(a^2+k^2)^2}\omega_5,$$
$$\omega_{12} = -\frac{k}{2(a^2+k^2)}\omega_3,$$
$$\omega_{45} = -\frac{a^2}{k(a^2+k^2)}\omega_3.$$

Le premier développement ne comporte de torsion que pour les cycles construits sur deux vecteurs normaux aux liaisons; le second développement ne comporte de torsion que pour les cycles construits sur deux vecteurs tangents aux liaisons.

L. BERWALD (Praha - Cecoslovacchia)

PARALLELÜBERTRAGUNG IN ALLGEMEINEN RÄUMEN

In Folgenden möchte ich mir erlauben, über einige meiner Arbeiten zur Theorie der allgemeinen Räume zu berichten. Dabei werde ich mich möglichst auf jene Begriffe und Fragen beschränken, die sich dem Mathematiker bei der Beschäftigung mit dem Gegenstande naturgemäss zuerst darbieten. Auf weitere Untersuchungen komme ich erst ganz am Schluss zu sprechen (1).

* * *

1. - In der Theorie der allgemeinen metrischen Räume handelt es sich in erster Linie darum, die Lehre von den Riemannschen Mannigfaltigkeiten auf den Fall zu verallgemeinern, dass eine beliebige Funktion der Koordinaten und ihrer Differentiale, die positiv und in den Differentialen positiv-homogen von erster Dimension ist, die Rolle des Bogenelementes spielt:

$$(1) \qquad ds = F(x^1, x^2, \ldots, x^n;\ dx^1, dx^2, \ldots, dx^n) \equiv F(x, dx) \equiv F\left(x, \frac{dx}{dt}\right) dt \quad (2).$$

Es liegt nahe, das Studium der Geometrie eines allgemeinen metrischen Raumes in ähnlicher Weise, wie es im besonderen Falle der Riemannschen Geometrie geschieht, auf das Zusammenwirken einer örtlichen *Metrik* und einer *Parallelübertragung* zurückzuführen. Die Metrik kommt in jedem einzelnen Punkte des Raumes dadurch zustande, dass die Grundfunktion (1) dort die Masszahlen aller geometrischen Grössen festlegt, wodurch die unmittelbare Umgebung jedes Punktes (x_0) im Unendlichkleinen zu einem MINKOWSKIschen Raum (3) $(ds = F(x_0, dx))$ wird. Durch die Parallelübertragung wird dann — roh

---

(1) Siehe auch das beigegebene Literaturverzeichnis (zitiert, l. c.).

(2) Das Folgende bezieht sich durchwegs auf einen Bereich, der gebildet wird von den reellen Punkten (x) eines abgeschlossenen Gebietes der Mannigfaltigkeit und allen Wertesystemen $\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \ldots, \frac{dx^n}{dt}$ mit Ausnahme des Wertesystemes 0, 0,...., 0. In diesem Bereich werden alle vorkommenden Funktionen als reell und regulär-analytisch in allen Argumenten vorausgesetzt.

(3) Unter einem MINKOWSKIschen Raum verstehen wir einen allgemeinen metrischen Raum, dessen Grundfunktion $F(x, dx)$ durch Koordinatentransformation auf die Gestalt $f(dx)$

gesprochen — zwischen diesen Stückchen von MINKOWSKIschen Räumen ein Zusammenhang hergestellt.

2. - Beginnen wir mit der *Metrik*. Es liegt nahe und ist als möglich schon von FINSLER (1) erkannt worden, den Tensor mit den Komponenten

$$g_{ik}(x, dx) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2(F^2)}{\partial dx^i \partial dx^k}, \qquad (i, k = 1, 2, ..., n) \tag{2}$$

als *metrischen Fundamentaltensor* einzuführen. Diese Komponenten sind in den dx positiv-homogen von nullter Dimension. (Wie beim Fundamentaltensor, lassen wir es auch sonst bei Tensoren zu, dass sie Funktionen eines Linienelementes (x, dx) sind).

Um die genaue Verallgemeinerung der positiv-definiten quadratischen Massbestimmung zu erhalten, setzen wir voraus, dass die quadratische Form

$$g_{ik}(x, dx)v^i v^k \quad (2) \tag{3}$$

der Hilfsveränderlichen v für alle betrachteten Wertesysteme (x, dx) *positiv-definit* ist. Man kann dann mittels des Systemes g_{ik} und des reziproken Systemes g^{ik} das Herunter- und Hinaufziehen der Zeiger in der üblichen Weise erklären (3).

Mittels des Fundamentaltensors definieren wir nun im Punkte (x) die *Masszahl l eines beliebigen Vektors* (ξ) in Bezug auf die willkürliche Richtung $dx^1 : dx^2 : .... dx^n$ in diesem Punkte oder — wie wir kürzer sagen wollen — *in Bezug auf das willkürliche Linienelement* (x, dx) durch

$$l = g_{ik}(x, dx)\xi^i \xi^k. \tag{4}$$

Entsprechend lässt sich auch der *Winkel zweier Vektoren in Bezug auf ein Linienelement* und der *Rauminhalt eines n-dimensionalen Gebietes in bezug auf ein Feld von Kurven* (im Sinne der Variationsrechnung) erklären (4).

---

gebracht werden kann, die nur von den Differentialen abhängt. Siehe H. MINKOWSKI, *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896, Kap. I.

(1) P. FINSLER, l. c.

(2) Ueber jeden Zeiger, der einmal oben und einmal unten auftritt, ist von 1 bis n zu summieren.

(3) Dazu braucht man nur die schwächere Voraussetzung zu machen, dass die Diskriminante g der quadratischen Form (3) für alle betrachteten Wertesysteme (x, dx) nicht verschwindet. Wegen $g = F^{n+1}F_1$, wo F_1 die aus der Variationsrechnung bekannte Funktion ist, besagt diese Voraussetzung, dass das Variationsproblem $\int F(x, dx) \to$ Extr. *regulär* ist.

(4) Dieser Inhaltsbegriff findet sich, für $n = 2$, wohl zuerst bei P. FUNK und L. BERWALD, l. c. Ein davon verschiedener tritt schon vorher, ebenfalls für $n = 2$, bei G. A. BLISS, l. c. auf.

3. - Jetzt zur *Parallelübertragung!* Hier hat zuerst Frl. NOETHER, in rein analytischer Form, eine für unsere Zwecke brauchbare Erklärung gegeben (1). Man kann zu dieser NOETHERschen Parallelübertragung folgendermassen gelangen (2):

Man führt als unabhängige Veränderliche den Bogen s ein, so dass, wenn Striche die Differentiation nach s anzeigen, identisch

$$F(x, x')=1 \tag{5}$$

gilt. Durch Auflösung der EULER-LAGRANGEschen Differentialgleichungen

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial(F^2)}{\partial x'^i}-\frac{\partial(F^2)}{\partial x^i}=0, \quad [i=1, 2,...., n;\ F\equiv F(x, x')] \tag{6}$$

nach den zweiten Ableitungen x'' — die wegen $g\equiv|g_{ik}|+0$ möglich ist — erhält man dann Gleichungen der Gestalt

$$x''^k+2\Gamma^k(x, x')=0, \qquad (k=1, 2,...., n), \tag{7}$$

in denen die Γ^k Funktionen bezeichnen, die in den x' positiv-homogen von zweiter Dimension sind. Die zweiten Ableitungen der Γ^k nach den x' sind die *Komponenten der Parallelübertragung*

$$\Gamma^k_{lm}(x, x')=\Gamma^k_{ml}(x, x')=\frac{\partial^2\Gamma^k}{\partial x'^l\partial x'^m}. \tag{8}$$

Sie sind in den x' wieder positiv-homogen von nullter Dimension.

Wenn nicht der besondere Fall eintritt, dass die Komponenten der Parallelübertragung von den x' unabhängig sind, so kann die Parallelübertragung von einem beliebigen Punkte (x) des Raumes nach irgend einem Nachbarpunkte erst erklärt werden, nachdem man dem Punkte (x) eine *ausgezeichnete Richtung* $dx^1 : dx^2 : .... : dx^n$ zugeordnet hat. *Wir definieren als Parallelübertragung eines Vektors* (ξ) *im Punkte* (x) *längs des willkürlichen Linienelementes* $(x, \delta x)$ *in Bezug auf die ausgezeichnete Richtung* (dx) *den Uebergang vom Vektor mit den Komponenten* ξ^i *im Punkte* (x) *zum Vektor mit den Komponenten* $\xi^i+\delta\xi^i$ *im Punkte* $(x+\delta x)$, *wenn*

$$\delta\xi^i=-\Gamma^i_{kl}(x, dx)\xi^k\delta x^l. \tag{9}$$

Zu dieser Definition der Parallelübertragung tritt noch eine Festsetzung darüber, welchen Funktionswert man einer beliebigen Funktion des Linienelementes (x, dx) in einem willkürlichen Nachbarpunkte $(x+\delta x)$ des Punktes (x) beizulegen hat. *Als Funktionswert* $\varphi(x+\delta x, dx+\delta dx)$ *erklären wir den Wert, den man erhält,*

---

(1) E. NOETHER, l. c. - Einer anderen Parallelübertragung, die vom Kurvenelement zweiter Ordnung abhängt, bedienen sich J. L. SYNGE, l. c. und J. H. TAYLOR, l. c.

(2) L. BERWALD, l. c., Jahresber. Deutsche Math. Ver., Lincei Rend. 1927.

wenn man den Vektor (dx) *vom Punkte* (x) *nach dem Punkte* $(x+\delta x)$ *in Bezug auf seine eigene Richtung als ausgezeichnete Richtung parallel überträgt;* also bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung den Wert

$$(10) \qquad \varphi(x+\delta x,\ dx+\delta dx)=\varphi(x,\ dx)+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}-\frac{\partial\varphi}{\partial dx^k}\Gamma^k_{il}dx^l\right)\delta x^i.$$

4. - Nunmehr gelangt man durch parallele Herumführung eines Vektors (ξ) um ein infinitesimales Parallelogramm in der bekannten Weise zum *Krümmungstensor* mit den Komponenten

$$(11) \quad K^i_{k\,.\,lm}(x,\ dx)=\left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial dx^r}\Gamma^r_{mn}dx^n\right)-\left(\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{km}}{\partial dx^r}\Gamma^r_{ln}dx^n\right)+\Gamma^r_{kl}\Gamma^i_{rm}-\Gamma^r_{km}\Gamma^i_{rl}.$$

Weiter lässt sich das *Analogon des Riemannschen Krümmungsmasses* bilden und dafür eine der Parallelogrammoid-Definition von LEVI-CIVITA [1] entsprechende geometrische Erklärung geben [2]. Mittels dieser Krümmungsgrössen kann man auch die neuerdings von LEVI-CIVITA [3] aufgestellten *Differentialgleichungen der geodätischen Abweichung* unmittelbar auf allgemeine metrische Räume übertragen [4].

Die eingeführte Parallelübertragung ermöglicht es ferner, eine *Verallgemeinerung des absoluten Differentialkalküls* zu entwickeln, die dem vorliegenden Falle angepasst ist [5]. Der Hauptunterschied gegenüber dem gewöhnlichen RICCIkalkül entspringt daraus, dass jetzt die Tensoren gleichfalls Funktionen der $(x,\ dx)$ sind. Das hat (nach (10)) zur Folge, dass in den kovarianten Ableitungen $\xi^{(i)}_{(k)/l}$ der Komponenten $\xi^{(i)}_{(k)}$ eines Tensors (ξ) noch ein Zusatzglied $-\frac{\partial\xi^{(i)}_{(k)}}{\partial dx^r}\Gamma^r_{lm}dx^m$ auftritt und dass es ausser der kovarianten Differentiation im Sinne von RICCI noch eine zweite invariante Differentiation gibt, nämlich die gewöhnliche partielle Ableitung nach den dx^i. Dementsprechend gelten für die Vertauschung der zweiten invarianten Ableitungen zweierlei Vertauschungsformeln $\left(\text{abgesehen von der trivialen } \frac{\partial^2}{\partial dx^i\partial dx^k}=\frac{\partial^2}{\partial dx^k\partial dx^i}\right)$, in deren einer der Krümmungstensor auftritt, während in die andere der Tensor

$$(12) \qquad \Gamma^i_{\cdot\,klm}(x,\ dx)=\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial dx^m}=\frac{\partial^3\Gamma^i}{\partial dx^k\partial dx^l\partial dx^m}, \qquad [\Gamma^i=\Gamma^i(x,\ dx)]$$

eingeht, der in der ganzen Theorie eine wichtige Rolle spielt.

---

(1) T. LEVI-CIVITA, Rend. Circ. Mat. Palermo, 42 (1917), pp. 173-205, bes. pp. 198 ff.

(2) L. BERWALD, l. c., Math. Zeitschr.

(3) T. LEVI-CIVITA, Boll. Unione Mat. Ital., 5 (1926), pp. 60-64; Math. Ann., 97 (1927), pp. 291-320.

(4) L. BERWALD, l. c., Lincei Rend., 1928.

(5) L. BERWALD, l. c., Math. Zeitschr.; Journ. f. Math.

5. - Wie verhält sich nun die Masszahl eines Vektors bei unserer Parallelübertragung?

Die Masszahl eines beliebigen Vektors in Bezug auf das willkürliche Linienelement (x, dx) bleibt bei paralleler Uebertragung des Vektors in Bezug auf die Richtung (dx) als ausgezeichnete Richtung nur dann ungeändert, wenn diese in der Richtung (dx) selbst erfolgt. Im andern Falle ist sie im allgemeinen [1]) nicht invariant. Es gilt also nicht mehr das Lemma von RICCI. Vielmehr erhält man für die kovarianten Ableitungen der Komponenten des Fundamentaltensors

$$g_{ik/l} = g_{pq} dx^p \Gamma^q_{\cdot ikl} \quad [2]). \tag{13}$$

Die Masszahl eines Vektors erfährt demnach bei paralleler Herumführung um ein infinitesimales Parallelogramm im allgemeinen eine Aenderung, d. h. es existiert eine *Streckenkrümmung*. Für die Komponenten des *Tensors der Streckenkrümmung* ergibt sich

$$S_{iklm} \equiv g_{ik/ml} - g_{ik/lm} = -g_{pq} dx^p \frac{\partial K^q_{i\cdot lm}}{\partial dx^k}. \tag{14}$$

6. - Gemäss dem soeben Auseinandergesetzten sind als die geometrisch einfachsten *Klassen von allgemeinen metrischen Räumen* folgende anzusehen, von denen jede alle vorhergehenden enthält:

I. Die *Riemannschen Räume*, gekennzeichnet durch

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial dx^l} = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, \ldots, n). \tag{15}$$

II. Die *affinzusammenhängenden Räume*, d. h. die allgemeinen metrischen Räume, für welche die Komponenten der Parallelübertragung nur vom Orte abhängen. Sie lassen sich durch jedes der beiden äquivalenten Gleichungssysteme

$$\Gamma^i_{\cdot klm} = 0 \tag{16a}$$

oder

$$\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial dx^l}\right)_{/m} = 0, \qquad (i, k, l, m = 1, 2, \ldots, n) \tag{16b}$$

kennzeichnen. (In (16*b*) bedeutet $_{/m}$ kovariante Ableitung nach dem Index m).

III. Die *Landsbergschen Räume*, d. s. jene allgemeinen metrischen Räume, in denen das Lemma von RICCI gilt. Sie sind durch das identische Verschwinden der rechten Seite von (13) charakterisiert. Ich habe diesen Räumen den Namen von LANDSBERG beigelegt, weil sie für $n=2$ identisch sind mit den von diesem

---

[1]) D. h. hier (weiter unten), wenn der allgemeine Raum nicht zur Klasse III (IV) in Nr. 6 gehört.

[2]) Hier und im Folgenden sind die Argumente x, dx unterdrückt.

Mathematiker untersuchten allgemeinen Räumen, in denen es ein Gegenstück zum *Gauss-Bonnetschen Integralsatz* der Flächentheorie gibt (1).

IV. Die *Räume ohne Streckenkrümmung*, gekennzeichnet durch das identische Verschwinden der rechten Seite von (14). Für $n=2$ fallen sie mit den allgemeinen Räumen zusammen, in denen eine *Totalkrümmung* (curvatura integra) $\iint K \cdot \sqrt{g_{11}g_{22}-(g_{12})^2}dx^1dx^2$ existiert, d. h. der Integrand eine blosse Funktion des Ortes ist. K bedeutet dabei den UNDERHILLschen Krümmungsskalar (2).

7. - Von diesen vier Klassen von allgemeinen Räumen bietet die zweite als die den RIEMANNschen Räumen am nächsten stehende besonderes Interesse. Es mögen daher einige Angaben über sie folgen.

Zunächst können die Minkowskischen Räume charakterisiert werden als die affinzusammenhängenden Räume, deren Krümmungstensor identisch Null ist (3). Diese einfache Kennzeichnung legt die Frage nahe, ob man nicht auch *alle Nicht-Minkowskischen affinzusammenhängenden Räume* bestimmen kann, zum Mindesten für die niedrigsten Dimensionenzahlen.

Für $n=2$ ist diese Frage zu bejahen. Anstatt hier die Lösung in Formeln anzuschreiben (4), möchte ich lieber angeben, was ihr mathematisch zugrunde liegt. Dazu erinnere ich an den Begriff der *Indikatrix*. Als Indikatrix eines beliebigen Punktes (x_0, y_0) eines allgemeinen Raumes von zwei Dimensionen

$$ds = F(x, y; dx, dy) \tag{17}$$

bezeichnet man die Kurve

$$F(x_0, y_0; X, Y) = 1 \tag{18}$$

in einer Hilfsebene, in der X, Y kartesische Koordinaten sind.

Die Nicht-Minkowskischen affinzusammenhängenden Räume von zwei Dimensionen sind nun dadurch gekennzeichnet, dass

1. *Der Krümmungsskalar von Underhill nicht identisch Null ist,* und

2. *Die Indikatrix jedes beliebigen Punktes des Raumes Bahnkurve der Gruppe G_4 der homogenen Affinitäten der XY-Ebene ist*; oder, was auf dasselbe herauskommt, Extremale des Variationsproblemes des « Bogens » dieser Gruppe (5). Und zwar können für einen und denselben derartigen affinzusam-

---

(1) G. LANDSBERG, l. c. Vgl. hierzu und zum Folgenden L. BERWALD, l. c., Journ. f. Math.

(2) A. L. UNDERHILL, l. c.

(3) L. BERWALD, l. c., Math. Zeitschr.

(4) L. BERWALD, l. c., Journ. f. Math.

(5) $\sigma = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\dot{\xi}\,\ddot{\eta} - \dot{\eta}\,\ddot{\xi}}{\dot{\xi}\,\eta - \eta\,\dot{\xi}} \right)^{\frac{1}{2}} dt \to \text{Extr.}$; $\left(\dot{\xi} = \frac{d\xi}{dt},\ \ddot{\xi} = \frac{d^2\xi}{dt^2},\ \text{u. s. w.} \right)$. Die entsprechende Veränderliche für den allgemeinen Raum ist der *Winkel von Landsberg* (LANDSBERG, l. c.). Der

menhängenden Raum die Indikatrizen aller Punkte durch Transformationen aus G_4 in einander übergeführt werden.

Die ausgezeichnete Stellung der zu dieser Familie gehörigen RIEMANNschen Räume spricht sich darin aus, dass ihre Indikatrizen — die Ellipsen mit dem Anfangspunkt der XY-Ebene als Mittelpunkt — die einzigen geschlossenen Bahnkurven von G_4 sind.

* * *

Das Vorgetragene scheint mir typisch zu sein für die verschiedenen Fragestellungen, die in der Theorie der allgemeinen Räume auftreten. In erster Reihe steht natürlich das Problem, die grundlegenden Begriffe Metrik und Parallelismus in geeigneter Weise zu definieren. Hier sind ausser dem erörterten Begriffe des allgemeinen metrischen Raumes etwa noch zu nennen gewisse Begriffsbildungen metrischer Natur von FINSLER (1), ferner die schon erwähnte SYNGE-TAYLORsche Parallelübertragung (2), schliesslich die unabhängig von VEBLEN und BERWALD (3) angegebene Verallgemeinerung des affinzusammenhängenden Raumes von WEYL. Eine weitere Frage ist die, wie weit sich die bekannten Sätze der Theorie der RIEMANNschen und affinzusammenhängenden Mannigfaltigkeiten im Sinne von WEYL auf die entsprechenden allgemeinen Räume übertragen lassen. In dieser Richtung bewegen sich namentlich die Arbeiten von FINSLER und TAYLOR über Kurven und Unterräume (4), von KNEBELMAN über Gruppen von Bewegungen und Kollineationen (5) und von DOUGLAS über die projektive Theorie der allgemeinen Räume (6). Endlich kann man sich die Aufgabe stellen, gewisse Klassen von allgemeinen Räumen durch Eigenschaften zu kennzeichnen, die gegenüber Punkttransformationen invariant sind (gegebenenfalls unter Hinzunahme weiterer Forderungen), oder die verwandte, sämtliche unter eine und dieselbe Klasse fallenden allgemeinen Räume wirklich zu bestimmen. Hierher gehört (ausser dem in Nr. 6 und 7 Vorgetragenen) die erst auszugsweise veröffentlichte Kennzeichnung der zweidimensionalen HILBERTschen Geometrie (7)

Differentialinvariante niedrigster Ordnung von G_4 entspricht der von mir eingeführte *Hauptskalar* (l. c., Journ. f. Math.).

(1) P. FINSLER, l. c.

(2) J. L. SYNGE, l. c.; J. H. TAYLOR, l. c., Trans. Amer. Math. Soc.

(3) O. VEBLEN, Bull. Amer. Math. Soc., 31 (1925), pp. 121-141, bes. 129 f.; L. BERWALD, l. c., Jahresber. Deutsche Math. Ver.

(4) P. FINSLER, l. c., J. H. TAYLOR, l. c., Trans. Amer. Math. Soc.; Annals of Math.

(5) M. S. KNEBELMAN, l. c.

(6) J. DOUGLAS, l. c. (Von dieser Arbeit kenne ich bisher nur die kurze Inhaltsangabe in L. P. EISENHART, *Non-Riemannian Geometry*, New York, 1927, p. V).

(7) D. HILBERT, Math. Ann., 46 (1895), pp. 91-96; auch Grundlagen der Geometrie, Anhang I.

durch FUNK (1). Diese Kennzeichnung, die sich übrigens auf den Fall beliebiger Dimensionenzahl übertragen lässt, weist darauf hin, dass ausser den oben (in Nr. 6) angeführten Klassen von allgemeinen Räumen auch den *allgemeinen Räumen konstanter Krümmung* besondere Wichtigkeit zukommt.

---

(1) P. FUNK, l. c., Jahresber. Deutsche Math. Ver.

LITERATURVERZEICHNIS

A) *Zweidimensionale allgemeine Räume.*

G. LANDSBERG, Jahresber. Deutsche Math. Ver., 16 (1907), pp. 36-46, 547-551; Math. Ann., 65 (1908), pp. 313-349.

A. L. UNDERHILL, Trans. Amer. Math. Soc., 9 (1908), pp. 316-338.

G. A. BLISS, Amer. Journ. of Math., 37 (1915), pp. 1-18. Vgl. auch Trans. Amer. Math. Soc., 7 (1906), 184-196.

P. FUNK, Math. Zeitschr., 3 (1919), pp. 87-92. Siehe auch Jahresber. Deutsche Math. Ver. 37 (1928), 2. Abt., p. 8.

P. FUNK und L. BERWALD, Lotos, Prag, 67-68 (1919-20), pp. 45-49.

A. MACCONE, Lincei Rend. (5), 32, I (1923), pp. 327-331. Ein Teil der Resultate von MACCONE findet sich schon bei E. NOHEL, Sitzungsber. Ak. Wien, 123 (1914), Abt. II, pp. 2085-2115.

L. BERWALD, Math Zeitschr., 25 (1926), pp. 40-73 (§ 5); Lotos, Prag, 74 (1926), pp. 43-52; Journal f. Math., 156 (1927), pp. 191-222.

B) *n-dimensionale allgemeine Räume (n beliebig).*

P. FINSLER, Diss. Göttingen, 1918.

E. NOETHER, Göttinger Nachr., 1918, pp. 37-44; vgl. auch Jahresber. Deutsche Math. Ver., 32 (1923), pp. 177-184, bes. 182 ff.

L. BERWALD, Lotos, Prag, 67-68 (1919-20), pp. 52-56; Jahresber. Deutsche Math. Ver., 34 (1925), pp. 213-220; Math. Zeitschr., 25 (1926), pp. 40-73; Journal f. Math., 156 (1927); pp. 191-222 (§ 2); Lincei Rend. (6), 5 (1927), pp. 763-768; (6), 7, (1928), pp. 301-306.

J. L. SYNGE, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925), pp. 61-67.

J. H. TAYLOR, Trans. Amer. Math. Soc., 27 (1925), pp. 246-264; Bull. Amer. Math. Soc., 31 (1925), pp. 257-262; Annals of Math. (2), 28 (1927), pp. 620-628.

M. S. KNEBELMAN, Proc. National Acad. of Sc., 13 (1927), pp. 607-611.

J. DOUGLAS, Annals of Math. (2), 29 (1928), pp. 143-168.

C) *Einige Arbeiten verwandten Inhaltes.*

TH. DE DONDER, Comptes Rendus, 155 (1912), pp. 577-579 (Invarianten der Variationsrechnung).

T. LEVI-CIVITA, Revista Mat. Hisp.-Amer., 5 (1923), pp. 165-176 (Allgemeine zweite kovariante Differentiale).

W. WIRTINGER, Monatsh. f. Math. u. Phys., 32 (1923), p. 1-14. (Allgemeine Massbestimmungen, in denen die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden).

E. CARTAN, Bull. Soc. Math. France, 52 (1924), pp. 205-241. (Mannigfaltigkeiten von Linienelementen der Ebene mit normalem projektiven Zusammenhang).

R. BALDUS (Karlsruhe - Germania)

ZUR AXIOMATIK DER GEOMETRIE II
VEREINFACHUNGEN DES ARCHIMEDISCHEN UND DES CANTORSCHEN AXIOMS

1. - D. HILBERT gibt in seinen bekannten « Grundlagen der Geometrie » von der 2. Auflage an folgende 5 Axiomgruppen: Axiome I. der Verknüpfung; II. der Anordnung; III. der Kongruenz; IV. Parallelenaxiom; V. Axiome der Stetigkeit. Dabei besteht diese letzte Gruppe aus dem Archimedischen Axiom (besser Axiom des Eudoxus) und aus dem Hilbertschen Axiom der Vollständigkeit.

Das Vollständigkeitsaxiom ist dabei so formuliert, dass es alle vorhergehenden Axiome voraussetzt, daher ist dieses Axiomensystem der Euklidischen Geometrie nicht so aufgebaut, dass es zunächst die absolute Geometrie und aus dieser dann die Euklidische oder (bei Wahl eines anderen Parallelenaxioms) die hyperbolische Geometrie liefert.

2. - Das kann man in naheliegender Weise erreichen, indem man die Axiomgruppen I-III beibehält, in der IV. Axiomgruppe das Archimedische und das Cantorsche Axiom einführt und dem so gewonnenen Axiomensystem der absoluten Geometrie V. das Euklidische Parallelenaxiom anfügt. Bei dieser Anordnung kann man das Euklidische Parallelenaxiom in der engeren Fassung aussprechen: « Es gibt eine Gerade a und einen Punkt A ausserhalb a von folgender Eigenschaft: in der Ebene (A, a) trifft höchstens eine Gerade durch A die Gerade a nicht ». Die hyperbolische Geometrie erhält man dann, indem man an Stelle dieses Euklidischen Parallelenaxioms das hyperbolische Parallelenaxiom setzt: « Es gibt eine Gerade a und einen Punkt A ausserhalb a von folgender Eigenschaft: in der Ebene (A, a) treffen (mindestens) zwei Gerade durch A die Gerade a nicht » (1).

(1) In dem Buche « *Nichteuklidische Geometrie* », Sammlung Göschen, 1927, bin ich so vorgegangen, unter gleichzeitigem Nachweis, dass diese eng gefassten Formen der beiden Parallelenaxiome ausreichen. Diese Formulierungen gewähren den Vorteil, dass aus ihnen ohne weiteres hervorgeht, dass man die absolute Geometrie durch keine andere Parallelenaussage als die der Euklidischen oder der hyperbolischen Geometrie fortsetzen kann (nicht etwa in einer gemischt Euklidisch-hyperbolischen), eine Tatsache, zu deren Nachweis man sonst die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck benötigt.

3. - Dasselbe kann man, wenn man sich in den Stetigkeitsaxiomen enger an Hilberts Axiomensystem anschliessen will, noch in anderer Weise erreichen: man kann die Hilbertsche Fassung des Vollständigkeitsaxioms (1) erheblich verschärfen, da man nur die Vollständigkeit der Punkte einer einzigen Geraden zu fordern und dabei lediglich die Gültigkeit der Axiome I; II; III, 1-3; V, 1 vorauszusetzen braucht (2). Da demnach das so formulierte Vollständigkeitsaxiom das Euklidische Parallelenaxiom nicht mehr voraussetzt, kann es vor dieses gezogen werden und in dem in N. 2 genannten Aufbau der absoluten und anschliessend der Euklidischen oder hyperbolischen Geometrie an die Stelle des Cantorschen Axioms treten.

Wenn wir dies im folgenden trotzdem nicht tun, sondern das Cantorsche Axiom beibehalten, so geschieht dies deshalb, weil man ernstliche axiomatische Einwände gegen das Vollständigkeitsaxiom erheben kann, von denen das Cantorsche Axiom nicht berührt wird (3).

Für das Cantorsche Axiom wählen wir die mit bekannten Formulierungen (4) sachlich übereinstimmende und sehr einfache Form

(A) **Cantorsches Axiom.** - *Liegt in einer Geraden eine unendliche Folge von Strecken derart, dass jede Strecke ihre Endpunkte innerhalb der vorhergehenden Strecke hat und dass die Längen dieser Strecken gegen Null konvergieren, dann gibt es einen Punkt, der innerhalb aller dieser Strecken liegt.*

4. - Wir wollen im folgenden Vereinfachungen für das Archimedische und das Cantorsche Axiom angeben und beginnen dabei mit dem Cantorschen Axiom deshalb, weil die hierauf bezüglichen Bemerkungen für die absolute Geometrie gelten, während wir die Richtigkeit des über das Archimedische Axiom Gesagten bisher nur für die Euklidische Geometrie nachweisen können.

Das Messen einer Strecke s unter Zugrundlegung irgendeiner Einheitsstrecke e beruht bekanntlich (wenn $e<s$ gilt), lediglich darauf, dass man ein Vielfaches von e angeben kann, das grösser ist als s und dass es möglich ist, e sukzessive zu halbieren, vierteln, achteln usw. Man erhält dann die Länge von s in der Form eines Dualbruches (5). Daher genügt in der absoluten Geometrie

---

(1) *Grundlagen der Geometrie* (4. bis) 6. Auflage, 1923, S. 21-22.

(2) R. BALDUS. *Zur Axiomatik der Geometrie I. Ueber Hilberts Vollständigkeitsaxiom.* Mathem. Annalen, 100 (1928) S. 321-333. In dem hier in Betracht kommenden kursiv gedruckten Satz auf S. 327 steht dort infolge eines Druckfehlers III, 1-4, während es nach dem letzten Absatze von N. 8 klar ist, dass es III, 1-3 zu heissen hat.

(3) Vgl. hierüber die in der vorhergehenden Anmerkung genannte Abhandlung, insbesondere N. 13-16.

(4) F. ENRIQUES. *Prinzipien der Geometrie.* Enzyklopädie der Mathem. Wissenschaften III, $1,_1$ S. 36.

(5) Ausführlich z. B. a. a. O. von N. 2, Anmerkung (1), N. 29.

nach Einführung der Axiomgruppen I-III von N. 2 die Hinzunahme des Archimedischen Axioms, um jedem Punkt einer Geraden einen Koordinatenwert zuzuorden. Das Cantorsche Axiom soll dann umgekehrt jeder Zahl, hier jedem unendlichen Dualbruch, einen Punkt zuorden. Dafür genügt es aber das Axiom folgendermassen auszusprechen:

(*B*) **Vereinfachtes Cantorsches Axiom der absoluten Geometrie.** - *Es gibt eine Strecke AB von folgender Eingenschaft: ist irgendeine unendliche, mit AB beginnende Folge von Strecken gegeben, derart, dass jede folgende Strecke eine der beiden Halbstrecken der vorhergehenden ist, dann gibt es mindestens einen Punkt, der zu allen Strecken dieser Folge gehört, sei es als innerer Punkt, sei es als Endpunkt* (1).

Es wird nun zu zeigen sein, was einfach geht, dass diese Formulierung dasselbe leistet wie das Axiom (*A*).

5. - Zunächst ist es klar, dass trotz der Forderung « mindestens ein Punkt » nur genau ein solcher Punkt existieren kann, da wegen der sukzessiven Halbierungen die Längen der Strecken gegen Null konvergieren.

Gibt man dem Punkt A die Koordinate 0, dem Punkte B den Wert 1, dann ist nun jedem echten Dualbruch ein Punkt der Strecke AB zugeordnet. Ist nun in AB eine Streckenfolge $A_\nu B_\nu$ nach Art des Axioms (*A*) gegeben, dann gibt es einen zwischen den entsprechenden Koordinatenwerten a_ν und b_ν liegenden Dualbruch — z. B. als Grenzwert der Zahlenfolge $\frac{a_\nu + b_\nu}{2}$ — und damit einen Punkt innerhalb aller Strecken dieser Folge. Daher folgt zunächst vermöge (*B*) die Gültigkeit von (*A*) innerhalb der Strecke AB.

Ist nun in einer anderen Strecke PQ eine Folge nach Axiom (*A*) gegeben, dann legt man an A in einer von der Geraden AB verschiedenen Richtung die Strecke $AC \equiv PQ$ mit der ganzen Streckenfolge an, wählt in der Geraden BC einen Punkt S ausserhalb BC und projiziert von S aus die Folge aus AC auf AB. Da in AB vermöge (*B*) auch (*A*) gilt, ist dies auch in AC und PQ der Fall. Damit ist bewiesen, dass in der absoluten Geometrie (und damit auch in der Euklidischen und der hyperbolischen) (*B*) gleich weit trägt wie (*A*).

6. - Die Formulierung (*B*) ist stärker metrisch gefärbt wie (*A*), doch setzt bekanntlich auch (*A*) die Metrik voraus, da die Konvergenz gegen Null soviel bedeutet, als dass es zu jeder beliebig vorgegebenen Strecke eine kleinere Strecke in der Folge gibt, und weil die Erklärung der Beziehungen « grösser » und « kleiner », wenn es sich nicht um Strecken handelt, deren eine in der

---

(1) Dieser Zusatz muss ausdrücklich gemacht werden, da nach Hilberts Definition « Grundlagen » S. 5 nur die inneren Punkte einer Strecke « Punkte der Strecke » heissen.

anderen liegt, auf dem Wege über die Streckenkongruenz erfolgt. Die Formulierung (B) ist enger als (A), auch spricht für sie, dass die Dualfolgen von (B) begrifflich einfacher sind als die beliebigen Streckenfolgen von (A).

7. - Wir wenden uns nun dem Archimedischen Axiom zu, wobei wir aber, im Gegensatze zum Bisherigen, auch das Euklidische Parallelenaxiom — nicht aber das Archimedische oder das Cantorsche Axiom — als eingeführt voraussetzen, d. h. es sollen die Axiome I, II, III, V von N. 2 gelten. Dann beweist man in bekannter Weise die Gleichheit der Wechselwinkel an parallelen Geraden sowie die Gleichheit der Gegenseiten im Parallelogramm und daraus ohne weiteres den Satz, dass bei Parallelprojektion einer Geraden in eine andere untereinander kongruente Strecken in untereinander kongruente Strecken übergehen, und dass bei der Parallelprojektion die « zwischen » - Beziehungen erhalten bleiben. Ist nun AC eine Strecke, die durch ihre Teilstrecke (AB) messbar ist, (d. h., man kommt durch wiederholtes Abtragen von AB über C hinaus) und ist AC_1 eine Strecke, die nicht auf der Geraden AC liegt, dann liefert die Parallelprojektion von B in der Richtung CC_1 einen Punkt B_1 innerhalb AC_1 derart, dass auch AC_1 durch AB_1 messbar ist. Lässt man nun B und C innerhalb der Halbgeraden AC variieren, dann kann man gleichzeitig entweder C_1 festhalten und B_1 variieren oder B_1 festhalten und H_1 variieren. Daraus folgt der Doppelsatz

(C) *Gelten die Hilbertschen Axiomgruppen I-IV, dann ist der ganze Raum Archimedisch, d. h., jede Strecke ist durch jede kleinere messbar, wenn es entweder* eine *Strecke gibt, die durch jede ihrer Teilstrecken messbar ist, oder wenn es* eine *Strecke gibt, durch welche jede grössere Strecke messbar ist.*

Hat man die Hilbertschen Axiome der Gruppen I-IV in Nichtarchimedischer Weise gedeutet, dann folgen aus den Sätzen (C) zwei Tatsachen: zu irgend zwei Punkten A und C einer Geraden gibt es in dieser Deutung immer

1) mindenstens einen Punkt B derart, dass B zwischen A und C liegt und dass die Strecke $n \cdot AB < AC$ ist, wie gross man auch n wählt;

2) mindestens einen Punkt D derart, dass C zwischen A und D liegt und dass die Strecke $n \cdot AC < AD$ ist, wie gross man auch n wählt ([1]).

8. - Nach den Sätzen (C) genügt es bei der Formulierung des Archimedischen Axioms in der Euklidischen Geometrie, den Archimedischen Charakter

---

([1]) Eine solche Deutung enthalten Hilberts « Grundlagen » S. 29-31. Die hier aufgeführten Tatsachen sagen dort aus: zu jeder Funktion $c(t)$ des Bereiches $\Omega(t)$ gibt es mindestens ein $b(t)$ des Bereiches so, dass $\lim_{t \to \infty} \{n \cdot b(t) - c(t)\} < 0$ ist für jede natürliche Zahl n, weiterhin mindestens ein $d(t)$ so, dass $\lim_{t \to \infty} \{n \cdot c(t) - d(t)\} < 0$ ist.

einer einzigen Strecke gegenüber jeder ihrer Teilstrecken zu forderen, oder, wenn man dies vorzieht, die Existenz einer einzigen Strecke, durch die man jede über sie hinausragende Strecke messen kann. Daraus resultiert folgendes

(*D*) **Vereinfachtes Archimedisches Axiom der Euklidischen Geometrie.** - *Es gibt eine Strecke AB von folgender Eigenschaft: A_1 sei ein beliebiger Punkt der Strecke; man konstruiere die Punkte A_2, A_3, A_4....* usf. wie bei HILBERT (1) oder

Es gibt eine Strecke AA_1 auf einer von A ausgehenden Halbgeraden a von folgender Eigenschaft: B sei ein beliebiger Punkt von a derart, dass A_1 zwischen A und B liegt; man konstruiere dann die Punkte A_2, A_3, A_4.... usf.

Die interessante Frage, ob man die Sätze (*C*) auch ohne Heranziehung des Euklidischen Parallelenaxioms beweisen kann und ob daher die Fassungen (*D*) auch in der absoluten Geometrie zulässig sind, habe ich bisher noch nicht beantworten können (2).

---

(1) « Grundlagen » S. 21-22.

(2) *Zusatz bei der Korrektur.* Inzwischen habe ich zeigen können, dass die erste Hälfte des Satzes (*C*) und damit auch die erste Formulierung von (*D*) auch in der absoluten Geometrie gilt: *Zur Axiomatik der Geometrie III. Über das Archimedische und das Cantorsche Axiom.* Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie des Wissenschaften, Mathem.-naturw. Klasse, 1930, 5. Abhdlg. Dort ist auch bewiesen, dass man in jeder Archimedischen Geometrie das Cantorsche Axiom ohne metrischen Bestandteil, als reines Anordnungsaxiom aussprechen kann.

E. BOMPIANI (Roma - Italia)

TEORIA DELLA CORRISPONDENZA FRA DUE SUPERFICIE

1. - Intorno del 2.° ordine di una superficie.

In ogni teoria geometrica, sia differenziale sia algebrica, si presenta con frequenza il concetto di corrispondenza. Proprietà di corrispondenze particolari sono state, nei singoli casi, ampiamente studiate. Ma esistono alcuni fatti generali indipendenti da qualsiasi particolarità della corrispondenza, cioè legati esclusivamente al concetto di questa. Voglio qui esporre alcuni di questi fatti prendendo a considerare le corrispondenze puntuali biunivoche e continue fra certe regioni di superficie limitate inoltre da qualche condizione relativa alla derivabilità delle funzioni che le rappresentano (sia le superficie che la corrispondenza). Poichè qui intendiamo le « superficie » nel senso della geometria astratta, cioè ente a due dimensioni rispetto ad un elemento generatore qualsiasi (p. es. una congruenza di rette) i risultati sono suscettibili delle più svariate interpretazioni che arricchiscono il contenuto della teoria.

Nello stabilire questa noi avremo sempre presente un modello proiettivo di ciascuna superficie, situato in uno spazio di dimensione convenientemente ampia.

Un altro elemento che occorre precisare per la teoria è l'ordine degli intorni di punti corrispondenti che si vuole considerare. Com'è noto, se ci si limita al 1° ordine, qualunque sia la corrispondenza (purchè rappresentata da funzioni derivabili una volta) e quali si siano gli ambienti delle due superficie, gli intorni del 1° ordine di punti corrispondenti sono proiettivi: ciò è conseguenza immediata del modo di trasformarsi dei differenziali primi delle coordinate.

Qui invece prendiamo in esame gli intorni del 2° ordine: si capisce che ricerche analoghe potranno esser fatte per intorni d'ordine più elevato (e poi per le varietà).

Un elemento essenziale è la dimensione dello spazio che contiene quest'intorno o, in modo più preciso, i piani osculatori alle curve uscenti da un punto generico P della superficie σ (spazio 2-osculatore o $S(2)$ in P).

Si sa che, qualunque sia lo spazio d'immersione di σ, S_n, lo spazio $S(2)$ è in generale un S_5: può essere un S_4 e ciò accade se e soltanto se la superficie possiede *un* doppio sistema coniugato (superficie a punti planari non parabolici) oppure un sistema semplice di asintotiche (superficie a punti planari parabolici);

e più in particolare quello $S(2)$ è un S_3 se la superficie è sviluppabile (caso che non prenderemo in considerazione) o se appartiene ad un S_3. Quest'ultimo caso, quasi esclusivamente preso in esame finora, è quindi il più particolare e non consentirebbe perciò una trattazione delle corrispondenze fra enti a due dimensioni (con elementi generatori qualsiansi). Escludiamo anche le superficie piane.

2. - Sistemi assiali e pluriassiali.

In relazione alla dimensione dello $S(2)$ generico si definiscono su σ certi sistemi di curve (assiali o pluriassiali) nel modo seguente.

Consideriamo il caso più semplice possibile: σ appartenga ad S_3. Per ogni punto P di σ si dia una retta r non situata nel piano tangente: la congruenza $\{r\}$ definisce su σ un sistema (assiale) ∞^2 di curve tali che i piani osculatori alle ∞^1 passanti per un punto P contengono la retta r per P.

Questi sistemi sono stati considerati per la prima volta dalla sig.na SPERRY, poi dal GREEN e dal FUBINI: il loro interesse per la teoria delle corrispondenze è venuto alla luce soltanto in seguito.

Sistemi assiali non esistono sulle superficie con $S(2)=S_4$ o S_5. Nel 1° caso si dia in P e dentro lo S_4 osculatore in P a σ un piano ω: la congruenza di piani $\{\omega\}$ definisce su σ un sistema ∞^2 di linee con la proprietà che i piani osculatori in P alle linee del sistema tagliano ω in rette; il sistema si dirà 2-assiale (o planare) e il piano ω *piano d'appoggio*. Nel caso $S(2)\equiv S_5$ basta prendere per ogni P e nel relativo S_5 un $S_3\omega$ d'appoggio per definire in modo analogo un sistema *3-assiale*.

Relativamente a questi sistemi pluriassiali facciamo due osservazioni soltanto.

1ª) Essi sono sempre rappresentati, quando u e v siano coordinate curvilinee su σ, da un'equazione differenziale del 2° ordine del tipo

$$(1) \qquad dud^2v - dvd^2u = Adu^3 + Bdu^2dv + Cdudv^2 + Ddv^3 ;$$

viceversa su qualsiasi superficie *generale* ($S(2)\equiv S_5$) o con 1 doppio sistema coniugato qualsiasi equazione (1) rappresenta un sistema 3- o 2-assiale; non è più così per le superficie con un sistema di asintotiche o (con due tali sistemi, cioè) di S_3: in quest'ultimo caso p. es. un'equazione (1) è definita *non* più da una retta per P (che comporterebbe due sole funzioni arbitrarie) ma da una quadrica avente in P per generatrici le tangenti asintotiche di σ (e precisamente con la condizione che le curve di (1) per P abbiano ivi quadriche asintotiche osculatrici tangenti altrove alla quadrica data).

2ª) La definizione dei sistemi assiali (i-assiali) non involge che la considerazione dello spazio $S(2)$ in ogni punto P (ω o r dovendo appartenere ad esso): è naturale quindi ch'essa rimanga inalterata comunque si articolino questi spazî (se ciò è consentito dalla dimensione ambiente). Ma ciò equivale a considerare non più la geometria proiettiva della superficie ma la geometria

di una qualsiasi connessione proiettiva della superficie secondo CARTAN. E vale il fatto che:

Le geodetiche di una connessione proiettiva secondo CARTAN subordinata sulla superficie alla geometria di uno spazio ambiente proiettivo sono sempre sistemi assiali della superficie, fatto che, come ha dimostrato ENEA BORTOLOTTI, sussiste anche per le varietà.

Limitiamoci a questi pochi cenni sui sistemi assiali e passiamo alla teoria delle corrispondenze.

Per quanto abbiamo visto, le due superficie σ e $\bar{\sigma}$ potranno presentare gli stessi fatti proiettivi oppur no rispetto agli intorni del 2° ordine di punti corrispondenti: e poichè ciascuna può presentare 4 casi vi saranno 10 casi di corrispondenze da esaminare.

Passiamo in rassegna per primi i casi nei quali gli spazi osculatori $S(2)$ hanno la stessa dimensione.

1°) Quando le due superficie stanno in S_3 si trova che: in una corrispondenza generica esiste uno ed un solo sistema assiale che si muti in un altro sistema assiale; solo eccezionalmente può accadere che non vi siano sistemi assiali corrispondenti (il che avviene in generale se si corrispondono le asintotiche delle due superficie) o che tutti i sistemi assiali si conservino tali, nel qual caso la corrispondenza è un'applicabilità proiettiva di FUBINI.

Il caso generale si presenta p. es. nelle ordinarie applicabilità fra superficie (delle quali è sempre possibile costruire modelli in S_3); le linee assiali corrispondenti sono le geodetiche (e le congruenze degli assi quelle delle normali).

2°) Se gli $S(2)$ sono S_4 potranno tutt'e due le superficie possedere un doppio sistema coniugato, oppure un sistema semplice di asintotiche, ovvero infine potrà una possedere un doppio sistema coniugato e l'altra un sistema di asintotiche. Si debbono dunque distinguere tre casi che indicheremo con 2_1, 2_2, 2_3.

Cominciamo dal caso 2_1.

A differenza di quanto succede nel caso 1°), attualmente ad ogni sistema planare di σ, qualunque sia la corrispondenza, corrisponde sempre un ben determinato sistema planare di $\bar{\sigma}$, cioè dato per ogni P e nello S_4 osculatore ivi a σ un piano ω d'appoggio rimane determinato in $\bar{P}$ e nello S_4 ivi osculatore a $\bar{\sigma}$ un piano $\bar{\omega}$.

Di più, fissiamo ad arbitrio per ogni P di σ, e nello S_4, una retta r (non situata nel piano tangente in P), quindi una congruenza $\{r\}$ e diciamo che un sistema planare è subordinato ad $\{r\}$ se ogni piano ω contiene la relativa retta r. Allora:

Data una corrispondenza qualsiasi fra σ e $\bar{\sigma}$ ed una congruenza rettilinea per ciascuna di esse, nel modo ora specificato ma del resto affatto arbitrarie, siano $\{r\}$ ed $\{\bar{r}\}$, esiste in generale uno ed un solo sistema planare di σ subordinato ad $\{r\}$ cui corrisponda un sistema planare di $\bar{\sigma}$ subordinato ad $\{\bar{r}\}$.

Diamo ora, oltre alla corrispondenza, soltanto $\{r\}$: si può determinare $\{\bar{r}\}$ in modo che il teorema precedente cada in difetto, cioè vi siano (non più *uno* ma) ∞^1 piani ω per r cui corrispondano ∞^1 piani $\bar{\omega}$ per $\bar{r}$? Sì; e precisamente ad ogni retta r si possono far corrispondere due fasci di rette $\bar{r}$.

Facciamo infine variare le due congruenze di rette: purchè nella corrispondenza non si conservino i doppi sistemi coniugati rimangono determinati in P e in $\bar{P}$ due stelle di rette e fra esse una omografia tali che se r^* e $\bar{r}^*$ sono rette corrispondenti, ad ogni piano ω contenente r^* corrisponde un piano $\bar{\omega}$ contenente $\bar{r}^*$. Gli S_3 delle due stelle si caratterizzano geometricamente in modo facile.

E finalmente se e soltanto se sulle due superficie si corrispondono i doppi sistemi coniugati la corrispondenza fra le superficie è un'applicabilità proiettiva (cioè l'omografia del caso precedente si estende ora alle iperstelle di centri P e $\bar{P}$ ed essa subordina l'omografia fra i piani osculatori).

E in questo caso è ancora possibile determinare sistemi planari che si conservano nella corrispondenza dotati di proprietà più particolari (in relazione con le equazioni di LAPLACE relative ai sistemi coniugati delle due superficie).

Un'applicazione di questi risultati può farsi alla geometria delle superficie di S_3 nel gruppo conforme.

Si consideri in ogni punto P di una superficie σ di S_3 un cerchio passante per esso (non contenuto nel piano tangente), e i sistemi ∞^2 di curve tali che i cerchi osculatori in P a quelle che vi passano incidono ulteriormente il cerchio (fuori di P); questi sistemi si diranno ciclici. Basta pensare la superficie di S_3 come proiezione stereografica di una superficie contenuta in una ipersfera di S_4 per vedere che detti sistemi ciclici non sono altro che proiezioni di sistemi planari e quindi che: in una corrispondenza puntuale fra superficie di S_3 ad ogni sistema ciclico corrisponde un sistema ciclico.

E se ad ogni punto della superficie di S_4 si associa la polare del piano ivi tangente rispetto all'ipersfera, il teorema sulla corrispondenza fra sistemi planari subordinati a date congruenze di rette dà il teorema del BLASCHKE: In una corrispondenza generica, che non sia conforme, fra due superficie, esiste sempre uno ed un solo sistema ciclico ortogonale (cioè i cui cerchi d'appoggio siano ortogonali alla superficie nel punto) cui corrisponda un tal sistema. Nella corrispondenza conforme, e solo in essa, si conservano tutti i sistemi ciclici ortogonali.

Altre applicazioni possono farsi alle corrispondenze fra congruenze di sfere (rappresentabili in superficie di S_4) o fra congruenze W di rette (rappresentabili in superficie con doppio sistema coniugato sulla quadrica di S_5 immagine delle rette S_3).

Passiamo brevemente in rivista gli altri due casi 2_2) e 2_3).

Se le due superficie posseggono ciascuna un sistema semplice di asintotiche,

non corrispondentisi, ad un sistema planare dell'una *non* corrisponde in generale un sistema planare dell'altra; i piani d'appoggio di sistemi planari corrispondenti si distribuiscono in una rete di coni quadrici (in ciascun $S(2) \equiv S_4$) e fra reti intercede una proiettività. Date come prima due congruenze di rette $\{r\}$ ed $\{\bar{r}\}$ esiste in generale uno ed un solo sistema planare subordinato ad $\{r\}$ su σ cui corrisponda un analogo sistema subordinato ad $\{\bar{r}\}$ su $\bar{\sigma}$; e si determinano facilmente i casi d'eccezione.

E se le asintotiche si corrispondono non v'è in generale alcun sistema planare che si conservi: ma se ciò avviene per uno, a qualsiasi sistema planare corrisponde un sistema planare (applicabilità proiettiva).

Supponiamo infine che σ possieda un sistema di asintotiche e $\bar{\sigma}$ un doppio sistema coniugato.

Ad ogni piano d'appoggio in P corrisponde un ben determinato piano d'appoggio in $\bar{P}$ (quindi ad un sistema planare di σ un analogo sistema su $\bar{\sigma}$); ma non viceversa. Precisamente esiste un complesso lineare speciale di piani uscenti da $\bar{P}$ ai quali corrispondono piani d'appoggio per P e questi si distribuiscono in un sistema lineare ∞^3 di coni quadrici.

Passiamo ora al 3° caso, di una corrispondenza fra superficie a punti generali, cioè con $S(2) \equiv S_5$: qui sono i sistemi 3-assiali che forniscono l'elemento della ricerca; occorre perciò aggiungere qualche proprietà a quelle già date. Un tal sistema è individuato su σ appena si dia per ogni punto P, entro il relativo $S(2)$, un $S_3 \equiv \omega$ d'appoggio: ma viceversa un sistema 3-assiale determina in P *non uno* ma $\infty^2 S_3$ d'appoggio; essi sono gli S_3 che tagliano il cono cubico V_3^3 dei piani osculatori in P alle curve del sistema in coni quadrici.

Questi $\infty^2 S_3$ per P in $S(2) \equiv S_5$ costituiscono, come ha rilevato ENEA BORTOLOTTI, la figura duale della varietà delle rette congiungenti punti corrispondenti di due piani punteggiati proiettivamente in S_4.

Aggiungiamo ancora le nozioni di sistema 3-assiale subordinato ad una congruenza di rette o di piani.

Se per ogni P ed entro $S(2)$ si dà una retta (generica) per essa passa sempre un S_3 d'appoggio in P di un qualsiasi sistema 3-assiale dato; sicchè possiamo dire che ogni sistema 3-assiale è subordinato ad una congruenza $\{r\}$ di rette data a piacere.

Non è più così se per ogni P e in $S(2)$ si fissa un piano p, quindi una congruenza di piani $\{p\}$ relativa a σ. Accade infatti che se si cercano i sistemi 3-assiali di cui uno (degli ∞^2) S_3 d'appoggio in P contenga p, si trova che essi dipendono (non più da 4 ma soltanto) da due funzioni arbitrarie. Un tale sistema si dirà subordinato alla congruenza di piani $\{p\}$.

Ciò premesso, veniamo alle corrispondenze fra due superficie σ e $\bar{\sigma}$ a punti generali.

In qualsiasi corrispondenza ad ogni sistema 3-assiale di σ corrisponde un

sistema 3-assiale di $\bar{\sigma}$ (sicchè si ha una corrispondenza fra i coni cubici V_3^3 e $\overline{V}_3^3$ dei loro piani osculatori); di più si possono scegliere tali S_3 d'appoggio in punti corrispondenti da considerare i due sistemi come subordinati a due congruenze arbitrarie $\{r\}$ ed $\{\bar{r}\}$ di rette relative a σ e a $\bar{\sigma}$.

Di più se si fissano come corrispondenti un S_3 in P e un $\overline{S}_3$ in $\overline{P}$ (fra quelli d'appoggio di sistemi corrispondenti) rimane fissata *una* omografia fra le due stelle di centri P e $\overline{P}$, quindi vi sono ∞^2 omografie, determinate dalla corrispondenza, fra stelle (∞^4 di rette) negli $S(2)$ osculatori. E se ora dalle omografie fra le stelle passiamo a determinare le omografie *fra i punti* di due $S(2)$ corrispondenti, troviamo che vi sono ∞^5 omografie che portano a coincidere gli intorni di 1° e 2° ordine delle superficie in punti corrispondenti, cioè le due superficie sono sempre proiettivamente applicabili del 2° ordine.

Se poi oltre alla corrispondenza fra le due superficie si dà per ciascuna di esse una congruenza di piani, $\{p\}$ e $\{\bar{p}\}$, allora esiste in generale uno ed un solo sistema 3-assiale di σ subordinato a $\{p\}$ cui corsisponda un sistema 3-assiale di $\bar{\sigma}$ subordinato a $\{\bar{p}\}$.

S'intende che o per particolari congruenze $\{\bar{p}\}$ in relazione a $\{p\}$ o per particolari corrispondenze il teorema precedente può cadere in difetto in quanto non uno ma ∞^1 o anche ∞^2 dei sistemi considerati si corrispondono; ma non possiamo, in questa rapida rivista, trattenerci su risultati particolari.

Vogliamo piuttosto mostrare l'interpretazione di questi risultati alle corrispondenze fra congruenze di rette (che non siano W).

Anzitutto: come s'interpretano i sistemi 3-assiali per le congruenze?

Sia g una generatrice di questa; si dia una congruenza lineare di rette contenente g, cioè le sue direttrici δ_1 e δ_2 incidenti g. Si considerino ora i regoli osculatori alle rigate per g della congruenza (lungo g stessa): fra questi ve ne sono ∞^1, e precisamente uno per ogni *direzione rigata* (gg'), di cui una altra generatrice $\gamma \neq g$ appartenga alla congruenza lineare, cioè incida δ_1 e δ_2: così a partire da una direzione rigata (o elemento del 1° ordine) si è determinato un elemento del 2° ordine di rigata appartenente alla congruenza data.

Se ora per ogni g si assegna la coppia δ_1, δ_2, la costruzione precedente permette di distribuire le rette della congruenza in un sistema ∞^2 di rigate, che diremo sistema $\{R\}$, tale che per ogni direzione rigata passi una rigata del sistema $\{R\}$. Questi sistemi $\{R\}$ sono le immagini dei sistemi 3-assiali.

Al variare della direzione rigata per g, quindi del regolo osculatore, le generatrici γ descrivono una superficie del 4° ordine che ha g per generatrice doppia e δ_1, δ_2 per direttrici (semplici). Ma questi ∞^1 regoli osculatori si comportano nel modo detto non solo rispetto alla coppia δ_1, δ_2 ma ad ∞^2 coppie di rette (incidenti g): la congruenza di queste direttrici in g, relative ad un sistema $\{R\}$ dato, è di 3° ordine e 3ª classe ed è costituita dalle tangenti ad una certa superficie algebrica incidenti g.

Una coppia δ_1, δ_2 è fissata appena si assegni un'altra retta $\dot{g}$, oltre g, cui debba essere incidente; in particolare assegnando una proiettività fra i punti e i piani di g che sia però distinta dalle proiettività di CHASLES determinate dalle rigate della congruenza per g.

Interpretiamo ora i sistemi 3-assiali subordinati a congruenze di piani. Ciò equivale a dare per ogni generatrice g una schiera rigata (non raccordata lungo g ad alcuna rigata della congruenza) ed imporre che due direttrici δ_1, δ_2 del sistema $\{R\}$ appartengano alla schiera complementare, cioè alla quadrica data. Questi particolari sistemi $\{R\}$, che potremmo chiamare *sistemi quadrici*, dipendono (assegnate quelle quadriche) da *due* funzioni arbitrarie (invece che da quattro). La definizione di questi sistemi riesce particolarmente interessante quando le quadriche che servono a definirli siano intrinsecamente fissate dalla congruenza; p. fare un esempio (nel quale la quadrica generica è degenere) si possono cercare i sistemi $\{R\}$ per i quali vi siano due direttrici δ_1 e δ_2 passanti per i fuochi di g e situate nei relativi piani focali. Questi particolari sistemi $\{R\}$ possono dirsi *focali* e dipendono da due funzioni arbitrarie.

Venendo alle corrispondenze fra congruenze noteremo soltanto che ad ogni sistema $\{R\}$ corrisponde un sistema $\{R\}$ mentre in generale v'è un solo sistema focale cui corrisponda un sistema focale.

Esauriti così i casi di corrispondenze fra superficie i cui punti siano della stessa specie rimangono da esaminare quelli relativi a superficie di specie diversa. Riferire i risultati di una trattazione sistematica, le cui linee appariscono chiare da quanto si è detto, sarebbe poco divertente: val meglio scegliere qualche risultato meno generale e più significativo.

Per es. nella corrispondenza fra una superficie σ di S_3 ed una $\bar{\sigma}$ a punti planari non parabolici, ad ogni sistema assiale di σ corrisponde un sistema planare di $\bar{\sigma}$ (non viceversa); gli S_2 d'appoggio in un punto $\overline{P}$ di $\bar{\sigma}$ corrispondenti agli assi uscenti da P di σ formano una congruenza lineare di piani (nella stella entro $S(2) \equiv S_4$) caratterizzata dai due piani direttori, e invariante per applicabilità proiettive di σ.

In particolare in una corrispondenza fra una superficie σ di S_3 e una congruenza W, per ogni generatrice di questa rimangono definite due schiere rigate o quadriche; e se più in particolare ad ogni punto di σ si associa una tangente asintotica, si viene a definire per esso una quadrica di cui ho dato di recente una definizione diretta e che insieme con quella di LIE finisce di determinare il fascio di DARBOUX e tutti gli elementi proiettivamente invarianti di σ (normale proiettiva, retta di SEGRE, di WILCZYNSKI, etc.).

Un'altra applicazione, nel gruppo conforme, del teorema precedente, si ha associando a ciascun punto di σ una delle sue sfere di curvatura: i due piani direttori invarianti del teorema danno luogo a due cerchi associati a ciascun punto di σ in modo invariante nel gruppo conforme; etc. etc.

Se invece $\bar{\sigma}$ appartiene ad S_3 e σ è a punti generali, cioè $S(2) \equiv S_5$, ad ogni sistema assiale di σ corrisponde un sistema 3-assiale di $\bar{\sigma}$. Per ogni punto $\overline{P}$ di $\bar{\sigma}$ la totalità (∞^4) degli S_3 d'appoggio dei sistemi 3-assiali ottenuti sega lo S_4 che contiene i piani osculatori alle curve di $\bar{\sigma}$ in $\overline{P}$ corrispondenti alle asintotiche di σ in P in piani di una congruenza lineare caratterizzata dai suoi piani direttori.

Ciò porta che una corrispondenza fra σ e una congruenza di rette definisce per ciascuna g di queste una coppia di quadriche o schiere rigate: se g_1 e g_2 sono due generatrici di ciascuna schiera, due rette δ_1 e δ_2 appoggiate a g, g_1, g_2 sono direttrici di sistemi $\{R\}$ corrispondenti ai sistemi assiali di σ e così, variando g_1 e g_2 si ottengono tutte (∞^4).

Queste direttrici, o questi sistemi $\{R\}$, non variano deformando σ proiettivamente: in particolare se la congruenza è quella delle normali proiettive a σ si hanno quadriche, o sistemi $\{R\}$, indipendenti dalle deformazioni proiettive. Mentre se le rette della congruenza sono legate metricamente alla superficie, p. es. sono le sue normali ordinarie, si hanno quadriche legate metricamente alla superficie.

L'esposizione fatta della teoria delle corrispondenze fra superficie se non esauriente è abbastanza dettagliata per dare un'idea della quantità, e io spero dell'interesse, dei risultati che si possono ottenere nelle varie geometrie. L'analisi può estendersi agli intorni d'ordine superiore al 2°, sempre per le superficie (e poi alle varietà). Mi sia lecito chiudere dando un risultato generale relativo a questo caso.

Lo spazio contenente l'intorno d'ordine ν di un punto di una superficie, $S(\nu)$, al massimo è di dimensione $\frac{\nu(\nu+3)}{2}$; quando questo massimo è raggiunto la superficie è « a punti generali » rispetto all'ordine ν. Si ha allora il teorema:

Qualsiasi corrispondenza fra due superficie a punti generali fino all'ordine ν, può essere sostituita, fino a quest'ordine da omografie, cioè equivale ad applicabilità proiettive d'ordine ν.

Nel caso $\nu=1$ (in cui la restrizione relativa a punti generali equivale a dire che le superficie abbiano *piani* tangenti in punti corrispondenti) questo teorema coincide con l'osservazione notissima da cui abbiamo preso le mosse e che, fino agli studi del FUBINI sulle applicabilità proiettive fra superficie di S_3, era l'unica nota.

W. BLASCHKE (Hamburg - Germania)

QUESTIONI TOPOLOGICHE DI GEOMETRIA DIFFERENZIALE

§ 1. - **Introduzione.** — In questi ultimi anni da molti cultori della nostra scienza fu studiata la geometria differenziale di certi gruppi continui di trasformazioni secondo il progetto del KLEIN nel suo famoso programma di Erlangen.

Sulla geometria proiettivo-differenziale basta nominare i bei volumi di FUBINI e ČECH; sulla geometria affine ho scritto un libro col mio amico REIDEMEISTER e sui vari gruppi della geometria della sfera sto pubblicando un volume con l'amico THOMSEN.

In questi ultimi tempi abbiamo cominciato a studiare questioni topologiche: mi permettano un breve rapporto su risultati ottenuti in quest'ordine d'idee più dai miei collaboratori che da me.

Si tratterà dunque di proprietà differenziali invarianti per trasformazioni topologiche, cioè per trasformazioni puntuali biunivoche e continue, ammettendo qualche volta restrizioni di derivabilità delle funzioni che rappresentano queste trasformazioni. Mi limiterò a dare qualche esempio perchè siamo ben lontani dal possedere una teoria generale di questo vasto campo di ricerche finora poco studiato. Si tratterà quasi esclusivamente della geometria piana o della geometria sopra una superficie.

§ 2. - **Reti e tessuti di curve.** — L'immagine topologica di un sistema di rette parallele in una regione del piano la chiameremo « schiera di curve », cosicchè le curve della schiera coprano semplicemente la regione. Si dirà che n schiere di una stessa regione formano una « schiera n-upla » se due curve di schiere differenti si segano al più in un punto della regione. Invece di schiera doppia diremo anche una « rete di curve » ed invece di schiera tripla un « tessuto di curve ».

Nè una schiera nè una rete hanno invarianti differenziali topologici. Cominciamo dunque a considerare gli invarianti dei tessuti. La prima questione che si offre immediatamente è la seguente: *Trovare una condizione necessaria e sufficiente affinchè un tessuto equivalga topologicamente ad una schiera tripla composta di tre schiere di rette parallele.*

Si vede subito che la proprietà seguente è necessaria.

Prendiamo le tre curve C_1, C_2, C_3 del tessuto passanti per un punto p_0 della regione e su C_1 un punto p_1 abbastanza vicino a p_0. Poi costruiamo un esagono composto da curve del tessuto avente per diagonali C_1, C_2, C_3 e per vertici p_1, p_2, p_3, p_1', p_2', p_3'. Questo esagono deve chiudersi in p_1. Chiameremo un tessuto « esagonale » se tutti questi esagoni aventi per lati e per diagonali curve del tessuto sono chiusi. THOMSEN trovò che la nostra condizione è anche sufficiente, cioè:

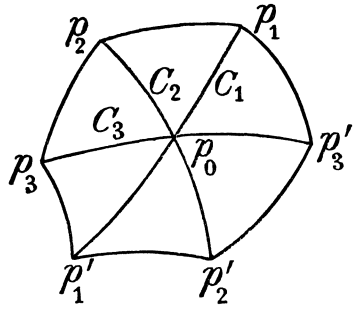


Fig. 1.

I. *Un tessuto esagonale equivale topologicamente ad un tessuto formato da tre fasci di rette parallele.*

La dimostrazione originale del THOMSEN esige restrizioni di derivabilità. Ma è molto facile trovare una dimostrazione generale. Basta provare la possibilità della costruzione di un favo di esagoni come lo fanno le api formato da curve del tessuto e la possibilità di dividere il favo in altri analoghi più piccoli.

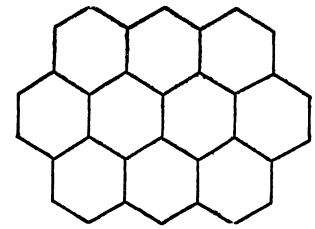


Fig. 2.

Si vede poi facilmente che: Un tessuto composto di rette di tre fasci qualsiansi equivale ad un tessuto di tre fasci di rette parallele. Il tessuto esagonale più generale composto di rette è formato dalle tangenti ad una curva di terza classe (GRAF e SAUER).

§ 3. - Due reti diagonali fra di loro. — Per qualche applicazione del risultato del THOMSEN conviene enunciarlo in modo differente.

Prendiamo due reti di curve nella stessa regione del piano, siano R_1, R_2. Chiameremo R_2 *diagonale* rispetto ad R_1 se ciascun quadrangolo formato da curve di R_1 ed avente una diagonale di R_2 abbia anche l'altra diagonale di R_2. Si vede che la relazione fra R_1 ed R_2 è reciproca e:

II. *Due reti diagonali fra di loro sono topologicamente equivalenti a due reti diagonali formate da quattro fasci di rette parallele.*

La dimostrazione è analoga a quella del § 2 e si osserva anche facilmente che il teorema II è conseguenza del teorema I e viceversa.

§ 4. - Schiere quadruple. — MAYRHOFER ha trovato la seguente proprietà interessante delle schiere quadruple.

III. *Se una schiera quadrupla ha la proprietà che ciascuno dei quattro tessuti che si ottengono sopprimendo una delle quattro schiere sia un tes-*

suto esagonale, allora la nostra schiera quadrupla equivale ad una formata da quattro fasci di rette.

Il teorema non è (o non sembra essere) triviale, perchè i quattro fasci di rette non sono in generale fasci di rette parallele. Per la dimostrazione originale del MAYRHOFER occorrevano restrizioni di derivabilità. Una dimostrazione generale molto bella fu trovata da REIDEMEISTER. Ma forse sarebbe desiderabile inventare una dimostrazione più elementare del teorema di Mayrhofer, che mi pare debba essere importante per i fondamenti della geometria proiettiva.

§ 5. - Invarianti differenziali di un tessuto. — Torniamo alla considerazione delle schiere triple o dei tessuti e ammettiamo ora restrizioni di derivabilità delle schiere. Siano u, v coordinate puntuali arbitrarie; le tre schiere si possono rappresentare con tre equazioni differenziali $L_i=0$, ove

$$L_i=\varphi_i(u, v)du+\psi_i(u, v)dv. \qquad (i=1, 2, 3)$$

Le forme lineari L_i si possono normalizzare in tal maniera che

$$\sum L_i=0, \qquad \sum \varphi_i=\sum \psi_i=0,$$

$$D=\begin{vmatrix}\varphi_2 & \psi_2\\ \varphi_3 & \psi_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_3 & \psi_3\\ \varphi_1 & \psi_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \psi_1\\ \varphi_2 & \psi_2\end{vmatrix}\neq 0.$$

Ponendo

$$\varrho_i=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial u}-\frac{\partial\varphi_i}{\partial v}\right) \text{ con } \sum\varrho_i=0$$

e

$$\varphi=-\begin{vmatrix}\varrho_2 & \varrho_3\\ \varphi_2 & \varphi_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\varrho_3 & \varrho_1\\ \varphi_3 & \varphi_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\varrho_1 & \varrho_2\\ \varphi_1 & \varphi_2\end{vmatrix},$$

$$\psi=-\begin{vmatrix}\varrho_2 & \varrho_3\\ \psi_2 & \psi_3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\varrho_3 & \varrho_1\\ \psi_3 & \psi_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\varrho_1 & \varrho_2\\ \psi_1 & \psi_2\end{vmatrix}$$

avremo in

$$\varrho=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$$

un invariante relativo del 3° ordine (ponendo $L_i^*=\lambda L_i$ abbiamo $\varrho^*=\varrho:\lambda^2$). *L'identità* $\varrho=0$ *caratterizza i tessuti esagonali.*

Per $\varrho\neq 0$ l'integrale doppio

$$\iint D\varrho du dv$$

è un invariante assoluto e

$$\sqrt{\varrho}L_i=L_i'$$

sono forme lineari invarianti e infine

$$\sum L_i'^2=\varrho\sum L_i^2=Q$$

è una forma quadratica invariantiva del tessuto. Le espressioni

$$\omega_i = \frac{1}{D\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial u}(\psi_i\sqrt{\varrho}) - \frac{\partial}{\partial v}(\varphi_i\sqrt{\varrho})\right\}$$

sono gli invarianti assoluti d'ordine più basso (quart'ordine).

Il sig. DUBOURDIEU ha trovato significati geometrici di tutti questi invarianti.

§ 6. - **Problemi nello spazio.** — I problemi analoghi nello spazio sono più numerosi, più attraenti ed anche più difficili. Mi limiterò a poche indicazioni. Una questione analoga a quella del § 2 è la seguente:

Quando una schiera quadrupla di superficie equivale topologicamente a quattro schiere formate ciascuna di piani paralleli? Si trova facilmente

IV. *Una condizione necessaria e sufficiente è che le curve d'intersezione delle quattro schiere coprano doppiamente le superficie d'una schiera tripla.*

Una serie d'altri teoremi affini a questo trovò MAYRHOFER. DUBOURDIEU estese le considerazioni del § 5 allo spazio.

§ 7. - **Applicazioni alla geometria proiettiva.** — I teoremi della topologia hanno il vantaggio di essere applicabili in tutti gli altri rami della geometria. Anche i nostri teoremi permettono conseguenze interessanti p. es. nella geometria delle superficie considerando il tessuto delle curve di Darboux o di quelle di Segre ed anche nella geometria Riemanniana. Limitiamoci ad una considerazione proiettiva!

Cerchiamo tutte le schiere quadruple di superficie piane equivalenti a quattro fasci di piani paralleli.

La risoluzione, prima trovata da GRAF e SAUER poi da LIEBMANN, è, come osservò DUBOURDIEU, una conseguenza quasi immediata del nostro teorema IV.

La schiera tripla di superficie che figura in questo teorema consiste nel nostro caso di superficie coperte da due schiere di rette, cioè di quadriche. Si vede facilmente che queste quadriche formano un fascio lineare dal punto di vista delle coordinate di piani (cioè una schiera nel senso usuale): i piani della nostra schiera quadrupla sono dunque tangenti a due quadriche. Si vede col teorema IV che la condizione trovata è sufficiente.

Applicando le nostre considerazioni alla geometria proiettiva piana il DUBOURDIEU è riuscito a semplificare notevolmente le teorie di GRONWALL nella cosidetta Nomografia.

Spero che anche in Italia, nella terra prediletta della Geometria, quest'ordine d'idee troverà amici e promotori (1).

---

(1) Indicazioni bibliografiche in W. BLASCHKE: *Topologische Fragen der Differentialgeometrie.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 38 (1929), pp. 193-206.

* * *

Il Prof. BOMPIANI osserva quanto segue:

Se si applicano le considerazioni del BLASCHKE alle linee di SEGRE p. es. di una superficie individuata nel gruppo delle applicabilità proiettive dalle due forme di FUBINI

$$\varphi_2=\beta\gamma du dv, \qquad \varphi_3=\beta\gamma(\beta du^3+\gamma dv^3)$$

si trova per esse, con le notazioni del BLASCHKE § 5,

$$\varphi=\frac{1}{3}\frac{\partial \log\gamma}{\partial u}, \qquad \psi=\frac{1}{3}\frac{\partial \log\beta}{\partial v}$$

$$Q=k\frac{\partial^2 \log \beta/\gamma}{\partial u \partial v}\,du dv \qquad (k=\text{numero});$$

quindi data l'invarianza di φ_2 risulta pure invariante

$$\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log \beta/\gamma}{\partial u \partial v}.$$

È interessante che per questa via si ritrovi proprio l'invariante già trovato dal BOMPIANI (Rendic. Accademia Lincei 1926) considerando la geometria delle superficie nello spazio rigato.

Il risultato di GRAF e SAUER dato al § 2 costituisce un esempio notevole di proprietà topologiche che definiscono un ente algebrico; sarebbe interessante interpretarlo nello S_9 i cui punti rappresentano le curve di 3ª classe per avere suggerimento di possibili estensioni.

L. LUSTERNIK (Moskva - U. S. S. R.)

SUR QUELQUES MÉTHODES TOPOLOGIQUES DANS LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

Mon exposé donne les résultats obtenus par moi en collaboration avec M. SCHNIRELMAN.

Définition de la catégorie. Soit donné un espace topologique R compact et métrique.

L'ensemble fermé sur R est de première catégorie relativement à R si cet ensemble peut être reduit en un point.

L'ensemble M fermé sur R est de catégorie K relativement à R si cet ensemble peut être divisé en K parties de I$^{\text{ère}}$ catégorie et s'il ne peut pas être divisé en un plus petit nombre de telles parties. Nous écrivons: $\operatorname{cat} M = K$.

On peut démontrer facilement les propositions suivantes:

1. $\operatorname{Cat} A + \operatorname{cat} B \geqslant \operatorname{cat}(A+B)$, d'où $\operatorname{cat}(\overline{A-B}) \geqslant \operatorname{cat} A - \operatorname{cat} B$.

2. Désignons par $S(A, \varepsilon)$ la sphère fermée de rayon ε circonscrite à l'ensemble A. Si ε est suffisamment petit, nous avons: $\operatorname{cat} S(A, \varepsilon) = \operatorname{cat} A$.

3. Soit donné une suite d'ensembles A_n des catégories K et leur limite topologique A; nous avons:

$$\operatorname{cat} A_n < \operatorname{cat} A.$$

4. *Classes topologiques.* Nous allons nommer classe topologique l'ensemble des ensembles fermés possédant les propriétés suivantes:

1°) Il est invariable par rapport aux déformations topologiques dans R.

2°) Il est invariable par rapport au passage à la limite. De la définition de la catégorie il résulte que chaque ensemble B résultant de la déformation topologique de l'ensemble fermé A et de la même catégorie que A.

Lemme. - La classe de tous les ensembles $\mathfrak{M}_i$ de catégorie $\geqslant i$ est une classe topologique.

Exemple. - Soit R_n un espace projectif de n dimensions. Il est de catégorie $n+1$ par rapport à soi-même.

On démontre cette proposition directement pour $n = 1, 2$; dans les cas général on se sert de l'indice de KRONECKER.

Le principe du point essentiel. Soit R_n un espace Riemannien à n di-

mensions. Soit donnée sur R_n une fonction arbitraire f, qui est continue de même que ses dérivées partielles des deux premiers ordres.

Désignons par $(f=c)$ une hypersurface sur R définie par l'équation $f=c$, par $(f<c)$ l'ensemble des points où $f<c$ et par $(df=0)$ l'ensemble des points où $df=0$. Soit (M) une classe topologique d'ensembles sur R. La fonction atteint son maximum sur chacun des ensembles de la classe (M). Désignons par C les bornes inférieures de ces maxima. Cette borne est atteinte sur un au moins de ces ensembles. Appelons un tel ensemble « ensemble minimal ».

On ne peut transporter à l'aide de la déformation topologique quelque ensemble de classe (M) dans le domaine $(f<c)$.

Considérons l'hypersurface $(f=c)$. Admettons que dans tout point de cette hypersurface $df\neq 0$. Alors on peut construire la normale à cette hypersurface dans la direction où $f<c$ et cette normale varie continuellement de point en point. On peut transporter tous les points d'un ensemble A appartenant à $(f=c)$ et intérieur à R dans le domaine $(f<c)$, tout point de A en le faisant mouvoir sur la normale qui traverse ce point.

Soit M_0 un ensemble minimal de la classe (M) et tel que l'intersection $M_0\times(f=c)$ est à l'intérieur de R. Il existe au moins un point de cette intersection où $df=0$, car dans le cas opposé on aurait sur une sphère de rayon suffisamment petit inscrit autour de cette intersection $df\neq 0$. Le procédé dont nous avons parlé nous permettra de transporter M_0 dans le domaine $(f<c)$, ce qui est impossible. Ce principe (principe du point essentiel) est une généralisation du minimax-principe de MM. G. BIRKHOFF et M. MORSE.

Théorème du gradient. Admettons que R_n renferme au moins un ensemble de catégorie K. Définissons sur R_n les classes topologiques $(\mathfrak{M}_1)$, $(\mathfrak{M}_2)$,...., $(\mathfrak{M}_k)$ où tous les ensembles de la classe $(\mathfrak{M}_i)$ sont de la catégorie $\geqslant i$. Désignons par $c_1, c_2,...., c_k$ les bornes inférieures des maximums de f sur les ensembles des classes $(\mathfrak{M}_1)$, $(\mathfrak{M}_2)$,...., $(\mathfrak{M}_k)$ respectivement. Nous avons: $c_1\leqslant c_2\leqslant c_k$.

Soit $c_i=c_{i+1}=....=c_{i+p}$ et quelque ensemble minimal $\mathfrak{M}_0^{i+p}$ de la classe $(\mathfrak{M}_{i+p})$ situé à l'intérieur de R_n.

Supposons que l'intersection de $\mathfrak{M}_0^{i+p}\times(f=c)\times(df=0)$ soit de la catégorie $\leqslant p+1$.

Désignons cette intersection par P. Avec ε suffisamment petit

$$\operatorname{cat} S(P,\varepsilon)=\operatorname{cat} P$$
$$\operatorname{cat}[\mathfrak{M}_0^{i+p}-S(P,\varepsilon)]\geqslant i.$$

Désignons cette différence par $\mathfrak{M}_i^0$. Nous avons cat $\mathfrak{M}_i^0\geqslant p$ c'est à dire $\mathfrak{M}_i^0\subset(\mathfrak{M}_i)$ le maximum de f sur $\mathfrak{M}_i^0\leqslant c_i$, parce que $\mathfrak{M}_i^0<\mathfrak{M}_0^{i+p}$ est le maximum de f sur $\mathfrak{M}_0^{i+p}=c_{i+p}=c_i$.

D'autre part, le maximum de f sur $\mathfrak{M}_i^0\geqslant c_i$ est par définition des c_i. Alors le maximum est égal à c_i et $\mathfrak{M}_i^0$ est un ensemble minimal de la classe $(\mathfrak{M}_i)$.

A cause du principe du point essentiel l'intersection $(df=0)\mathfrak{M}_i^0(f=c_i)$ contient le point a où le gradient $df=0$,

$$a \subset \mathfrak{M}_i^0 \times (f=c) \times (df=0) \subset \mathfrak{M}_{i+p}^0(f=c_i) \times (df=0) = P.$$

Mais $a \subset \mathfrak{M}_i^0 = \mathfrak{M}_{i+p}^0 - S(P, \varepsilon)$ donc $a \subset\!\!\!/ P$. Par conséquent l'hypothèse cat $P \leqslant p+1$ est contradictoire.

Admettons que toute classe $(\mathfrak{M}_i)$ contient au moins un ensemble minimal à l'intérieur de R_n.

Deux cas sont possibles :

1°) tous les nombres c_i sont différents. Alors chaque hypersurface $(f=c_i)$ contient au moins un point où $df=0$.

2°) $c_i = c_{i+p}$ l'hypersurface $f=c_i$ contient un ensemble des points de catégorie $\geqslant p+1$ où $df=0$.

Puisque tout ensemble de la catégorie m contient au moins m points différents, notre théorème est exact.

Si R est d'un seul tenant, chaque ensemble sur R de catégorie $\geqslant 2$ est de la puissance du continu.

Exemple. - Le théorème des nombres fondamentaux. Soit F une forme quadratique de N variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit E la forme $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$. Étudions la fonction F sur la sphère $E=1$. Dans les points diamétralement opposés de cette sphère la fonction F admet les mêmes valeurs. Désignons par R_{n-1}, l'espace projectif à $(n-1)$ dimensions, obtenu de la sphère $E=1$ par l'identification de chaque paire de points diametralement opposé. F est défini sur R_{n-1}. La catégorie de R_{n-1} par rapport à lui-même est égale à n. Soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les nombres définis de la même manière que les nombres c_i du paragraphe précédent. D'après le théorème précédent il existe sur chaque hypersurface $F=\lambda_i$ des points où le gradient de df sur R_{n-1} (ou sur la sphère $E=1$) s'annule :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda_i x_i = 0.$$

Soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées d'un de ces points sur la sphère $E=1$. Nous avons dans ces points pour chaque λ_i :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{F - \lambda_i E\} = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

c'est à dire :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_i} - \lambda_i x_i = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Dans les cas où $\lambda_i = \lambda_{i+p}$ il existe un continu de catégorie $\geqslant p+1$ de points sur la sphère $E=1$ où ce système d'équations est résoluble.

Cette théorie subsiste pour toutes les fonctions F telles que

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv F(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

et toute fonction E telle que

$$E(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv E(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

et l'hypersurface $E=1$ étant homéomorphe à la sphère $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$.

Par exemple: F est une forme arbitraire d'exposant pair, $E = \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}$.

Pour illustrer les applications des théories développées dans la géométrie différentielle, démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME. - Sur chaque surface fermée de genre 0 et sans points essentiels, il existe au moins:

1°) trois lignes géodésiques fermées de longueurs différentes.

2°) Une famille de géodésiques fermées de même longueur, recouvrant la surface de telle manière que sur toute paire de points de la surface passe une ligne de la famille (comme sur la sphère).

Soit K est une surface de genre 0 sans points essentiels et L une sphère de rayon 1. Désignons par h un nombre positif tel que tout arc géodésique de longueur h est une ligne de longueur minimale passant par ces points. Faisons la correspondance continue et univoque entre la surface K et la sphère L. Prenons l'entier n tel qu'à toute paire de points sur la sphère de distance $\frac{2\pi}{n}$ (sur la sphère) correspond une paire de point de K liée par un arc géodésique de longueur $\leqslant h$. Aux sommets du polygone régulier à n côtés sur la sphère il correspond sur la surface K, n sommets qui peuvent être liés respectivement par des arcs géodésiques de longueurs inférieures à h. Ces géodésiques forment sur K un polygone géodésique qui correspond au polygone régulier sur la sphère. Il est facile de voir que cette correspondance est continue.

Trois familles de lignes sur la surface.

Construisons sur la sphère L trois familles de cercles suivants:

1°) La famille A_1 des grands cercles de diamètre commun.

2°) La famille A_2 de tous les grands cercles.

3°) La famille A_3 de tous les cercles.

La famille A_1 recouvre la surface. Cette propriété reste invariable par rapport à toute déformation continue de la famille A_1.

En considérant chaque cercle comme élément d'un espace abstrait et en identifiant à un seul point d'espace abstrait tous les cercles dégénérés en un point, la famille A_3 devient un espace projectif, A_2 un plan projectif contenu dans cet espace, A_1 une droite projective contenu dans le même espace.

Toute famille de cercles non recouvrant la sphère L est par rapport à cet

espace de la catégorie 1, les familles A_1, A_2, A_3 sont des catégories 2, 3, 4, respectivement.

Considérons les 3 familles des polygones réguliers à n côtés A_1', A_2', A_3' inscrits respectivement dans les cercles des familles A_1, A_2, A_3. À ces trois familles correspondent trois familles de polygones réguliers sur la sphère et trois familles des polygones géodésiques sur la surface K, ayant la longueur de ces côtés plus courts que h. Ces familles recouvrent K et cette propriété reste invariable par rapport à toute déformation topologique.

Considérons l'espace R_{2n} abstrait, dont les points sont les polygones géodésiques, ayant les côtés plus courts que h. Aux familles A_1', A_2', A_3' correspondent les continus a_1, a_2, a_3 dans R_{2n}. Tous ces continus sont de catégorie $\geqslant 1$. Il est facile de voir qu'ils sont des catégories $\geqslant 2, 3, 4$ respectivement.

THÉORÈME. - À tout continu de catégorie P dans R_{2n} correspond une telle famille de polygones que par tout $P-1$ point de K passe aux moins un polygone de la famille.

On démontre facilement le théorème à l'aide de l'induction complète.

Désignons par (a_1), (a_2), (a_3) les familles des ensembles de catégories 2, 3, 4, sur R_{2n} respectivement.

Soit la fonction f qui est définie sur R_{2n} comme la longueur du polygone respectif.

Désignons par c_1, c_2, c_3 les bornes inférieures de la fonction f sur les ensembles des classes 2, 3, 4, respectivement. On a $0<c\leqslant c\leqslant c<nh$.

Il existe des ensembles minimaux a_1^0, a_2^0, a_3^0 des classes (a_1), (a_2), (a_3) sur lesquels les maximums de f sont égaux à c_1, c_2, c_3 respectivement. A ces ensembles correspondent trois familles de polygones (c_1^0), (c_2^0), (c_3^0) ayant les côtés $\leqslant h$.

Toutes familles de polygones géodésiques peuvent être déformées continuellement en familles de polygones géodésiques aux côtés rigoureusement plus petits que h, sans que le périmètre de quelque polygone s'agrandisse. C'est à dire il existe des ensembles minimaux de familles (a_1), (a_2), (a_3) continues à l'intérieur de R_{2n}.

Trois cas sont possibles:

1°) $c_1<c_2<c_3$: chaque ensemble $(f=c_1)$, $(f=c_2)$, $(f=c_3)$ contient au moins un point où $df=0$. À ces points correspondent des lignes géodésiques fermées de longueur c_1, c_2, c_3 respectivement.

2°) $c_1<c_2=c_3$ (ou $c_1=c_2<c_3$).

L'hypersurface $(f=c_2)$ (ou $f=c_1$) contient un continu de catégorie 2 des points où $df=0$. À ces points correspond une famille des lignes géodésiques fermées recouvrant la surface K. Il existe aussi au moins une ligne géodésique de longueur c_2.

3°) $c_1=c_2=c_3=c$.

Dans ce cas il existe un ensemble de catégorie 3 des points où sur l'hypersurface $(f=c)$ dans R_{2n}; à ces points correspond une famille de lignes géodésiques fermées recouvrant K de telle manière que sur chaque paire de points de la surface passe une géodésique fermée de longueur c.

Par une modification de la méthode développée ci-dessus, on peut démontrer l'existence de 3 géodésiques ne se rencontrant nulle part sur la surface et dont aucune de se confond avec une autre répétée quelques fois.

G. FUBINI (Torino - Italia)

LE TRASFORMAZIONI DI LAPLACE, DI LÉVY E DI MOUTARD PER LE IPERSUPERFICIE

Le trasformazioni, accennate nel titolo, per un'equazione

$$z_{xy} + az_x + bz_y + cz = 0 \tag{1}$$

non hanno solo un'importanza analitica, ma per opera di DARBOUX, di GUICHARD, di DEMOULIN, di TZITZEICA, di EINSENHART hanno, creando la teoria delle *reti*, dato origine ad uno dei capitoli più vasti e fecondi della geometria differenziale. Una *rete* in uno spazio S_n ad n dimensioni è una particolare superficie V_2 a *due* dimensioni; sorge spontanea la domanda se tale teoria si possa estendere alle ipersuperficie V_{n-1} ad $n-1$ dimensioni.

Ho dimostrato che ciò avviene per alcune classi di ipersuperficie, le quali (almeno se trascuriamo alcuni casi particolari da me non approfonditi perchè probabilmente di minore interesse) soddisfano ad un sistema di equazioni di LAPLACE. Vale per queste trasformazioni un teorema affatto analogo a quello del LÉVY per le equazioni (1), cosicchè si potranno nel caso attuale estendere probabilmente anche le più generali trasformazioni (m, n) del DARBOUX.

Vale pure un'interpretazione geometrica affatto analoga a quella valida per lo spazio a tre dimensioni, come si riscontra introducendo in S_n la nozione di congruenza (sistema ∞^{n-1}) di rette coniugata od armonica ad una data ipersuperficie.

Lo sviluppo completo dei calcoli sarà presentato alla R. Accademia dei Lincei per essere inserito nei suoi Rendiconti. Le difficoltà analitiche si poterono vincere usando di un algoritmo dovuto al RICCI.

E. ČECH (Brno - Cecoslovacchia)

UNA GENERALIZZAZIONE DELLA DEFORMAZIONE PROIETTIVA

Siano S, S' due superficie non rigate dello spazio ordinario in corrispondenza biunivoca. Tale corrispondenza K si chiama, secondo FUBINI, *deformazione proiettiva*, se possiede la seguente proprietà: Scelto comunque un punto A di S, si può sostituire S' con una superficie S^* ad essa collineare in modo che S e S^* abbiano, nel punto A, un contatto analitico del *secondo ordine*. Deformazioni proiettive sono corrispondenze molto particolari; infatti, come ha dimostrato E. CARTAN, prescindendo dal caso banale che K si riduca ad una collineazione, la deformazione proiettiva non è possibile che se S (e naturalmente anche S') appartiene ad una certa classe di superficie dipendente da sei funzioni arbitrarie di un argomento.

Se invece, nella definizione ricordata, non si richiede che il contatto analitico del *primo ordine*, la proprietà si verifica *sempre* comunque si scelgano S, S' e la corrispondenza K. Ora supponiamo, che le asintotiche del *primo* sistema di S corrispondano alle asintotiche di S'. Allora può accadere, che, nel punto A, l'asintotica del primo sistema di S abbia un contatto del secondo ordine con l'asintotica corrispondente di S^*; se questo fatto si verifica in tutti i punti A di S, chiamerò K una *semideformazione proiettiva* (rispetto al primo sistema di asintotiche). Il nome conviene, giacchè si dimostra facilmente che K è semideformazione proiettiva simultaneamente per tutti e due sistemi di asintotiche allora e allora soltanto che è una deformazione proiettiva.

Si scelgano comunque due superficie S, S' e alle asintotiche del primo sistema di S si facciano corrispondere, secondo, una legge qualsiasi, asintotiche di S'. Allora la semideformazione proiettiva fra S, S', che trasformi le asintotiche del primo sistema secondo la legge data, esiste sempre; anzi è possibile ancora, scelta una curva generica di S, scegliere ad arbitrio la curva corrispondente di S'; allora esistono *due* semideformazioni proiettive fra S e S' che soddisfano a tutte le condizioni poste.

Vi è un caso particolare notevole della semideformazione proiettiva rispetto al primo sistema di asintotiche; quello cioè in cui anche alle asintotiche del

secondo sistema di S corrispondono asintotiche di S'; il tal caso parlerò di una *semideformazione asintotica* (relativa al primo sistema di asintotiche).

Per una semideformazione asintotica, la superficie S può ancora essere scelta comunque; ma data S, la superficie S' deve appartenere ad una famiglia dipendente da cinque funzioni arbitrarie di un argomento.

A. TERRACINI (Torino - Italia)

UN NUOVO PROBLEMA DI GEOMETRIA PROIETTIVA DIFFERENZIALE

Questa comunicazione origina dalla medesima preoccupazione che ha spinto il prof. ČECH alle ricerche di cui egli ha riferito in questa stessa occasione; muove cioè dalla constatazione che, mentre il problema della applicabilità metrica investe tutte le superficie del nostro spazio, il problema dell'applicabilità proiettiva, al quale sono legati così brillantemente i nomi di FUBINI e di CARTAN, si pone solamente per la classe molto ristretta — se pure tanto interessante a più di un riguardo — delle superficie R.

Ma, partiti da uno stesso punto, il prof. ČECH e io abbiamo proceduto per vie diverse, e siamo giunti a risultati completamente indipendenti fra loro.

Osservo subito che non ritengo certamente che le *quasi-applicabilità proiettiva* di cui intendo parlare abbiano la medesima importanza che le applicabilità proiettive di FUBINI: mi pare tuttavia che esse si presentino abbastanza spontaneamente per avere diritto a qualche considerazione in questo capitolo della geometria differenziale.

Parto dalla osservazione ovvia che la ordinaria isometria di due superficie S e S' si può pensare come una corrispondenza puntuale fra esse tale che, sostituite alle S, S' le loro proiezioni p. es. ortogonali o, se no, eseguite secondo direzioni arbitrarie, sopra i piani tangenti in due punti corrispondenti, la corrispondenza che così nasce fra questi sia, nell'intorno del 1° ordine dei punti di contatto, una uguaglianza.

Ebbene, continuiamo a sostituire alle S, S' le loro proiezioni eseguite sui piani tangenti in punti corrispondenti; e domandiamoci anzitutto se è possibile ottenere, scegliendo opportunamente i centri di proiezione, che questi piani tangenti risultino *omografici* negli intorni del 2° ordine dei punti di contatto. Chiamerò provvisoriamente questa proprietà, proprietà γ. Non è senz'altro in questo modo che io intendo definire le mie quasi applicabilità proiettive: la proprietà γ sarà soltanto il punto di partenza. Invero, la proprietà γ è troppo facile da soddisfare; se è lecito così esprimersi, essa sussiste per quasi tutte le corrispondenze. Infatti l'esame della questione mostra subito anzitutto che i centri di proiezione in sè non hanno alcuna importanza: ciò che importa è soltanto la retta che congiunge ogni centro di proiezione y o y' al punto x

della S o della x' della S' cui esso si riferisce. Nasce così la considerazione di una congruenza K luogo della retta xy, e di un'analoga congruenza K'. Ebbene, la proprietà γ equivale a quest'altra, che nella corrispondenza puntuale fra S e S' al sistema di *linee assiali* della S associato alla congruenza K corrisponda sulla S' quello delle linee assiali associate alla K'. Quindi si può applicare un teorema di BOMPIANI (1), e ne risulta che, salvo che in alcuni casi particolari su cui non ci soffermiamo, assegnata una corrispondenza puntuale generica fra due superficie generiche S e S', si possono sempre trovare le congruenze K e K' in modo che risulti verificata la proprietà γ. Siamo dunque andati all'eccesso opposto a quello che rilevavo da principio nella teoria di FUBINI. Cerchiamo pertanto di imporre un'ulteriore condizione. E allora rileviamo che l'enunciato della proprietà γ ricorda un po' la definizione di FUBINI della applicabilità proiettiva, perchè secondo la proprietà γ, sostituite alle S, S' le loro opportune proiezioni sui piani tangenti in punti corrispondenti x, x', esiste un'omografia M *fra questi piani*, tale che ogni curva del secondo piano passante per x' viene portata in una curva osculatrice in x alla omologa del primo piano. (Osserviamo, a questo proposito, che, dette u e v le coordinate curvilinee su entrambe le superficie, rappresentando i punti dei piani tangenti a S, S' rispettivamente con

$$x+\eta\frac{\partial x}{\partial u}+\zeta\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad x'+\eta'\frac{\partial x'}{\partial u}+\zeta'\frac{\partial x'}{\partial v},$$

l'omografia in questione ha equazioni del tipo

$$(1) \qquad \begin{cases} \eta' = \dfrac{\eta}{1+h\eta+k\zeta} \\ \zeta' = \dfrac{\zeta}{1+h\eta+k\zeta} \end{cases}$$

con h, k funzioni di u, v). Invece nella applicabilità proiettiva di FUBINI si opera in modo analogo, ma non fra piani tangenti, bensì direttamente fra le superficie; cioè si esige l'esistenza di un'omografia *spaziale* M che porti x' in x in modo che ogni curva *della* S' passante per x' venga portata in una curva osculatrice in x alla omologa della S.

Ora nel caso di FUBINI le infinite omografie M relative alle varie coppie di punti corrispondenti soddisfano tutte quante, come conseguenza della definizione stessa, a una medesima legge, e cioè che è possibile normare le coordinate dei punti della S e della S' in modo che *in ogni omografia* M *si corrispondano non solo* x *e* x', *ma anche* x_u *e* x_u', x_v *e* x_v'. Invece nel nostro caso questa ulteriore condizione non è conseguenza della proprietà γ. *Ed è appunto mediante questa ulteriore condizione, presa essa pure a prestito*

---

(1) *Proprietà generali della rappresentazione puntuale fra due superficie.* Ann. di Matematica, s. IV, t. I, 1924.

dalla ordinaria applicabilità proiettiva, aggiunta alla proprietà γ, *che noi definiamo le nostre quasi applicabilità proiettive.* La nuova condizione si presenta analiticamente nel modo più spontaneo (1), perchè equivale a porre nelle (1) $h=k=0$; vale a dire, a dare alle equazioni della omografia M fra piani tangenti omologhi la forma semplicissima

$$\eta'=\eta\,, \qquad \zeta'=\zeta\,.$$

La quasi applicabilità proiettiva, in base a quanto precede, interessa in realtà le coppie di figure formate ciascuna da una superficie S e da una congruenza K di rette condotte per i singoli suoi punti. Si avranno cioè da considerare due superficie S e S' riferite fra loro, e le due congruenze K e K' attraverso le quali si realizza la quasi applicabilità. Il problema che allora si pone in prima linea è questo:

Data la superficie S *e la congruenza* K, *cercare tutte le possibili superficie* S' *e congruenze* K' *tali che* S *e* S' *risultino quasi applicabili per il tramite delle congruenze* K *e* K'.

Un primo esame del problema conduce al risultato che la ricerca di S' e K', date S e K, si riconduce a un sistema di 6 equazioni alle derivate parziali fra altrettante funzioni incognite di u, v. Il risultato merita naturalmente di essere approfondito e in generale e in vari casi particolari.

Ma il problema della quasi applicabilità sarà anche da considerare altrimenti, e cioè:

Date due superficie, cercare in tutti i modi possibili di riferirle fra loro, così che esse risultino quasi applicabili.

Per esempio il problema si risolve facilmente per le coppie di quadriche; dove tutto si riduce a trovare sulla prima quadrica le linee corrispondenti alle generatrici della seconda. Si può assegnare ad arbitrio uno di questi sistemi, e allora la ricerca dell'altro dipende da un'equazione di LAPLACE ad invarianti eguali.

Chiudiamo accennando alle superficie quasi applicabili sul piano: se si tralascia la soluzione banale fornita dalle proiezioni piane di una superficie eseguite da un punto fisso arbitrario — e queste effettivamente per ogni superficie forniscono una sua quasi applicabilità sul piano in questione — si ha che ogni superficie quasi applicabile sul piano è una superficie R, o eventualmente R_0. Ma non basta: prendiamo il caso più generale, quello delle superficie R. Ricordo che FUBINI ha dimostrato che quando una prima congruenza R, Σ, si deforma proiettivamente in una analoga Σ', i punti delle rette di Σ situati in un piano π

(1) Ecco, del resto, una semplice interpretazione geometrica (per le superficie non piane): le infinite omografie M fra piani tangenti corrispondenti sono tali da portare ogni congruenza armonica alla prima superficie in una congruenza armonica alla seconda.

vengono trasportati nei punti di una nuova superficie R, che chiamo S. Ebbene, si trova che *è proprio mediante questa trasformazione fra* S *e* π *che si realizza la più generale quasi applicabilità proiettiva di una superficie su un piano* (escluso, si intende il caso banale sopra accennato).

Osservo, terminando, che il concetto di cui mi sono servito appare suscettibile di un campo di applicazione assai più vasto, sia sostituendo alle superficie varietà qualunque, sia adottando, in luogo delle omografie, altre corrispondenze.

ENEA BORTOLOTTI (Bologna - Italia)

GEOMETRIA DIFFERENZIALE METRICA NELLO SPAZIO RIGATO

1. - Lo studio degli enti dello spazio rigato dal punto di vista della geometria metrica differenziale è stato iniziato, come è noto, nel 1859 dal KUMMER, che nella sua classica memoria « Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme » [1] costruì una completa teoria delle congruenze di rette (nell'aspetto differenziale metrico). Rammenterò che questa teoria è sostanzialmente basata sulla considerazione di due forme quadratiche differenziali:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = S d\xi^2 = (d\theta)^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 \\ \quad = a_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu \end{cases} \qquad \left(a_{\lambda\mu} = S \frac{\partial \xi}{\partial u^\lambda} \frac{\partial \xi}{\partial u^\mu} \right)$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \psi = S dx d\xi = e du^2 + (f + f') du dv + g dv^2 \\ \quad = c_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu \end{cases} \qquad \left(c_{\lambda\mu} = S \frac{\partial \xi}{\partial u^\lambda} \frac{\partial x}{\partial u^\mu} \right)$$

$$(\lambda, \mu, \nu, \tau, \omega = 1, 2; \quad u^1 = u, \quad u^2 = v)$$

ove (x, y, z) è un punto scelto con legge arbitraria sulla retta variabile della congruenza, e (ξ, η, ζ) sono i coseni direttori di questa retta; $d\theta$ è la parte principale dell'angolo di due rette infinitamente vicine della congruenza medesima.

Nel 1908 il SANNIA [2] indicava un nuovo sviluppo della teoria delle congruenze rettilinee, che prendeva vari elementi dalla trattazione del KUMMER, ma alla forma ψ, che non è intrinseca alla congruenza, sostituiva una forma differenziale di significato intrinseco:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varphi_2 = d\mu = (dr)^2 = D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2 \\ \quad = b_{\lambda\mu} du^\lambda du^\mu \end{cases} \qquad \left(b_{\lambda\mu} = \frac{\varepsilon^{\nu\omega}}{2} (a_{\lambda\nu} c_{\omega\mu} + a_{\mu\nu} c_{\omega\lambda}) \right)$$

ove $d\mu$ è la parte principale del *momento*, e dr è, secondo SEGRE, la parte principale dell'*intervallo* [3] di due rette infinitamente vicine. Il SANNIA mostrò

---

[1] Journal f. r. und a. Mathem. (Crelle) t. 57, 1860, p. 189-230.

[2] Nella memoria: *Nuova esposizione della geometria infinitesimale delle congruenze rettilinee.* (Annali di Matem., ser. III, t. 15, 1908, p. 143-185).

La seconda forma del SANNIA veramente è $-\varphi_2$.

[3] Ved. C. SEGRE, *Sulle geometrie metriche dei complessi lineari e delle sfere e sulle*

come la congruenza sia intrinsecamente individuata, nel gruppo dei movimenti, dalle due forme φ_1 e φ_2, purchè sussistano tra i coefficienti di queste due certe relazioni (che più innanzi avrò occasione di rammentare: le (28) n. 5).

Ricorderò ancora che nel 1910 il SANNIA estese la sua trattazione ai *complessi* di rette, ponendo ancora a base della teoria le forme $\varphi_1=(d\theta)^2$, $\varphi_2=(dr)^2$. Naturalmente queste saranno forme *ternarie* pei complessi, e risulterebbero forme *quaternarie* se la totalità di rette presa in considerazione fosse l'intero spazio rigato (4).

Tutte le proprietà differenziali metriche degli enti dello spazio rigato si possono esprimere mediante i coefficienti di quelle due forme φ_1, φ_2. Tali proprietà, oltrechè nelle esposizioni sistematiche che ho rammentato e nelle altre di KOENIGS, ZINDLER, ecc. sono state estesamente studiate da moltissimi autori e nei modi più svariati. Non intendo ora fare una rassegna di questi lavori nè dei risultati acquisiti in essi: ricorderò soltanto che in tali lavori gli enti dello spazio rigato, piuttosto che come tali — o, se si vuole, come totalità di punti della Q_4^2 di S_5 che rappresenta lo spazio rigato — sono generalmente studiati in relazione con enti dello spazio di punti o di piani (5); ad es. le congruenze, in relazione con una superficie (arbitraria) di partenza, oppure con le falde focali, con la superficie media o con altre superficie ad esse intrinsecamente legate. In effetto, questo modo di trattazione è il più agevole e anche il più naturale, e non va posta in dubbio la sua efficacia ed utilità. Ma pur non pensando affatto a voler dare qualche cosa che possa sostituire il metodo classico, ho creduto non inutile fatica il porre le basi per una trattazione più propriamente « liniengeometrische » della geometria differenziale metrica nello spazio rigato — tale cioè, che non ricorra ad enti o a rappresentazioni analitiche estranei a questo — quale, per la geometria differenziale proiettiva, ha dato recentemente il FUBINI (6).

---

loro mutue analogie. (Atti Accad. Torino, vol. 19, 1883-84, p. 159-186) p. 171. Ricorderò che il quadrato dell'intervallo fra due rette è il prodotto della loro minima distanza per la tangente del loro angolo. L'interesse di questo invariante sta nel fatto che esso è, nella geometria metrica dello spazio dei complessi lineari, l'elemento che corrisponde alla *distanza* di due punti nello spazio delle sfere: come una sfera è il luogo dei punti a data distanza da un punto fisso, così un complesso lineare è il luogo delle rette a dato intervallo da una retta fissa. Tale intervallo costante è il *parametro* del complesso. Ved. SEGRE, l. c. p. 177.

(4) S'intende però che φ_2 è sempre riducibile a forma binaria.

(5) Fa parte a sè il metodo introdotto da E. STUDY (*Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903), che si collega, mediante il « principio di trasporto » (Übertragungsprinzip) alla nozione di *numeri duali* secondo CLIFFORD. Tale metodo è stato usato recentemente dal BLASCHKE nelle sue *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (ultimo Capitolo del Vol. I), e da M. M. SLOTNICK (*A Method of applying tensor Analysis to the study of rectilinear congruences*, Mathem. Zeitschrift, B. 28, 1928, pp. 107-115).

(6) FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale.* (Bologna, 1926-27), Cap. XI, p. 541-604.

2. - Anzitutto, occorre introdurre un'adeguata rappresentazione analitica: mi varrò di quella che ha usato il SEGRE in un lavoro del 1883 ([7]), completata con una opportuna normalizzazione. Siano x^i $(i, j, h, k, r, s, t = 1, 2, ..., 6)$ coordinate proiettive omogenee dei complessi lineari, considerati come punti di un S_5 projettivo. Sia

$$R_{xx} = R_{ik} x^i x^k = 0 \tag{4}$$

l'equazione della Q_4^2 delle rette, sia

$$\Omega_{xx} = \Omega_{ik} x^i x^k = 0 \tag{5}$$

l'equazione del complesso quadratico che rappresenta le rette isotrope (cioè, appoggiate all'assoluto: comprese dunque tutte le rette del piano improprio). La $\Omega_{xx} = 0$ è una quadrica tre volte specializzata di S_5, coll'S_2-vertice su Q_4^2: analiticamente ciò è espresso dalle 21 relazioni

$$R^{ik} \Omega_{ir} \Omega_{ks} = 0 \quad ([8]) \qquad (r, s = 1, 2, ... 6). \tag{6}$$

Gli invarianti di uno o due complessi lineari (o, in particolare, rette), si esprimono allora:

$$I = \frac{R_{\xi\bar{\xi}}}{\sqrt{R_{\xi\xi}}\sqrt{R_{\bar{\xi}\bar{\xi}}}}, \qquad \cos\theta = \frac{\Omega_{\xi\bar{\xi}}}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\sqrt{\Omega_{\bar{\xi}\bar{\xi}}}} \tag{7}$$

(I = invariante proiettivo di due complessi non speciali; θ = angolo degli assi) e, a meno di un fattore numerico, che può rendersi eguale ad 1 normalizzando opportunamente i coefficienti di R_{xx} e quelli di Ω_{xx},

$$p = -\frac{1}{2}\frac{R_{\xi\xi}}{\Omega_{\xi\xi}}, \qquad \mu = \frac{R_{\xi\bar{\xi}}}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}\sqrt{\Omega_{\bar{\xi}\bar{\xi}}}}, \qquad r^2 = \frac{R_{\xi\bar{\xi}}}{\Omega_{\xi\bar{\xi}}} \tag{8}$$

(p = parametro del complesso ξ, μ = momento ed r = intervallo di ξ, $\bar{\xi}$).

A proposito della sopra accennata normalizzazione, notiamo che, fissando l'unità di lunghezza nello spazio (euclideo) dei punti, cioè, assegnando un complesso ξ_0 (arbitrariamente scelto, purchè non speciale) come complesso di parametro 1, i coefficienti R_{ik}, Ω_{ik} vengono determinati appunto a meno di un *comune* fattore numerico. (In effetto, ciò equivale a sostituire $\dfrac{R_{ik}}{-\frac{1}{2}R_{\xi_0\xi_0}}$, $\dfrac{\Omega_{ik}}{\Omega_{\xi_0\xi_0}}$ ad R_{ik}, Ω_{ik}).

Per completare la normalizzazione delle R_{ik}, Ω_{ik}, basta ad es. imporre al determinante $R = |R_{ik}|$ (certo $\neq 0$) di mantenersi eguale a una costante assegnata: porremo

$$R = |R_{ik}| = -1. \tag{9}$$

([7]) Già sopra ricordato, l. c. ([3]).

([8]) Date, sotto forma alquanto diversa, dal SEGRE: l. c., p. 169. Con R^{ik} indico l'elemento reciproco di R_{ik} in $|R_{ik}|$.

Infine, introduciamo anche una normalizzazione delle coordinate ξ^i di complesso lineare (e, in particolare, di retta) mediante la condizione

$$\Omega_{\xi\xi}=1 \quad (9). \tag{10}$$

Allora il parametro p di un complesso ξ si esprime:

$$-2p=R_{\xi\xi}. \tag{11}$$

L'asse di un complesso ξ di parametro p è la retta:

$$x^i=\xi^i+pR^{ik}\Omega_{kt}\xi^t \tag{12}$$

e inversamente si ha, per le (6),

$$\xi^i=x^i-pR^{ik}\Omega_{kt}x^t; \tag{13}$$

più in generale, se il complesso ξ ha parametro p (il che potrà esprimersi scrivendo: *par* $\xi=p$), il complesso seguente ha lo stesso asse di ξ (diremo: è *coassiale* a ξ) e ha parametro q:

$$\eta^i=\xi^i+(p-q)R^{ik}\Omega_{kt}\xi^t. \tag{14}$$

Notiamo che per ogni complesso lineare ξ (speciale o no) le $R^{ik}\Omega_{kt}\xi^t$ *sono le coordinate della retta impropria normale al suo asse.*

Sei quantità ξ^i soggette alle condizioni

$$R_{x\xi}=0, \qquad \Omega_{x\xi}=0 \tag{15}$$

definiscono un *vettore* di spazio rigato uscente dalla retta x, del quale $\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}$ è il *modulo*; se il vettore è unitario, esse sono le coordinate normalizzate di un complesso lineare, che ha l'asse ortogonale ed incidente alla retta x. Un vettore unitario di spazio rigato uscente da una retta x individua una *direzione di spazio rigato* per questa retta; il parametro del corrispondente complesso è un inva-

---

(9) Restano esclusi da questa normalizzazione le rette isotrope e i complessi aventi per assi rette isotrope. Le coordinate $\overline{\xi}^i$ normalizzate e i coefficienti $\overline{R}_{ik}$, $\overline{\Omega}_{ik}$ normalizzati risultano dati dalle formule:

$$\overline{\xi}^i=\frac{\xi^i}{\sqrt{\Omega_{\xi\xi}}}\left(-\frac{1}{2}\frac{R_{\xi_0\xi_0}}{\Omega_{\xi_0\xi_0}}\right)^{-\frac{1}{2}}(-R)^{\frac{1}{8}}, \quad \overline{R}_{ik}=R_{ik}(-R)^{-\frac{1}{4}}, \quad \overline{\Omega}_{ik}=\Omega_{ik}\left(-\frac{1}{2}\frac{R_{\xi_0\xi_0}}{\Omega_{\xi_0\xi_0}}\right)^{\frac{1}{2}}(-R)^{-\frac{1}{4}}.$$

Indicheremo d'ora innanzi semplicemente con ξ^i e con R_{ik}, Ω_{ik} le coordinate e i coefficienti normalizzati. Le trasformazioni di coordinate ξ^i per le quali le condizioni dette sopra, circa le R_{ik}, le Ω_{ik} e le stesse ξ^i, hanno carattere *invariante* (alle quali naturalmente dobbiamo intendere di limitarci) sono in sostanza, nello spazio di punti, i soli *movimenti* del sistema di riferimento; tale limitazione è naturale ed opportuna, data la natura *metrica* dei problemi di cui ci occupiamo.

riante metrico di tale direzione, ed è precisamente il parametro del moto elicoidale dello spazio (di punti), attorno alla retta di minima distanza tra la retta x considerata e la retta successiva nella direzione supposta, come asse, che sovrappone la prima alla seconda. Esso è anche il *parametro distributore* comune a tutte le rigate uscenti dalla retta x con quella direzione. Se x^i, x^i+dx^i sono le coordinate (normalizzate) di due rette infinitamente vicine, il parametro della direzione di spazio rigato, uscente da x^i, che esse definiscono, è

$$p=\frac{-\frac{1}{2}R_{ik}dx^i dx^k}{\Omega_{ik}dx^i dx^k}. \tag{16}$$

Il numeratore e il denominatore di questo rapporto sono precisamente le forme fondamentali $\varphi_2=(dr)^2$, $\varphi_1=(d\theta)^2$ del SANNIA. Nei casi: $p=0$, p indet. si ha una direzione *singolare*, conica o cilindrica.

Il significato del *modulo* di un vettore di spazio rigato, ξ^i, uscente da una retta x^i è questo: a meno del segno esso *è la tangente dell'angolo che l'asse del complesso di coordinate proporzionali a* $x^i+\xi^i$ *fa con la retta* x^i.

3. - Ciò premesso: il primo passo per costruire una trattazione *autonoma* della geometria differenziale (metrica) nello spazio rigato consiste nello stabilire le nozioni di *geodetiche*, e di *parallelismo*. Teniamo presente che la proprietà *esterna* che caratterizza, su di una V_n in V_{n+1}, le linee geodetiche può porsi sotto questa forma: le geodetiche sono il sistema *assiale* (secondo BOMPIANI) associato alla congruenza delle normali. Ora: nell'S_5 dei complessi lineari, la normale in x^i alla Q_4^2 delle rette nella metrica che ha $\Omega_{xx}=0$ come assoluto — che corrisponde poi alla *metrica angolare* nello spazio rigato — è, come si vede subito, la congiungente di x^i ad $R^{ik}\Omega_{kt}x^t$, punto rappresentativo della retta impropria normale alla retta x^i. Siamo condotti così a considerare il sistema ∞^6 di rigate, tali che la schiera rigata osculatrice a ciascuna di esse lungo una retta x^i contenga anche la retta impropria normale ad essa, $R^{ik}\Omega_{kt}x^t$, cioè, sia (una schiera di) un *paraboloide equilatero*, di cui x^i è generatrice principale (cioè, passante pel vertice). Ma la schiera incidente alla schiera rigata osculatrice a una rigata lungo una retta è formata, come è noto, dalle tangenti alle asintotiche curvilinee. Dunque le rigate che stiamo considerando sono gli *elicoidi rigati d'area minima.*

Si vede agevolmente che queste rigate soddisfano al problema variazionale

$$\delta\int\sqrt{\varphi_1}=0, \tag{17}$$

come è geometricamente prevedibile. Però le geodetiche di φ_1 sono, manifestamente, *tutte le rigate a piano direttore*; cosicchè la proprietà ora detta non è caratteristica pel sistema assiale in considerazione. Ma le rigate di questo

sistema (cioè, gli elicoidi rigati d'area minima) *sono estremali anche dell'altro problema di variazione*

$$\delta \int \sqrt{\varphi_2} = 0, \tag{18}$$

cioè, minimizzano non soltanto la lunghezza d'arco della immagine sferica della rigata $\left(\int \sqrt{\varphi_1}\right)$, ma anche l'intervallo integrale $\left(\int \sqrt{\varphi_2}\right)$. E questa è proprietà *caratteristica*. In effetto, le geodetiche di φ_2 sono le rigate integrali del sistema

$$x''^i + R_{x'x'} R^{ik} \Omega_{kt} x^t + x^i = 0 \quad \left(x'^i = \frac{dx^i}{ds},\ x''^i = \frac{d^2x^i}{ds^2},\ ds^2 = \varphi_1\right) \tag{19}$$

e di qui si ha subito che la schiera quadrica che si appoggia a una generatrice di una tale rigata integrale e alle due generatrici successive è formata appunto da rette incidenti e ortogonali a quella generatrice. Infine, vediamo dunque come sia giustificato assumere gli elicoidi rigati d'area minima come *rigate geodetiche* nello spazio rigato. Lungo una tale rigata è, manifestamente, costante il *parametro* della direzione tangente - proprietà non caratteristica, s'intende.

Veniamo ora alla nozione di *parallelismo*. Perchè sussista l'autoparallelismo delle geodetiche siamo condotti a ricorrere senz'altro al parallelismo secondo LEVI-CIVITA su Q_4^2 rispetto a φ_2. Tale parallelismo, per una serie di vettori $\xi^i(s)$ applicati alle rette di una rigata $x^i = x^i(s)$ è espresso dalle equazioni

$$\xi'^i + R_{x'\xi} R^{ik} \Omega_{kt} x^t + \Omega_{x'\xi} x^i = 0. \tag{20}$$

Da queste equazioni si ha subito che in tale trasporto non soltanto restano invariati il *modulo* del vettore ξ trasportato — che d'ora innanzi supporremo unitario — e, se la rigata di trasporto è geodetica, l'*angolo* della direzione di trasporto su quella trasportata; ma anche — in ogni caso — il *parametro* della direzione trasportata; e così pure, l'*invariante proiettivo I*, l'intervallo r e ogni altro invariante metrico di questa direzione e di quella tangente alla rigata di trasporto, se questa è geodetica. Dunque: *le serie di direzioni parallele rispetto a φ_2 lo sono anche rispetto a φ_1*; e si ha subito, pel trasporto parallelo infinitesimale, la seguente costruzione geometrica:

Siano $\bar{r}$, s due rette infinitamente vicine ad una retta r (e sghembe con essa), cioè, siano $(r, \bar{r})$ (r, s) due direzioni (non singolari) di spazio rigato per r. *La direzione parallela in $\bar{r}$, per trasporto lungo $(r, \bar{r})$, alla direzione (r, s) uscente da r è la direzione $(\bar{r}, \bar{s})$, ove $\bar{s}$ è la retta in cui si porta s nel moto elicoidale dello spazio, attorno alla retta di minima distanza di r, $\bar{r}$ come asse, che porta r in $\bar{r}$.*

Lievemente modificata, in modo ovvio, questa costruzione si estende ai casi in cui una delle due direzioni o entrambe sono singolari (coniche o cilindriche).

Sia R una rigata, che per semplicità supporremo non sviluppabile. È evidente che esiste uno e un solo *moto rigido* dello spazio di punti, pel quale

una retta g solidale col sistema mobile descrive R, e ogni direzione di spazio rigato uscente da g si trasporta lungo R per parallelismo (nel senso sopra precisato). Ebbene, è assai facile dare una effettiva descrizione di tale moto: esso ha come *rigata fissa* la *rigata di stringimento* ([10]) $\overline{R}$ di R, come *rigata rotolante* un *conoide retto* K, le cui generatrici sono, con quelle di $\overline{R}$, in corrispondenza biunivoca che conserva l'angolo e la minima distanza di due generatrici successive (il che dà una facile costruzione di K); infine K, mentre rotola su $\overline{R}$, striscia lungo la generatrice di contatto (variabile) in modo che la sua direttrice rettilinea descriva la rigata R. Questo moto appare, per una rigata R *generica, il più semplice* fra i moti rigidi pei quali una retta solidale col sistema mobile descrive R ([11]).

Il *trasporto per parallelismo,* sopra definito, nello spazio rigato *non è integrabile,* ossia dà luogo, a distanza finita, a una direzione in generale dipendente dalla rigata di trasporto. V'è dunque un invariante scalare associato ad ogni giacitura 2-dimensionale di spazio rigato uscente da una retta: esso è semplicemente *la somma dei parametri di due* (*qualunque*) *direzioni ortogonali della giacitura.*

Le nozioni di *geodetiche* e di *parallelismo* possono servire di base per costruire una teoria delle forme dello spazio rigato analoga alla moderna teoria delle varietà riemanniane e loro generalizzazioni. Ma dovrò limitarmi qui ad alcuni primi cenni relativi alle *rigate* e alle *congruenze.*

4. - Si estendono agevolmente alle rigate, e anche alle serie di direzioni uscenti dalle rette di una rigata, le nozioni di (1ª) *curvatura* e di (1ª) *direzioni associate* (secondo BIANCHI) (o prime normali principali). Posto

$$\frac{\bar{d}\xi^i}{ds} = \frac{d\xi^i}{ds} + R_{x'\xi} R^{ik} \Omega_{kt} x^t + \Omega_{x'\xi} x^i \tag{21}$$

(ove supporremo che s sia la lunghezza d'arco dell'immagine sferica della rigata direttrice $x^i = x^i(s)$) — onde le $\frac{\bar{d}\xi^i}{ds}$, *a differenza delle* $\frac{d\xi^i}{ds}$, risulteranno le componenti di un vettore di spazio rigato uscente dalla retta x, come le ξ^i: cioè, soddisferanno alle (15) — possiamo prendere, come espressione della curvatura $\frac{1}{\varrho_\xi}$ associata a $\xi(s)$,

$$\frac{1}{\varrho_\xi^2} = \Omega_{ik} \frac{\bar{d}\xi^i}{ds} \frac{\bar{d}\xi^k}{ds} = \left(\mathrm{mod}\ \frac{\bar{d}\xi}{ds}\right)^2. \tag{22}$$

([10]) Cioè, la rigata delle tangenti centrali, rette di minima distanza fra ciascuna generatrice e la successiva; « Striktionsband » secondo STUDY. (Ved. ZINDLER: *Liniengeometrie,* 2° vol. p. 14).

([11]) Se R è un cono, onde $\overline{R}$ è il cono polare, la rigata rotolante K è semplicemente *il piano tangente* a $\overline{R}$ lungo una generatrice. In questo caso è ovvio che il corrispondente moto è proprio il più semplice fra i moti con un punto fisso pei quali una retta solidale col sistema mobile descrive il cono R.

Segue subito un semplice significato geometrico ([12]). In particolare le rigate geodetiche sono caratterizzate dall'avere curvatura ovunque nulla: mentre gli *elicoidi rigati* più generali (e anche l'iperboloide rigato di rotazione, che ne è caso limite) hanno curvatura (e parametro) costante. Escluso per semplicità il caso in cui la 1ª curvatura si annulla, è possibile, e in più modi, estendere alle rigate le formule di FRENET e quindi, stabilirne delle rappresentazioni intrinseche ([13]). Mi limiterò ad indicare uno dei procedimenti possibili — credo, il più semplice — per ottenere questa estensione: esso consiste, in sostanza, nell'associare alla retta variabile $x^i=x^i(s)$ della rigata due direzioni η_1, η_2 di spazio rigato per essa, tali che, nell'S_5 dei complessi, $x\eta_1\eta_2$ sia un triangolo *autoconiugato sia rispetto alla* Q_4^2 *delle rette, cioè alla* $R_{xx}=0$, *che alla* $\Omega_{xx}=0$.

Sia $\xi^i=\frac{dx^i}{ds}$, e $\frac{1}{\varrho}=\text{mod}\,\frac{\bar{d}\xi}{ds}$: se poniamo $\frac{\bar{d}\xi}{ds}=\frac{\zeta}{\varrho}$ cioè $\zeta=\text{vers}\,\frac{\bar{d}\xi}{ds}$, abbiamo $\Omega_{\xi\zeta}=0$, ma, in generale, (e precisamente: se il parametro di $\xi(s)$ non è costante), $R_{\xi\zeta}\neq 0$. Ma sostituiamo alla serie di direzioni $\xi(s)$ tangenti alla rigata la serie di direzioni coassiali *di parametro unitario*

$$\eta_1^i=\xi^i+(p_1-1)R^{ik}\Omega_{kt}\xi^t, \tag{23}$$

$\left(\text{ove } p_1=\text{par}\,\xi=\text{par}\,\frac{dx}{ds}\right)$. Allora il vettore $\frac{\bar{d}\eta_1}{ds}=h$ risulta effettivamente involutorio ed ortogonale ad η_1 ($R_{\eta_1 h}=0$, $\Omega_{\eta_1 h}=0$), e anche a ξ: ed esprimendo anche h pel vettore η_2 coassiale, di modulo 1 e di parametro 1

$$\eta_2^i=\varrho h^i+(p_2-1)R^{ik}\Omega_{kt}\cdot\varrho h^t, \tag{24}$$

$\left(\text{ove } \frac{1}{\varrho}=\text{mod}\,\frac{\bar{d}\xi}{ds}=\text{mod}\,\frac{\bar{d}\eta_1}{ds}=\text{mod}\,h,\ p_2=\text{par}\,(\varrho h)\right)$, si ha infine:

$$\begin{cases} \dfrac{dx^i}{ds}=\eta_1^i+(1-p_1)R^{ik}\Omega_{kt}\eta_1^t, \\ \dfrac{\bar{d}\eta_1{}^i}{ds}=\dfrac{\eta_2{}^i+(1-p_2)R^{ik}\Omega_{kt}\eta_2{}^t}{\varrho}, \\ \dfrac{\bar{d}\eta_2{}^i}{ds}=-\dfrac{\eta_1{}^i+(1-p_2)R^{ik}\Omega_{kt}\eta_1{}^t}{\varrho}. \end{cases} \tag{25}$$

([12]) Precisamente: $\frac{1}{\varrho_\xi}$ è il rapporto fra l'angolo che la direzione ξ^i uscente dalla retta x^i fa con la direzione ivi parallela alla direzione della serie $\xi^i(s)$ che esce dalla retta (della rigata direttrice) infinitamente vicina ad x^i, e l'angolo di queste due rette infinitamente vicine. Si tenga presente che l'angolo di due direzioni di spazio rigato uscenti da una retta r è quello dei loro *assi* a, a', cioè, l'angolo dei piani ar, $a'r$.

([13]) Se vogliamo valerci di un ente dello spazio di punti che è intrinsecamente legato alla rigata, cioè la *linea di stringimento* γ, possiamo rappresentare intrinsecamente una rigata mediante le *curvature associate* $\frac{1}{r}$, $\frac{1}{T}$ alla serie delle generatrici lungo γ e l'angolo d'inclinazione su γ (SANNIA): oppure, mediante $\frac{1}{r}$ e le due curvature di γ. Ved. anche ZINDLER, l. c., vol. 2°, p. 20 e seguenti.

Queste sono le formule di FRENET generalizzate a cui poco sopra ho accennato: esse mostrano agevolmente come una rigata possa intrinsecamente rappresentarsi (nel gruppo dei movimenti) mediante i tre invarianti p_1, p_2, ϱ, di semplice significato geometrico ([14]); il primo di 1° ordine, gli altri due di 2° ordine.

5. - Veniamo infine alle *congruenze di rette.* Siano $u^1=u$, $u^2=v$ coordinate curvilinee nella congruenza $x^i=x^i(u,v)$: indichiamo ancora con $\varphi_1=a_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu$, $\varphi_2=b_{\lambda\mu}du^\lambda du^\mu$ le due forme fondamentali secondo SANNIA, onde avremo

$$a_{\lambda\mu}=\Omega_{ik}x^i_\lambda x^k_\mu, \qquad b_{\lambda\mu}=-\frac{1}{2}R_{ik}x^i_\lambda x^k_\mu, \tag{26}$$

e prendiamo φ_1 come base per un calcolo differenziale assoluto secondo RICCI. Anzitutto: i complessi lineari $\nabla_\lambda x^i_\mu \left(x^i_\mu=\frac{\partial x^i}{\partial u^\mu}\right)$ si possono esprimere linearmente per i sei complessi indipendenti x^i, $R^{ik}\Omega_{kt}x^t$, x^i_ν, $R^{ik}\Omega_{kt}x^t_\nu$ $(\nu=1,2)$: si ottengono subito le *equazioni fondamentali*

$$\begin{aligned}\nabla_\lambda x^i_\mu &= -a_{\lambda\mu}x^i+2b_{\lambda\mu}R^{ik}\Omega_{kt}x^t-2\beta^{\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}R^{ik}\Omega_{kt}x^t_\nu \\ &(2\beta_{\lambda\mu\tau}=\nabla_\lambda b_{\mu\tau}+\nabla_\mu b_{\lambda\tau}-\nabla_\tau b_{\lambda\mu})\end{aligned} \tag{27}$$

e le relative *condizioni di integrabilità*

$$\begin{cases} \overset{a}{R}_{\nu\mu\lambda\omega}=a_{\nu\lambda}a_{\mu\omega}-a_{\nu\omega}a_{\mu\lambda} \\ \varepsilon^{\lambda\mu}\varepsilon^{\nu\tau}(\nabla_\lambda\nabla_\nu b_{\mu\tau}+a_{\lambda\nu}b_{\mu\tau})=0. \end{cases} \tag{28}$$

È agevole verificare come queste esprimano, in forma assoluta, le note condizioni indicate, sotto forma assai diversa, dal SANNIA (l. c. ([2]), pp. 163-164) ([15]).

Vediamo ora in qual modo convenga estendere alle congruenze le nozioni di *geodetiche* e di *parallelismo.* Da un punto di vista geometrico: è naturale

---

([14]) L'invariante p_1 è il parametro della direzione tangente, cioè il *parametro distributore* della rigata; $\frac{1}{\varrho}$ è la curvatura associata alla serie delle direzioni tangenti, o curvatura della rigata (ved. ([12])); infine p_2 è il parametro della direzione definita dal vettore $\frac{\bar{d}\eta_1}{ds}$, in semplicissima relazione col parametro $\bar{p}_2$ della direzione definita da $\frac{\bar{d}\xi}{ds}$ $(\bar{p}_2=p_2+p_1-1)$.

([15]) Se si introduce, al luogo della 2ª forma φ_2 del SANNIA, la forma ψ del KUMMER (n. 1), e inoltre, la forma differenziale lineare $\chi=p_\lambda du^\lambda$ $\left(\text{ove } p_\lambda=S\xi\frac{\partial x}{\partial u^\lambda}\right)$ alle (28) della seconda riga possono sostituirsi le equazioni differenziali del 1° ordine

$$\varepsilon^{\tau\omega}(\nabla_\tau c_{\omega\lambda}-p_\tau a_{\omega\lambda})=0, \qquad \varepsilon^{\tau\omega}(\nabla_\tau p_\omega-c_{\tau\omega})=0,$$

traducenti in forma assoluta un gruppo di formule indicate dal BURGATTI (*Sopra alcune formole fondamentali relative alle congruenze di rette.* Rendiconti Accad. dei Lincei, ser. 5ª, vol. 8°, 1° sem. 1899, pp. 515-520: ved. p. 518, form. (3)) e in forma equivalente dal CESÀRO (*Lezioni di Geometria intrinseca.* Napoli 1896, pp. 205-206).

porre la condizione che le rigate geodetiche — considerate nell'S_5 dei complessi — siano sulla congruenza un sistema 3-assiale del BOMPIANI, come lo sono le linee geodetiche di una V_2 in R_5 euclideo. In generale, un sistema 3-assiale in una congruenza si definisce associando alla retta r variabile una congruenza lineare K di cui essa faccia parte, mediante la condizione che la schiera rigata osculatrice a ciascuna rigata del sistema (uscente da r) lungo r abbia, oltre ad r, un'altra retta s a comune con K. Se K non è degenere, s descrive, al variare della rigata del sistema per r, una rigata H del 4° ordine di K, avente r come retta doppia ([16]). Ora: vi sono due congruenze lineari intrinsecamente legate, in modo invariante per movimenti, alla retta generica di una congruenza: la prima è degenere nel piano improprio e nella stella che ha per centro il punto improprio di r, la seconda ha per direttrici le rette ortogonali ed incidenti ad r nei fuochi e poste nei piani focali. Ebbene: *i due sistemi 3-assiali corrispondenti a queste due congruenze sono precisamente le geodetiche delle due forme* φ_1 *e* φ_2. Le prime sono, manifestamente, le *rigate a piano direttore* della congruenza; le schiere osculatrici alle rigate dell'altro sistema (geodetiche di φ_2) segnano sulla congruenza K corrispondente *una rigata del 4° ordine, che è dunque intrinsecamente legata alla retta variabile della congruenza, in modo invariante per movimenti.*

Corrispondentemente, si possono considerare nelle congruenze di rette i trasporti per parallelismo secondo LEVI-CIVITA relativi alle forme φ_1 e φ_2: ed estendere senza difficoltà molte delle proprietà note per il parallelismo superficiale. Ad es. potrà estendersi la nozione di *reti di Cebiceff*. Si estende anche, agevolmente, la nozione di *superficie di traslazione* secondo BOMPIANI, definendo come *congruenze di traslazione* le congruenze *che contengono un doppio sistema di rigate dotato di mutuo parallelismo* (nello spazio rigato). Le congruenze di traslazione sono caratterizzate dal possedere un doppio sistema di rigate, che è rete di CEBICEFF *per entrambe le forme* φ_1, φ_2; esiste una ed una sola congruenza di traslazione contenente due rigate arbitrarie uscenti da una retta secondo diverse direzioni di spazio rigato.

Le nozioni di *geodetiche* e di *parallelismo* relative ad *una* delle due forme φ_1 e φ_2 sono, manifestamente, insufficienti per costruire una geometria differenziale metrica nella congruenza. Appare invece opportuno valersi delle geodetiche di una delle due forme — ad es. di φ_2 — ma definire un trasporto per parallelismo che dipenda, in qualche modo, da *entrambe* le forme fondamentali. Il BOMPIANI

([16]) In una sua ricerca sui sistemi pluriassali, non ancora pubblicata, di cui ha dato notizia nella sua Comunicazione a questo Congresso (*Teoria della corrispondenza fra due superficie*) fra l'altro il BOMPIANI ha pure trovato la rigata H del 4° ordine sopra accennata, e certi « sistemi focali » che comprendono come caso particolare il sistema delle rigate geodetiche di φ_2, di cui è detto poco sotto.

ha indicato, più in generale ([17]), come si possa subordinare una geometria metrica in una varietà a un problema variazionale — che fornisce le nozioni di *lunghezza d'arco* (e quindi, di *modulo* di un vettore) e di *linee geodetiche* — e ad una forma quadratica, che serve ad introdurre la nozione di *angolo* e vien posta a base di un calcolo assoluto secondo RICCI. Il parallelismo vien definito, secondo SEVERI, con la condizione, che nel trasporto parallelo infinitesimo lungo una geodetica il vettore trasportato (resti sulla superficie geodetica iniziale e) conservi inalterato il suo modulo e l'angolo di inclinazione sulla geodetica di trasporto. Applicando le vedute del BOMPIANI al caso presente, potremo considerare nella congruenza il trasporto dei vettori di spazio rigato, definito da queste condizioni: che nel trasporto di un vettore ξ^λ lungo una rigata geodetica (rispetto a φ_2) della congruenza, resti invariato $b_{\xi\xi}=b_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu$ (quadrato del modulo relativo a φ_2) e $\dfrac{a_{\xi u'}}{\sqrt{a_{\xi\xi}}\sqrt{a_{u'u'}}}$ (coseno dell'angolo d'inclinazione sulla rigata di trasporto: ove $a_{\xi u'}=a_{\lambda\mu}\xi^\lambda u'^\mu$, ecc.). Tale trasporto ha la seguente rappresentazione analitica:

$$(29)\qquad \frac{\bar{d}\xi^\lambda}{ds}=-\bar{b}^{\lambda\tau}\beta_{\nu\mu\tau}\xi^\nu u'^\mu+\frac{\bar{b}_{\xi\xi}u'^\lambda-b_{\xi u'}\xi^\lambda}{b_{\xi\xi}}\,\frac{\bar{b}^{\mu\lambda}(\beta_{\tau\nu\mu}a_{\lambda\sigma}+\beta_{\sigma\nu\mu}a_{\lambda\tau}-\beta_{\lambda\nu\mu}a_{\sigma\tau})\xi^\tau u'^\sigma u'^\nu}{a_{u'u'}}$$

ove il simbolo $\bar{d}$ si riferisce ad $a_{\lambda\mu}$, $\bar{b}^{\lambda\mu}=-\dfrac{b^{\lambda\mu}}{h}+\dfrac{a^{\lambda\mu}}{h}a^{\tau\omega}b_{\tau\omega}$ è l'elemento reciproco di $b_{\lambda\mu}$ in $|b_{\lambda\mu}|$ (essendo $h=\dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$ il *parametro totale* della congruenza, e $b^{\lambda\mu}=a^{\lambda\tau}a^{\mu\omega}b_{\tau\omega}$), e, come nelle (27),

$$(29)\qquad 2\beta_{\lambda\nu\tau}=\nabla_\lambda b_{\nu\tau}+\nabla_\nu b_{\lambda\tau}-\nabla_\tau b_{\lambda\nu}.$$

Si potrebbe, invece, assumere φ_1 per definire le lunghezze e le geodetiche, φ_2 per gli angoli; o più esattamente, imporre la conservazione di $a_{\xi\xi}=a_{\lambda\mu}\xi^\lambda\xi^\mu$ e di $\dfrac{b_{\xi u'}}{\sqrt{b_{\xi\xi}}\sqrt{b_{u'u'}}}$ nel trasporto di un vettore ξ^λ lungo una geodetica di φ_1.

Valendosi sempre di φ_1 come base pel calcolo assoluto, si ha per questo secondo tipo di trasporto parallelo subordinato alle due forme quadratiche φ_1 e φ_2 una rappresentazione analitica più semplice che pel tipo precedentemente accennato:

$$(31)\qquad \frac{\bar{d}\xi^\lambda}{ds}=\frac{a_{\xi\xi}u'^\lambda-a_{\xi u'}\xi^\lambda}{a_{\xi\xi}}\,\frac{(\bar{b}^{\mu\lambda}\nabla_\nu b_{\lambda\mu}\cdot b_{\tau\sigma}-2\nabla_\nu b_{\tau\sigma})\xi^\tau u'^\sigma u'^\nu}{2b_{u'u'}}.$$

È da notarsi però che l'interpretazione geometrica è meno espressiva che pel trasporto (29): infatti l'invariante assoluto proiettivo $I=\dfrac{b_{\xi u'}}{\sqrt{b_{\xi\xi}}\sqrt{b_{u'u'}}}$, che si conserva inalterato pel trasporto (31) lungo una geodetica di φ_1, non ha un significato *metrico* semplice.

([17]) Ved. l. c. ([6]), Append. II (BOMPIANI) p. 694 e seg.

Se la congruenza è riferita alle sviluppabili, le (31) assumono la forma abbastanza semplice:

$$(32)\qquad \frac{\bar{d}\xi^\lambda}{ds} = \frac{a_{\xi\xi}u'^\lambda - a_{\xi u'}\xi^\lambda}{a_{\xi\xi}}\left[\frac{\xi^1}{v'}\left(\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}u' + \left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}v'\right) + \frac{\xi^2}{u'}\left(\left\{\begin{matrix}21\\1\end{matrix}\right\}u' + \left\{\begin{matrix}22\\1\end{matrix}\right\}v'\right)\right],$$

ove i simboli di CHRISTOFFEL s'intendono calcolati per φ_1 ([18]).

Le congruenze per le quali il parallelismo definito dalle (31) coincide con quello di LEVI-CIVITA relativo alla prima forma fondamentale φ_1 della congruenza, sono caratterizzate da queste due proprietà: che, per esse, tutte le rigate a piano direttore (geodetiche di φ_1) uscenti da una retta hanno ivi lo stesso parametro distributore, e che le forme φ_1, φ_2 sono geodeticamente rappresentabili l'una sull'altra ([19]). In particolare in questa classe rientrano le *congruenze isotrope.*

([18]) Per la parte elementare, già nota, della teoria invariantiva di *una coppia* di forme differenziali quadratiche, rimando a: SCHOUTEN e STRUIK, *Over het verband tusschen meetkunde en mechanica by statische, problemen.* Verslag Kon. Akad. Amsterdam, vol. 27, 1919, pp. 801-809 (pp. 801-803: Betrekkingen tusschen de geodetische differentiaties behoorende bij verschillende fundamentaltensoren); WEITZENBÖCK, *Invariantentheorie*, Groningen 1923, pp. 352-354; LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, Roma, 1925, pp. 227 e seg.

([19]) Cfr. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926, p. 141, e H. LEVY, loc. ivi cit.

K. REIDEMEISTER (Königsberg - Germania)

FUNDAMENTALGRUPPE UND ÜBERLAGERUNG VON MANNIGFALTIGKEITEN

Seit der klassischen Definition der Fundamentalgruppe einer Mannigfaltigkeit steht die kombinatorische Topologie in engem Zusammenhang mit der Theorie der unendlichen diskontinuierlichen Gruppen, d. h. mit der Theorie der Gruppen, die durch endlich oder abzählbar unendlich viele ihrer Elemente erzeugt und durch endlich oder abzählbar viele Relationen zwischen diesen Erzeugenden vollständig definiert werden. Die folgenden Bemerkungen sind einigen neuen, teilweise gemeinsam mit Herrn O. SCHREIER erzielten Ergebnissen über Gruppen und Mannigfaltigkeiten gewidmet, die den engen Zusammenhang dieser beiden Disziplinen bestätigen werden.

Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Aufgabe, vor die sich die an der Topologie orientierte Theorie diesser Gruppen gestellt sieht: es gilt, aus den definierenden Relationen die Struktur einer Gruppe zu erkennen. Die klassische Theorie lieferte nur ein Verfahren, die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe zu bestimmen oder, wie man dafür auch sagen kann, ein Verfahren, alle kommutativen Darstellungen einer Gruppe anzugeben. Im übrigen ist es im allgemeinen nicht einmal möglich, das sogenannte Wortproblem zu lösen, d. h. zu entscheiden, ob ein Produkt aus den Erzeugenden gleich dem Einheitselement der Gruppe ist oder nicht. Und viel weniger noch ist man im allgemeinen imstande, konkrete Aussagen über die Untergruppen und Faktorgruppen — von den Abelschen abgesehen — zu machen.

Die allgemeine Theorie vermag hier nur den guten Sinn dieser Fragestellungen zu rechtfertigen, indem sie — mit von Dyck, Dehn und neuerdings in besonders präziser Form mit Schreier — die Existenz der Lösung des Wortproblems zeigt, bezw. die Definition einer Gruppe durch Erzeugende und definierende Relationen als widerspruchsfrei nachweist. Es gelten dann ferner die folgenden einfachen Sätze über Gruppenstruktur, die zu den entsprechenden Sätzen über endliche Gruppen ganz analog sind: Zu jeder invarianten Untergruppe f einer Gruppe F gehört eine wohlbestimmte Faktorgruppe F/f und zwei wohl bestimmte Darstellungen von F durch einfach transitive Permutationsgruppen. Die permutierten Dinge sind dabei die Elemente der Faktorgruppe F/f, bzw. die Nebengruppen von f in F. Die Permutationen erhält man durch vordere bezw. hintere

Multiplikationen der Nebengruppen mit den Elementen von F; die invariante Untergruppe f besteht aus denjenigen Elementen von F, denen bei dieser Darstellung die identische Permutation zugeordnet ist; f lässt sich also aus diesen Darstellungen von F zurückgewinnen. Aehnlich entsprechen jeder nichtinvarianten Untergruppe zwei Systeme von Nebengruppen und jeder Klasse konjugierter Untergruppen zwei Darstellungen von F mittels zweier transitiver, aber nicht mehr einfach transitiver Permutationsgruppen.

Die neuen Ergebnisse, über die ich berichten will, beruhen nun im wesentlichen auf dem folgenden gemeinsam mit Schreier erzielten Satz: *Ist eine Darstellung einer Gruppe* F *durch eine transitive Permutationsgruppe* P *bekannt, so lassen sich die Erzeugenden und die definierenden Relationen der zugehörigen Untergruppen* f *von* F *angeben.* Insbesondere lassen sich also Erzeugende und definierende Relationen der Kommutatorgruppe K (in jedem einzelnen Falle) angeben, weil die Faktorgruppe F/K ja nach POINCARÉ bekannt ist.

Auf die Methode, die Erzeugenden und definierenden Relationen einer Untergruppe zu bestimmen, und ihre Ableitung möchte ich erst zu sprechen kommen, wenn ich die Brücken von der abstrakten Gruppentheorie zur Anschauung und zur Topologie geschlagen habe. Zuvor seien aber noch einige gruppentheoretische Resultate zusammengestellt, die sich mit ihrer Hilfe beweisen lassen. Ich nenne die folgenden Sätze:

Die Untergruppen einer freien Gruppe (d. h. einer Gruppe ohne definierende Relationen) sind frei (Schreier). Die Untergruppen eines freien Produktes zyklischer Gruppen sind von derselben Beschaffenheit. Ist F eine Gruppe mit $2p$ Erzeugenden a_i, b_i $(i=1,\ldots,p)$, sind $k_i=a_ib_ia_i^{-1}b_i^{-1}$ gewisse Kommutatoren dieser Erzeugenden und ist $k_1, k_2,\ldots, k_p=1$, so sind alle Untergruppen, von gleichem endlichen Index unter einander isomorph und von gleicher Beschaffenheit wie F.

Schliesslich erwähne ich noch eine Folgerung aus der Bestimmbarkeit der Kommutatorgruppe. Man kann alle solche Gruppen durch definierende Relationen kennzeichnen, deren Kommutatorgruppe eine freie Gruppe ist und bei denen zugleich die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe eine zyklische Gruppe ist. Die Klassifikation dieser Gruppen ist im wesentlichen mit der der Automorphismen der freien Gruppe identisch. Ist nämlich C ein Element, dessen Potenzen alle Nebengruppen der Kommutatorgruppe repräsentieren, und ist noch der Automorphismus bekannt, den die Transformation mit C in der Kommutatorgruppe hervorruft, so ist die Gruppe dadurch völlig bestimmt. Durch Bestimmung dieses Automorphismus aus den definierenden Relationen lässt sich ferner das Wortproblem in allen diesen Gruppen lösen.

Welches sind nun die *topologischen* Tatsachen, die mit den angegebenen gruppentheoretischen Sätzen in parallele stehen? Soviel ist von vornherein klar, dass mit jeder Einsicht in die Struktur von Fundamentalgruppen auch die Möglichkeit erweitert wird, die Mannigfaltigkeiten zu klassifizieren. In der Tat

wurde die Klassifikation der Knoten z. B., auch durch Arbeiten von Herrn W. I. ALEXANDER, auf diese Weise gefördert. Aber soche Klassifikationen erschienen rein formal, wenn sich nicht ein geometrisch bedeutungsvoller Zusammenhang zwischen der Struktur der Fundamentalgruppe und topologischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit einsehen liesse.

Dieser Zusammenhang ist nun wohlbekannt: *Es sei eine transitive Permutationsgruppe* P *vorgegeben, welche zur Fundamentalgruppe* F *einer Mannigfaltigkeit* M *isomorph ist und* f *sei eine zu* P *in* F (*nach den oben formulierten Sätzen über Gruppen*) *gehörige Untergruppe. Alsdann lässt sich eindeutig aus* P *ein unverzweigter Ueberlagerungsraum* U *konstruieren, dessen Fundamentalgruppe zu* f *isomorph ist.* Die Permutationen von P spielen bei der Konstruktion von U dieselbe Rolle, wie die den Verzweigungsschnitten zugeordneten Permutationen bei der Konstruktion von Riemann'schen Flächen, U ist eine reguläre Ueberlagerung von F oder nicht, je nachdem f eine invariante Untergruppe von F ist oder nicht. Umgekehrt gehört auch zu jeder unverzweigten Ueberlagerung solche Gruppen P und f. So spiegelt sich also die Struktur der Fundamentalgruppe genau in den Ueberlagerungsräumen der Mannigfaltigkeit und deren Untergruppen wieder.

Diesem Zusammenhang vorausgesetzt, ist nun aber sofort klar, dass sich die Erzeugenden und definierenden Relationen einer Untergruppe f von F angeben lassen, wenn die Darstellung von F durch das dazu gehörige P bekannt ist. Wir brauchen dazu nur 1. den Ueberlagerungsraum U zu konstruieren und dann 2. die Erzeugenden und definierenden Relationen der Fundamentalgruppe von U nach den allgemeinen Vorschriften der kombinatorischen Topologie anzugeben, Vorschriften, die allerdings noch einer gewissen Präzisierung bedurften, um hier zum Ziele zu verhelfen.

Bei 2-dimensionalen zweiseitigen geschlossenen Mannigfaltigkeiten sind die geschilderten Beziehungen zwischen Ueberlagerungen und Fundamentalgruppe im wesentlichen bekannt, wenngleich sie auch hier wohl klar nur für invariante Untergruppen formuliert wurden und niemals systematisch zur Bestimmung von Erzeugenden und definierenden Relationen einer Untergruppe ausgewertet wurden. Die holoedrisch isomorphe Darstellung der Fundamentalgruppe durch linear gebrochene Funktionen einer komplexen Veränderlichenerleichtert hier den Überblick:

Ist nämlich D eine solche Darstellung der Fundamentalgruppe F der Mannigfaltigkeit F und nennt man Punkte, die durch Transformationen aus D auseinander hervorgehen, äquivalent, so erhält man aus dem Fundamentalbereich B von D in der z-Ebene die Mannigfaltigkeit M, in den man die aequivalenten Randpunkte des Fundamentalbereichs B identifiziert. Ist nun d eine Untergruppe von D, so kann man den Fundamentalbereich von d aus solchen von D zusammensetzen und an dererseits wieder aus diesem neuen Fundamentalbereich eine Mannigfaltigkeit U erklären, die alsdann M überlagert.

Uebrigens kann man so auch leicht einsehen, dass die Untergruppen der freien Gruppen frei sind. Ist nämlich D die Darstellung der Fundamentalgruppe einer $(n+1)$-mal punktierten Kugel, also isomorph zur freien Gruppe von n Erzeugenden, so führt D einen Grenzkreis in sich über und besitzt einen Fundamentalbereich in Gestalt eines Kreisbogenpolygons mit $2n$ Seiten, dessen Ecken sämtlich auf dem Grenzkreis liegen. Gerade darin kommt zum Ausdruck, dass D eine freie Gruppe ist. Da nun Fundamentalbereiche jeder Untergruppe d von D sich aus diesen Fundamentalbereichen von D zusammensetzen lassen und also Ecken auch nur auf dem Grenzkreise haben, so muss auch d eine freie Gruppe sein.

Zum Schluss heben wir noch ein anschauliches Resultat aus der Knotentheorie hervor, das die alternierenden Geflechte aus 4 Fäden betrifft. In den Ueberlagerungsräumen von Knotenaussenräumen zerfällt die Ueberlagerungskurve des Knotens selber im allgemeinen in mehrere getrennte Kurven; der Ueberlagerungsraum enthält also eine Verkettung. Bei obigen Knoten nun lässt sich eine solche Ueberlagerung angeben, bei der alle diese Kurven selber unverknotet sind. Durch die Verkettungszahlen dieser Kurven lässt sich die Klassifikation der Tait-Kirkman'schen Knotentabelle aller Knoten bis zu 9 Ueberkreuzungen, wie Herr BANKWITZ zeigte, bis zu Ende durchführen. Wichtiger aber erscheint mir dass sich hier ein so merkwürdiger Zusammenhang zwischen Knoten und Verkettungen unverknoteter Kurven herausstellte.

A. J. McCONNELL (Dublin - Irlanda)

THE TORSION OF RIEMANNIAN SPACE

1. - Introduction.

1.1. - *Summary; notation.* In this paper, by considering the deviation of two neighbouring parallel geodesics in a Riemannian manifold, we are able to define and discuss the torsion of the manifold associated with any particular direction (1). Applying our results to spaces of constant curvature and to Einstein spaces, we obtain new interpretations of these types of spaces, and also of Einstein's gravitational equations.

We consider a Riemannian manifold of N dimensions, whose metric is given by a non-definite quadratic form,

$$\varphi = g_{mn} dx^m dx^n, \tag{1.11}$$

so that the square of the line-element is

$$ds^2 = e g_{mn} dx^m dx^n, \quad e^2 = 1, \tag{1.12}$$

where e is chosen to make the right-hand side positive, and is called the *indicator* of the direction dx^r. Hence the *magnitude* of a vector X^r is the positive quantity X, where

$$X^2 = e_X g_{mn} X^m X^n, \tag{1.13}$$

e_X being the indicator of X^r. A *unit vector* is one whose magnitude is unity, and a *null-vector* one whose magnitude is zero. We shall assume that none of the vectors we deal with is a null-vector.

X^r being defined as a function of a parameter t, we shall use the following notation for the *successive contravariant derivatives* of X^r with respect to t:

$$\frac{\delta^{\alpha+1} X^r}{\delta t^{\alpha+1}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\delta^\alpha X^r}{\delta t^\alpha}\right) + \left\{ \begin{matrix} r \\ mn \end{matrix} \right\} \frac{\delta^\alpha X^m}{\delta t^\alpha} \frac{dx^n}{dt}, \quad \frac{\delta^0 X^r}{\delta t^0} \equiv X^r, \qquad (\alpha \geqslant 0). \tag{1.14}$$

(1) It is to be noted that torsion, as understood in this paper, bears no relation to the torsion defined by CARTAN, *Comptes Rendus*, 174 (1922), 593. There need be no confusion, since Cartan's theory concerns spaces more general than Riemannian.

Therefore the equations defining the *parallel propagation* of a vector X^r along a curve, of arc s, take the form

$$\frac{\delta X^r}{\delta s}=0. \tag{1.15}$$

1.2. - *Curvature of a two-space; spaces of constant curvature; Einstein spaces.* We denote by R_{rmsn} the RIEMANN-CHRISTOFFEL tensor, that is,

$$R_{rmsn}=\frac{\partial}{\partial x^s}[mn, r]-\frac{\partial}{\partial x^n}[ms, r]+\left\{\begin{matrix} p \\ ms \end{matrix}\right\}[rn, p]-\left\{\begin{matrix} p \\ mn \end{matrix}\right\}[rs, p]. \tag{1.21}$$

Let us take the two-space defined by the two vectors λ^r, μ^r and let us take the system of geodesics starting in the directions of this two-space. The Gaussian curvature of the surface thus defined is called the *curvature of the two-space*, and may be denoted by $K(\lambda, \mu)$. It is known that ([1])

$$K(\lambda, \mu)=\frac{R_{rmsn}\lambda^r\mu^m\lambda^s\mu^n}{(g_{rs}g_{mn}-g_{rn}g_{ms})\lambda^r\mu^m\lambda^s\mu^n}. \tag{1.22}$$

Thus, if λ^r, μ^r are unit vectors, we have

$$R_{rmsn}\lambda^r\mu^m\lambda^s\mu^n=(e_\lambda e_\mu-a^2)K(\lambda, \mu), \tag{1.221}$$

where e_λ, e_μ are the indicators of λ^r, μ^r, and $a=g_{mn}\lambda^m\mu^n$.

A space of constant curvature is one for which the curvatures of all two-spaces are constant. It follows from (1.22) that for a space of constant curvature we have

$$R_{rmsn}=C(g_{rs}g_{mn}-g_{rn}g_{ms}), \tag{1.23}$$

C being a constant. It is indeed the curvature of all two-spaces ([2]).

We shall have occasion to speak of an *Einstein space* ([3]), which is defined as a space for which

$$R_{mn}=\frac{R}{N}g_{mn}, \tag{1.24}$$

where R_{mn} is the RICCI tensor, $R^r{}_{.mnr}$, and R is the invariant $g^{mn}R_{mn}$.

A space of constant curvature is a particular case of an Einstein space. For it is a consequence of equations (1.22) that

$$R_{mn}=-C(N-1)g_{mn}$$
$$R=-CN(N-1).$$

([1]) EISENHART: *Riemannian Geometry*, (1926), pp. 79-81.

([2]) EISENHART, loc. cit., p. 83.

([3]) EISENHART, loc. cit., p. 92.

2. - The torsion of Riemannian space.

2.1. - *The twisting of a vector round a geodesic.* Let O be any point of space, and let us take the geodesic C in a given direction through it. We take $\overline{O}$ a point near O and at $\overline{O}$ we take the vector obtained by propagating the unit tangent vector of C at O parallelly along $O\overline{O}$. Let $\overline{C}$ be the geodesic through $\overline{O}$ in this direction. We now take equal distances s along the two geodesics measured from O and $\overline{O}$, thus giving the points P and $\overline{P}$. If s be small, then $P\overline{P}$ will be an infinitesimal vector. Therefore, as s varies, our construction defines at all points of C near O a small vector, which we shall denote by η^r. Its values at the points P and O may be denoted by η^r_P and η^r_O respectively, but we shall drop the suffices when we can do so without confusion.

Il we carry out our construction for η^r in Euclidean three-space, C and $\overline{C}$ will be parallel straight lines and $OP\overline{P}\overline{O}$ will always remain a parallelogram as s varies. Hence η^r is now propagated parallelly along C.

In general, η^r is not propagated parallelly along C, and it is this deviation from parallelism that we wish to examine. All the elements that we have used to define η^r are intrinsic to space, and so it is the twisting by space of the vector η^r round the geodesic C that we are investigating. The neighbourhood of O is deformed in this way, and we shall call this deformation the *torsion of space* in the direction of C at the point O.

We have first to obtain the equations defining η^r along C, and then find quantities to measure the twisting of η^r round this direction.

2.2. - *Equations for the magnitude and direction of* η^r. Let unbarred letters refer to the geodesic C, and barred to $\overline{C}$. Denoting by λ^r the unit tangent vector to C, and by $\overline{\lambda}^r$ the same quantity for $\overline{C}$, we have

$$\eta^r = \overline{x}^r - x^r, \tag{2.21}$$

where $\overline{x}^r$ and x^r are corresponding points on the two curves, and

$$\frac{d\overline{x}^r}{ds} = \overline{\lambda}^r, \quad \frac{dx^r}{ds} = \lambda^r, \tag{2.22}$$

since s is the same for both geodesics.

Expressing the conditions that $\overline{x}^r$ and x^r lie on two geodesics, we have immediately the well-known equation for geodesic deviation ([1]),

$$\frac{\delta^2 \eta^r}{\delta s^2} + R^r_{.msn}\lambda^m \eta^s \lambda^n = 0. \tag{2.23}$$

([1]) SYNGE, *Geometry of Dynamics*, Phil. Trans. Roy. Soc. London, A, (226), p. 102. — LEVI-CIVITA, *The Absolute Differential Calculus*, (1927), p. 215.

Now at the points O, $\bar{O}$, $\bar{\lambda}_0^r$ is the parallel of λ_0^r along $O\bar{O}$, that is, from equations (1.15) and (2.21)

$$\left(\frac{\delta\eta^r}{\delta s}\right)_0 = 0. \tag{2.24}$$

Thus, knowing the initial value of the vector η^r at O, (2.23) is a set of differential equations which define η^r uniquely at every point of C in the neighbourhood of O.

Next, assuming that η^r is not a null-vector, let η be the magnitude of η^r and let μ^r be the unit vector in the same direction. We have

$$\eta^r = \eta\mu^r. \tag{2.25}$$

Differentiating these equations twice contravariantly with respect to s,

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta s} = \eta\frac{\delta\mu^r}{\delta s} + \frac{d\eta}{ds}\mu^r, \tag{2.251}$$

and

$$\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2} = \eta\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2} + 2\frac{d\eta}{ds}\frac{\delta\mu^r}{\delta s} + \frac{d^2\eta}{ds^2}\mu^r. \tag{2.252}$$

Equations (2.23) give us

$$\eta\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2} + 2\frac{d\eta}{ds}\frac{\delta\mu^r}{\delta s} + \frac{d^2\eta}{ds^2}\mu^r + \eta R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n = 0. \tag{2.26}$$

Multiplying (2.26) by $g_{rt}\mu^t$ and summing for r from 1 to N, we get [1]

$$\frac{d^2\eta}{ds^2} + e\left(\eta R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n - \eta g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}\right) = 0, \tag{2.27}$$

e being the indicator of μ^r.

The equations (2.23) have a first integral, which we shall now obtain. Multiplying (2.23) by $g_{rt}\lambda^t$, we find that

$$g_{rt}\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2}\lambda^t = -R_{tmsn}\lambda^t\lambda^m\mu^s\lambda^n = 0,$$

since $R_{tmsn} = -R_{mtsn}$. But

$$\frac{d}{ds}\left(g_{rt}\frac{\delta\eta^r}{\delta s}\lambda^t\right) = g_{rt}\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2}\lambda^t,$$

because $\frac{\delta\lambda^r}{\delta s}$ is zero, C being a geodesic. Integrating this equation, it follows that

$$g_{rt}\frac{\delta\eta^r}{\delta s}\lambda^t = \text{const.},$$

which constant is zero, seeing that initially $\frac{\delta\eta^r}{\delta s}$ vanishes. As before,

$$\frac{d}{ds}(g_{rt}\eta^r\lambda^t) = g_{rt}\frac{\delta\eta^r}{\delta s}\lambda^t = 0.$$

---

[1] SYNGE, loc. cit., p. 102, where the equation is given for a positive definite line-element.

Therefore, all along the geodesic C,

$$g_{rt}\eta^r\lambda^t = \text{const.} \tag{2.28}$$

Expressed geometrically, this means that the projection of η^r along the tangent to C remains constant as s varies. In particular, if η^r is initially perpendicular to λ^r, it will remain perpendicular at all points of C.

Let us see what these equations become at the point O. Combining (2.24) and (2.251), we have, at the point O,

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta s}=0, \quad \frac{\delta\mu^r}{\delta s}=0, \quad \frac{d\eta}{ds}=0, \tag{2.241}$$

where we have dropped the suffix O for convenience. Substituting these values in equations (2.26) and (2.27), we finally get at O

$$\frac{d^2\eta}{ds^2}+e\eta R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=0, \tag{2.271}$$

and

$$\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}+R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n-e\mu^r R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=0. \tag{2.261}$$

Moreover, if η^r and ζ^r are any two vectors obtained by the construction of 2.1,

$$\frac{d}{ds}(g_{mn}\eta^m\zeta^n)=g_{mn}\frac{\delta\eta^m}{\delta s}\zeta^n+g_{mn}\eta^m\frac{\delta\zeta^n}{\delta s},$$

and

$$\frac{d^2}{ds^2}(g_{mn}\eta^m\zeta^n)=g_{mn}\frac{\delta^2\eta^m}{\delta s^2}\zeta^n+2g_{mn}\frac{\delta\eta^m}{\delta s}\frac{\delta\zeta^n}{\delta s}+g_{mn}\eta^m\frac{\delta^2\zeta^n}{\delta s^2}.$$

Hence, from (2.23) and (2.24), we have at O

$$\frac{d}{ds}(g_{mn}\eta^m\zeta^n)=0, \quad \frac{d^2}{ds^2}(g_{mn}\eta^m\zeta^n)+2R_{smtn}\eta^s\lambda^m\zeta^t\lambda^n=0. \tag{2.29}$$

2.3. - *Conditions that η^r be not twisted all along the geodesic.* Let us first note that for a flat space the RIEMANN-CHRISTOFFEL tensor vanishes, and consequently the vector η^r satisfies the equation

$$\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2}=0.$$

We have therefore the obvious result that in a flat space the vector, obtained by the construction of 2.1, has its direction propagated parallelly along C and its magnitude remains constant.

We now wish to inquire what conditions μ^r must fulfil in order that it may be propagated parallelly along in a general Riemann space C.

The necessary and sufficient condition that μ^r be not twisted in direction is that

$$\frac{\delta\mu^r}{\delta s}=0. \tag{2.31}$$

If this condition is satisfied along C, then also

$$\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}=0,$$

and we deduce from (2.26) and (2.27) that

$$R^r{}_{msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n-e\mu^r R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=0. \tag{2.32}$$

Therefore (2.32) is a necessary condition for the parallel propagation of μ^r.

We shall now show that it is a sufficient condition also. Let us suppose that (2.32) is satisfied at all points of C. Multiplying (2.27) by μ^r and subtracting the result from (2.26), we get

$$\eta\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}+2\frac{d\eta}{ds}\frac{\delta\mu^r}{\delta s}+e\eta\mu^r g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}=0. \tag{2.33}$$

If we multiply these equations by $g_{rs}\frac{\delta\mu^s}{\delta t}$ and use the fact that

$$\frac{d}{ds}\left(g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}\right)=2g_{mn}\frac{\delta^2\mu^m}{\delta s^2}\frac{\delta\mu^n}{\delta s},$$

we obtain

$$\eta\frac{d}{ds}\left(g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}\right)+4\frac{d\eta}{ds}g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}=0;$$

that is,

$$\eta^4 g_{mn}\frac{\delta\mu^m}{\delta s}\frac{\delta\mu^n}{\delta s}=\text{constant},$$

which is zero, since $\frac{\delta\mu^r}{\delta s}$ vanishes initially at the point O. When we substitute this result in (2.33), we have

$$\eta\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}+2\frac{d\eta}{ds}\frac{\delta\mu^r}{\delta s}=0,$$

or, as it may be written,

$$\frac{\delta}{\delta s}\left(\eta^2\frac{\delta\mu^r}{\delta s}\right)=0.$$

In other words, the vector $\eta^2\frac{\delta\mu^r}{\delta s}$ is propagated parallelly along C, and, since it vanishes initially, it therefore vanishes all along C. Hence (2.31) is satisfied, and we have proved our theorem.

The necessary and sufficient condition that the vector η^r, defined by the construction of 2.1, *be not twisted in direction round C is that* (2.32) *be satisfied at all points of C.*

If, in addition to (2.32) being satisfied, we have

$$R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=0, \tag{2.34}$$

at every point of C, then

$$R^r{}_{msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=0;$$

which shows that

$$\frac{\delta^2\eta^r}{\delta^2 s}=0, \tag{2.35}$$

and the vector η^r is altered neither in magnitude nor direction. Referring to (1.22),

we see that (2.34) implies that the two-space containing λ^r and μ^r should have zero curvature.

When (2.34) is not satisfied, on multiplying (2.32) by λ_r, we deduce from the antisymmetrical properties of the RIEMANN-CHRISTOFFEL tensor that

$$\mu^r\lambda_r=0,$$

and consequently μ^r is perpendicular to λ^r.

For a space of constant curvature,

$$R_{smtn}=C(g_{st}g_{mn}-g_{sn}g_{mt}),$$

C being a constant, and so

$$R^r_{.\,mtn}=C(g^r_t g_{mn}-g^r_n g_{mt}).$$

Therefore, if e_1 be the indicator of λ^r and a the quantity $g_{mn}\lambda^m\mu^n$, we have

(2.36) $$R^r_{.\,mtn}\lambda^m\mu^t\lambda^n=C(e_1\mu^r-a\lambda^r),$$

and

(2.361) $$R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=C(ee_1-a^2).$$

Hence

(2.362) $$R^r_{.\,mtn}\lambda^m\mu^t\lambda^n-e\mu^r R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n=aC(ea\mu^r-\lambda^r).$$

If a vanishes initially at O, it follows from (2.28) that it remains zero along C; that is, μ^r remains perpendicular to C. The condition (2.32) is then satisfied for all vectors perpendicular to λ^r.

For a space of constant curvature, all vectors perpendicular to λ^r are not twisted in direction round C.

Expressed in other terms, this means that a neighbouring parallel geodesic $\bar{C}$ lies in the two-space through C, which is obtained by propagating the perpendicular vector μ^r parallelly along C.

As regards the change in magnitude of η^r in this particular case, we deduce from (2.27) and (2.361) that

(2.37) $$\frac{d^2\eta}{ds^2}+e_1C\eta=0,$$

η^r being perpendicular to λ^r. There are two cases to be considered, the first where the constant C has the same sign as e_1, the second where these quantities have opposite signs. In the first case,

(2.38) $$\eta=\eta_0\cos\sqrt{e_1C}s,$$

and the geodesics C, $\bar{C}$ tend towards each other and meet a distance $\pi/2\sqrt{e_1C}$ from O. In the second case,

(2.39) $$\eta=\eta_0\cosh\sqrt{-e_1C}s,$$

and the two curves tend away from each other.

2.4. - *Measure of the twisting of η^r; elongation; torsion quadric.* In order to measure the twisting of η^r, we have to compare the values of the vector at the two points O and P, and for this purpose we shall bring them to two vectors at the same point. Let us propagate η^r_P parallelly back along C from P to O, and let us denote the resulting vector by η'^r. Now $(\eta'^r-\eta^r)$ is the vector at O which must be added to η^r in order to give η'^r, the parallel of the twisted vector at P. Thus $(\eta'^r-\eta^r)$ measures the torsion of the vector η^r at O, and we shall now find an expression for it.

We have

$$\eta^r_P=\eta^r_0+\left(\frac{d\eta^r}{ds}\right)_0 s+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\eta^r}{ds^2}\right)_0 s^2+O(s^3),$$

and, by the definition of parallel propagation,

$$\eta'^r=\eta^r_P+s\left\{\begin{matrix} r \\ mn \end{matrix}\right\}_P \eta^m_P\lambda^n_P-\frac{1}{2}s^2\left[\frac{d}{ds}\left(\left\{\begin{matrix} r \\ mn \end{matrix}\right\}\eta^m\lambda^n\right)\right]_P+O(s^3).$$

Substituting the first set of equations in the second and dropping the suffix 0, we find that

$$\eta'^r=\eta^r+\left(\frac{d\eta^r}{ds}+\left\{\begin{matrix} r \\ mn \end{matrix}\right\}\eta^m\lambda^n\right)s+\frac{1}{2}\left[\frac{d^2\eta^r}{ds^2}+\frac{d}{ds}\left(\left\{\begin{matrix} r \\ mn \end{matrix}\right\}\eta^m\lambda^n\right)\right]s^2+O(s^3).$$

Now at O,

$$\frac{\delta\eta^r}{\delta s}=\frac{d\eta^r}{ds}+\left\{\begin{matrix} r \\ mn \end{matrix}\right\}\eta^m\lambda^n=0,$$

and consequently

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\delta\eta^r}{\delta s}\right)=\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2}.$$

Therefore we obtain the final result,

$$\eta'^r-\eta^r=\frac{1}{2}\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2}s^2+O(s^3), \tag{2.41}$$

which shows that the change in η^r is, in general, of the second order in s, and we shall from now on neglect terms of the third and higher orders.

From equations (2.23) and (2.41),

$$\eta'^r-\eta^r=-\frac{s^2}{2}R^r{}_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n, \tag{2.42}$$

and hence to the second order the change in η^r is along the vector $R^r{}_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n$.

We next examine the change in magnitude of η^r. Let us denote by η' the magnitude of η'^r, and by μ'^r the unit vector in the same direction. Since the magnitude of a vector is unchanged by parallel propagation we see that η' is also the magnitude of the twisted vector at P, and, from (2.241),

$$\eta'-\eta=\frac{1}{2}\frac{d^2\eta}{ds^2}s^2+O(s^3).$$

Hence, making use of (2.271),

$$\eta'-\eta=-e\frac{s^2}{2}\eta R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n. \tag{2.43}$$

The *elongation* of η^r is the ratio $(\eta'-\eta)/\eta$. Therefore, if we put

$$\text{elongation} = \frac{1}{2}\varepsilon s^2,$$

we get

$$\varepsilon = -eR_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n. \tag{2.431}$$

Let us take the quadric

$$eR_{rmsn}\eta^r\lambda^m\eta^s\lambda^n = k \tag{2.44}$$

which we shall refer to as the quadric Q. Then, η being the radius vector of Q in the direction of η^r, we have that its elongation is given by

$$\frac{1}{2}\varepsilon s^2 = -\frac{1}{2}\frac{ks^2}{\eta^2}. \tag{2.441}$$

We call Q the *torsion quadric.*

Hence the elongation of any radius vector of the torsion quadric is inversely proportional to the square of the length of that vector.

Equation (2.29) gives

$$g_{mn}\eta'^m\zeta'^n - g_{mn}\eta^m\zeta^n = -s^2 R_{smtn}\eta^s\lambda^m\zeta^t\lambda^n. \tag{2.45}$$

It follows from this equation that, if η^r and ζ^r are two conjugate vectors of the torsion quadric, their inner product, $g_{mn}\eta^m\zeta^n$, remains constant under the deformation. In particular, two orthogonal vectors will remain orthogonal if they are also conjugate with respect to the torsion quadric. We shall next find an expression for the change in direction of η^r, that is, we wish to find the relation between μ^r and μ'^r at O. Exactly as we arrived at equations (2.41), we obtain

$$\mu'^r - \mu^r = \frac{1}{2}\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}s^2 + O(s^3), \tag{2.46}$$

and therefore, from (2.261),

$$\mu'^r - \mu^r = -\frac{s^2}{2}(R^r{}_{msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n - e\mu^r R_{smtn}\mu^s\lambda^m\mu^t\lambda^n), \tag{2.47}$$

which gives the change in μ^r. Also the small angle θ, between μ^r and μ'^r is given by

$$\theta^2 = |g_{mn}(\mu'^m - \mu^m)(\mu'^n - \mu^n)|,$$

that is,

$$\theta^2 = \frac{s^4}{4}\left|g_{mn}\frac{\delta^2\mu^m}{\delta s^2}\frac{\delta^2\mu^n}{\delta s^2}\right|.$$

Hence, denoting the magnitude of $\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}$ by $\frac{\delta^2\mu}{\delta s^2}$,

$$\theta = \frac{s^2}{2}\frac{\delta^2\mu}{\delta s^2}. \tag{2.48}$$

Also, from (2.241), we have at the point O,

$$\frac{\delta^2\eta^r}{\delta s^2} = \eta\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2} + \frac{d^2\eta}{ds^2}\mu^r,$$

and we see that, to the second order in s, the twist of η^r is in the two-space containing μ^r and $\frac{\delta^2\mu^r}{\delta s^2}$, whilst the angle through which it is twisted in this two-space is $\frac{s^2}{2}\frac{\delta^2\mu}{\delta s^2}$.

We conclude that the torsion of space in any direction is, in general, of the second order in s.

2.5. - *Geometrical interpretation.* The change in η^r is given by (2.42). Now all the vectors conjugate to η^r with respect to the quadric Q lie on the hyperplane

$$R_{rmsn}\zeta^r\lambda^m\eta^s\lambda^n=0,$$

which we call the *conjugate hyperplane* of η^r, and we see that the vector $R^r_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n$ is perpendicular to it. Let ν^r be the unit vector in this direction, and let us put

$$b=g_{mn}\mu^m\nu^n.$$

Then we have

$$R^r_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n=A\nu^r,$$

where

$$R_{rmsn}\eta^r\lambda^m\eta^s\lambda^n=Ab\eta.$$

Thus

$$\eta'^r-\eta^r=-\frac{s^2}{2}R^r_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n=-\frac{s^2}{2}\frac{ek}{b\eta}\nu^r. \tag{2.51}$$

The change in η^r is along the perpendicular to the conjugate hyperplane of η^r with respect to the torsion quadric, and the magnitude of the vector to be added is inversely proportional to the projection of η^r on this direction.

We have also, from (2.261),

$$\begin{aligned}\mu'^r-\mu^r&=-\frac{s^2}{2}\left(\frac{ek}{b\eta^2}\nu^r-\frac{k}{\eta^2}\mu^r\right)\\&=-\frac{ks^2}{2\eta^2}\left(\frac{e\nu^r}{b}-\mu^r\right).\end{aligned}$$

Therefore, if e' be the indicator of ν^r,

$$\theta=\frac{s^2}{2}\frac{|k|}{\eta^2}\left|\frac{e'}{b^2}-e\right|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.52}$$

For a positive definite line-element, b is the cosine of the angle β between μ^r and ν^r, and

$$\theta=\frac{s^2}{2}\frac{|k\tan\beta|}{\eta^2}. \tag{2.521}$$

The principal axes of the quadric Q are given by the equations

$$R^r_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=\varphi\mu^r, \tag{2.53}$$

where φ is a root of the determinantal equation

$$|R^r_{.msn}\lambda^m\lambda^n-\varphi\delta^r_s|=0. \tag{2.54}$$

We see that these two equations are satisfied by the values

$$\mu^r=\lambda^r, \quad \varphi=0;$$

that is, λ^r is a principal axis of Q, and the remaining $N-1$ principal axes are all perpendicular to λ^r.

For vectors along the principal axes of Q we have

$$\eta'^r-\eta^r=-\frac{s^2}{2}\varphi\eta^r. \tag{2.55}$$

Hence the principal axes of the torsion quadric are not twisted in direction but are lengthened in the ratio $\left(1-\frac{s^2}{2}\varphi\right)$ along their own directions.

Let the principal axes of Q be denoted by μ_α^r and the corresponding values of φ by φ_α, where $\alpha=1, 2,...., N$. If small lengths η_α be taken along these directions, then their strained lengths η_α' are given by

$$\eta_\alpha'/\eta_\alpha=1-\frac{1}{2}s^2\varphi_\alpha. \tag{2.56}$$

We may call the quantities $-\frac{1}{2}s^2\varphi_\alpha$ the *principal elongations.*

2.6. - *Conditions that the torsion may be zero.* Let us now find the conditions that the torsion of space in the direction λ^r may be zero, at least to the second order in s.

If μ^r is not twisted to the second order in s, we see from (2.261) that

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=\varphi\mu^r. \tag{2.61}$$

Therefore these equations must be satisfied for all values of μ^r at O in order that the torsion at O in the direction λ^r may be zero.

Let μ_α^r be N vectors at O, where $\alpha=1, 2,...., N$, and let φ_α be the corresponding values of φ for these directions. Any vector at O may be written

$$\mu^r=\sum_{\alpha=1}^{N}A_\alpha\mu_\alpha^r,$$

and this vector must satisfy (2.61). Therefore

$$\begin{aligned}\varphi\mu^r&=R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n\\&=\sum_{\alpha=1}^{N}A_\alpha R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu_\alpha^s\lambda^n\\&=\sum_{\alpha=1}^{N}A_\alpha\varphi_\alpha\mu_\alpha^r.\end{aligned}$$

Hence we conclude that

$$\varphi_\alpha=\varphi, \qquad (\alpha=1, 2,...., N), \tag{2.62}$$

that is, φ must have the same value for all vectors at the point O. But, if we put μ^r equal to λ^r, we see that this constant value is zero. That the torsion be zero, it is therefore necessary that

$$R^r_{.\,msn}\lambda^m\lambda^n=0, \tag{2.63}$$

and this is also a sufficient condition.

When (2.63) is satisfied, not only is η^r not twisted in direction but its magnitude is also unaltered to the second order in s.

In order that the torsion may be zero for all directions at O, (2.63) must be true for all vectors at O, and hence

$$R^r_{.\,msn}+R^r_{.\,nsm}=0.$$

From the properties of the RIEMANN-CHRISTOFFEL tensor, we easily deduce that

$$R^r_{.\,msn}=0. \tag{2.64}$$

The necessary and sufficient condition that the torsion of spacc in all directions be everywhere zero is that the space be flat.

2.7. - *The principal axes of torsion.* Let us take a hyperplane through O and let its equation be

$$\omega_s\eta^s=0. \tag{2.71}$$

The directions in this hyperplane, for which the elongations are stationary, we shall call the *principal axes relative to the hyperplane.* They are the principal axes of the section of the quadric Q by the hyperplane. We shall now find their equations.

In order that μ^r may be a principal direction of this section, every direction, which is conjugate to μ^r with respect to Q and perpendicular to ω^r, must at the same time be perpendicular to μ^r. Hence, for all vectors η^r satisfying

$$R_{rmsn}\eta^r\lambda^m\mu^s\lambda^n=0,$$

and

$$\omega_r\eta^r=0,$$

we must have

$$\mu_r\eta^r=0.$$

In addition,

$$\omega_s\mu^s=0.$$

Therefore

$$\begin{aligned}(R_{rmsn}\lambda^m\lambda^n-\theta g_{rs})\mu^s-\varphi\omega_r&=0,\\ \omega_s\mu^s&=0,\end{aligned} \tag{2.72}$$

and θ must be a root of the determinantal equation

$$\begin{vmatrix} R_{rmsn}\lambda^m\lambda^n-g_{rs}\theta, & \omega_r \\ \omega_s\quad , & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{2.73}$$

These equations give the $N-1$ directions required. Also, since these directions are both orthogonal and conjugate with respect to Q, equation (2.45) shows that to the second order they remain orthogonal under the torsion.

The principal axes in any hyperplane are those directions of the hyperplane which remain orthogonal under the torsion.

The principal axes of torsion relative to the hyperplane, which is normal to λ^r, are given by (2.72) and (2.73), where ω^r is equal to λ^r. They form an orthogonal ennuple with the given direction λ^r. Since λ^r is itself a principal axis of Q, we see that the normal principal axes of torsion coincide with the other $N-1$ principal axes of Q, and it follows from 2.5 that they are not twisted in direction.

2.8. - *Focal directions.* Let us take as before the geodesic $\overline{C}$ through the point $\overline{O}$, whose co-ordinates are $(x^r+\eta^r)$, and let us consider its relation to the two-space through C formed by the parallel propagation of μ^r along C. We wish to investigate if there are directions for which $\overline{C}$ deviates less from its corresponding two-space than for other directions. If such directions exist we shall call them *focal directions of the torsion.*

Now the deviation of $\overline{C}$ from the two-space will be measured by the deviation of η^r_P from the same two-space, or, propagating η^r_P back to O, by the deviation of η'^r from the vector two-space λ^r, μ^r. Since

$$\eta'^r-\eta^r=-\frac{s^2}{2}R^r{}_{.msn}\lambda^m\eta^s\lambda^n,$$

we see that to the first order in s no vector is twisted, but to the second order the vector η^r will in general leave the two-space λ^r, μ^r. The conditions that μ^r be not twisted out of the two-space are that it should satisfy the equations

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=\theta\mu^r+\varphi\lambda^r, \tag{2.81}$$

and hence these are the equations defining the focal directions.

We shall show that in every hyperplane through O there are $N-1$ focal directions. Let

$$\omega_s\eta^s=0 \tag{2.82}$$

be the equation of a hyperplane through O. Then, if μ^r is a focal direction in this hyperplane, it will satisfy simultaneously the equations (2.81) and (2.82); that is, θ must be a root of the equation

$$\begin{vmatrix} R_{rmsn}\lambda^m\lambda^n-g_{rs}\theta, & \lambda_r \\ \omega_s\quad , & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{2.83}$$

Since this has $N-1$ roots, we see that in general there are $N-1$ focal directions in the hyperplane (2.82), which proves our result.

The focal directions of the normal hyperplane we shall call the *normal focal directions.* They are given by the equations (2.81) and (2.83), where ω^r is equal to λ^r. Il μ^r is a normal focal direction, we obtain on multiplying (2.81) by λ_r that $\varphi=0$. Hence the normal focal directions satisfy the equations

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=\theta\lambda^r, \tag{2.84}$$

that is, they are principal axes of the quadric Q, and so coincide with the normal principal axes of torsion. We already know that these directions are not twisted by the torsion but are propagated parallelly along C to the second order in s.

The normal focal directions coincide with the normal principal axes of torsion.

2.9. - *Focal two-spaces.* We define a *focal two-space of the torsion* as a two-space through λ^r such that every vector in it is a focal direction; let us find if such two-spaces exist.

Let ν^r be a unit vector perpendicular to λ^r. If the two-space containing λ^r and ν^r is a focal two-space, then, for all vectors μ^r in it,

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\mu^s\lambda^n=\theta\mu^r+\varphi\lambda^r. \tag{2.91}$$

Hence, putting

$$\mu^r=A\lambda^r+B\nu^r, \tag{2.92}$$

we have that

$$BR^r{}_{.msn}\lambda^m\nu^s\lambda^n=(A\theta+\varphi)\lambda^r+B\theta\nu^r, \tag{2.911}$$

for all values of the ratio A/B. Multiplying this equation by λ_r, it follows that the coefficient of λ^r is zero; therefore

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\nu^s\lambda^n=\theta\nu^r. \tag{2.93}$$

Conversely, if (2.93) are satisfied, then (2.91) are also true for all vectors in the two-space λ^r, ν^r. Consequently the focal two-spaces are defined by equations (2.93). But these also define the normal focal directions of the torsion, and we conclude:

There are $N-1$ focal two-spaces, namely, those containing λ^r and the $N-1$ normal focal directions.

Let us now find the conditions that the focal two-spaces may be indeterminate, that is, that every direction may be a focal direction of the torsion.

The conditions required are that the equations (2.93) be satisfied for all vectors perpendicular to λ^r. We know that these equations are satisfied by the normal focal directions, and, if we let ν_α^r be these directions and θ_α the corresponding values of θ, α ranging from 1 to $N-1$, we have

$$R^r{}_{.msn}\lambda^m\nu_\alpha^s\lambda^n=\theta_\alpha\nu_\alpha^r.$$

Any other vector perpendicular to λ^r can be written in the form

$$\nu^r = \sum_{\alpha=1}^{N-1} A_\alpha \nu_\alpha^r$$

and this vector must satisfy (2.93). Therefore

$$\begin{aligned}\theta\nu^r &= R^r_{.\,msn}\lambda^m\nu^s\lambda^n \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N-1} A_\alpha R^r_{.\,msn}\lambda^m\nu_\alpha^s\lambda^n \\ &= \sum_{\alpha=1}^{N-1} A_\alpha \theta_\alpha \nu_\alpha^r;\end{aligned}$$

that is,

(2.94) $$\theta_\alpha = \theta, \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, N-1),$$

and we see that θ must have the same value for all vectors perpendicular to λ^r. Conversely if (2.94) is true, the same reasoning shows that (2.93) is also true for all vectors perpendicular to λ^r. Thus (2.94) expresses the necessary and sufficient conditions that the focal two-spaces be indeterminate.

Now, from (2.93),

$$\theta = eR_{rmsn}\nu^r\lambda^m\nu^s\lambda^n,$$

e being the indicator of ν^r. Referring back to (1.221), this becomes

(2.95) $$\theta = e_1 K(\lambda, \nu),$$

where e_1 is the indicator of λ^r and $K(\lambda, \nu)$ is the curvature of the two-space λ^r, ν^r.

Hence the necessary and sufficient conditions that the focal two-spaces be indeterminate are that the curvatures of all two-spaces through λ^r be equal.

To express these conditions analytically, we return to equation (1.22). Let K be the curvature of the two-spaces, and e the indicator of any direction μ^r. Then for all values of μ^r,

(2.96) $$\{R_{rmsn} - K(g_{rs}g_{mn} - g_{rn}g_{ms})\}\lambda^m\lambda^n\mu^r\mu^s = 0.$$

Therefore

(2.961) $$\{R_{rmsn} - K(g_{rs}g_{mn} - g_{rn}g_{ms})\}\lambda^m\lambda^n = 0,$$

or,

(2.962) $$R_{rmsn}\lambda^m\lambda^n = K(e_1 g_{rs} - \lambda_r\lambda_s),$$

which gives the required result.

If, moreover, the focal two-spaces are indeterminate for the torsion in any direction λ^r at O, then the curvatures of the two-spaces through any given direction must be equal, and so the curvatures of all two-spaces at O are equal; that is, (2.961) are true for all values of λ^r, and

(2.97) $$R_{rmsn} = K(g_{rs}g_{mn} - g_{rn}g_{ms}).$$

Should this set of equations be true at every point of space, we can prove by means of BIANCHI's identity that K is a constant (1), and the space is of constant curvature.

The necessary and sufficient condition that at every point the focal two-spaces be indeterminate for the torsion in any direction is that the space be of constant curvature.

2.10. - *Dilatation of space.* If an elementary volume V at O becomes a volume V' under the deformation of 2.1, we call the ratio $(V'-V)/V$ the *dilatation of space in the direction* λ^r.

Let us take N elementary lengths η_α, $\alpha=1, 2, \ldots, N$, along the principal axes of the torsion quadric Q. The volume V of the small hyperparallelepiped thus formed is

$$V=\prod_{\alpha=1}^{N}\eta_\alpha. \tag{2.101}$$

Also these directions are not twisted but the η_α become, by (2.56), deformed into η_α', where

$$\eta_\alpha'/\eta_\alpha=1-\frac{1}{2}s^2\varphi_\alpha.$$

The new volume V' is

$$V'=\prod_{\alpha=1}^{N}\eta_\alpha'.$$

Therefore, denoting the dilatation by $\frac{1}{2}s^2\Delta$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}s^2\Delta=\frac{V'-V}{V}&=\prod_{\alpha=1}^{N}(\eta_\alpha'/\eta_\alpha)-1\\&=\prod_{\alpha=1}^{N}\Big(1-\frac{1}{2}s^2\varphi_\alpha\Big)-1\\&=-\frac{1}{2}s^2\sum_{\alpha=1}^{N}\varphi_\alpha,\end{aligned}$$

to the second order in s. But we easily find that

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha=1}^{N}\varphi_\alpha&=R^r{}_{.\,mrn}\lambda^m\lambda^n\\&=-R^r{}_{.\,mnr}\lambda^m\lambda^n\\&=-R_{mn}\lambda^m\lambda^n,\end{aligned}$$

where R_{mn} is the RICCI tensor. Therefore

$$\Delta=R_{mn}\lambda^m\lambda^n. \tag{2.102}$$

---

(1) EISENHART, loc. cit., p. 83.

Let us take the quadric

(2.103) $$R_{mn}\eta^m\eta^n=k,$$

which we may call the *dilatation quadric*, and let us denote it by D. Then, if η be the length of the radius vector of D in the direction η^r, we have

(2.104) $$\Delta=\frac{k}{\eta^2}.$$

The dilatation of space in any direction is inversely proportional to the square of the radius vector of the dilatation quadric in this direction.

The principal axes of the dilatation quadric are the RICCI principal directions at the point (1).

Therefore the Ricci principal directions at a point are those directions which give stationary values for the dilatation of space.

For an Einstein space,

(2.105) $$R_{mn}=\frac{R}{N}g_{mn}.$$

Therefore, e being the indicator of λ^r,

(2.106) $$\Delta=\frac{eR}{N},$$

showing that the dilatation is the same in magnitude for all directions.

Conversely, if $e\Delta$ has the same value for all directions, then

$$R_{mn}\lambda^m\lambda^n=\Delta=ek,$$

k being independent of λ^r; that is,

$$(R_{mn}-kg_{mn})\lambda^m\lambda^n=0,$$

for all directions λ^r at a point. Therefore

$$R_{mn}=kg_{mn},$$

and we see immediately that k equals R/N.

An Einstein space is one in which $\frac{1}{2}s^2e\Delta$ *has the same value for all directions at each point of the space,* $\frac{1}{2}s^2\Delta$ *being the dilatation of space in any direction and e the indicator of this direction.*

A space of constant curvature has

$$R_{mn}=-C(N-1)g_{mn},$$

and therefore in it

(2.107) $$\Delta=-eC(N-1);$$

---

(1) EISENHART, loc. cit., pp. 113-114.

that is, the dilatation for all directions and at every point of a space of constant curvature is constant in magnitude.

Finally, if the dilatation vanishes for all directions, then

$$R_{mn}=0. \tag{2.108}$$

These are the equations which EINSTEIN took for the empty gravitational field. Therefore we have the following result.

The necessary and sufficient conditions that a space be of zero dilatation are that the space satisfy Einstein's gravitational equations.

PIA NALLI (Catania - Italia)

SOPRA UN'OPERAZIONE INTRODOTTA NEL CALCOLO ASSOLUTO

Sia W una varietà analitica ad n dimensioni, ossia il complesso dei valori attribuiti ad n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si fissino in essa due metriche distinte, per mezzo delle forme differenziali

$$(1) \qquad \sum_{1}^{n}{}_{ij} a_{ij} dx_i dx_j, \qquad \sum_{1}^{n}{}_{ij} a'_{ij} dx_i dx_j$$

e denotiamo con V e V' le due varietà metriche corrispondenti.

Sia P un punto di W e per esso due linee PM e PM'. Si consideri la prima come appartenente a V e la seconda a V' e denotiamo con s ed s' gli archi su di esse misurati a partire da P.

In ogni punto H di PM fissiamo un vettore unitario secondo la metrica V e che sia in P tangente a PM': avremo così un vettore $\mathbf{u}(s)$ funzione dei punti H di PM.

Per ogni punto H tracceremo in W una linea tangente ad $\mathbf{u}(s)$ e che si riduca in P alla PM': considereremo ciascuna di tali linee come appartenente a V' e denoteremo con s' l'arco su una di esse misurato a partire da H.

In tal modo si viene a fissare in W una varietà S a due dimensioni, un punto Q della quale è determinato per mezzo dei due parametri s ed s': s, arco PH misurato in V ed s', arco HQ, sulla linea tracciata per H, misurato in V'.

Analogamente: invertendo le due metriche V e V' e l'ufficio delle due linee PM e PM', si viene a fissare in W una varietà S' a due dimensioni i cui punti Q' vengono determinati per mezzo di due parametri s' ed s.

Fissata una coppia (s, s') nell'intorno della coppia $(0, 0)$ vengono determinati in W due punti Q e Q', appartenenti rispettivamente ad S ed S'.

Ora supponiamo che in P sia definita una quantità F e sia poi assegnato un qualunque modo per *prolungare* F nei punti di S ed S' con la sola condizione che tali prolungamenti coincidano lungo PM e PM'. In altri termini: siano definite due funzioni $F(s, s')$, $F'(s', s)$, rispettivamente dei punti Q di S e dei punti Q' di S', tali da avere

$$(2) \qquad F(0, s') = F'(s', 0), \qquad F(s, 0) = F'(0, s), \qquad F(0, 0) = F'(0, 0) = F.$$

Noi porremo

$$DF=\left(\frac{\partial^2[F(s,s')-F'(s',s)]}{\partial s\partial s'}\right)_{\substack{s=0\\ s'=0}}.$$

L'operatore D, *applicato ad un prodotto, si comporta come simbolo di derivazione ordinaria,* il che significa che se

$$F=F_1F_2$$

ed i prolungamenti di F sono i prodotti dei corrispondenti prolungamenti di F_1 ed F_2, si ha

$$DF=DF_1\cdot F_2+F_1\cdot DF_2.$$

La dimostrazione è immediata quando si tenga conto delle (2).

Fin qui abbiamo lasciati completamente arbitrarî il modo di fissare i vettori $\mathbf{u}(s)$ e gli analoghi $\mathbf{u}'(s')$ ed il modo di definire i prolungamenti di F nei punti di S ed S'. Ora aggiungeremo la condizione che $\mathbf{u}(s)$ *sia parallelo lungo* PM *secondo la metrica* V *ed* $\mathbf{u}'(s')$ *lo sia lungo* PM′ *secondo la metrica* V′.

In quanto ai prolungamenti di F porremo le seguenti definizioni:

quando F *è il valore che prende in* P *una funzione definita nei punti di* W *dell'intorno di* P (funzione del posto) *i prolungamenti di* F *saranno i valori che tale funzione prende su* S *ed* S′;

quando F *è assegnata soltanto in* P *quale componente di un tensore,* F(s, s′), *prolungamento di* F *nel punto* Q *di* S, *sarà l'analoga componente del tensore che si ottiene in* Q *spostando il fissato per parallelismo lungo* PH, *secondo la metrica* V, *e lungo* HQ, *secondo la metrica* V′.

Analogamente: F(s′, s) *si ottiene con uno spostamento per parallelismo lungo* PH′, *secondo la metrica* V′, *e lungo* H′Q′, *secondo la metrica* V.

Da questi due casi si passa poi a quelli in cui F *è il prodotto di quantità per le quali siano stati definiti i prolungamenti, assumendo come prolungamenti di un prodotto i prodotti dei prolungamenti dei fattori.*

Quando V coincide con V', il prodotto $DFdsds'$, denotando con ds e ds' spostamenti infinitesimi a partire da P su PM e PM', coincide con l'operazione ΔF del prof. LEVI-CIVITA (*trasporto ciclico lungo un parallelogrammo elementare* (1)). Quest'ultima gode della proprietà che *applicata ad una funzione del posto dà per risultato zero*: $\Delta F=0$.

Tale proprietà non si conserva per l'operazione più generale da noi definita, ma si conserva quando nel punto P le due varietà metriche V e V' hanno un contatto del second'ordine almeno, cioè quando nel punto P sono soddisfatte le eguaglianze

(3) $$a_{ij}=a'_{ij},\qquad \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_r}=\frac{\partial a'_{ij}}{\partial x_r}.$$

---

(1) T. LEVI-CIVITA: *Lezioni di calcolo differenziale assoluto.* Roma, Stock (1925), pp. 198-201.

Nell'ipotesi che V *e* V′ *abbiano in* P *un contatto del second'ordine almeno,* calcoliamo DR^j, essendo R^j componente controvariante di un vettore assegnato in P.

Denotando con $\left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\}$ ed $\left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\}'$ i simboli di CHRISTOFFEL per le due varietà V e V', tenuto conto che in P, per le (3), valgono le eguaglianze

$$\left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} i & j \\ h & \end{matrix} \right\}'$$

un facile calcolo dà

$$DR^j = -\sum_1^n {}_{ihk} P^j_{i,hk} R^i u^h u'^k$$

dove u^h ed u'^k sono le componenti controvarianti dei due vettori unitarî, in entrambe le metriche, tangenti in P a PM e PM' e

$$P^j_{i,hk} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right\}' - \frac{\partial}{\partial x_h} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} - \sum_1^n {}_l \left[\left\{ \begin{matrix} l & h \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & k \\ l & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} l & k \\ j & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & h \\ l & \end{matrix} \right\} \right].$$

Che $P^j_{i,hk}$ sia un tensore covariante rispetto ad i, h, k e controvariante rispetto ad j, si può vedere, con lo stesso metodo usato dal Prof. LEVI-CIVITA nel caso in cui V e V' coincidano, applicando l'operatore D all'invariante

$$\Phi = \sum_1^n {}_j A_j R^j,$$

dove le A_j costituiscono un sistema semplice funzione del posto. Si ha allora per $D\Phi$, che è pure un invariante,

$$D\Phi = \sum_1^n {}_j A_j DR^j = -\sum_1^n {}_{ijhk} P^j_{i,hk} R^i A_j u^h u'^k,$$

dalla quale risulta quanto si è detto su $P^j_{i,hk}$.

Però dobbiamo notare che l'introduzione dell'operazione D nel Calcolo assoluto, almeno nel caso delle varietà metriche che si osculano in un punto, e quindi, in particolare dell'operazione Δ del prof. LEVI-CIVITA, non potrà portare a risultati che non possano ottenersi in modo più semplice con sottrazioni di derivate covarianti.

Nel Calcolo assoluto il concetto veramente essenziale è quello di *parallelismo* dal quale molti altri si possono dedurre nel modo più semplice.

Così è immediata la deduzione della derivazione covariante col metodo usato dal prof. LEVI-CIVITA (1), dopo di che, per mezzo di sottrazioni di derivate seconde covarianti, si possono introdurre i simboli di RIEMANN e dimostrare il loro carattere tensoriale. Anzi, faremo vedere che per mezzo di sottrazioni di

(1) l. c., pp. 165-168.

derivate seconde covarianti si possono ottenere delle formole che comprendono in particolare la definizione del tensore di RIEMANN-CHRISTOFFEL e la formola che dà la differenza dei simboli di RIEMANN di seconda specie per due varietà qualunque, per stabilire la quale il prof. LEVI-CIVITA si serve dell'operazione Δ (1).

Siano V e V' due varietà metriche con le relative forme fondamentali (1). È noto che le differenze dei simboli di CHRISTOFFEL

$$\left\{ \begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right\}' - \left\{ \begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right\}$$

costituiscono un tensore ϱ^j_{ih} (2).

Fissiamo una terza varietà metrica V'' per mezzo della forma

$$\sum_1^n{}_{ij} a''_{ij} dx_i dx_j$$

per la quale denoteremo con $\left\{ \begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right\}''$ i simboli di CHRISTOFFEL.

Formeremo un tensore quadruplo nel seguente modo.

Partendo dal sistema semplice A_i, formiamone il derivato doppio $A_{i/hk}$ rispetto alla prima metrica. Avremo:

$$A_{i/hk} = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_h \partial x_k} - \sum_1^n{}_j \left\{ \begin{matrix} h & k \\ j & \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \sum_1^n{}_j \left\{ \begin{matrix} i & h \\ j & \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} -$$

$$- \sum_1^n{}_j \left\{ \begin{matrix} i & k \\ j & \end{matrix} \right\} \frac{\partial A_j}{\partial x_h} + \text{ una forma lineare nelle } A_j.$$

Ora, denotando con $(A_{i/h})''$ il derivato covariante di A_i con referenza alla terza metrica, abbiamo

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = (A_{j/k})'' + \sum_1^n{}_r \left\{ \begin{matrix} j & k \\ r & \end{matrix} \right\}'' A_r$$

ed altre due analoghe ci danno $\frac{\partial A_i}{\partial x_h}$ e $\frac{\partial A_i}{\partial x_j}$.

Si sostituisca nella precedente e si formi l'espressione analoga per $(A_{i/kh})'$, derivato secondo di A_i rispetto alla metrica V'. Facendo la differenza $A_{i/hk} - (A_{i/kh})'$ si ottiene la somma di due parti una delle quali è

$$\sum_1^n{}_j \varrho^j_{hk} (A_{i/j})'' + \sum_1^n{}_j \varrho^j_{ih} (A_{j/k})'' + \sum_1^n{}_j \varrho^j_{ik} (A_{j/h})'' \tag{4}$$

e l'altra è una forma lineare nelle A_j che scriviamo

$$- \sum_j T^j_{i.hk} A_j :$$

---

(1) l. c., pp. 197-210, 232-237.

(2) l. c., pp. 227-228.

$T^j_{i,hk}$ è quindi un tensore covariante rispetto ad i, h, k, controvariante rispetto ad j. In particolare, se V e V' coincidono manca la (4) e

$$T^j_{i,hk}=\{ij, hk\}.$$

È questo il modo più semplice per arrivare al tensore $\{ij, hk\}$ che ne mette facilmente in evidenza le proprietà con quelle del tensore derivato.

Facilmente si dimostra che

$$T^j_{i.hk}-T^j_{i,kh}=\{ij, hk\}+\{ij, hk\}'. \tag{5}$$

Oltre al tensore $T^j_{i.hk}$ possiamo ottenerne un altro partendo dalla differenza

$$A_{i/hk}-(A_{i/hk})':$$

essa si esprime come somma di due parti, una delle quali è ancora la (4) e l'altra è una forma lineare nelle A_j. Il coefficiente di A_j in tale forma, che scriviamo $B^j_{i,hk}$, è un tensore.

Facilmente si dimostra che

$$B^j_{i.hk}-B^j_{i,kh}=\{ij, hk\}'-\{ij, hk\}. \tag{6}$$

In particolare, facendo coincidere V'' con V', si ha

$$B^j_{i.hk}=\varrho^j_{ih/k}+\sum_1^n{}_r\varrho^j_{rk}\varrho^r_{ih}.$$

La (6) si riduce in tal caso alla nota formola

$$\{ij, hk\}'-\{ij, hk\}=\varrho^j_{ih/k}-\varrho^j_{ik/h}-\sum_1^n{}_r[\varrho^j_{rh}\varrho^r_{ik}-\varrho^j_{rk}\varrho^r_{ih}]$$

alla quale abbiamo accennato.

Tornando al caso generale con una V'' generica, si dimostrano facilmente le eguaglianze

$$B^j_{i,hk}+T^j_{i,kh}=-\{ij, hk\},$$
$$B^j_{i,hk}+T^j_{i.hk}=\{ij, hk\}'.$$

Quando V e V' si osculano in un punto P, in questo, qualunque sia la terza metrica V'', si ha

$$T^j_{i.hk}=\frac{\partial\left\{\begin{matrix}i&h\\j&\end{matrix}\right\}}{\partial x_k}-\frac{\partial\left\{\begin{matrix}i&k\\j&\end{matrix}\right\}'}{\partial x_h}-\sum_1^n{}_r\left[\left\{\begin{matrix}r&h\\j&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i&k\\r&\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}r&k\\j&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}i&h\\r&\end{matrix}\right\}\right],$$

che, salvo lo scambio di V con V', è il tensore $P^j_{i,hk}$ al quale siamo arrivati per mezzo dell'operazione D.

Chiuderemo col trovare l'espresssione di $T^j_{i,hk}$ in un caso particolare il quale potrebbe suggerire lo studio di qualche problema più generale.

Sia V_2 un superficie, P un suo punto, g una direzione uscente da P, L la geodetica tracciata per P nella direzione g. Se y_2 è l'arco su tale geodetica contato a partire da P ed y_1 l'arco su una geodetica normale ad L, contato a partire dal punto d'incontro con L, assumendo y_1 ed y_2 come coordinate curvilinee di un punto della V_2, il quadrato dell'elemento lineare di V_2 assume la forma

$$dy_1^2 + G^2(y_1, y_2)dy_2^2$$

dove

$$G(0, y_2) = 1, \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial y_2}\right)_{\substack{y_1=0 \\ y_2=0}} = 0.$$

Inoltre è

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2}\right)_{y_1=0} = -K(y_2)$$

dove $K(y_2)$ è la curvatura di V_2 nei punti di L: in particolare $K_0 = K(0)$ è la curvatura in P.

Le coordinate y_1, y_2 sono geodetiche in ogni punto di L: se consideriamo la varietà euclidea V_2' per la quale y_1, y_2 sono coordinate cartesiane, cioè la varietà V_2' per la quale il quadrato dell'elemento lineare è

$$dy_1^2 + dy_2^2,$$

essa oscula la V_2 lungo L ed in particolare in P. Così, fissato un punto P in V_2 e per esso una direzione g, resta ben determinata la varietà euclidea V_2'.

Per le due varietà V_2 e V_2' avremo in ogni punto di L, ed in particolare in P, un tensore $T^j_{i,hk}$: ci proponiamo di dare, in coordinate generiche, l'espressione di tale tensore in P.

Riferendoci ad un sistema qualunque di coordinate x_1, x_2, sia per la V_2

$$ds^2 = \sum_1^2 {}_{ij} a_{ij} dx_i dx_j.$$

Dal tensore $T^j_{i,hk}$, componendo col tensore a_{rj}, otteniamo il tensore

$$T_{ir,hk} = \sum_1^2 {}_j a_{rj} T^j_{i,hk},$$

ed in virtù della (5) è

$$T_{ir,hk} - T_{ir,kh} = (ij, hk).$$

Mettendoci nel punto P si trova facilmente che nel particolare sistema di coordinate y_1, y_2 già introdotto è

$$T_{ir,hk} = 0$$

ad eccezione di

$$T_{12,21} = T_{22,11} = -K_0, \quad T_{21,21} = K_0.$$

Se **u**, **v**, **z**, **w** sono quattro vettori unitarî in P e si forma l'invariante

$$\sum_1^2 {}_{irhk} T_{ir,hk} u^i v^r z^h w^k$$

si trova, sempre nel sistema di coordinate y_1, y_2,

$$-K_0(u^1v^2-u^2v^1)z^2w^1-K_0u^2v^2z^1w^1$$

ossia, se $\mathbf{g}$ è il vettore unitario avente la direzione g,

$$-K_0[\text{sen }(\mathbf{u},\mathbf{v})\cos(\mathbf{z},\mathbf{g})\,\text{sen }(\mathbf{w},\mathbf{g})-\cos(\mathbf{u},\mathbf{g})\cos(\mathbf{v},\mathbf{g})\,\text{sen }(\mathbf{z},\mathbf{g})\,\text{sen }(\mathbf{w},\mathbf{g})].$$

In coordinate generiche sarà dunque

$$\sum_1^2{}_{irhk}T_{ir,\,hk}u^iv^rz^hw^k=(12,12)[(u^1v^2-u^2v^1)(w^1g^2-w^2g^1)(z^1g_1+z^2g_2)-$$
$$-(u^1g_1+u^2g_2)(v^1g_1+v^2g_2)(z^1g^2-z^2g^1)(w^1g^2-w^2g^1)].$$

Eguagliando i coefficienti di $u^iv^rz^hw^k$ nei due membri si hanno i valori delle $T_{ir,\,hk}$ e per conseguenza delle $T^j_{i,\,hk}$. La conoscenza delle quali può servire a calcolare in P le derivate seconde rispetto alle x_1, x_2 delle a'_{ij}, coefficienti del quadrato dell'elemento lineare nella V_2'.

Più in generale, si potrebbe proporre un problema simile per una V_n: determinata in un certo modo una V_n' che osculi la V_n in un punto P (il che quando V_n' è euclidea equivale a fissare per la V_n un sistema di coordinate geodetiche in P) calcolare in P le derivate parziali seconde rispetto alle coordinate dei coefficienti a'_{ij} del quadrato dell'elemento lineare nella V_n'.

Più in generale: calcolare in P le derivate parziali di un qualunque ordine, o, ciò che è lo stesso, calcolare in P il derivato di un qualunque ordine del tensore a'_{ij} rispetto alla metrica di V_n.

Tale calcolo si potrà ritenere effettuato quando siano calcolati in P i derivati del tensore $T^j_{i,\,hk}$ rispetto alla metrica di V_n.

M. PETROVITCH (Beograd - Jugoslavia)

SUR UN NOMBRE ABSOLU RATTACHÉ AUX GÉODÉSIQUES DES SURFACES

Désignons par λ le quadruple produit de la courbure totale d'une surface en un point considéré M, par le carré de l'arc considéré M_0M d'une géodésique passant par M et par un point fixe M_0 de la surface. Nulle à l'origine des arcs M_0, la valeur λ commence à croître en valeur absolue le long de la géodésique, variant avec la courbure totale de la surface le long de celle-ci et avec la longueur de l'arc parcouru.

Cette valeur étant le produit de deux facteurs de dimensions respectives L^{-2} et L^2 et qui sont invariants par rapport aux systèmes des coordonnées, est un *nombre absolu* dont la grandeur est *indépendante de ces systèmes et du choix des unités de mesure.* Elle ne dépend que des propriétés intrinsèques de la surface et de l'origine de l'arc choisie sur la géodésique.

Le nombre λ est positif ou négatif suivant que le long de la géodésique la courbure totale de la surface est positive ou négative. Pour qu'il soit constamment nul, il faut et il suffit que la surface soit développable.

L'élément linéaire (ds) de la surface étant exprimé sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2 \tag{1}$$

au moyen des coordonnées u et v telles que les courbes $v=$const. soient les géodésiques, et les courbes $u=$const. leurs trajectoires orthogonales, le nombre λ s'exprime à l'aide de la fonction G par la formule

$$\lambda = \frac{\left(\frac{\partial G}{\partial v}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}}{G^2}u^2. \tag{2}$$

Ceci resulte de la formule de Gauss exprimant la courbure totale σ de la surface en un point (u, v), sous la forme

$$\sigma = -\frac{1}{\Phi}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} \qquad \text{où} \quad \Phi = \sqrt{G}. \tag{3}$$

Dans la formule (2) la variable v doit être remplacée par la valeur constante définissant la géodésique considérée; le long de celle-ci λ variera avec la seule variable u representant l'arc M_0M de la géodésique.

Le problème inverse: trouver la surface pour laquelle, le point M_0 étant convenablement choisi sur chaque géodésique, λ varie suivant une loi donnée

$$\lambda = \varphi(u, v) \tag{4}$$

se ramène à l'équation du second ordre

$$4u^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \varphi(u, v)\Phi = 0 \tag{5}$$

(où v ne figure que comme paramètre) déterminant la fonction $\Phi = \sqrt{G}$ laquelle elle-même détermine l'élément linéaire (1) de la surface.

L'intégrale générale de (5) est de la forme

$$\Phi = \Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2 \tag{6}$$

où Φ_1 et Φ_2 sont deux intégrales particulières de (5), et V_1, V_2 deux fonctions arbitraires de v. Le ds^2 de la surface est de la forme

$$ds^2 = du^2 + (\Phi_1 V_1 + \Phi_2 V_2)^2 dv^2. \tag{7}$$

À l'aide de (4) et (7) on connaîtra le ds^2 de la surface sous la forme

$$ds^2 = A du^2 + B du d\lambda + C d\lambda^2 \tag{8}$$

exprimé en coordonnées u et λ.

Il y aurait de l'intérêt de refaire quelques problèmes de la théorie des géodésiques à l'aide de coordonnées u et λ. Ces coordonnées se présentent même d'une manière naturelle dans certains de ces problèmes comme le montre l'exemple suivant.

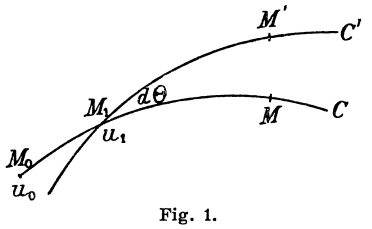


Fig. 1.

Considérons deux géodésiques infiniment voisines C et C' (fig. 1), issues d'un point considéré $M_1(u, v)$ de la surface. D'après le théorème de JACOBI, l'arc M_1M de C sera le plus court chemin entre M_1 et M si entre ces deux points la géodésique C' ne coupe pas C, et il le sera effectivement sur toute portion de surface à courbure totale *négative*. Cet arc cessera d'être le plus court chemin si M se trouve au delà du premier point d'intersection de C et C' après M.

D'après le théorème d'OSSIAN BONNET, sur une surface à courbure totale *positive* et constamment *plus grande* qu'une valeur α, une géodésique cesse généralement d'être une ligne minima sur une étendue supérieure à $\frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}$.

Or, on arrive à des propositions analogues, parfois plus précises, par la considération des valeurs λ le long d'une géodésique.

Désignons par p la distance variable MM' de C et C'. D'après la formule

de Gauss, p considéré comme fonction de l'arc $M_1M=u$ de la géodésique, satisfera à l'équation différentielle

$$\frac{d^2p}{du^2}+\sigma p=0. \tag{9}$$

La distance p sera l'intégrale de cette équation différentielle s'annulant pour $u=u_1$ et dont la dérivée $\frac{dp}{du}$ prend pour $u=u_1$ la valeur $d\theta$ égale à l'angle que forment les géodésiques C et C' au point M_1. En posant dans (9)

$$\sigma=\frac{\lambda}{4u^2} \tag{10}$$

l'équation devient

$$4u^2\frac{d^2p}{du^2}+\lambda p=0 \tag{11}$$

et par le changement

$$u=e^t, \qquad p=ze^{\frac{t}{2}}=z\sqrt{u} \tag{12}$$

se transforme en

$$\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\lambda-1}{4}z=0. \tag{13}$$

Mettant à part la valeur $u=0$, les valeurs p et z s'annulent pour les mêmes valeurs de t et de u.

Supposons que le long de l'arc M_1M de la géodésique C le nombre λ reste constamment *plus petit* qu'un nombre M, plus petit lui-même que un, et envisageons l'équation différentielle

$$\frac{d^2z'}{dt^2}+\frac{M-1}{4}z'=0. \tag{14}$$

Son intégrale s'annulant pour $u=u_1$ et dont la dérivée $\frac{dz'}{dt}$ prend pour $u=u_1$ la valeur $d\theta$, est

$$z'=\frac{\sqrt{u_1}}{2a}\left[\left(\frac{u}{u_1}\right)^a-\left(\frac{u_1}{u}\right)^a\right]d\theta \tag{15}$$

où a est le nombre réel positif

$$a=\frac{1}{2}\sqrt{1-M}. \tag{16}$$

D'après le théorème de Sturm sur les équations linéaires homogènes du second ordre, dans un intervalle quelconque à partir de $u=u_1$ la valeur z' devrait s'annuler au moins autant de fois que z (et par suite aussi p). Mais z' ne s'annule jamais, donc p ne peut non plus jamais devenir nul. Les géodésiques C et C' ne se coupent plus à partir du point M_1 et il s'en suit, d'après le théorème de JACOBI, que la géodésique C est ligne minima dans toute la longueur de l'arc M_1M.

Un arc de la géodésique le long duquel, pour l'origine des arcs M_0 considéré, le nombre λ est constamment plus petit que un, est le plus court chemin entre deux quelconques de ses points.

Il en est, en particulier, ainsi pour les géodésiques des surfaces à courbure totale *négative*: le nombre λ est costamment négatif et par suite plus petit que un; la géodésique est ligne minima dans toute sa longueur, conformement au

théorème de JACOBI. Mais notre proposition offre plus de généralité : la propriété de minimum le long d'un arc s de la géodésique subsiste également pour des surfaces (ou portions de surface) à courbure *positive*, toutes les fois que, pour M considéré, le nombre λ est constamment plus petit que un le long de s.

Considérons, par exemple, une surface à courbure totale *positive* et constamment *plus petite* qu'une valeur β. Si alors

$$u < \frac{1}{2\sqrt{\beta}}$$

on aura $\lambda < 1$ et la proposition précédente sera applicable. Comme l'on peut prendre l'origine des arcs M aussi près qu'on veut du point M_1, on a la proposition suivante complètant dans une certaine mesure celles de JACOBI et d'OSSIAN BONNET :

Sur une surface à courbure totale positive et plus petite qu'une valeur β, une géodésique est certainement ligne minima sur une étendue inférieure à $\frac{1}{2\sqrt{\beta}}$.

Supposons maintenant que le long de l'arc M_1M de la géodésique C le nombre λ soit constamment *plus grand* qu'un nombre N, plus grand lui-même que un, et envisageons l'équation

$$\frac{d^2z''}{dt^2} + \frac{N-1}{4} z'' = 0. \tag{17}$$

Son intégrale exprimée en u, s'annulant pour $u = u_1$ et dont la dérivée $\frac{dz''}{dt}$ prend pour $u = u_1$ la valeur $d\theta$ est

$$z'' = \frac{\sqrt{u_1}}{b} \cdot \sin\left(b \log \frac{u}{u_1}\right) d\theta \tag{18}$$

où b est le nombre réel positif

$$b = \frac{1}{2}\sqrt{N-1}. \tag{19}$$

D'après un second théorème de Sturm, p s'annulera à partir de $u = u_1$ avant z'', et comme z'' s'annulle pour

$$u = u_1 e^{\frac{n\pi}{b}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{20}$$

p s'annulera avant que u ait atteint la valeur

$$u_2 = u_1 e^{\frac{\pi}{b}}. \tag{21}$$

La longueur de l'arc $M_1M_2 = u_2 - u_1$, dont les extrémités sont les deux points consécutifs d'intersection des géodésiques C et C', est donc plus petit que l'arc $M_0M_1 = L$ multiplié par le facteur

$$\mu = e^{\frac{\pi}{b}} - 1 = e^{\frac{2\pi}{\sqrt{N-1}}} - 1. \tag{22}$$

On en tire, utilisant le théorème de JACOBI, la proposition suivante:

Un arc s de la géodésique le long duquel le nombre λ est constamment plus grand que un, ne peut être le chemin le plus court entre deux de ses points sur une étendue supérieure à μL.

On peut aussi l'exprimer sous la forme suivante:

Le plus court chemin entre deux points sur s est toujours moindre que μL.

Ce fait subsiste quel que soit l'origine des arcs M_0 (c.-à-d. la longueur L). Or, comme l'on a

$$\lambda = 4 \cdot \sigma \cdot (L+s)^2 \tag{23}$$

en considérant un même point M (s constant) et en augmentant L, on peut faire λ (et par suite aussi N) plus grand que un et même aussi grand qu'on veut. En prenant alors

$$N = 4 \cdot \sigma \cdot L^2$$

on aura $\lambda > 1$ et la proposition précédente sera applicable. D'autre part, pour L très grand le facteur μ se réduit à

$$e^{\frac{\pi}{L\sqrt{\sigma}}} - 1 \tag{24}$$

et la valeur μL diffère peu de $\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}}$. Si donc la courbure totale de la surface est constamment plus grande qu'un nombre positif a, *le plus court chemin entre deux points quelconques de la surface est toujours moindre que* $\frac{\pi}{\sqrt{a}}$ et par suite *la surface est fermée.* On retombe ainsi sur le théorème d'OSSIAN BONNET.

Les résultats qui précédent fournissent, par la seul considération du nombre λ rattaché aux géodésiques issues d'un point considéré M, une solution des problèmes suivants:

1°) Déterminer sur la surface une région D entourant le point M, telle que l'arc d'une géodésique issue de M et compris dans cette région, soit le plus court chemin entre M et un point quelconque de cet arc, ou bien qu'il ne le soit pas;

2°) Trouver combien de fois deux géodésiques infiniment voisines issues du point M, se coupent sur une longueur donnée de leurs arcs.

Les théorèmes de JACOBI et d'OSSIAN BONNET en fournissent une sorte de solution par la considération des variations de la courbure totale dans une région de la surface autour du point M. OSSIAN BONNET utilise la méthode de comparaison de Sturm où comme équations différentielles de comparaison servent les équations correspondant à la courbure constante. La considération des variations du nombre λ le long des géodésiques conduit à utiliser comme équations de comparaison les équations correspondant à la courbure variable, ce qui augmente la précision des résultats. On s'en rendra compte sur l'exemple suivant:

Considérons l'équation

$$\frac{d^2p}{du^2} + \frac{65}{4u^2}\, p = 0. \tag{25}$$

Si l'on emploie comme équation de comparaison celle correspondant à la courbure totale constante, en majorant la courbure $\sigma = \frac{65}{4u^2}$ par le nombre $\frac{65}{4 \cdot 1^2}$ et en la minorant par le nombre $\frac{65}{4 \cdot 100^2}$, on trouve, par le procédé de Sturm, que dans l'intervalle de $u=1$ à $u=100$ la variable p s'annule au moins une fois, et au plus 128 fois. Or, si pour la même équation (25) on prend pour équation de comparaison celle correspondant à λ constant, en majorant le nombre $\lambda=62$ par le nombre 82 et en le minorant par 50, on trouve que p s'annule dans le même intervalle de $u=1$ à $u=100$ au moins 2 fois et au plus 4 fois, ce qui fournit un résultat beaucoup plus précis.

L. GODEAUX (Liège - Belgio)

SUR LA THÉORIE DES SURFACES ET L'ESPACE RÉGLÉ

1. - Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées projectives homogènes de Wilczynski d'un point d'une surface (x) de S_3 rapportée à ses asymptotiques u, v. Elles satisfont au système d'équations aux dérivées partielles complètement intégrable

$$x^{20}+2bx^{01}+c_1x=0,$$
$$x^{02}+2ax^{10}+c_2x=0,$$

où l'on a posé

$$x^{ik}=\frac{\partial^{i+k}x}{\partial u^i\partial v^k}.$$

Les conditions d'intégrabilité sont

$$a^{20}+c_2^{10}+2ba^{01}+4ab^{01}=0,$$
$$b^{02}+c_1^{01}+2ab^{10}+4ba^{10}=0,$$
$$c_1^{02}+4a^{10}c_1+2ac_1^{10}=c_2^{20}+2bc_2^{01}+4b^{01}c_2.$$

Représentons les droites de S_3 par les points d'une hyperquadrique Q de S_5 et soient U, V les images des droites xx^{10}, xx^{01} sur Q. Les surfaces (U), (V) sont consécutives dans une suite de Laplace (BOMPIANI, TZITZEICA) et on a

$$U^{10}+2bV=0, \quad V^{01}+2aU=0.$$

On désignera par U_1, U_2,.... les transformés successifs de Laplace dans le sens des v, par V_1, V_2,.... ceux de V dans le sens des u.

2. - Nous avons démontré (Bulletin de l'Académie roy. de Belgique, 1927, pp. 812-826; 1928, pp. 31-41) que la suite de Laplace ...., U, V,.... est autopolaire par rapport à Q.

Les plans UU_1U_2, VV_1V_2 sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique suivant deux coniques représentant les génératrices des deux modes de la quadrique de Lie Φ de la surface (x) au point x (BOMPIANI).

Les plans $U_iU_{i+1}U_{i+2}$, $V_iV_{i+1}V_{i+2}$ sont conjugués par rapport à Q et coupent cette hyperquadrique en des points représentant les génératrices des deux modes d'une quadrique Φ_i. On ainsi une suite de quadriques Φ, Φ_1, Φ_2,.... attachée

à chaque point x d'une surface (x). Deux quadriques consécutives de la suite se touchent en quatre points dont le lieu, lorsque x décrit la surface (x), est une nappe commune de l'enveloppe de ces quadriques.

3. - Considérons une droite j engendrant une congruence W dont (x) est une surface focale. Le point J, image sur Q de la droite j, est donné par

$$J=\lambda U-\mu V$$

où

$$\mu^{10}+2b\lambda=0, \quad \lambda^{01}+2a\mu=0.$$

La surface (J) est conjuguée à la congruence (UV). Désignons par $J_1, J_2,\ldots$ les transformés successifs de Laplace de J dans le sens des v, par $J_{-1}, J_{-2},\ldots$ les transformés dans le sens des u. La suite ...., J_1, J, J_{-1},.... est inscrite dans la suite ...., U, V,.... Désignons par P_i le pôle de l'hyperplan $J_{i-2}J_{i-1}J_iJ_{i+1}J_{i+2}$ par rapport à Q. La suite de Laplace ...., P_{-1}, P, P_1,.... est circonscrite à la suite ...., U, V,....

Les plans JJ_1J_2 et PP_1P_2 sont conjugués par rapport à Q et les sections de Q par ces plans représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique Ψ qui se raccorde à la quadrique de Lie Φ suivant la droite xx^{01}. De même, les plans $JJ_{-1}J_{-2}$ et $PP_{-1}P_{-2}$ coupent Q en des points représentant les génératrices des deux modes d'une quadrique Ψ' se raccordant le long de xx^{10} à la quadrique de Lie Φ.

Plus généralement, les plans $J_iJ_{i+1}J_{i+2}$ et $P_iP_{i+1}P_{i+2}$ sont conjugués par rapport à Q et les sections de cette hyperquadrique par ces plans représentent les génératrices des deux modes d'une quadrique que nous désignerons par Ψ_i si $i>0$, par Ψ'_{-i} si $i<0$.

Nous avons ainsi deux familles de quadriques Ψ, Ψ_1,.... et Ψ', Ψ_1',.... Deux quadriques consécutives d'une famille se touchent en quatre points.

Les quadriques Φ, Ψ et Ψ' ont entre elles les relations suivantes: Deux génératrices d'un mode de la quadrique Φ_{i-1} appartiennent à la fois aux quadriques Ψ_{i-1}, Ψ_i; deux génératrices du même mode de cette quadrique appartiennent à la fois aux quadriques Ψ_i', Φ_i. Les quadriques Ψ'_{i-1}, Ψ' ont en commun deux génératrices du second mode de la quadrique Φ_{i-1} et il en est de même des quadriques Ψ_i et Φ_i.

4. - Les points où la droite U_1V_1 recontre l'hyperquadrique Q sont les images des directrices de Wilczynski relatives au point x de la surface (x).

Les foyers de la directrice de Wilczynski r passant par le point x sont donnés par

$$[16ab-(\log. ab)^{11}-(\log. a)^{10}(\log. b)^{01}\pm\varphi]x+$$
$$+2x^{10}(\log. b)^{01}+2x^{01}(\log. a)^{10}-4x^{11},$$

où

$$\varphi=\sqrt{\overline{\left(\log.\frac{a}{b}\right)^{11}}^{2}+\alpha\beta},$$

$$\alpha=2(\log. a)^{20}+\overline{(\log. a)^{10}}^{2}+4(b^{01}+c_1),$$

$$\beta=2(\log. b)^{02}+\overline{(\log. b)^{01}}^{2}+4(a^{10}+c_2).$$

Les plans focaux de la seconde directrice s de Wilczynski coupent la droite r aux points

$$[(\log. ab)^{11}-(\log. a)^{10}(\log. b)^{01}\pm\varphi]x+$$
$$+2x^{10}(\log. b)^{01}+2x^{01}(\log. a)^{10}-4x^{11}.$$

Désignons par p, q les foyers de r correspondant respectivement aux signes + et — dont φ est affecté, par m' et n' les points de rencontre des plans focaux de s avec r choisis de la même manière. L'involution déterminée sur r pas les couples de points p, n' et q, m' possède comme point uni le point x. Le second point uni y décrit une surface (y) sur laquelle les lignes u, v, ne sont pas en général des asymptotiques.

5. - Lorsque les quadriques de Lie de la surface (x) n'ont que deux points caractéristiques, la suite de Laplace ....U, V,.... a la période six, c'est-à-dire que V_5 coïncide avec U, et réciproquement (Bulletins de l'Académie roy. de Belgique, 1928, pp. 158-186, 345-348). Le second point caractéristique des quadriques de Lie, y, engendre une surface dont les asymptotiques sont les lignes u, v (DEMOULIN). Les tangentes aux asymptotiques yy^{01}, yy^{10} sont représentées sur Q par le points U_2, V_2.

Les droites xx^{10} et yy^{10} se rencontrent en un point m et les droites xx^{01} et yy^{01} en un point n (DEMOULIN). Les directrices de Wilczynski de la surface (x) sont les droites $r=xy$ et $s=mn$. Les foyers de la droite s sont les points m et n.

Lorsque l'on a

$$(\log. a)^{11}=(\log. b)^{11},$$

les droites r passent par un point fixe et les droites s sont situées dans un plan fixe. C'est le seul cas où deux surfaces ayant mêmes quadriques de Lie sont projectivement applicables.

Lorsque l'égalité précédente n'est pas vérifiée, on a les propriétés suivantes: Soient p, q les foyers de la droite r, q étant le transformé de Laplace de p dans le sens des u. Le point n est le transformé de Laplace de m dans le sens des u. Soient m_1 le transformé de Laplace de m dans le sens des v, n_1 celui de n dans le sens des u. Les points m_1, n_1 appartiennent à la droite r. La suite de Laplace ...., m_1, m, n, n_1,.... est doublement inscrite dans la suite ...., p, q,.... Les quaternes des points $(xypn_1)$, $(xyqm_1)$ sont harmoniques. La droite $s=mn$ engendre une congruence de Goursat.

Inversement, soient m, n les foyers d'une droite s engendrant une congruence de Goursat, m_1, n_1 les transformés de Laplace de m, n respectivement dans le sens des v et des u. Si l'on désigne par p, q les foyers de la droite m_1n_1 et si les réseaux (m_1) (n_1) sont conjugués à la congruence (pq), les points x, y tels que les quaternes $(xypm_1)$, $(xyqn_1)$ soient harmoniques décrivent des surfaces sur lesquelles les développables de la congruence (pq) découpent les asymptotiques et qui ont mêmes quadriques de Lie.

BIBLIOGRAPHIE

BOMPIANI. Rend. Circ. matem. Palermo, 1912; Rend. R. Accad. Lincei, 1926; Appendice II au Traité: *Geometria proiettiva differenziale* de MM. FUBINI et ČECH (Bologne, 1927).

DEMOULIN. C. R. 1908, t. CXLVII; 1924, t. CLXXIV.

TZITZEICA. *Géométrie différentielle projective des réseaux.* (Paris, 1924).

O. VOLK (Kaunas - Lituania)

UEBER FLAECHEN MIT GEODAETISCHEN DREIECKSNETZEN

Es handelt sich um die Frage: *Auf welchen Flaechen gibt es drei Scharen von geodaetischen Linien derart, dass durch jeden Punkt der Flaeche eine und nur eine Kurve von jeder Schar hindurchgeht, die also die Flaeche mit einem geodaetischen Dreiecksnetze bekleiden?*

Dass solche Netze auf den Rotationsflaechen und den auf sie abwickelbaren Flaechen existieren, darauf hat zum ersten Male Herr FINSTERWALDER (1) hingewiesen; es sind dies die drehsymmetrischen, die von den Meridiankurven und zwei Scharen dazu symmetrisch gelegener geodaetischer Linien, die ein und denselben Parallelkreis beruehren, gebildet werden. Diese « trivialen » Netze geben zugleich eine rhombische Teilung im Sinne von Hernn VOSS ($\Sigma x_u^2 = \Sigma x_v^2$) und die Rotationsflaechen mit den auf sie abwickelbaren Flaechen sind die einzigen Flaechen, auf denen solche geodaetisch-rhombische Dreiecksnetze existieren (2).

Schon Herr FINSTERWALDER sprach die Vermutung aus, dass die Rotationsflaechen nicht die einzigen Flaechen sind, auf denen geodaetische Dreiecksnetze moeglich sind. Den Beweis dafuer erbrachten P. STAECKEL (3) und sein Schueler F. AHL (4), die zeigten, dass auf speziellen Lieschen Spiralflaechen « nichttriviale » geodaetische Dreiecksnetze existieren. Spaeter zeigte dann Herr SAUER (5), dass diese Eigenschaft allen Lieschen Spiralflaechen zukommt.

---

(1) Vgl. S. FINSTERWALDER: *Mechanische Beziehungen bei der Flaechendeformation.* Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Bd. 6 (1899), S. 51 ff.

(2) Vgl. O. VOLK: *Ueber geodaetische Dreiecksnetze auf Flaechen konstanten Kruemmungsmasses.* Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrgang 1927, 3. Abhandlung, S. 18 ff.

(3) Vgl. P. STAECKEL: *Lineare Scharen geodaetischer Linien.* Math. Ann., Bd. 56 (1901), S. 501 ff.

(4) Vgl. F. AHL: *Ueber geodaetische Linien.* Diss. Kiel, 1901.

(5) Vgl. R. SAUER: *Flaechen mit drei ausgezeichneten Systemen geodaetischer Linien, die sich zu einem Dreiecksnetz verknuepfen lassen.* Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Abt. Jahrgang 1926, S. 380 ff. Herr SAUER gab auch (S. 65 f.) Rotationsflaechen an, auf denen neben den trivialen Dreiecksnetzen noch solche existieren, die aus drei Systemen kongruenter, durch Drehung auseinander hervorgehender

1. - Um die Frage nach allen Flaechen mit geodaetischen Dreiecksnetzen der analytischen Behandlung zugaenglich zu machen, scheint es mir zweckmaessig zu sein, auszugehen von der Form des Linienelementes:

$$ds^2 = A^2 du^2 + 2AC\cos\vartheta\, du dv + C^2 dv^2,$$

die von DARBOUX und VOSS mit soviel Erfolg angewendet werden konnte; dabei ist

$$A^2 = \Sigma x_u^2, \qquad C^2 = \Sigma x_v^2$$

und ϑ der Winkel der Kurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ Die Bedingung dafuer, dass die Parameterkurven geodaetisch sind, ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} C_u - A_v\cos\vartheta + A\sin\vartheta\vartheta_v = 0, \\ A_v - C_u\cos\vartheta + C\sin\vartheta\vartheta_u = 0. \end{cases}$$

Setzt man:

$$(2) \qquad C = \Phi_v, \qquad A = \frac{\Phi_u}{\cos\vartheta},$$

so ist die erste der beiden Gleichungen (1) identisch erfuellt; die zweite gibt fuer Φ die LAPLACEsche Gleichung:

$$(3) \qquad \Phi_{uv} + \frac{\vartheta_v}{\sin\vartheta\cos\vartheta}\Phi_u + \operatorname{cotg}\vartheta\vartheta_u\Phi_v = 0,$$

und das Linienelement erhaelt die Form:

$$(4) \qquad ds^2 = d\Phi^2 + \operatorname{tg}^2\vartheta\,\Phi_u^2.$$

2. - Die Gleichung (3) kann man sofort integrieren fuer alle Flaechen konstanter Kruemmung. Fuer die abwickelbaren Flaechen ist bekanntlich:

$$(5) \qquad \vartheta = U + V;$$

es verschwindet eine Invariante und man erhaelt durch Integration:

$$(6) \qquad \Phi = \frac{1}{\sin(U+V)}\left(\cos V\cdot\int U_1\cos U du - \sin V\int U_1\sin U du + V_1\right),$$

wo U_1 und V_1 neue willkuerliche Funktionen von u bezw. v bedeuten.

Ist das Kruemmungsmass $K \neq 0$, so hat man:

$$(7) \qquad K = \frac{\vartheta_{uv}}{AC\sin\vartheta},$$

oder nach (2):

$$(8) \qquad \vartheta_{uv} = K\operatorname{tg}\vartheta\cdot\Phi_u\Phi_v.$$

Kurven bestehen, von denen der Verfasser zeigen konnte, dass sie die einzigen Rotationsflaechen mit solchen Dreiecksnetzen sind. (Vgl. O VOLK: *Ueber diejenigen Rotationsflaechen, auf denen drei Systeme von kongruenten geodaetischen Linien ein Dreiecksnetz bilden.* Ebenda. Jahrgang 1927, S. 261 ff.

Damit findet man aus (3), je nachdem man Φ_u oder Φ_v ersetzt und integriert:

$$(9)\qquad \begin{cases} \Phi_u = \operatorname{cotg}\vartheta \sqrt{U_1 - \dfrac{\vartheta_u^2}{K}}, \\ \Phi_v = \dfrac{1}{\sin\vartheta} \sqrt{V_1 - \dfrac{\vartheta_v^2}{K}}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (8) und (9) bestimmen zusammen das Linienelement der Flaechen konstanter Kruemmung mit geodaetischen Linien als Parameterkurven. Sie gestatten insbesondere, auf ihnen geodaetische Netze mit vorgeschriebenem Winkel zu bestimmen. So fuehrt z. B. $\cos\vartheta = U \cdot V$ (U, V willkuerliche Funktionen von u bezw. v) auf die Werte:

$$U_1 = \frac{U'^2}{K(1-U^2)}, \qquad V_1 = \frac{V'^2}{K(1-V^2)}.$$

3. - Wir gehen zu der *Dreiecksnetzbedingung* ueber. Die Bedingung, dass die Kurven $u+v=\text{const.}$ geodaetische Linien sein sollen, gibt:

$$\frac{\partial}{\partial u} \lg\left(\frac{A}{\sin^2\vartheta C^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v} \lg\left(\frac{C}{\sin^2\vartheta A^2}\right) = 0,$$

oder nach (2):

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial u} \lg\left(\frac{\Phi_u}{\cos\vartheta \sin^2\vartheta \Phi_v^2}\right) + \frac{\partial}{\partial v} \lg\left(\operatorname{cotg}^2\vartheta \frac{\Phi_v}{\Phi_u^2}\right) = 0.$$

Mit der Loesung der Gleichungen (3) *und* (10) *sind alle Flaechen mit geodaetischen Dreiecksnetzen bestimmt.*

Die Gleichung (10) wird bei beliebigem F erfuellt durch:

$$(11)\qquad \frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\Phi_u = e^{2F_v - F_v}, \qquad \sin^2\vartheta \Phi_v = e^{F_u - 2F_v}.$$

Die Integrabilitaetsbedingung dieser Gleichungen und die LAPLACEsche Gleichung (3) fuehren fuer

$$(12)\qquad \zeta = \cos\vartheta$$

auf die beiden Gleichungen:

$$(13)\qquad \begin{cases} \zeta_u + (2F_{uv} - F_{uu})\zeta + (F_{vv} - 2F_{uv}) e^{F_u + F_v} = 0, \\ \zeta_v + (F_{vv} - 2F_{uv})\zeta + (2F_{uv} - F_{uu}) e^{-F_u - F_v} = 0. \end{cases}$$

4. - Der Fall, dass die Integrabilitaetsbedingung der Gleichungen (13) identisch erfuellt ist, fuehrt auf:

$$(14)\qquad F = \frac{1}{3}\Phi(u-v) + V - U$$

und die Funktionalgleichung:

$$(15)\qquad (V_1 - U_1)(\Phi''' - \Phi''^2) - \frac{3}{2}(V_1' + U_1')\Phi'' + \frac{1}{2}(U_1'' - V_1'') = 0,$$

wo zur Abkuerzung gesetzt ist:

$$U_1 = e^{2U'}, \qquad V_1 = e^{2V'}. \tag{16}$$

Die Funktionalgleichung (15) ist erfuellt, wenn $V_1 = U_1 = \text{const.}$ ist, waehrend Φ beliebig bleibt; dass fuehrt auf die trivialen Netze auf Rotationsflaechen und den auf sie abwickelbaren Flaechen. *Weiterhin sind die Funktionen U_1, V_1 leicht zu bestimmen, wenn $\Phi'' = \text{const.}$ ist. In letzterem Falle wird man auf Flaechen konstanter Kruemmung gefuehrt.*

Die allgemeine Loesung der Funktionalgleichung (15) fuehrt auf:

$$\begin{aligned} U_1 &= a + b\cos ku, \\ V_1 &= a + b\cos kv, \\ e^{\Phi'} &= C_2 \frac{\sin^2 \frac{k}{2}(u-v)}{\frac{2}{k}\cos\frac{k}{2}(u-v) + C_1}; \end{aligned}$$

bezw. fuer $k=0$:

$$\begin{cases} U_1 = au, \qquad V_1 = av, \\ e^{\Phi'} = \dfrac{C_1(u-v)^2}{C_2(u-v)^2 + 1}. \end{cases} \tag{18}$$

Die dazu gehoerigen Flaechen haben das Linienelement:

$$ds^2 = \frac{C_2^2 \sin^4 \frac{k}{2}(u-v)}{\sin^4\vartheta \left(\frac{2}{k}\cos\frac{k}{2}(u-v) + C_1\right)^2 (a + b\cos ku)(a + b\cos kv)} \left\{ \frac{du^2}{a + b\cos ku} + \right. \tag{19}$$

$$\left. + \frac{dv^2}{a + b\cos kv} + 2\frac{du\,dv\cos\vartheta}{\sqrt{a + b\cos ku}\,\sqrt{a + b\cos kv}} \right\}$$

mit

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{a + b\cos kv}{a + b\cos ku}} + \tag{20}$$

$$+ \frac{(C_3 - bC_1\cos kv)\sin^2\frac{k}{2}(u-v) - b\sin kv\sin\frac{k}{2}(u-v)\left(\frac{2}{k} + C_3\cos\frac{k}{2}(u-v)\right)}{\left(\frac{2}{k}\cos\frac{k}{2}(u-v) + C_1\right)\sqrt{a + b\cos ku}\,\sqrt{a + b\cos kv}},$$

bezw.

$$ds^2 = \frac{C_2^2(u-v)^4}{\sin^4\vartheta (C_1(u-v)^2 + 1)^2 uv} \left\{ \frac{du^2}{u} + \frac{dv^2}{v} + \frac{2du\,dv\cos\vartheta}{\sqrt{uv}} \right\} \tag{21}$$

mit

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{u}{v}} + \frac{(C_1(u-v)^2 - 1)(u-v) + 2(C_3 - 2C_1u)(u-v)^2}{2\sqrt{uv}(C_1(u-v)^2 + 1)}; \tag{22}$$

sie stellen Liouvillesche Flaechen dar mit (im allgemeinen) nichtkonstanter Kruemmung, die auch nicht auf Rotationsflaechen abwickelbar sind (1).

---

(1) Von der Aufführung der Ausnahmefälle sehen wir hier ab.

5. - Der Fall, dass die Integrabilitaetsbedingung von (13) nicht identisch erfuellt ist, fuehrt fuer F auf zwei partielle Differentialgleichungen vierter Ordnung, deren Loesung aber allgemein nicht durchfuehrbar war. Indess kann man leicht spezielle Loesungen angeben. Setzt man z. B.:

$$F = U + \Phi(2u+v), \tag{23}$$

so kommt man auf:

$$ds^2 = \frac{e^{4U'}}{\sin^4\vartheta}\{\varphi^2 du^2 + (\varphi+V)\varphi du dv + e^{-2U'}dv^2\} \tag{24}$$

mit

$$\begin{cases} V = C_1 \sin(\sqrt{k}v+\alpha), \\ \varphi = C_2 \sin(\sqrt{k}(2u+v)+\beta), \\ e^{-2U'} = C_1 C_2 \cos(2\sqrt{k}u+\alpha)+\gamma, \\ \cos\vartheta = \left(\frac{1}{2}\varphi + V\right)e^{U'}. \end{cases} \tag{25}$$

Aenliches gilt fuer

$$F = V + \Phi(2u+v).$$

Weiter kann man durch den Ansatz

$$\zeta = \sigma e^{F_u + F_v} \tag{26}$$

fuer spezielle Annahmen von σ zu neuen Loesungen kommen; endlich auch dadurch, dass man die Laplacesche Gleichung (3) fuer den Fall, dass hoehere Invarianten verschwinden, zu integrieren versucht; die Dreiecksnetzbedingung gibt dann eine noch zu loesende Funktionalgleichung. Es mag genuegen, dies nur angedeutet zu haben.

6. - Zum Schlusse noch eine Bemerkung ueber die besondere Stellung der Flaechen konstanter Kruemmung. Man kann die Rechnung nach obigen allgemeinen Angaben vollstaendig durchfuehren; indess kann man dieselbe abkuerzen, wenn man davon ausgeht, dass z. B. fuer die Ebene die geradlinigen Dreiecksnetze bestimmt sind durch die drei Gleichungen:

$$\begin{cases} A_1(u)x + B_1(u)y + C_1(u) = 0, \\ A_2(v)x + B_2(v)y + C_2(v) = 0, \\ A_3(u+v)x + B_3(u+v)y + C_3(u+v) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Dies fuehrt auf die Funktionalgleichung:

$$\begin{vmatrix} A_1(u) & B_1(u) & C_1(u) \\ A_2(v) & B_2(v) & C_2(v) \\ A_3(u+v) & B_3(u+v) & C_3(u+v) \end{vmatrix} = 0, \tag{28}$$

deren allgemeine Loesung auf die Weierstrasssche p-Funktion fuehrt (1). Fuer die Kugel und die Pseudosphaere gelten den Gleichungen (27) ganz analoge Gleichungen und man kommt so auf dieselbe Gleichung (28). Durch Benuetzung der Kruemmungselemente der Huellkurven laesst sich auch die Rechnung erfordernde Funktionalgleichung (28) umgehen, wie Herr LIEBMANN (2) gezeigt hat.

---

(1) Vgl. die in Anmerkung (2) genannte Arbeit des Verfassers. Die Bestimmung aller geradlinigen Dreiecksnetze in der Ebene ist zuerst von den Herren GRAF und SAUER durchgefuehrt worden in der Arbeit: *Ueber dreifache Geradensysteme.* Sitzungsber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., math.-naturw. Abt. 1924, S. 119 ff.

(2) Vgl. H. LIEBMANN: *Bestimmung der geradlinigen Dreiecksnetze aus den Kruemmungselementen der Huellkurven.* Ebenda, 1927, S. 73 ff.

F. GONSETH et G. JUVET

SUR LE PROBLÈME DES QUATRE COULEURS

1. - Nous remplacerons la carte à colorier par le réseau des capitales qui peut toujours être ramené à n'être formé que de triangles. Or, on sait que toute triangulation de la sphère procède du tétraèdre par l'application des deux opérations suivantes :

(A) On prend un point quelconque sur une arête du réseau de triangulation et on le joint aux deux sommets opposés des deux triangles adjacents le long de la dite arête. On forme ainsi quatre triangles avec les deux triangles en question.

(B) On supprime deux arêtes non-adjacentes aboutissant à un point biquadratique du réseau et on supprime ce point. C'est l'opération inverse de (A).

On peut remplacer (A) et (B) par (A) et (B') :

(B') Une arête PQ étant opposée dans deux triangles adjacents aux sommets S et T, on la supprime et on la remplace par l'arête ST; on dira qu'on a tourné PQ en ST.

2. - Le coloriage du sommet du tétraèdre étant assuré avec quatre couleurs a, b, c, d, il suffit de montrer, pour résoudre le problème des quatre couleurs, que l'on peut respecter la règle du coloriage en appliquant l'opération (A) ou l'opération (B') à une carte déjà coloriée.

3. - Pour l'opération (A), il n'y a aucune difficulté, car cette opération est simplement l'introduction d'un pays contigu à quatre autres pays et Kempe a montré que si une carte est coloriée, on peut toujours enlever ou ajouter un pays contigu à quatre autres en respectant la règle du coloriage.

4. - Pour l'opération (B') il y a deux cas à distinguer :

I). Si S et T sont coloriés différemment (cela revient à dire que les quatre couleurs ont été employées pour P, Q, S, et T), la rotation de PS en ST se fait immédiatement ;

II). Si S et T ont la même couleur, on trouve des difficultés étonnantes assez semblables à celles qu'on rencontre dans la résolution du célèbre cas découvert par M. DE LA VALLÉE POUSSIN.

Il y a naturellement des cas très simples. Supposons que P ait la couleur a, Q la couleur b et S et T la couleur c, si de S partent une ou plusieurs chaînes cd dont aucune n'aboutit à T, on pourra échanger c avec d sur ces chaînes, et on trouve le cas I). On pourrait imaginer des foule de cas analogues; la difficulté du problème provient précisément de l'impossibilité où l'on est de faire une énumération exhaustive de ces divers cas.

5. - Pour ramener ce cas difficile à la résolution d'un autre problème, nous procéderons comme suit. Les quatre couleurs, a, b, c, d, seront numérotées 1, 2, 3, 4,; un côté du réseau sur lequel on aura choisi un sens de parcours aura une « longueur » égale à la différence des numéros des extrémités. Un triangle, par un choix convenable du sens de parcours de ses côtés, aura pour longueur des dits côtés, les nombres 1, 1, 2; le côté de longueur 2 peut être parcouru dans un sens quelconque, si l'on admet que deux longueurs congrues à 0, module 4, sont égales.

La somme algébrique des longueurs d'un contour fermé est toujours congrue à 0, si l'on prend un sens de parcours déterminé sur ce contour. Le coloriage d'une carte est assuré si l'on peut trouver des nombres 1, 1, 2, pour tous les côtés des triangles, de façon que la condition précédente soit satisfaite pour tous les contours fermés. Il est clair qu'il suffit qu'elle le soit pour chaque triangle. Si dès lors on se donne arbitrairement la couleur d'un sommet du réseau, la couleur des autres s'en déduira infailliblement.

6. - Soit alors la carte considérée où S et T ont la même couleur. On suppose donc que toute la carte est coloriée et l'on demande si l'on peut modifier ce coloriage de façon à pauvoir remplacer l'arête PQ par l'arête ST. Supposons que le coloriage soit le suivant $P : a$, $Q : b$, $S : c$, $T : d$; les longueurs des côtés seront donc:

$$\overline{PS}=2,\ \overline{QS}=1,\ \overline{QT}=1,\ \overline{PT}=2.$$

Désignons par ξ et η les longueurs de PS, QT dans un coloriage de la carte et cherchons à modifier le coloriage donné de manière à pouvoir tourner PQ en ST, sans changer le longueurs de PT et de SQ. Il faut alors que $\xi=1$ et $\eta=2$.

Désignons ensuite par $x_1, x_2, \ldots, x_N$ les longueurs des autres côtés du réseau, mesurées dans un sens arbitraire pour chacune d'elles, mais fixé une fois pour toutes. On prendra pour les côtés des triangles dont PS, SQ, QT, TP sont les bases, les notations x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. Le coloriage est assuré si chaque triangle du réseau a un périmètre nul (mod. 4), ce qui s'exprime par des congruences du type:

(I) $$\varepsilon x_\varrho+\varepsilon' x_\sigma+\varepsilon'' x_\tau\equiv 0$$

ε, ε', ε'' étant $+1$ et -1. Il y aura N congruences de ce type, à quoi s'ajoutent

les quatre congruences:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1+x_2\equiv 2 \\ x_3+x_4\equiv 1 \\ x_5+x_6\equiv 1 \\ x_7+x_8\equiv 2 \end{cases}$$

pour le premier coloriage et:

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1+x_2\equiv 1 \\ x_3+x_4\equiv 1 \\ x_5+x_6\equiv 2 \\ x_7+x_8\equiv 2 \end{cases}$$

pour le second (1).

7. - Le problème à résoudre est dès lors le suivant. Sachant que le système formé des congruences (I) et (1) admet une solution telle que les valeurs de tous les x_i soient incongrues à zéro (mod. 4), le système (I) et (2) admet-il une solution ayant ce même caractère?

Il est clair tout d'abord que la première congruence (1) est une conséquence des trois autres et de (I); on peut donc la supprimer, de même pour la première congruence (2). Le système (I) (1) diffère donc du système (1) (2) uniquement par la congruence qui donne la valeur de x_5+x_6, celle-ci vaut 1 dans la premièr système et 2 dans le second.

8. - Si l'on se reporte au *Traité de Théorie des Nombres* de M. CAHEN, on voit que la condition pour que le système (1) (2) ait une solution est la même que celle pour que le système (I) (1) en ait une. Mais rien ne nous indique alors qu'une telle solution assigne à tous les x_i des valeurs incongrues à zéro.

Le problème de Théorie des Nombres qui se pose peut donc se formuler ainsi: Étant donné un système de congruences linéaires (mod. m), peut-il être satisfait par des valeurs des inconnues, choisies dans un système de restes (mod. m) prescrit? En particulier quelle est la condition pour que les inconnues admettent des valeurs 1, 2,...., $m-1$, (mod. m)?

Deux mémoires de M. F. KLEIN, parus au Journal de Crelle (Bd 159) et dont nous venons d'avoir connaissance traitent de ces problèmes, mais n'en fournissent pas la solution.

Il nous a paru intéressant de développer une idée nouvelle qui est vraiment dans la nature des choses et dont la Théorie des Nombres est encore impuissante à faire connaître les conséquences.

---

(1) On pourrait se demander si, par exemple, x_2 et x_3 ne pourraient pas être le même côté, s'il en était ainsi, cela impliquerait que S est la capitale d'un pays contigu à trois pays; on pourrait le supprimer alors et notre carte aurait donc un pays de moins. Si c'était x_4 et x_5 qui fussent un même côté, Q serait la capitale d'un pays contigu à quatre pays, on pourrait aussi le supprimer.

E. B. STOUFFER (Kansas - U. S. A.)

ON THE PROJECTIVE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF RULED SURFACES

1. - Introduction. - WILCZYNSKI [1] has made a study of the differential properties of non-developable ruled surfaces by means of a system of two linear homogeneous differential equations of the second order in two dependent variables and one independent variable. The method involves the use of the invariants and covariants of the system under the most general transformations leaving the equations unchanged in form. WILCZYNSKI calculated these invariants and covariants by means of the Lie theory of infinitesimal transformations, but the process is involved and unsatisfactory. Moreover, in order to obtain a canonical expansion for the equation of a ruled surface he found it necessary to resort to a specialization of the curved surface theory [2]. Even then the calculations involved were rather complicated and the determination of the geometrical significance of the associated tetrahedron of reference was somewhat difficult.

It is the purpose of the present paper to determine a canonical form for the system of two equations used by WILCZYNSKI and by means of it to calculate the invariants and covariants by a process involving only simple substitutions. The canonical form also leads directly to a canonical expansion with an associated tetrahedron of reference which is easily located geometrically. The geometrical significance of each of the fundamental invariants and covariants becomes immediately evident.

2. - The canonical form. - If P_y is a general point on a generator g of a non-developable ruled surface R, we may without loss of generality assume that one directrix curve C_y of R is the asymtotic curve passing through P_y. The other directrix curve C_z may be any curve on the surface intersecting each of

---

[1] WILCZYNSKI: *Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces.* Teubner, Leipzig, 1906. In the future we shall denote this book by P. D. G.

[2] WILCZYNSKI: *Projective Differential Geometry of Curved Surfaces.* (Third Memoir). Transactions of the American Mathematical Society, vol. 9, p. 293.

the generators in a single point. In particular, we shall denote its intersection with g by P_z.

In Wilczynski's notation, the associated system of differential equations has the form

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} y''+2p_{11}y'+ \quad * \quad +q_{11}y+q_{12}z&=0,\\ z''+2p_{21}y'+2p_{22}z'+q_{21}y+q_{22}z&=0, \end{aligned}$$

where p_{ik} and q_{ik} are functions of the independent variable x and differentiation is with respect to x.

The most general transformation of the independent variable which leaves (I) unchanged in form is

$$\text{(1)} \qquad \xi=\xi(x),$$

where $\xi(x)$ is an arbitrary function of x, and of the dependent variables is

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} y&=\alpha\bar{y},\\ z&=\nu\bar{y}+\delta\bar{z}, \end{aligned} \qquad \alpha\delta\neq 0,$$

where α, ν, δ are arbitrary functions of x. Both (1) and (2) leave the surface unchanged.

However, the transformations (1) and (2) change the coefficients and variables of (I). A function of the new coefficients and of their derivatives and of the new dependent variables and their derivatives which is equal, except for a factor, to the same function of the corresponding coefficients and variables of (I) is called a *covariant.* A covariant which does not contain the dependent variables or their derivatives is called an *invariant.*

There are several functions of the coefficients of (I) and their derivatives which appear early in the study of ruled surfaces by this method. We shall need in particular

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} u_{ik}&=q_{ik}-p_{ik}'-\sum_{j=1}^{2}p_{ij}p_{jk},\\ v_{ik}&=u_{ik}'+\sum_{j=1}^{2}(p_{ij}u_{jk}-p_{jk}u_{ij}), \end{aligned} \qquad (i,k=1,2),$$

in which $p_{12}=0$.

If $u_{12}=0$ for the value $x=x_0$ which gives the generator g, the point P_y is one of the two flecnode points on g [1]. Since we wish P_y to be a general point on R we shall assume $u_{12}(x_0)\neq 0$.

The transformation (1) changes (I) into a new system (I^a) whose coefficients we shall denote by $\bar{p}_{ik}$ and $\bar{q}_{ik}$. If the expressions for (I^a), corresponding to (3),

---

[1] Cf. P. D. G., p. 150.

are denoted by $\bar{u}_{ik}$, $\bar{v}_{ik}$ it is easy to verify in particular that

$$
\begin{aligned}
&\bar{p}_{ii}=\frac{1}{\xi'}\left(p_{ii}+\frac{1}{2}\eta\right), \qquad \bar{p}_{21}=\frac{1}{\xi'}p_{21},\\
&\bar{u}_{ii}=\frac{1}{(\xi')^2}\left(u_{ii}-\frac{1}{2}\mu\right), \qquad \bar{u}_{ij}=\frac{1}{(\xi')^2}u_{ij}, \qquad (i,j=1,2;\ i\neq j),\\
&\bar{v}_{12}=\frac{1}{(\xi')^3}(v_{12}-2\eta u_{12}),
\end{aligned}
\tag{4}
$$

where

$$
\eta=\frac{\xi''}{\xi'}, \qquad \mu=\eta'-{}^1/_2\,\eta^2. \tag{5}
$$

Next let transformation (2) change (I^a) into a system (I^b) with coefficients P_{ik} and Q_{ik} and with the expressions corresponding to (3) denoted by U_{ik}, V_{ik}. By direct substitution we find

$$
\begin{aligned}
&\alpha\delta P_{11}=\alpha'\delta+\alpha\delta\bar{p}_{11},\\
&\alpha\delta P_{21}=-\alpha'\nu+\nu'\alpha-\alpha\nu\bar{p}_{11}+\alpha^2\bar{p}_{21}+\alpha\nu\bar{p}_{22},\\
&\alpha\delta P_{22}=\delta'\alpha+\alpha\delta\bar{p}_{22},\\
&\alpha\delta U_{11}=\alpha\delta\bar{u}_{11}+\nu\delta\bar{u}_{12},\\
&\alpha\delta U_{12}=\delta^2\bar{u}_{12},\\
&\alpha\delta U_{21}=-\alpha\nu\bar{u}_{11}-\nu^2\bar{u}_{12}+\alpha^2\bar{u}_{21}+\alpha\nu\bar{u}_{22},\\
&\alpha\delta U_{22}=-\nu\delta\bar{u}_{12}+\alpha\delta\bar{u}_{22},\\
&\alpha\delta V_{12}=\delta^2\bar{v}_{12}.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Since $u_{12}\neq 0$, the last equation of (4) shows that we can always impose the condition

$$
\bar{v}_{12}=0 \tag{7}
$$

by choosing $\xi(x)$ to satisfy the equation

$$
\frac{\xi''}{\xi'}=\eta=\frac{v_{12}}{2u_{12}}. \tag{8}
$$

The condition (7) is maintained by (1) if, and only if, $\eta=0$ and is undisturbed by (2), a fact which is evident from the last equation of (6). Again from (6) we see that we can impose the additional conditions

$$
P_{11}=P_{22}=U_{11}-U_{22}=0 \tag{9}
$$

by choosing α, ν, δ to satisfy the equations

$$
\begin{aligned}
&\nu=\frac{-\alpha(\bar{u}_{11}-\bar{u}_{22})}{2\bar{u}_{12}},\\
&\alpha'+\alpha\bar{p}_{11}=0,\\
&\delta'+\delta\bar{p}_{22}=0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

The conditions (7) and (9), when both imposed upon the coefficients, lead to a system of equations of the form

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} &\bar{y}''+\ *\ +\bar{Q}_{11}\bar{y}+\bar{Q}_{12}\bar{z}=0,\\ &\bar{z}''+2\bar{P}_{21}\bar{y}'+\bar{Q}_{21}\bar{y}+\bar{Q}_{11}\bar{z}=0, \end{aligned} \qquad (\bar{Q}_{12}=\text{const.}).$$

The form (II) is maintained by (1) and (2) if, and only if,

$$\text{(11)} \qquad \eta=\nu=\alpha'=\delta'=0.$$

In fact the only effect upon (II) of these transformations under the limitation (11) is to multiply the dependent variables and their derivatives and the coefficients and their derivatives by constant factors. The system (II) is therefore called a *canonical form* of (I).

3. - **Invariants and covariants.** - It is evident that the coefficients of (II) and their derivatives must be the canonical forms of invariants and that their expressions in terms of the coefficients of (I) and their derivatives can be obtained by direct substitutions. For example, by substitution from (10) into (6) we have that

$$\bar{P}_{21}=\frac{\alpha}{\delta}\left[\bar{p}_{21}-\frac{\bar{u}_{11}'-\bar{u}_{22}'}{2\bar{u}_{12}}\right]$$

whence by substitution from (4) and (8) that

$$\bar{P}_{21}=\frac{\alpha}{\delta\xi'}\left[p_{21}-\frac{u_{11}'-u_{22}'}{2u_{12}}+v_{12}\frac{u_{11}-u_{22}}{2u_{12}^2}\right]=\frac{\alpha}{\delta\xi'}A.$$

Similarly, we find that

$$\begin{aligned} &\bar{U}_{11}=\bar{Q}_{11}=\frac{1}{(\xi')^2}\left[\frac{u_{11}+u_{22}}{2}-\frac{v_{12}'}{4u_{12}}+\frac{v_{12}}{4u_{12}^2}\left(u_{12}'+\frac{v_{12}}{4}\right)\right]=\frac{1}{(\xi')^2}B,\\ &\bar{U}_{12}=\bar{Q}_{12}=\frac{\delta}{\alpha(\xi')^2}u_{12}=\frac{\delta}{\alpha(\xi')^2}C,\\ &\bar{U}_{21}=\bar{Q}_{21}-\frac{d\bar{P}_{21}}{d\xi}=\frac{\alpha}{\delta(\xi')^2}\left[\frac{(u_{11}-u_{22})^2}{4u_{12}}+u_{21}\right]=\frac{\alpha}{\delta(\xi')^2}D,\\ &\frac{d\bar{P}_{21}}{d\xi}=\frac{\alpha}{\delta(\xi')^2}\left[A'-(p_{11}-p_{22})A-\frac{v_{12}}{2u_{12}}A\right]=\frac{\alpha}{\delta(\xi')^2}E,\\ &\frac{d\bar{U}_{11}}{d\xi}=\frac{1}{(\xi')^3}\left[B'-\frac{v_{12}}{u_{12}}B\right],\\ &\frac{d\bar{U}_{21}}{d\xi}=\frac{\alpha}{\delta(\xi')^3}\left[D-(p_{11}-p_{22})D-\frac{v_{12}}{u_{12}}D\right]. \end{aligned}$$

It is evident that the invariants obtained from $\bar{P}_{21}$, $\bar{U}_{11}$, $\bar{U}_{12}$, $\bar{U}_{21}$ and from the successive derivatives of $\bar{P}_{21}$, $\bar{U}_{11}$, $\bar{U}_{21}$ by the above process are independent and form a complete system. Furthermore, the ruled surface is determined except for projective transformations when the invariants A, B, C, $D+E$ are given as

functions of x, provided merely that C is not zero. This fact becomes evident when we observe that the coefficients of the canonical form are exactly these invariants.

It is likewise evident that the dependent variables $\bar{y}$ and $\bar{z}$ of (II) and their derivatives with respect to the independent variable ξ of (II) are the canonical forms of covariants whose expressions in terms of the coefficients and variables of (I) and their derivatives follow by direct substitutions. In particular we can easily verify the four following results

$$
\begin{aligned}
&\bar{y}=\frac{1}{\alpha}\,y,\\
&\bar{z}=\frac{1}{\delta}\left(z+\frac{u_{11}-u_{22}}{2u_{12}}\,y\right),\\
&\bar{\varrho}=\frac{d\bar{y}}{d\xi}=\frac{1}{\alpha\xi'}\left(\varrho+\frac{v_{12}}{4u_{12}}\,y\right),\\
&\bar{\sigma}=\frac{d\bar{z}}{d\xi}+P_{21}\bar{y}=\frac{1}{\delta\xi'}\left[\sigma+\frac{u_{11}-u_{22}}{2u_{12}}\,\varrho+\frac{v_{12}}{4u_{12}}\left(\frac{u_{11}-u_{22}}{2u_{12}}\,y+z\right)\right],
\end{aligned}
\tag{12}
$$

where

$$\varrho=y'+p_{11}y, \quad \sigma=z'+p_{21}y+p_{22}z.$$

Equation (II) shows that the covariants thus obtained form a complete system in the sense that all other covariants can be expressed in terms of them and their derivatives and the invariants.

4. - The associated canonical expansion. - Let $\bar{y}_i(\xi)$, $\bar{z}_i(\xi)$, $(i=1, 2, 3, 4)$, be a fundamental set of solutions of (II). Without loss of generality we may assume that the generator g of R is the line joining corresponding points $P_{\bar{y}}$ and $P_{\bar{z}}$ with coordinates $\bar{y}_1(0)$, $\bar{y}_2(0)$, $\bar{y}_3(0)$, $\bar{y}_4(0)$ and $\bar{z}_1(0)$, $\bar{z}_2(0)$, $\bar{z}_3(0)$, $\bar{z}_4(0)$, respectively. Then the coordinates Y_i of any point on R in the neighborhood of $P_{\bar{y}}$ can be expressed in the form $Y_i=\bar{y}_i(\xi)+\lambda\bar{z}_i(\xi)$, where λ is a variable independent of ξ and where $\xi=\lambda=0$ at $P_{\bar{y}}$. But by the use of (II) the expressions for Y_i can be put into the form

$$Y_i=x_1\bar{y}_i(0)+x_2\bar{z}_i(0)+x_3\bar{\varrho}_i(0)+x_4\bar{\sigma}_i(0),$$

where $\bar{\varrho}_i=\frac{d\bar{y}_i}{d\xi}$, $\bar{\sigma}_i=\frac{d\bar{z}_i}{d\xi}+\bar{P}_{21}\bar{y}_i$, and where

$$
\begin{aligned}
x_1&=1-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{11}\xi^2-\bar{P}_{21}\xi\lambda-\frac{1}{6}(\bar{Q}_{11}'-\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12})\xi^3-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{21}\xi^2\lambda+\ldots.,\\
x_2&=\lambda-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{12}\xi^2-\frac{1}{2}\,\bar{Q}_{11}\xi^2\lambda+\frac{1}{12}\,\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{12}\xi^4+\frac{1}{6}(2\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12}-\bar{Q}_{11}')\xi^3\lambda+\ldots.,\\
x_3&=\xi-\frac{1}{6}\,\bar{Q}_{11}\xi^3-\bar{P}_{21}\xi^2\lambda-\frac{1}{12}(\bar{Q}_{11}'-\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12})\xi^4-\frac{1}{6}(2\bar{P}_{21}'+\bar{Q}_{21})\xi^3\lambda+\ldots.,\\
x_4&=\xi\lambda-\frac{1}{6}\,\bar{Q}_{12}\xi^3-\frac{1}{6}\,\bar{Q}_{11}\xi^3\lambda+\frac{1}{60}\,\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{12}\xi^5+\frac{1}{12}(\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12}-\bar{Q}_{11}')\xi^4\lambda+\ldots..
\end{aligned}
\tag{13}
$$

It is evident that (x_1, x_2, x_3, x_4) may be used as the coordinates of the point in place of Y_i. If in this new coordinate system we pass to non-homogeneous coordinates by putting

$$X=\frac{x_2}{x_1}, \quad Y=\frac{x_3}{x_1}, \quad Z=\frac{x_4}{x_1}$$

and then eliminate ξ and λ we have for the equation of the surface in the neighborhood of $P_{\bar{y}}$

$$(14) \qquad Z=XY+\frac{1}{3}\bar{Q}_{12}Y^3-\frac{1}{15}\bar{Q}_{11}\bar{Q}_{12}Y^5+\frac{1}{6}\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12}XY^4-\frac{1}{3}\bar{U}_{21}X^2Y^3+....$$

Equation (14) may be simplified still further by (1) and (2) under the limitations (11). In fact equations (4) and (6) show that we can make the coefficient of Y^3 equal to unity by choosing

$$(15) \qquad \frac{\delta}{a(\xi')^2}\bar{Q}_{12}=3,$$

a transformation which is always possible since $\bar{Q}_{12}$ is a constant different from zero. In addition we can make one non-vanishing coefficient of a fifth order term equal to unity.

We now have the

THEOREM. - *Every non-developable ruled surface may be represented by one of the following four developments in the neighborhood of a general point not on a flecnode curve:*

$$(16a) \qquad Z=XY+Y^3+Y^5-\frac{\varepsilon(-5)^{\frac{3}{2}}AC}{6B^{\frac{3}{2}}}XY^4-\frac{25CD}{9B^2}X^2Y^3+....$$

(ε=square root of unity),

$$(16b) \qquad Z=XY+Y^3+XY^4-\frac{\varepsilon 2^{\frac{4}{3}}D}{3^{\frac{2}{3}}A^{\frac{4}{3}}C^{\frac{1}{3}}}X^2Y^3+.... \quad (\varepsilon=\text{cube root of unity}),$$

$$(16c) \qquad Z=XY+Y^3+X^2Y^3+....,$$

$$(16d) \qquad Z=XY+Y^3.$$

The particular development to be used depends upon the vanishing of the invariants A, B, D. All the coefficients are, of course, absolute invariants.

WILCZYNSKI obtained similar developments by the use of the curved surface theory. However, by the above method the analytical work is greatly simplified.

It is of interest at this point to show the reason for the choice of the particular canonical form (II). Let us assume that (I) is already in a canonical form which is maintained by (1) and (2) if, and only if, the conditions (11) are satisfied. The particular conditions to be imposed to reach this canonical form are undetermined. Then the associated canonical expansion corresponding to (14) for (II) has the form

$$Z=XY+\frac{1}{3}q_{12}Y^3+\frac{1}{12}v_{12}Y^4-\frac{1}{3}(u_{11}-u_{22})XY^3+....$$

It is at once evident that the fourth order terms disappear only under the conditions $v_{12}=u_{11}-u_{22}=0$. The additional conditions $p_{11}=p_{22}=0$ for our canonical form have no geometrical significance but serve to simplify the calculations.

5. - The associated tetrahedron of reference. - The vertices P_1, P_2, P_3, P_4 of the tetrahedron of reference associated with the above developments are determined by the covariants $\bar{y}$, $\bar{z}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\sigma}$, respectively. The vertex P_1 is the point P_y on R, the edge P_1P_2 is the generator g and the edge P_1P_3 is the tangent to the asymptotic curve at P_1. WILCZYNSKI used the osculating CAYLEY cubic scroll

$$Z=XY+Y^3$$

to locate the remaining elements of the tetraedron but we shall proceed to locate them by simpler methods.

The coordinates of the flecnode points F_1 and F_2 on g are given by the expressions (1)

$$\sqrt{\bar{U}_{21}}\bar{y}+\sqrt{\bar{U}_{12}}\bar{z}, \quad -\sqrt{\bar{U}_{21}}\bar{y}+\sqrt{\bar{U}_{12}}\bar{z}.$$

It is at once evident that P_2 is the harmonic conjugate of P_1 with respect to F_1 and F_2.

With each point of a space curve there is associated an osculating cubic and a conic determined by it, called the osculating conic. In order to determine the equations of the osculating cubic C_3 and of the osculating conic C_2 at P_1 of C_y we may first obtain by means of (II) the differential equation

$$\bar{y}^{(IV)}+2\bar{Q}_{11}\bar{y}''+2\bar{V}_{11}\bar{y}'+(\bar{Q}_{11}''-\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{21}+\bar{Q}_{11}^2)\bar{y}=0, \tag{17}$$

which determines C_y except for projective transformations. We may then use known results (2) and after a transformation of coordinates obtain as the equations of C_3 referred to the tetrahedron P_1, P_2, P_3, P_4

$$\begin{aligned} x_1&=1-\frac{1}{5}\bar{Q}_{11}t^2-\frac{1}{30}(2\bar{Q}_{11}'-\bar{P}_{21}\bar{Q}_{12})t^3,\\ x_2&=-\frac{1}{2}\bar{Q}_{12}t^2,\\ x_3&=t+\frac{1}{15}\bar{Q}_{11}t^3,\\ x_4&=-\frac{1}{6}\bar{Q}_{12}t^3. \end{aligned} \tag{18}$$

The osculating conic C_2 is the envelope of the lines of intersection of the

(1) WILCZYNSKI, P. D. G., p. 149.

(2) STOUFFER: *Some canonical forms and associated canonical expansions in projective differential geometry.* Bulletin of the American Math. Soc., vol. 34, p. 300.

plane $x_4=0$ and the osculating planes to C_3. The equations of C_2 are easily found to be

$$40\bar{Q}_{12}x_1x_2+15\bar{Q}_{12}^2x_3^2-16\bar{Q}_{11}x_2^2=0, \qquad x_4=0. \tag{19}$$

It is at once evident that P_3 is the pole of g with respect to C_2.

The quadric Q osculating R along g is the locus of the asymptotic tangents to R along g. Its equation in our coordinate system is easily found to be [1]

$$x_1x_4-x_2x_3=0.$$

It is evident from this equation that P_4 is on Q at the intersection of the asymptotic tangent at P_2 with the generator of Q of the other kind which passes through P_3.

We now have located the four vertices of the canonical tetrahedron as follows:

One vertex P_1 *is* P_y, *a second vertex* P_2 *is the harmonic conjugate of* P_1 *with respect to the flecnode points on* g, *a third vertex* P_3 *is the pole of* g *with respect to the osculating conic of* C_y *at* P_1, *and the fourth vertex* P_4 *is the point of intersection of the asymptotic tangent at* P_2 *with that generator of the other kind of the osculating hyperberloid which passes through* P_3.

The satisfactory determination of the unit point of the coordinate system for each of the different expansions demands only that we find in each case the coordinates of some point not on a coordinate plane. If $\bar{Q}_{11}\neq 0$, the tangent at P_3 to the curve generated by P_3 intersects C_2 in two distinct points whose coordinates under the conditions imposed by equations (15) and (16a) are (5, -3, $\varepsilon 2\sqrt{2}$, 0), where $\varepsilon=\pm 1$. The projection of these points from P_4 upon the osculating quadric gives two points whose coordinates are $\left(5, -3, \varepsilon 2\sqrt{2}, -\varepsilon\frac{6\sqrt{2}}{5}\right)$. The two choices for the coordinates correspond to the two expansions of form (16a).

If $\bar{Q}_{11}=0$, $\bar{P}_{21}\neq 0$, the above two points coincide in the plane $x_3=0$ but we may use the projections from P_1 upon Q of the three points of intersection of C_3 with the plane $x_1=0$. If $\bar{Q}_{11}=\bar{P}_{21}=0$, $\bar{U}_{21}\neq 0$, these three points coincide in the plane $x_2=0$ but we may use the projections from P_4 upon Q of the four points in which the lines joining P_3 and the flecnode points F_1 and F_2 intersect C_2. If $\bar{Q}_{11}=\bar{P}_{21}=\bar{U}_{21}=0$, the unit point is not determined, but may be so chosen that the equation of the surface is

$$Z=XY+Y^3.$$

6. - Geometrical significance of the invariants. - It is easy to see the geometrical significance of the vanishing of the invariants A, B, D when we remember their relations to the coefficients of the canonical form.

---

[1] WILCZYNSKI, P. D. G., p. 191.

If $A=0$, we have $\bar{\sigma}=\bar{z}'$ and consequently P_2 generates an asymptotic curve on R.

If $B=0$, the tangent at P_3 to the curve generated by P_3 passes through P_2 and is tangent to the osculating conic C_2 at that point.

If $D=0$, the two branches of the flecnode curve coincide and P_2 lies on this curve. If also $A=0$, this curve is a straight line.

If $A=B=D=0$, the surface R is a cubic.

If $D+E=0$, the osculating plane at P_2 to the curve generated by P_2 passes through P_3.

A. KAWAGUCHI (Sapporo - Giappone)

ON THE DIFFERENTIAL GEOMETRY OF CONIC-FAMILIES IN THE PROJECTIVE SPACE OF THREE DIMENSIONS

The elements in the geometry are, in general, arbitrary, so by adopting different elements, we can find various new results, which are important and interesting from geometrical points of view. In the differential geometry the theories of lines and of circles have been already developed by many authors, but the theory of conics has, up to the present, never been discussed except in some papers dealing with algebraic geometry.

I will now discuss the differential geometry of conics in the projective space of three dimensions R_3. The theory of quadratic cones is completely dual to the present theory in the projective space.

1. - **Coordinates of a conic in R_3.** - Let the homogeneous coordinates of a plane L in R_3 be l_i $(i=1, 2, 3, 4)$ and consider the homogeneous coordinates of a point on the plane $L: x^\alpha$ $(\alpha=1, 2, 3)$. In that case, we take, as the triangle of reference on the plane L, the triangle formed by three diagonals of the complete quadrilateral, which is the section of the tetrahedron of reference T in R_3 by the plane L. And let the homogeneous point-coordinates in R_3 be y^i, where the tetrahedron of reference is also T. Let K be a conic on the plane L in the space of three dimensions R_3. If the equation of the conic K

$$a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta=0$$

be referred to this coordinate-system on the plane L, then we can consider the coefficients $a_{\alpha\beta}$ in this equation as the homogeneous coordinates of the conic K in the plane. So it may be natural to adopt the set of the plane-coordinates l_i and $a_{\alpha\beta}$ together as the (doubly) homogeneous coordinates of a conic in R_3.

The projective transformation in the space, as we see, transforms these coordinates so that

$$l_i^*=P_i^j l_j,$$
$$a_{\alpha\beta}^*=Q_\alpha^\gamma Q_\beta^\delta a_{\gamma\delta}.$$

2. - **One-parameter family of conics.** - Let a one-parameter family of conics in R_3 be represented in parametric form by

$$a_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}(t), \qquad l_i=l_i(t)$$

or

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(t), \qquad \mathfrak{l}=\mathfrak{l}(t),$$

where we assume for brevity that all the functions are analytic and that $a_{\alpha\beta}$ are normalized by the relation

$$6\,|\,a_{\alpha\beta}\,|=(\mathfrak{a},\mathfrak{a},\mathfrak{a})=1.$$

Put

$$a^{(1)}_{\alpha_1\beta_1}a^{(2)}_{\alpha_2\beta_2}a^{(3)}_{\alpha_3\beta_3}\frac{\partial^3}{\partial a_{\alpha_1\beta_1}\partial a_{\alpha_2\beta_2}\partial a_{\alpha_3\beta_3}}\,|\,a_{\alpha\beta}\,|=(\mathfrak{a}^{(1)},\mathfrak{a}^{(2)},\mathfrak{a}^{(3)}),$$

then

$$(\mathfrak{a}',\mathfrak{a},\mathfrak{a})=0,$$

and in general

$$(\mathfrak{a}',\mathfrak{a}',\mathfrak{a})\neq 0.$$

Hence we adopt the new variable

$$\sigma=i\int(\mathfrak{a}',\mathfrak{a}',\mathfrak{a})^{\frac{1}{3}}dt \qquad i=\sqrt{-1}$$

as the natural parameter and call it the projective length of the family. I remark here that as natural parameter we may take the so-called projective length of the developable surface generated by the plane l.

As I have shown in one of my previous papers (1), we know that the fundamental differential invariants with regard to $\mathfrak{a}$ are only

$$I_1=(\mathfrak{a}',\mathfrak{a}',\mathfrak{a}'), \qquad I_2=(\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}), \qquad I_3=(\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}'), \qquad I_4=(\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}'',\mathfrak{a}''),$$

$$I_5=\sum_{\alpha,\beta,\ldots,\tau}A^{(\mathfrak{a})}_{\alpha\beta}A^{(\mathfrak{a}')}_{\gamma\delta}A^{(\mathfrak{a}'')}_{\varepsilon\tau}a_{\delta\varepsilon}a_{\tau\alpha}{}'a_{\beta\gamma}{}'',$$

where

$$A^{(\mathfrak{a})}_{\alpha\beta}=2\frac{\partial}{\partial a_{\alpha\beta}}\,|\,a_{\gamma\delta}\,|, \quad \text{etc.}$$

and between these five invariants there exists a relation of the third degree with regard to I_5. Hence one of these quantities is not essential. Next normalize l so that the determinant

$$|\,l \quad l' \quad l'' \quad l'''\,|=1,$$

then

$$|\,l \quad l' \quad l'' \quad l^{\mathrm{IV}}\,|=0.$$

Put

$$|\,l \quad l' \quad l''' \quad l^{\mathrm{IV}}\,|=6p,$$
$$|\,l \quad l'' \quad l''' \quad l^{\mathrm{IV}}\,|=-4q,$$
$$|\,l' \quad l'' \quad l''' \quad l^{\mathrm{IV}}\,|=r.$$

Now put moreover

$$J_1=\frac{3}{5}p, \qquad J_2=q-\frac{3}{2}\frac{dp}{d\sigma}, \qquad J_3=r-2\frac{dq}{d\sigma}+\frac{6}{5}\frac{d^2p}{d\sigma^2}-\frac{81}{26}p^2.$$

These differential invariants are the fundamental ones with respect to l.

---

(1) A. KAWAGUCHI: *Über projektive Differentialgeometrie I. Theorie der Kegelschnittscharen in der Ebene.* Tohoku Mathematical Journal, vol. 28 (1927), pp. 126-146.

3. - Two-parameter familly of conics. - A two-parameter family of conics in R_3 can be represented by

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(u^1, u^2), \qquad \mathfrak{l}=\mathfrak{l}(u^1, u^2)$$

where

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}, \mathfrak{a})=1.$$

There are two differential invariant forms

$$g_{ij}du^idu^j=2(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a})du^idu^j,$$
$$a_{ijk}du^idu^jdu^k=(\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j, \mathfrak{a}_k)du^idu^jdu^k.$$

Now we introduce such six conics $\mathfrak{x}_\alpha$, $\mathfrak{X}^\beta$ $(\alpha, \beta=1, 2, 3)$ that

$$\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{A}=\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{A}_i=\mathfrak{a}\mathfrak{X}^\beta=\mathfrak{a}_k\mathfrak{X}^\beta=0,$$
$$\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{X}^\beta=\delta_{\alpha\beta},$$

where

$$\mathfrak{A}=(A^{(\mathfrak{a})}_{\alpha\beta})$$

and $\mathfrak{A}_i$'s are its partial derivatives. Then the second derivatives are

$$(A)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}_{ij}=-g_{ij}\mathfrak{a}-\frac{1}{2}a_{ijk}g^{kl}\mathfrak{a}_l+B_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}\mathfrak{x}_\alpha, \\ \mathfrak{A}_{ki}=-g_{ki}\mathfrak{A}-\frac{1}{2}a_{ijk}g^{jl}\mathfrak{A}_l+B_{ik\beta}\mathfrak{X}^\beta, \end{cases}$$

where

$$\mathfrak{a}_{ij}\mathfrak{X}^\beta=B_{ij}^{\cdot\cdot\beta}, \qquad \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{x}_\alpha=B_{ij\alpha}.$$

In this equations we get new differential forms

$$(\alpha)\qquad B_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}du^idu^j, \qquad B_{ik\beta}du^idu^k.$$

Moreover we may put

$$(B)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x}_{\alpha, i}=-B_{il\alpha}g^{lk}\mathfrak{a}_k+p_{i\alpha}^{\cdot\cdot\gamma}\mathfrak{x}_\gamma, \\ \mathfrak{X}^\beta_{\cdot\cdot, k}=-B_{kl}^{\cdot\cdot\beta}g^{li}\mathfrak{A}_i-p_{k\gamma}^{\cdot\cdot\beta}\mathfrak{X}^\gamma, \end{cases}$$

where

$$\mathfrak{x}_\alpha\mathfrak{X}^\beta_{\cdot\cdot, k}=-\mathfrak{x}_{\alpha, k}\mathfrak{X}^\beta=p_{k\alpha}^{\cdot\cdot\beta}.$$

The choice of $\mathfrak{X}^\beta$ is yet arbitrary, that is we can introduce such new conics $\overline{\mathfrak{X}}_\alpha$ instead of $\mathfrak{X}^\beta$ that

$$\overline{\mathfrak{X}}^\alpha=P^\alpha_\beta\mathfrak{X}^\beta$$

where the quantities P^α_β are in general arbitrary functions of the parameters. Corresponding to this change the forms (α) are transformed linearly as follow

$$\overline{B}_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}=P^\alpha_\beta B_{ij}^{\cdot\cdot\beta},$$
$$\overline{B}_{ij\alpha}P^\alpha_\beta=B_{ij\beta}.$$

By this reason we can choice $\mathfrak{X}^\alpha$ so that

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} B_{ij}^{\cdot\cdot 1}&=g_{ij}, \\ B_{ij}^{\cdot\cdot 2}&=\frac{1}{J-I^2}\{Ig_{ij}-r_{ij}\}, \\ B_{ij}^{\cdot\cdot 3}&=q_{ij}, \end{aligned}$$

where $r_{ij}du^i du^j$ is an arbitrary form with coefficients not proportional that of $g_{ij}du^i du^j$ and

$$I=g^{ij}r_{ij}, \qquad J=g^{ih}g^{jl}r_{ij}r_{hl}=r_{ij}r^{ij}.$$

The form $q_{ij}du^i du^j$ is such one as

$$q_{ij}du^i du^j=\lambda \begin{vmatrix} (du^1)^2 & 2du^1du^2 & (du^2)^2 \\ g^{11} & 2g^{12} & g^{22} \\ r^{11} & 2r^{12} & r^{22} \end{vmatrix} \equiv \lambda \bar{q}_{ij}du^i du^j,$$

$$\lambda^2=\bar{q}_{ij}\bar{q}^{ij}.$$

Then it follows from (a)

$$B_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}B^{ij\beta}=B^{ij\alpha}B_{ij}^{\cdot\cdot\beta}=\delta^{\alpha\beta}$$

and the $B_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}$ can be expressed by g_{ij} and r_{ij}.

Considering (A) and (B) as the differential equations for $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}_\alpha$ and $\mathfrak{X}^\beta$, there must be the so-called conditions of integrability, from which we can concluse that $B_{ij}^{\cdot\cdot\alpha}$, $B_{ij\beta}$ and $p_{k\beta}^{\cdot\cdot\alpha}$ are expressed by g_{ij} and a_{ijk} putting $r_{ij}=a_{ikl}a_j^{\cdot kl}$.

Next put

$$H=\bar{h}_{ij}du^i du^j=\frac{1}{\sqrt{G}}\,|\,\mathfrak{l},\,\mathfrak{l}_1,\,\mathfrak{l}_2,\,\mathfrak{l}_{ij}\,|\,du^i du^j,$$

where

$$G=g_{11}g_{22}-g_{12}^2$$

and $\mathfrak{l}_i$'s resp. $\mathfrak{l}_{ij}$'s are the first resp. second covariant derivatives of $\mathfrak{l}$ with regard to the form $g_{ij}du^i du^j$. Moroever, we introduce the quantities h_{ij} such that

$$h^{ij}\bar{h}_{ik}=\delta_k^j$$

and normalize the coordinates $\mathfrak{l}$ so as they satisfy the relation

$$h^{ij}g_{ij}=1.$$

Let us consider the differential form of the third order

$$c_{ijk}du^i du^j du^k=\frac{|\,\mathfrak{l},\,\mathfrak{l}_1,\,\mathfrak{l}_2,\,d^3\mathfrak{l}\,|}{\sqrt{G}}-\frac{3}{2}\,dH,$$

then

$$h^{ij}c_{ij}=0.$$

Let the point-coordinates of the surface enveloped by the plane $\mathfrak{l}(u^1, u^2)$ be $\mathfrak{y}(u^1, u^2)$ then

$$\mathfrak{y}=\mu\,\|\,\mathfrak{l},\,\mathfrak{l}_1,\,\mathfrak{l}_2\,\|, \qquad \mathfrak{l}=\nu\,\|\,\mathfrak{y},\,\mathfrak{y}_1,\,\mathfrak{y}_2\,\|,$$

putting

$$\mu=\varepsilon\nu=\frac{1}{\sqrt{G}} \qquad (\varepsilon=-\operatorname{sgn} G).$$

I will denote, in the following, the covariant derivatives of a quantity $\mathfrak{p}$ with regard to the form $\bar{h}_{ij}du^i du^j$ with $\widehat{\mathfrak{p}}_i$, then we get

$$h_{ij}=\mathfrak{y}\mathfrak{l}_{ij}=\mathfrak{l}\mathfrak{y}_{ij}=\widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{l}}_{ij}=\widehat{\mathfrak{l}\mathfrak{y}}_{ij},$$
$$c_{ijk}=\widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{l}}_{ijk}=\widehat{\mathfrak{y}}_{ijk}\mathfrak{l}.$$

In the other hand, for a new vector $\mathfrak{m}=\frac{1}{2}h^{ij}\widehat{\mathfrak{l}_{ij}}$, the relations exist

$$\mathfrak{y}_i\mathfrak{m}=\frac{1}{2}h^{rs}\widehat{\mathfrak{l}_{rs}}\mathfrak{y}_i=-\frac{1}{2}h^{rs}c_{rsi}=0,$$
$$\mathfrak{y}\mathfrak{m}=\frac{1}{2}h^{rs}\widehat{\mathfrak{l}_{rs}}\mathfrak{y}=\frac{1}{2}h^{ij}\overline{h}_{ij}=1,$$

hence $\mathfrak{m}_i\mathfrak{y}=0$, dually for a vector $\mathfrak{z}=\frac{1}{2}h^{ij}\widehat{\mathfrak{y}_{ij}}$

$$\mathfrak{l}\mathfrak{z}=1,\qquad \mathfrak{l}_i\mathfrak{z}=0,\qquad \mathfrak{l}\mathfrak{z}_i=0.$$

(*C*)
$$\begin{cases}\widehat{\mathfrak{l}_{ij}}=a_{ijp}h^{pq}\mathfrak{l}_q+h_{ij}\mathfrak{m}+p_{ij}\mathfrak{l},\\ \widehat{\mathfrak{y}_{ij}}=-a_{ijp}h^{pq}\mathfrak{y}_q+h_{ij}\mathfrak{z}+\pi_{ij}\mathfrak{y}.\end{cases}$$

Moreover we can put

(*D*)
$$\begin{cases}\mathfrak{m}_i=k_i\mathfrak{l}+n_{ip}h^{pq}\mathfrak{l}_q,\\ \mathfrak{z}_i=\lambda_i\mathfrak{y}+\mu_{ip}h^{pq}\mathfrak{y}_q,\end{cases}$$

and easily see that the quantities p_{ij}, π_{ij}, k_i, λ_i, n_{ip}, μ_{ip} are all expressed by g_{ij}, a_{ijp}, h_{ij} and $s_{ij}=p_{ij}+\pi_{ij}$ from the conditions of integrability of (*C*) and (*D*).

In the general case we may assume that the three differential forms

$$g_{ij}du^idu^j,\qquad c_{ijl}a^{lk}_{\cdot\cdot k}du^idu^j,\qquad s_{ij}du^idu^j$$

are mutually linearly independent, then the quantities h^{ij} must be linearly represented by these forms, that is

$$h^{ij}=\alpha g^{ij}+\beta c^{ij}_{\cdot\cdot l}a^{lk}_{\cdot\cdot k}+\gamma s^{ij}$$

and α, β, γ are determined from

$$1=\alpha+\beta c^{i}_{\cdot il}a^{lk}_{\cdot\cdot k}+\gamma s_i^{\cdot i},$$
$$0=\alpha c^{i}_{\cdot il}a^{lk}_{\cdot\cdot k}+\beta c_{ijl}c^{ij}_{\cdot\cdot m}a^{lk}_{\cdot\cdot k}a^{mn}_{\cdot\cdot n}+\gamma c^{\cdot\cdot i}_{ijl}s^{ij}a^{lk}_{\cdot\cdot k},$$
$$0=\alpha s_i^{\cdot i}+\beta c_{ijl}a^{lk}_{\cdot\cdot k}s^{ij}+\gamma q_{ij}q^{ij}.$$

Hence h^{ij} can be expressed by g_{ij}, a_{ijk}, c_{ijk}, s_{ij}. These quantities are essential ones.

† G. SANNIA (Napoli - Italia)

IL FASCIO CANONICO DI UNA SUPERFICIE DEDOTTO DAL CONO DI SEGRE

Nella geometria proiettivo-differenziale di una superficie sono state introdotte varie rette uscenti da un suo punto P e non giacenti nel piano tangente π: la *direttrice* di WILCZYNSKI, l'*asse* di ČECH, le *spigolo* di GREEN, la *normale proiettiva* e le *due rette principali* di FUBINI. È stato poi riconosciuto che tali rette, trovate per vie differenti, formano un fascio, il cui piano si è chiamato *canonico*; e si son chiamate *canoniche* le rette stesse e le infinite altre del fascio che con tre di esse formano birapporti costanti.

Ora io ho osservato che al fascio canonico si può anche pervenire direttamente con un procedimento algebrico sistematico applicato al *cono di Segre*, che è un cono inviluppo di 6ª classe Γ^6 che tocca π secondo le due *tangenti asintotiche* u, v e le tre *tangenti di Darboux*.

Si consideri un piano arbitrario (dipendente da un parametro p) $\alpha_u(p)$ passante per u, e di esso si costruiscano i successivi coni polari

$$\Gamma_u^5(p), \quad \Gamma_u^4(p), \quad \Gamma_u^3(p), \quad \Gamma_u^2(p)$$

rispetto a Γ^6; poi si cerchi ogni piano (diverso da π) che passi per u o v e appartenga a uno di questi coni, oppure alla generatrice di contatto di un piano già trovato.

Così operando, si ottiene quanto segue:

$\Gamma_u^5(p)$ ha un sol piano β_v passante per v, il *quale è indipendente* da p, ossia dal *piano di partenza* $\alpha_u(p)$, e perciò risulta ben determinato; la sua generatrice di contatto col cono individua con u un piano $\beta_u(p)$, ma che dipende da p.

$\Gamma_u^4(p)$ non ha piani per u o v, a meno che il piano di partenza sia un certo piano particolare γ_u; e allora il cono degenera in due fasci di piani di asse v, e in un cono residuo: questo contiene un sol piano γ_v' per v, la cui generatrice di contatto individua con u un piano γ_u''. I piani γ_u, γ_v', γ_u'' risultano da tutto ciò ben determinati.

$\Gamma_u^3(p)$ degenera in un fascio di piani di asse v e in un cono residuo: questo cono e $\Gamma_u^2(p)$ contengono ambedue il piano γ_v' (già trovato) con generatrici di contatto che determinano con u due piani $\delta_u(p)$, $\varepsilon_u(p)$.

Or dunque, partendo da un piano arbitrario $\alpha_u(p)$ per u, si trovano altri piani per u o v: i piani

(2) $$\beta_v, \quad \gamma_u, \quad \gamma_v', \quad \gamma_u'',$$

che sono determinati, e i piani

(3) $$\beta_u(p), \quad \delta_u(p), \quad \varepsilon_u(p),$$

che invece dipendono dal piano di partenza.

Ma si possono ottenere altri piani determinati. Così, cercando i piani uniti dei fasci proiettivi descritti (variando p) da $\alpha_u(p)$ e dai (3) (due a due considerati), si ha un piano nuovo (e un solo) φ_u. Del resto gli stessi piani (3) diventano determinati se si applica il processo precedente partendo da uno dei piani per u già determinati, ossia da γ_u o da γ_u'' o da φ_u; e così via, partendo sempre da uno dei nuovi piani ottenuti, si hanno quanti piani determinati si vogliono.

Naturalmente si ottengono piani omologhi passanti per l'altra tangente asintotica.

Orbene, se si cerca la retta di intersezione di uno *qualunque* dei piani determinati passanti per u e dell'omologo per v, si trova che *tale retta è sempre una retta canonica.* Così, per esempio, si trova che i piani (2) e φ_u danno, per intersezione con gli omologhi, rispettivamente: *una delle rette principali, la direttrice, ancora la direttrice, una retta canonica nuova, lo spigolo.*

Altri analoghi procedimenti algebrici si ottengono, prendendo in considerazione, anzichè i piani passanti per le tangenti asintotiche, quelli passanti per le *tangenti di Darboux* o per le *tangenti coniugate* (*di Segre*). Naturalmente allora nascono, non più coppie, ma *terne* di piani omologhi formanti fasci o triedri: le rette canoniche si presentano allora come assi dei fasci o come rette polari del piano tangente π rispetto ai triedri; o anche in un terzo modo meno semplice, come mostrerò in una prossima Memoria.

G. PALOZZI (Bologna - Italia)

SUL PIANO PRINCIPALE DI HALPHEN E SULLA RETTA E SUL PUNTO PRINCIPALI DI DUE CURVE SGHEMBE

1. - In una ricerca sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe [1] ho ottenuto tre invarianti geometrici, e precisamente, il *piano*, la *retta* ed il *punto principali* relativi a due curve sghembe. È subito da avvertire che questi invarianti non sono nuovi: ad HALPHEN si deve la scoperta del piano principale [2], ad E. BOMPIANI quella della retta e del punto principali [3]; è però anche da avvertire che quel piano, questa retta e questo punto si presentano, col procedimento che ho seguito, in modo affatto indipendente dalla loro definizione, ed è solo in un secondo tempo che si verifica che son proprio il piano, la retta ed il punto principali.

Il procedimento tenuto è un'estensione di quello adoperato da C. SEGRE [4] per dimostrare che due curve piane, aventi in un punto la stessa tangente ed un contatto d'ordine egualmente elevato con questa posseggono un invariante proiettivo (finito). Esso consiste nel segare due curve C e $\overline{C}$, aventi in un punto ordinario O un contatto d'ordine $n \geqslant 1$, e la tangente comune t con un piano ω prossimo ad O, nei punti P, $\overline{P}$, T; nel proiettare questi punti da una retta r per O e, infine, nel costruire e studiare il birapporto D dei tre piani π, $\overline{\pi}$, τ così ottenuti e di un quarto piano arbitrario σ per r.

2. - Riferite le due curve C e $\overline{C}$ ad un qualsiasi sistema di coordinate proiettive non omogenee XYZ avente l'origine in O e l'asse X coincidente con la tangente t, le equazioni di C e $\overline{C}$ si scriveranno, in un intorno di O,

$$Y = X^2 \sum_0^\infty {}_i a_i X^i \qquad Y = X^2 \sum_0^\infty {}_i \bar{a}_i X^i$$

$$Z = X^2 \sum_0^\infty {}_i \alpha_i X^i \qquad Z = X^2 \sum_0^\infty {}_i \bar{\alpha}_i X^i$$

---

(1) Cfr. la nota: *Sugli invarianti proiettivi di contatto fra curve sghembe.* Rend. Lincei, serie VI, vol. VII, 1928.

(2) *Sur les invariants différentielles des courbes gauches.* « Journal de l'Ecole Polytechnique », t. XXVII, 1880.

(3) *Sul contatto di due curve sghembe.* « Mem. Accad. Scienze di Bologna », serie VIII, t. III, 1925-26.

(4) *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche, ecc.* Serie V, vol. VI, 1897.

e si avrà, se (come supporrò) C e $\overline{C}$ hanno in O un contatto d'ordine $k+1$ ($k \geqslant 0$), $a_i = \overline{a}_i$ e $\alpha_i = \overline{\alpha}_i$ per $i < k$, ma $a_k \neq \overline{a}_k$ o $\alpha_k \neq \overline{\alpha}_k$ necessariamente. Sia, per es., $\alpha_k \neq \overline{\alpha}_k$.

Sia poi

$$X = pY + qZ + \varepsilon \quad (p = p_0 + p_1\varepsilon + \ldots, \; q = q_0 + q_1\varepsilon + \ldots) \tag{1}$$

l'equazione del piano ω. L'ascissa x del punto P ha uno sviluppo del tipo

$$x = \varepsilon + \varepsilon^2 \sum_0^\infty {}_j \delta_j \varepsilon^j = \varepsilon\left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty {}_j \delta_j \varepsilon^j\right) \tag{2}$$

ove le δ_j si determinano uguagliando i coefficienti dei termini simili nell'identità

$$\sum_0^\infty {}_j \delta_j \varepsilon^j = \left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty {}_j \delta_j \varepsilon^j\right)^2 \sum_0^\infty {}_i (p a_i + q \alpha_i) \varepsilon^i \left(1 + \varepsilon \sum_0^\infty {}_j \delta_j \varepsilon^j\right)^i.$$

Per ciò che segue, non è però necessario calcolare effettivamente le δ_j; basta, invece, osservare semplicemente che per una qualunque δ_j si ha

$$\delta_j = a_j p_0 + \alpha_j q_0 + \ldots.$$

e per una δ_{j+1} con $j > 0$

$$\delta_{j+1} = a_{j+1} p_0 + \alpha_{j+1} q_0 + a_j p_1 + \alpha_j q_1 + (j+4)(a_j p_0 + \alpha_j q_0)(a_0 p_0 + \alpha_0 q_0) + \ldots.$$

ove i termini indicati brevemente con .... sono indipendenti dalle a_i e α_i con $i \geqslant j$.

Similmente, $\overline{P}$ avrà un'ascissa $\overline{x}$ per la quale varrà uno sviluppo dello stesso tipo di (2); e, indicando con $\overline{\delta}_j$ i coefficienti dei termini di questo sviluppo, ogni $\overline{\delta}_j$ e ogni $\overline{\delta}_{j+1}$ con $j > 0$ sarà data, a meno di termini non contenenti $\overline{a}_i$ e $\overline{\alpha}_i$ con $i \geqslant j$, dalle relazioni che si deducono dalle ultime due soprascritte col cambiamento di a_i e α_i in $\overline{a}_i$ e $\overline{\alpha}_i$.

L'asse Y non essendo stato fissato, non si diminuisce l'arbitrarietà della retta r supponendo che questa retta non sia situata nel piano XY. A rappresentare r si potranno allora assumere le equazioni

$$X = lZ \qquad Y = mZ \tag{3}$$

e sghemba con r sarà certo ogni retta di equazioni del tipo

$$X = nY - h \qquad Z = 0. \tag{4}$$

Il piano π proiettante da r il punto $P(x, y, z)$ ha per equazione

$$X(mz - y) + Y(x - lz) + Z(ly - mx) = 0;$$

cambiando x, y, z in $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ si ottiene da questa l'equazione del piano $\overline{\pi}$ proiettante $\overline{P}(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$; e con la seconda delle (3) coincide l'equazione di τ. Per conseguenza, come equazione di σ può prendersi

$$X(mz - y) + Y(x - lz) + Z(ly - mx) + \lambda(Y - mZ) = 0$$

con $\lambda \neq 0$, altrimenti $\sigma \equiv \pi$.

Indicate con X, $\overline{X}$, X_τ, X_σ le ascisse dei punti in cui la retta (4) incontra i piani π, $\overline{\pi}$, τ, σ, si ha

$$D=(\pi\overline{\pi}\tau\sigma)=(X\overline{X}X_\tau X_\sigma)=1+[(\bar{x}-l\bar{z})(mz-y)-(x-lz)(m\bar{z}-\bar{y})]\frac{1}{\lambda(\bar{y}-m\bar{z})}$$

e quindi, per l'ipotesi sull'ordine del contatto fra C e $\overline{C}$ e per l'osservazione sulla dipendenza di δ_j e $\overline{\delta}_j$ da a_i, $\boldsymbol{a}_i$, $\bar{a}_i$, $\bar{\boldsymbol{a}}_i$, e purchè m sia tale da rendere $\bar{a}_0-m\bar{\boldsymbol{a}}_0+0$,

$$D=1+\frac{m\boldsymbol{a}_k-a_k-(m\bar{\boldsymbol{a}}_k-\bar{a}_k)}{\lambda(\bar{a}_0-m\bar{\boldsymbol{a}}_0)}\varepsilon^{k+1}+\ldots.$$

ove i termini non scritti contengono tutti a fattore ε^{k+2}.

Si determini ora m in modo che sia

$$m\boldsymbol{a}_k-a_k-(m\bar{\boldsymbol{a}}_k-\bar{a}_k)=0 \qquad (\boldsymbol{a}_k-\bar{\boldsymbol{a}}_k+0).$$

Dallo sviluppo di D che precede, se il valore di m che così si ottiene non soddisfa all'uguaglianza $\bar{a}_0-m\bar{\boldsymbol{a}}_0=0$, o dal significato geometrico di questa, nel caso contrario, risulta che *il piano*

$$Y(\boldsymbol{a}_k-\bar{\boldsymbol{a}}_k)=Z(a_k-\bar{a}_k),$$

determinato dagli intorni d'ordine $k+2$ di O su C e $\overline{C}$, *è proiettivamente invariante.*

Se, com'è lecito, si assume questo piano come piano ZX, si ha che le proiezioni di C e $\overline{C}$ sul piano XY fatte (parallelamente all'asse Z e quindi) da un punto qualunque del piano ZX (poichè, in questo piano, non è stato fissato l'asse Z nè, su questo, il punto all'infinito) hanno un contatto d'ordine $k+2$, almeno. Si giunge così (ma per altra via) al *teorema di Halphen*:

Se due curve sghembe C *e* $\overline{\text{C}}$ *hanno, in un punto ordinario* O, *un contatto d'ordine* (k+1=)n$\geqslant$1, *nel fascio dei piani passanti per la comune tangente v'è un* **piano principale** *tale che le proiezioni di* C *e* $\overline{\text{C}}$ *da un suo punto qualunque hanno un contatto d'ordine* $(k+2=)n+1$, *almeno.*

3. - Per continuare l'analisi, supporrò che sia $\bar{a}_0-m\bar{\boldsymbol{a}}_0+0$ e $k\geqslant 1$. Per aver preso il piano principale come piano ZX, si ha

$$D=1+[x\bar{y}-\bar{x}y+l(\bar{z}y-z\bar{y})]\frac{1}{\lambda\bar{y}}=$$

$$=1+\frac{1}{\lambda\bar{a}_0}[\bar{a}_{k+1}-a_{k+1}+q_0(\bar{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{a}_k)a_0+l(\bar{\boldsymbol{a}}_k-\boldsymbol{a}_k)a_0]\varepsilon^{k+2}+\ldots.,$$

i termini omessi contenendo a fattore ε^{k+3}. D'altra parte, quando ω tende a passare per O, la retta secondo cui ω taglia il piano principale tende alla retta che ha per equazione (in questo piano)

$$X=q_0Z. \tag{5}$$

Pertanto, se a q_0 si fa corrispondere quel valore di l per cui s'annulla, nel precedente sviluppo, il coefficiente del termine in ε^{k+2}, si ha che quando la retta (5) descrive, nel piano principale, il fascio di centro O, la retta di equazioni (3) (nella seconda delle quali è ora $m=0$) descrive lo stesso fascio e i fasci sovrapposti descritti da tali due rette si corrispondono in una involuzione non parabolica avente per rette doppie l'asse X e *la retta*

$$2(\bar{a}_k - a_k)a_0 X = (a_{k+1} - \bar{a}_{k+1})Z$$

che è perciò una retta *proiettivamente invariante*, dipendente dagli intorni d'ordine $k+2$ di O su C e $\bar{C}$.

Prendendo tale retta come asse Z, si riconosce immediatamente che essa è la *retta principale* (luogo dei punti del piano principale proiettando dai quali C e $\bar{C}$ si ottengono due curve aventi un contatto d'ordine $k+3$, almeno). Per questa retta sussiste dunque la proprietà:

Se due curve sghembe C *e* $\bar{\text{C}}$ *hanno, in un punto ordinario* O, *un contatto d'ordine* $(\text{k}+1=)\text{n}>1$ *ed il piano principale distinto dal piano osculatore comune, gli intorni d'ordine* $(\text{k}+2=)\text{n}+1$ *di* O *sulle due curve determinano nel fascio di rette, che ha per centro* O *e per sostegno il piano principale, una involuzione (non parabolica) avente per rette doppie la retta principale e la tangente comune a* C *e* $\bar{\text{C}}$.

4. - Si consideri la curva inviluppo delle rette d'intersezione dei piani (1) con ω e poi il punto di contatto $\left(X=0,\ Z=-\frac{1}{q_1}\right)$ di questa curva con la retta principale. Siccome è

$$D=1+(x\bar{y}-\bar{x}y)\frac{1}{\lambda\bar{\lambda}}=1+\frac{1}{\lambda\bar{a}_0}[\bar{a}_{k+2}-a_{k+2}+2q_1(\bar{a}_k-a_k)a_0]\varepsilon^{k+3}+....$$

ove $+....$ accenna termini contenenti a fattore ε^{k+4}, si vede che si può fissare sulla retta principale, e in relazione agli intorni d'ordine $k+3$ di O su C e $\bar{C}$, un *punto proiettivamente* invariante che coincide col *punto principale.*

Riprendendo i calcoli nel caso di $k=0$, si verifica poi molto facilmente che anche in tal caso seguitano a sussistere i risultati ottenuti in questo numero e in quello precedente.

P. MENTRÉ (Nancy - Francia)

SUR LES FAMILLES DE COMPLEXES LINÉAIRES

1. - Je vais m'occuper des familles continues de complexes linéaires non spéciaux dans l'espace projectif à trois dimensions, où se trouvent comme on sait ∞^5 complexes linéaires non spéciaux.

Je considérerai donc des familles telles que la famille $\gamma(p_1, p_2, \ldots p_n)$ engendrée par un complexe linéaire non spécial γ subissant un déplacement à $n=1, 2, 3,$ ou 4 paramètres.

Les complexes linéaires $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ seront des positions successives infiniment voisines prises par le complexe linéaire mobile γ dans un *déplacement arbitraire à un paramètre* à l'intérieur de la famille $\gamma(p_1, p_2, \ldots p_n)$.

Par le symbole γ je représenterai aussi l'ensemble des six coordonnées homogènes du complexe linéaire γ.

2. - Je ne m'intéresserai qu'aux familles pour lesquelles le complexe linéaire générateur γ admet une *caractéristique.* J'ai en effet surtout en vue la recherche de propriétés projectives tangentielles des complexes non linéaires.

Rappelons qu'on désigne sous le nom de caractéristique l'ensemble des droites qui appartiennent au complexe linéaire γ et aux complexes linéaires γ_1, c'est-à-dire à tous les complexes $\gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \gamma}{\partial p_2} dp_2 + \ldots + \frac{\partial \gamma}{\partial p_n} dp_n$. Une caractéristique de complexe linéaire mobile est donc formée par les droites communes aux $n+1$ complexes linéaires $\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial p_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial p_2}, \ldots, \frac{\partial \gamma}{\partial p_n}$. C'est une variété linéaire réglée dépendant au plus des n paramètres dont dépend γ. J'utiliserai le symbole $(\gamma\gamma_1)$ pour représenter une telle caractéristique.

Il est facile d'étudier le cas d'une famille $\gamma(p_1, p_2, p_3, p_4)$ dépendant de quatre paramètres. Une telle famille n'a en effet de caractéristique que si le complexe linéaire γ' conjugué aux cinq complexes linéaires $\gamma, \frac{\partial \gamma}{\partial p_1}, \frac{\partial \gamma}{\partial p_2}, \frac{\partial \gamma}{\partial p_3}, \frac{\partial \gamma}{\partial p_4}$ est spécial. S'il en est ainsi la caractéristique se réduit à la directrice r du complexe linéaire spécial γ'. Cette directrice r est conjuguée à γ et à γ_1; la directrice r_1 sera conjuguée à γ_1 et à γ_2; par suite le complexe linéaire γ_1 sera conjugué à r et à r_1, ce qui signifie que le complexe linéaire γ reste tangent à la variété réglée (r) engendrée par la droite caractéristique r, droite dépendant seulement de 3 paramètres au plus.

Réciproquement l'ensemble des complexes linéaires tangents à un complexe, à une congruence ou à une surface réglée dépend en général de 4 paramètres.

En résumé, les seules familles de complexes linéaires non spéciaux dépendant de quatre paramètres et admettant une caractéristique sont formées par l'ensemble des complexes linéaires tangents à une variété réglée.

3. - Il ne reste plus qu'à nous occuper des familles de complexes linéaires dèpendant de trois paramètres au plus.

Commençons par choisir parmi les nombreux résultats que j'ai déjà publiés [1] sur les familles $\gamma(p_1)$ à un paramètre.

La caractéristique $(\gamma\gamma_1)$ est une congruence linéaire, qui dépend d'un paramètre — sauf si $\gamma(p_1)$ est un faisceau linéaire —. Le complexe γ_1 contient deux caractéristiques successives $(\gamma\gamma_1)$ et $(\gamma_1\gamma_2)$; il est par suite manifeste que le complexe linéaire γ reste tangent au complexe G engendré par sa caractéristique, le contact ayant lieu à la fois suivant toutes les droites de cette caractéristique. D'ailleurs le complexe linéaire γ est manifestement un complexe stationnaire de G, au sens de KLEIN.

Deux caractéristiques successives $(\gamma\gamma_1)$ et $(\gamma_1\gamma_2)$ ont en commun les droites de la demi-quadrique $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$ situées dans les trois complexes linéaires successifs γ, γ_1, γ_2. J'appellerai cette quadrique « *deuxième caractéristique* ». Le complexe γ_2 contient trois deuxièmes caractéristiques successives $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$, $(\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$; il est donc manifeste que le complexe γ reste osculateur à la congruence C engendrée par la deuxième caractéristique.

Deux deuxièmes caractéristiques successives $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$, $(\gamma_1\gamma_2\gamma_3)$ ont en commun les deux droites r et s situées dans les quatre complexes γ, γ_1, γ_2, γ_3; ces deux droites constituent la « *troisième caractéristique* ». On voit aisément que γ garde un contact du troisième ordre avec chacune des surfaces réglées (r) et (s) et que la demi-quadrique $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$ reste tangente aux surfaces (r) et (s) qui sont par suite les surfaces focales de la congruence C.

Il est remarquable que l'association des génératrices r et s des surfaces réglées (r) et (s) est telle que les deux droites flecnodales relatives à r et les deux droites flecnodales relatives à s sont situées sur une demi-quadrique qui est la deuxième caractéristique d'un certain complexe linéaire subissant un déplacement à un paramètre.

Faisons correspondre au complexe γ le complexe γ' conjugué à cinq positions successives $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. On voit aisément que la demi-quadrique $(\gamma'\gamma_1'\gamma_2')$

---

[1] PAUL MENTRÉ: *Les variétés de l'Espace réglé.* Presses universitaires de France, 1923, p. 94 à 97. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 175, 1922, p. 941; t. 178, 1924, p. 290; t. 180, 1925, p. 1385; t. 183, 1926, p. 724; t. 184, 1927, p. 428; t. 185, 1927, p. 1179; t. 185, 1927, p. 1428.

est complémentaire de la demi-quadrique $(\gamma\gamma_1\gamma_2)$ et que les droites r', s' forment un quadrilatère gauche avec les droites r et s. D'ailleurs γ et γ' se correspondent d'une manière réciproque.

Le quadrilatère gauche r, r', s, s', subit un déplacement particulier à un paramètre; un tel déplacement a déjà été étudié notamment par M. DEMOULIN (1).

La complexe G enveloppé par γ a des propriétés remarquables: il n'a en général sur chacune de ses droites que deux foyers inflexionnels (2) doubles (au lieu de quatre foyers inflexionnels simples) et il ne possède que deux complexes stationnaires dont le complexe γ qui compte pour deux (au lieu de trois complexes stationnaires simples).

Si la congruence linéaire caractéristique de γ est spéciale on n'a plus qu'un seul foyer inflexionnel quadruple et un seul complexe linéaire stationnaire triple (γ qui compte pour trois).

Le procédé général pour obtenir un complexe à deux foyers inflexionnels doubles consiste à chercher l'enveloppe du complexe linéaire — dépendant d'un paramètre — osculateur à une congruence W à surfaces focales réglées.

Le procédé général pour obtenir un complexe à foyer inflexionnel quadruple consiste à chercher l'enveloppe des complexes linéaires — dépendant d'un paramètre — osculateurs à une surface réglée (c'est-à-dire ayant en commun avec la surface réglée trois droites confondues) et contenant les tangentes à deux lignes asymptotiques distinctes tracées sur la surface réglée, ces tangentes étant menées aux deux points d'intersection des lignes asymptotiques avec la droite d'osculation.

4. - Occupons nous maintenant d'une famille $\gamma(p_1, p_2)$ à deux paramètres, dans le cas où la demi-quadrique caractéristique — définie par le réseau γ, $\frac{\partial\gamma}{\partial p_1}$, $\frac{\partial\gamma}{\partial p_2}$ — est dégénérée en deux faisceaux plans à droite commune.

J'ai déjà démontré (3) que le complexe H, enveloppé par les complexes linéaires γ d'une telle famille, admettait sur chacune de ses droites un foyer inflexionnel multiple qui est généralement double. J'ai également cherché dans quelles conditions on peut avoir un foyer inflexionnel triple.

Ajoutons que le complexe linéaire γ est un complexe stationnaire multiple du complexe H; ce complexe stationnaire γ est en général double, mais il devient triple quand le foyer inflexionnel multiple devient triple.

Le procédé général pour engendrer un complexe à foyer inflexionnel multiple est de considérer l'ensemble des rayons centraux issus des différents points d'une des deux surfaces focales d'une congruence. On peut aussi chercher l'enve-

---

(1) DEMOULIN, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris t. 148, 1909, p. 462.

(2) G. KOENIGS, Annales de l'École Normale Supérieure, 2e série, t. 11, 1882, p. 331 à 335.

(3) P. MENTRÉ, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 179, 1924, p. 1131. Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 51, 1923, p. 202.

loppe du complexe linéaire (dépendant de deux paramètres) qui accompagne, au sens de WAELSCH (1) l'un des deux foyers d'une congruence.

Ajoutons ce nouveau théorème: qu'on obtient un complexe particulier à foyer inflexionnel double en associant deux à deux d'une manière arbitraire les lignes asymptotiques d'une surface réglée non développable, puis en considérant l'enveloppe des ∞^2 complexes linéaires osculateurs à la surface réglée et contenant les deux tangentes menées à deux lignes asymptotiques correspondantes par les deux points d'intersection avec la droite d'osculation.

5. - Abordons le cas général d'une famille $\gamma(p_1, p_2)$, à deux paramètres, pour laquelle la demi-quadrique caractéristique Q n'est pas dégénérée. Je me contenterai de donner quelques uns des résultats, non encore publiés, que j'ai obtenus récemment par la méthode de M. CARTAN.

Le complexe linéaire γ, dépendant de deux paramètres, enveloppe en général un complexe I dont les quatre foyers inflexionnels sont distincts. Le complexe γ est d'ailleurs un complexe stationnaire simple du complexe I; la surface principale correspondante n'est autre que la demi-quadrique caractéristique Q.

Le complexe I est engendré par la demi-quadrique Q dans son déplacement à deux paramètres; ce déplacement jouit de la propriété que la demi-quadrique Q et les demi-qnadriques infiniment voisines Q_1 sont situées dans γ; autrement dit le complexe linéaire γ est « tangent au réseau de demi-quadriques Q, Q_1 au voisinage de la demi-quadrique Q ».

Le réseau de quadriques Q, Q_1 jouit d'une propriété remarquable. Les huit points communs aux quadriques de ce réseau (points qui constituent la caractéristique de la quadrique ponctuelle Q) sont répartis sur quatre génératrices a, b, c, d de la demi-quadrique Q. De plus les huit génératrices de la demi-quadrique Q' complémentaire de Q passant par les points caractéristiques se correspondent involutivement sur Q'; les deux droites doubles de cette involution sont d'ailleurs les deux droites de Q' situées dans γ.

Les quatre génératrices privilégiées a, b, c, d, engendrent des congruences (a), (b), (c), (d), qui sont situées dans le complexe I et qui sont constituées par des droites bitangentes à la surface Σ enveloppée par la quadrique ponctuelle Q. Les deux nappes focales de chacune des quatre congruences (a), (b), (c), (d) sont donc situées sur Σ. Le complexe γ est tangent à chacune des congruences (a), (b), (c), (d) mais il est un complexe linéaire tangent particulier car ses deux directions de droites osculatrices (2) sont confondues.

---

(1) WAELSCH, Wiener Sitzungsberichte, t. 100, 2a, 1891, p. 158.

(2) G. KOENIGS, Annales de l'École Normale Supérieure, 2e Série, t. 11, 1882. PAUL MENTRÉ, Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences, Congrès de La Rochelle, 1928.

Parmi les complexes linéaires γ' qui font partie du réseau des complexes conjugués aux complexes $\gamma\gamma_1$ nous pourrions en distinguer deux qui généraliseraient les deux complexes d'accompagnement (Begleitungscomplex) de WAELSCH.

Il peut arriver qu'il existe un complexe linéaire γ' qui soit conjugué à tous les complexes γ, γ_1, γ_2. Les complexes linéaires $\gamma(p_1, p_2)$ et $\gamma'(p_1, p_2)$ se correspondent alors d'une manière réciproque. Tandis que l'enveloppe I de γ est engendrée par la demi-quadrique Q, l'enveloppe I' de γ' est engendrée par la demi-quadrique Q', complémentaire de Q. Les huit point caractéristiques de la quadrique ponctuelle Q sont alors répartis sur quatre génératrices de Q et quatre génératrices de Q'; ils sont les sommets de deux quadrilatères gauches tracés sur la quadrique Q. Chacun de ces quadrilatères subit un déplacement, à deux paramètres (en général), qui jouit notamment de la propriété remarquable suivante: les deux foyers de la congruence engendrée par un côté sont les deux sommets situés sur ce côté.

6. - Considérons enfin une famille $\gamma(p_1, p_2, p_3)$ à trois paramètres. La caractéristique est formée par deux droites r et s qui sont en général distinctes et engendrent des complexes (r) et (s). Si les deux droites r et s viennent à se confondre, le complexe γ est un complexe stationnaire du complexe (r).

Inversement si l'on associe à chaque génératrice r d'un complexe l'un quelconque γ de ses complexes linéaires tangents, l'enveloppe de γ comprendra le complexe (r), et un autre complexe (s) dont les droites s sont mises en correspondance remarquable avec celles du complexe r. Si le complexe linéaire γ est choisi parmi les trois complexes stationnaires, il a pour enveloppe double le complexe (r).

7. - Terminons en disant qu'il existe des complexes admettant un complexe stationnaire double dépendant d'un paramètre et un complexe stationnaire simple dépendant de deux paramètres, de tels complexes peuvent donc être considérés soit comme des enveloppes à deux paramètres, soit comme des enveloppes à un paramètre. Il s'agit d'ailleurs des complexes du second dégré obtenus en associant d'une manière homographique les génératrices d'une demi-quadrique et en considérant les droites qui s'appuient sur deux génératrices associées.

8. - La place me manque pour montrer l'intérêt que présentent les considérations précédentes dans le problème de la signification géométrique des invariants projectifs des variétés réglées et dans l'étude de la déformation projective (du premier ordre) des complexes de droites au sens FUBINI-CARTAN [1].

---

[1] E. CARTAN, Comptes Rendus du Congrès International de Strasbourg 1921, p. 397-406. G. FUBINI e E. ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna, 1927, p. 582.

G. THOMSEN (Hamburg - Germania)

ÜBER EIN PROBLEM DER KUGELGEOMETRIE

Ich möchte über ein spezielles Problem aus der Theorie der Kugelsysteme berichten, das schon DARBOUX gestellt, wenn auch noch nicht vollständig gelöst hat (1). Ein von zwei Parametern abhängiges System reeller Kugeln hat von gewissen Ausnahmefällen abgesehen, zwei Hüllflächen, die reell oder konjugiert komplex sein können. Wir wollen uns auf Kugelsysteme mit zwei reellen Hüllflächen beschränken. Dadurch dass man bei diesen Systemen immer die zwei Punkte der beiden Hüllflächen, die als Berührungspunkte zu einer und derselben Kugel des Systems gehören, paarweise einander zuordnet, gelangt man zu einer punktweisen Abbildung der Hüllflächen aufeinander.

DARBOUX fragt nun: *Wann ist diese Abbildung der Hüllflächen eine winkeltreue Abbildung?*

Dies Problem, das offenbar in das Gebiet der konformen Geometrie des Raumes gehört, lässt sich rechnerisch ohne allzugrosse Mühe bewältigen, wenn man ganz mit einem konforminvarianten Formelapparat arbeitet, also etwa pentasphärische Koordinaten einführt und dann mit Hilfe des Riccikalküls die Inversionsgeometrie der Kugelsysteme entwickelt. Es zeigt sich, dass die Forderung der winkeltreuen Beziehung der Hüllflächen sehr stark ist: In den wesentlichsten Fällen kommen nicht nur spezielle Kugelsysteme als Lösungen heraus, sondern es müssen sogar die Hüllflächen noch von spezieller Natur sein. Bei den Kugelsystemen die sich als Lösungen ergeben, treten dabei als Hüllflächen gerade die Flächen einiger besonders wichtiger Flächenklassen der konformen Flächentheorie auf. Aus diesem Grunde dürfte das Problem vielleicht auch von Interesse sein, wenn man nur das Resultat angibt, ohne auf die Rechnung einzugehen. Man wird bei der Rechnung auf eine etwas komplizierte Fallunterscheidung geführt, und zwar erhält man drei Fälle 1) 2) 3) wobei 3) wieder in drei Unterfälle 3a), 3b) und 3c) zerfällt.

Wir geben die einzelnen Lösungen an:

---

(1) Vergleiche. G. DARBOUX: *Sur les surfaces isothermiques,* Annales de l'école Normale Superieure, 1899, p. 498 f.f. Über die vollständige Lösung vergleiche W. BLASCHKE: *Differentialgeometrie.* Band III, § 78-81 (I Springer, Berlin).

Fall 1. - Hier erhält man *spezielle* sogenannt *Ribaucour'sche Kugelsysteme,* das heisst Kugelsysteme, auf deren Hüllflächen sich die Krümmungslinien entsprechen. Und zwar erhält man *diejenigen Ribaucour'schen Kugelsysteme, deren Hüllflächen beide Isotherm-Flächen sind,* das heisst Flächen auf denen das Netz der Krümmungslinien ein isothermes Netz bildet. Während dieser Fall schon von Darboux angegeben worden ist, findet sich der folgende bei ihm noch nicht:

Fall 2. - Hier bekommt man keine Ribaucour'schen Systeme, sondern solche der folgenden Art: In einem Flächenpunkt gibt es unter den die Fläche berührenden Kugeln, die ja alle die Fläche in einer Kurve mit einem Doppelpunkt an der Berührungsstelle durchschneiden, genau eine Kugel, bei der die beiden Kurvenäste im Berührungspunkt *senkrecht* sind. Diese Kugel ist die *Zentralkugel* der Fläche (1). Sie kann auch definiert werden als die Kugel, die in dem Büschel der die Fläche berührenden Kugeln zusammen mit dem Flächenpunkt (als der Kugel vom Radius 0) das Paar der Krümmungskugeln harmonisch trennt. In unserm Fall 2 erhält man nun *solche Kugelsysteme, die gleicheitig aus den Zentralkugeln ihrer beiden Hüllflächen bestehen.* Es haben nun nur spezielle Flächen die Eigenschaft, dass das System ihrer Zentralkugeln eine zweite Hüllfläche besitzt, für die die Kugeln wieder Zentralkugeln sind. Diese Flächen, die in unserm Fall 2 als Hüllflächen auftreten sind nun in der konformen Flächetheorie noch aus dem Grunde bemerkenswert, weil sie zugleich die Extremalen des Variationsproblems darstellen, das zu dem einfachsten konforminvarianten Doppelintegral einer Fläche gehört. Wir werden sie also als *Konformminimalflächen* bezeichnen.

Fall 3. - Unser Fall 3 ist von ganz anderer Art als die beiden vorhergehenden. Hier gelangen wir nicht mehr zu speziellen Flächenklassen, sonder die Hüllflächen können noch von ganz allgemeiner Natur sein. *Im Fall 3a) erhalten wir Systeme von Kugeln, die alle zu einer festen Kugel senkrecht sind.*

Wählen wir hier die eine Hüllfläche beliebig und geben die feste Kugel vor, so gibt es immer genau ein zugehöriges Kugelsystem der Art 3a). Die beiden Hüllflächen sind zueinander invers bezüglich der festen Kugel, also trivialer Weise winkeltreu aufeinander bezogen.

Der Fall 3b) liefert uns *Systeme, deren Kugeln alle eine feste Kugel in Grosskreisen schneiden,* im Fall 3c) endlich, den wir nur als Ausartung mitrechnen, erhalten wir *Systeme von Kugeln, die alle durch einen festen Punkt gehen.* Hier schrumpft die eine Hüllfläche auf eben diesen Punkt zusammen.

Der Fall 3) liefert uns zwar keine neuen wichtigen Flächenklassen, aber er ist aus einem andern Grunde bemerkenswert. Die Gruppe der konformen Abbil-

(1) Vergleiche. W. BLASCHKE, l. c., § 67.

dungen des Raumes, die eine feste Kugel in sich überführen, ist behanntlich isomorph zu der *Gruppe der hyperbolischen nichteuklidischen Bewegungen des Raumes.* Wir hönnen also die hyperbolische Geometrie in die Konformgeometrie einbauen, und haben dann nach POINCARÉ die zur festen Kugel inversen Punktepaare als die Punkte und die zu ihr senkrechten Kugeln als die Ebenen der hyperbolischen Geometrie zu deuten. Da wir im Fall 3a) einfach die Konformgeometrie einer Fläche bezüglich einer festen Kugel betreiben, gelangen wir in diesem Fall einfach zur *hyperbolischen Flächentheorie.* Die Kugeln des Systems sind dabei als die Tangentenebenen der Fläche zu interpretieren. Wenn wir also einmal die Konformgeometrie der Kugelsysteme in invarianten Formeln entwickelt haben, so führt uns der Fall der speziellen Kugelsysteme 3a) einfach zu den Formeln der hyperbolischen nichteuklidischen Flächentheorie, wie sie etwa von BIANCHI entwickelt worden sind. In ganz ähnlicher Weise gelangt man im Fall 3b) zur *elliptischen nichteuklidischen Flächentheorie.* Der Fall 3c) endlich führt uns zur *gewöhnlichen Flächentheorie der euklidischen Geometrie.* Denn die Untergruppe der konformen Abbildungen, die einen Punht fest lassen, ist isomorph zur Gruppe der ähnlichen Abbildungen.

Der Fall 3 führt uns also zu einer gemeinsamen Behandlungsweise der hyperbolischen, elliptischen und euklidischen Flächentheorie, die sich, wie sich zeigt, in formal sehr einfacher Weise vollzieht.

Zum Schluss erwähnen wir noch dass man durch eine Art Grenzübergang aus der Lösung des Darboux'schen Problems auch die Lösung des folgenden verwandten Problems leicht erhalten kann:

Es sind die Kugelsysteme zu bestimmen, bei denen die sphärischen Bilder der beiden Hüllflächen auf der Einheitskugel von Gauss einander durch eine winkeltreue Zuordnung entsprechen (1).

---

(1) Vergleiche dazu W. BLASCHKE, l. c., § 78-81.

P. C. DELENS (Le Hâvre - Francia)

CONGRUENCES DE CERCLES ET SYSTÈMES CYCLIQUES

Congruences de cercles dérivés.

1. - Cet exposé se limite à l'étude de certaines congruences (C) de cercles (proprement dits) possédant au moins une surface orthogonale. J'emploie le calcul pfaffien de M. E. CARTAN et les procédés de calcul géométrique de ma Thèse [1]; le symbole $\equiv$ indique la congruence géométrique, ou identité de position, c'est-à-dire l'égalité à un facteur numérique près.

Nous nous plaçons d'abord au point de vue conforme: soit M la sphère-point qui décrit la surface (M) orthogonale aux cercles C de la congruence; M et C dépendent de deux paramètres arbitraires x, y et aux différentielles dx, dy on peut substituer les formes de Pfaff ω_{01}, ω_{02} de sorte que

$$d\mathrm{M}=dx\cdot\mathrm{M}_x+dy\cdot\mathrm{M}_y=\omega_{01}\mathrm{M}_1+\omega_{02}\mathrm{M}_2$$

(M_1, M_2 sphères unitaires orthogonales). Plus généralement, pour une fonction $\Phi(x, y)$ nous posons

$$d\Phi=dx\cdot\Phi_x+dy\cdot\Phi_y=\omega_{01}\Phi_1+\omega_{02}\Phi_2$$

les indices x, y; u, v;.... désignant des dérivées partielles, les indices 1, 2 des dérivées pfaffiennes.

2. - Soit Q une sphère unitaire tangente en M à (M) et rencontrée aussi en P par C. Les relations (produits et carrés intérieurs)

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathrm{M}^2=\mathrm{M}/\mathrm{Q}=\mathrm{Q}/\mathrm{P}=\mathrm{P}^2=0 \qquad \mathrm{Q}^2=\mathrm{M}/\mathrm{P}=1 \\ \omega_{03}=d\mathrm{M}/\mathrm{Q}=-\mathrm{M}/d\mathrm{Q}=0 \end{cases}$$

subsistent pour les éléments $\overline{\mathrm{M}}$, $\overline{\mathrm{Q}}$, $\overline{\mathrm{P}}$ (symboles surlignés) déduits des précédents par la rélation-homothétie dépendant de 2 paramètres arbitraires λ, c

$$(2)\qquad \begin{cases} \overline{\mathrm{M}}=\lambda\mathrm{M} \\ \overline{\mathrm{Q}}=\mathrm{Q}+c\mathrm{M} \\ \overline{\mathrm{P}}=\frac{1}{\lambda}\left(\mathrm{P}-c\mathrm{Q}-\frac{c^2}{2}\mathrm{M}\right) \end{cases}$$

---

[1] *Méthodes et problèmes des géométries différentielles euclidienne et conforme* (Paris, Gauthier-Villars, 1927). Consulter aussi J. L. COOLIDGE: *A Treatise on the Circle and the Sphere* (Oxford, 1916) et l'exposé de G. DARBOUX: *Théorie des surfaces*, t. II.

conservant

$$M \equiv \overline{M} \qquad \Gamma \equiv [MQP] = [\overline{M}\,\overline{Q}\,\overline{P}] \qquad \text{(produits extérieurs).}$$

C et Γ désignent le même cercle, défini soit comme incidence des sphères d'un faisceau, soit par le réseau orthogonal.

En introduisant les formes de Pfaff ω_{00}, ω_{30}, $\overline{\omega}_{00}$, $\overline{\omega}_{30}$

$$\omega_{00} = dM/P = -M/dP \qquad \omega_{30} = dQ/P = -Q/dP \text{ etc.}$$

et formant $d\overline{M}$ et $d\overline{Q}$, on obtient le système

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_{00} = \omega_{00} + \dfrac{d\lambda}{\lambda} \\ \overline{\omega}_{30} = \dfrac{1}{\lambda}(\omega_{30} + c\omega_{00} + dc). \end{cases}$$

3. - Nous considérons seulement les trois classes suivantes: congruences (C).

A) On peut annuler $\overline{\omega}_{30}$, mais $\overline{\omega}_{00} \neq 0$; $\omega_{30} + c\omega_{00}$ doit être différentielle exacte, donc son covariant bilinéaire doit être nul

$$\omega_{30}' + [dc \cdot \omega_{00}] + c\omega_{00}' = 0;$$

ceci donne, en tenant compte de $\overline{\omega}_{30} = 0$, l'équation linéaire en c

$$\text{(4)} \qquad \omega_{30}' - [\omega_{30}\omega_{00}] + c\omega_{00}' = 0.$$

Supposons $\omega_{00}' \neq 0$, et *que cette valeur de c convienne*: il existe une congruence de sphères $\overline{Q}$ dont les deux nappes de l'enveloppe sont orthogonales, en $\overline{M}$ et $\overline{P}$, aux cercles C.

Pour des éléments initiaux M, Q, P convenables (traits supprimés), la solution est $c = 0$, les surfaces orthogonales sont (M) et (P).

B) On peut annuler $\overline{\omega}_{00}$, mais $\overline{\omega}_{30} \neq 0$; ω_{00} est différentielle exacte, ou $\omega_{00}' = 0$; λ est obtenu par intégration et déterminé à un facteur constant arbitraire près. Il n'existe plus de sphère $\overline{Q}$ du cas A) et la surface (M), orthogonale aux cercles C, doit-être considérée comme *double* et lieu-enveloppe de la sphère-point M.

C) On peut annuler simultanément $\overline{\omega}_{00}$ et $\overline{\omega}_{30}$; on a donc

$$\text{(5)} \qquad \omega_{00}' = 0 \qquad \omega_{30}' = [\omega_{30}\omega_{00}].$$

λ et c sont obtenus par intégration et déterminés chacun à un facteur constant arbitraire près; pour M, Q, P convenables ($\omega_{00} = \omega_{30} = 0$), λ et c se réduisent à des constantes arbitraires. Il existe ici ∞^1 surfaces orthogonales aux cercles C, et on peut à volonté les grouper par deux comme enveloppes de sphères, ou les regarder comme doubles: c'est le cas des systèmes cycliques de Ribaucour (ou congruences normales).

4. - Les résultats précedents, pour M, Q, P convenables, sont ainsi résumés:

$$A)\quad (6)\quad \left\{\begin{array}{r|l} & \mathrm{M} \\ d\mathrm{Q} & \mathrm{Q}=0 \\ & \mathrm{P} \\ C\equiv[\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y]\equiv[d\mathrm{Q}\cdot\delta\mathrm{Q}] & \end{array}\right. \qquad B)\quad (7)\quad \left\{\begin{array}{r|l} & \mathrm{M} \\ d\mathrm{M} & \mathrm{Q}=0 \\ & \mathrm{P} \\ C\equiv[\mathrm{M}_x\mathrm{M}_y]\equiv[d\mathrm{M}\cdot\delta\mathrm{M}] & \end{array}\right.$$

$$C)\quad (8)\quad \left\{\begin{array}{r|l} d\mathrm{M} & \mathrm{M} \\ d\mathrm{Q} & \mathrm{Q}=0 \\ d\mathrm{P} & \mathrm{P} \\ C\equiv[\mathrm{M}_x\mathrm{M}_y]\equiv[d\mathrm{M}\cdot\delta\mathrm{M}]\equiv[\mathrm{Q}_x\mathrm{Q}_y]\equiv\ldots\equiv[d\mathrm{P}\cdot\delta\mathrm{P}]. & \end{array}\right.$$

Dans les trois cas, nous dirons que C est un *cercle dérivé*: A) unitaire; B) ponctuel; C) cyclique; ses *sphères primitives* étant:

A) une sphère unitaire Q convenable et les sphères $\alpha\mathrm{Q}\equiv\mathrm{Q}$ de norme constante arbitraire α^2; C est *cercle de la congruence* (DARBOUX) des sphères primitives; on peut aussi le considérer comme *cercle de courbure* pour les deux nappes de leur enveloppe.

B) les sphères-points convenables M et $\beta\mathrm{M}\equiv\mathrm{M}$ (β const. arbitraire); le cercle C est la *base* d'un *réseau associé* de courbes géodésiques conformes sur la surface (M).

C) 1°) les sphères-points $\beta\mathrm{M}\equiv\mathrm{M}$ et $\gamma\mathrm{P}\equiv\mathrm{P}$ (M, P convenables; β, γ const. arb.) décrivant les surfaces (P), comprenant (M); 2°) les sphères $\alpha\mathrm{Q}\equiv\mathrm{Q}$ (Q convenable, α const. arb.) enveloppant deux surfaces (M), (P) et plus généralement deux surfaces (P).

Les systèmes cycliques sont donc formés de cercles possédant simultanément les générations des cas A) et B); de cette remarque nous déduirons leurs propriétés, sans nous attacher à les reprendre toutes. En outre, ils forment le lien entre les deux points de vue utilisés pour la théorie conforme des surfaces.

Propriétés des systèmes cycliques.

5. - Les relations (8), où $[\mathrm{MQP}]\neq 0$, donnent

$$(9)\qquad \begin{array}{c}[d\mathrm{M}\cdot d\mathrm{Q}\cdot d\mathrm{P}]=0 \\ C\equiv[d\mathrm{M}\cdot d\mathrm{Q}]\equiv[d\mathrm{Q}\cdot d\mathrm{P}]\equiv[d\mathrm{M}\cdot d\mathrm{P}] \qquad (d \text{ arbitraire}).\end{array}$$

D'après (9), il y a entre $d\mathrm{M}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{P}$ une relation linéaire

$$(10)\qquad m\,d\mathrm{M}+q\,d\mathrm{Q}+p\,d\mathrm{P}=0$$

et en général une seule. Si un des coefficients manque dans (10) ou plus généralement si les coefficients sont proportionnels à des constantes, on voit aussitôt qu'il existe une sphère fixs dans la famille des surfaces orthogonales aux cercles C.

Dans le cas de deux relations de la forme (10), ces surfaces forment un faisceau linéaire de sphères. Nous ne reviendrons pas sur tous ces cas particuliers.

6. - Introduisons les formes quadratiques de différentielles

$$\begin{array}{lll} (d\mathrm{M})^{\underline{2}}=\mu^{(2)} & -d\mathrm{Q}/d\mathrm{M}=\varphi^{(2)} & d\mathrm{P}/d\mathrm{M}=\eta^{(2)} \\ (d\mathrm{Q})^{\underline{2}}=\chi^{(2)} & (d\mathrm{P})^{\underline{2}}=\tilde{\omega}^{(2)} & -d\mathrm{Q}/d\mathrm{P}=\zeta^{(2)} \end{array}$$

ou les opérateurs linéaires correspondants

$$\begin{array}{lll} \frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{M}}=M & -\frac{d\mathrm{Q}}{d\mathrm{M}}=F & \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{M}}=H \\ Q=F^2 & P=H^2 & Z=FH=HF \end{array}$$

de sorte que

$$\begin{array}{ll} d\mathrm{M}/Md\mathrm{M}=\mu^{(2)} & d\mathrm{M}/Fd\mathrm{M}=\varphi^{(2)} \\ d\mathrm{M}/Hd\mathrm{M}=\eta^{(2)} & d\mathrm{M}/Qd\mathrm{M}=(Fd\mathrm{M})^{\underline{2}}=\chi^{(2)} \\ d\mathrm{M}/Pd\mathrm{M}=(Hd\mathrm{M})^{\underline{2}}=\tilde{\omega}^{(2)} & d\mathrm{M}/Zd\mathrm{M}=Fd\mathrm{M}/Hd\mathrm{M}=\zeta^{(2)}. \end{array}$$

Tous ces opérateurs linéaires sont symétriques (C au contraire est alterné); pour F, H, Z cela résulte de l'annulation des covariants bilinéaires ω_{03}', ω_{00}', ω_{30}'. On a par exemple

$$\begin{array}{ll} -d\mathrm{Q}=\omega_{13}\mathrm{M}_1+\omega_{23}\mathrm{M}_2 & \varphi^{(2)}=\omega_{01}\omega_{13}+\omega_{02}\omega_{23} \\ \omega_{03}'=d\mathrm{M}/\delta\mathrm{Q}-\delta\mathrm{M}/d\mathrm{Q}=-[\omega_{01}\omega_{13}+\omega_{02}\omega_{23}]=0 \text{ etc.} & \end{array}$$

La relation (10) entraîne alors pour les formes quadratiques précédentes, ou les tenseurs attachés, le fait d'appartenir à un même faisceau. Les produits intérieurs de (10) par $d\mathrm{M}$ et $-d\mathrm{Q}$ donnent

$$m\mu^{(2)}-q\varphi^{(2)}+p\eta^{(2)}=0 \qquad m\varphi^{(2)}-q\chi^{(2)}+p\zeta^{(2)}=0\,;$$

d'autre part, entre F, $Q=F^2$ et M (homographie identique), p. ex., existe une identité

$$F^2-IF+JM=0 \quad \text{ou} \quad \chi^{(2)}-I\varphi^{(2)}+J\mu^{(2)}=0\,;$$

$\eta^{(2)}$, $\chi^{(2)}$, $\zeta^{(2)}$ et de même $\tilde{\omega}^{(2)}$, appartiennent donc au faisceau défini par $\mu^{(2)}$ et $\varphi^{(2)}$.

7. - Soit $du\cdot dv=0$ l'équation de la jacobienne des formes précédentes; de

$$C\equiv[\mathrm{M}_u\mathrm{M}_v]\equiv[\mathrm{Q}_u\mathrm{Q}_v]\equiv[\mathrm{P}_u\mathrm{P}_v] \tag{8'}$$

on tire, le long des lignes (u) et (v)

$$\begin{cases} \mathrm{Q}_u=-\alpha_{\mathrm{I}}\mathrm{M}_u=-\beta_{\mathrm{I}}\mathrm{P}_u \\ \mathrm{Q}_v=-\alpha_{\mathrm{II}}\mathrm{M}_v=-\beta_{\mathrm{II}}\mathrm{P}_v \end{cases} \tag{11}$$

et en général: $\alpha_{\mathrm{I}}\neq\alpha_{\mathrm{II}}$, $\beta_{\mathrm{I}}\neq\beta_{\mathrm{II}}$, $\alpha_{\mathrm{I}}\beta_{\mathrm{II}}\neq\alpha_{\mathrm{II}}\beta_{\mathrm{I}}$, sans quoi on retomberait sur les cas particuliers du n. 5.

Les sphères (ou sphères-points) M, Q, P satisfont alors chacune à une équation de Laplace *tronquée* (sans terme en z) de la forme

$$z_{uv}+az_u+bz_v=0. \tag{12}$$

Nous n'insistons pas sur les relations entre les coefficients des 3 équations pour M, Q, P, ni les conditions de compatibilité entre a_{I}, a_{II}, β_{I}, β_{II}.

Les caractéristiques de ces équations sont les lignes de courbure des surfaces (M) et (P) et aussi les lignes principales de la congruence des sphères Q, les sphères principales de courbure normale de (M), p. ex., étant

$$\mathrm{K_I}=\mathrm{Q}+a_{\mathrm{I}}\mathrm{M} \qquad \mathrm{K_{II}}=\mathrm{Q}+a_{\mathrm{II}}\mathrm{M}.$$

La nature de la correspondance entre les surfaces (M) et (P) est donc établie; le caractère focal du système cyclique apparaît aussi, les sphères focales étant Q_u et Q_v.

8. - Cherchons les congruences (C) telles que les cercles infiniment voisins soient orthogonaux à une même sphère A; d'après les résultats du n. 4, C étant un cercle dérivé (unitaire, ponctuel, ou cyclique) on peut poser

$$C\equiv[\mathrm{S}_x\mathrm{S}_y] \qquad \mathrm{S}=\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{M}} \qquad \mathrm{S}^2=\frac{1}{0} \tag{13}$$

et l'on doit exprimer

$$C/\mathrm{A}=0 \qquad C_x/\mathrm{A}=0 \qquad C_y/\mathrm{A}=0; \tag{14}$$

or

$$C_x\equiv[\mathrm{S}_{x^2}\mathrm{S}_y+\mathrm{S}_x\mathrm{S}_{xy}] \qquad C_y\equiv[\mathrm{S}_{xy}\mathrm{S}_y+\mathrm{S}_x\mathrm{S}_{y^2}]$$

d'où les conditions successives

$$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{S}_x/\mathrm{A}=\mathrm{S}_y/\mathrm{A}=0\\ \mathrm{S}_{x^2}/\mathrm{A}=\mathrm{S}_{xy}/\mathrm{A}=0\\ \mathrm{S}_{xy}/\mathrm{A}=\mathrm{S}_{y^2}/\mathrm{A}=0.\end{array}\right. \tag{15}$$

Les sphères S_x, S_y, S_{x^2}, S_{xy}, S_{y^2} sont orthogonales à la même sphère A, d'où

$$[S_xS_yS_{x^2}S_{xy}S_{y^2}]=0.$$

Autrement dit, S satisfait à une équation de Laplace *tronquée*; écartons le cas particulier, sans intérêt ici, d'une équation parabolique: on revient alors par un changement de variables à la forme (12), et les cercles C forment un système cyclique [1]. La réciproque s'ensuit aussitôt pour ce cas, donc:

---

[1] La forme (13) ramène aussi au problème précédent, donc en général aux systèmes cycliques, la recherche des congruences focales de cercles dérivés, pour lesquelles on peut annuler $[dC\cdot dC]$.

Dans un système cyclique, les cercles infiniment voisins (au 1er ordre), sont orthogonaux à une même sphère.

Cette sphère A peut jouer le rôle *d'absolu* mobile (en général) suivant la méthode de T. TAKASU (1).

9. - Les conditions (14) peuvent s'écrire

$$C/\mathrm{A}=0 \qquad C/\mathrm{A}_x=0 \qquad C/\mathrm{A}_y=0 \tag{16}$$

ou

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{S}_x \\ \mathrm{S}_y \end{matrix}\right| \begin{matrix} \mathrm{A} \\ \mathrm{A}_x=0, \\ \mathrm{A}_y \end{matrix} \tag{17}$$

donc, pour les systèmes cycliques, le cercle C est orthogonal aux sphères A, A_x, A_y, ou orthogonal à la sphère A et en bi-involution avec son cercle dérivé $[\mathrm{A}_x\mathrm{A}_y]$, A pouvant être pris de norme constante.

Les sphères A et dA restant orthogonales au cercle C, l'équation (10) montre que

$$\mathrm{A}\equiv m\mathrm{M}+q\mathrm{Q}+p\mathrm{P} \qquad d\mathrm{A}\equiv dm\cdot\mathrm{M}+dq\cdot\mathrm{Q}+dp\cdot\mathrm{P}. \tag{18}$$

Pour les cercles d'un système cyclique, d'après

$$C\equiv[\mathrm{S}_x\mathrm{S}_y] \qquad \Gamma\equiv[\mathrm{AA}_x\mathrm{A}_y]$$

le cercle C a pour foyers les points de contact F et G, avec son enveloppe, de la sphère A d'une congruence appropriée: cette génération indiquée par Ribaucour, ne donne d'ailleurs C réel qu'avec A imaginaire.

En fait, deux points F et G, sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères A, se correspondent par cercles $[\mathrm{A}_x\mathrm{A}_y]$ orthogonaux à ces deux nappes si F, G, F_x, G_x, F_y, G_y sont orthogonaux à A: ceci correspond entre ces 6 éléments à 2 relations linéaires distinctes.

Le système cyclique est alors celui des cercles $C\equiv[\mathrm{FG}]$.

Signalons, au point de vue conforme, que divers auteurs (2) ont étudié, sur une surface (M), les réseaux cerclés de courbes (Zyklische Kurvennetze) dont les cercles osculateurs sont, en chaque point M, cosphériques à un cercle normal à la surface en ce point: les cercles des systèmes cycliques déterminent une catégorie particulière de ces réseaux, rentrant déjà dans la classe (n. 4, B) des réseaux de courbes géodésiques conformes.

---

(1) En particulier: *Differentialkugelgeometrie*, Tôkoku Sc. Rep., 17 (1928).

(2) W. BLASCHKE, J. RADON: *Über konforme Geometrie*, Abh. Hamb., 4, 5 (1925-1926). Exposé de T. TAKASU (loc. cit.).

Le point de vue euclidien.

10. - Le procédé d'étude le plus simple des propriétés euclidiennes des systèmes cycliques est sans doute une particularisation du point de vue conforme. Nous opérerons directement en choisissant en tout point d'une surface (m) un repère euclidien ma_1a_2n, $[mna_1]$ étant le plan du cercle C orthogonal à la surface en m; le point courant p de ce cercle, de rayon ϱ, est donné par

$$p=m+2\varrho \sin\theta\cdot u \qquad u=\cos\theta\cdot n+\sin\theta\cdot a_1$$

et en posant $\operatorname{tg}\theta=t$, et exprimant que dp est normal au cercle, on obtient l'équation connue, remplaçant la 2e équation (3)

$$\frac{dt}{t}+\frac{d\varrho}{\varrho}+\frac{\tilde{\omega}_1}{\varrho}-t\tilde{\omega}_{13}=0 \tag{19}$$

$$\tilde{\omega}_1=dm\times a_1 \qquad \tilde{\omega}_{13}=-dn\times a_1 \qquad \text{(produits intérieurs).}$$

Pour les systèmes cycliques, les conditions d'intégrabilité de (19), donnant ∞^1 intégrales t, sont

$$\left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\varrho}\right)'=0 \qquad \left(\frac{\tilde{\omega}_{13}}{\varrho}\right)'=\left[\frac{\tilde{\omega}_1}{\varrho}\cdot\frac{\tilde{\omega}_{13}}{\varrho}\right] \tag{20}$$

système classique, analogue à (5). Nous ne revenons pas sur la détermination de t; quant au rayon $R=\varrho t$ d'une sphère Q enveloppant deux surfaces (m), (p), en le substituant à t dans (19), on vérifie que son inverse satisfait à une équation de Laplace tronquée, celle même dont Q est solution. L'emploi des formules d'O. RODRIGUES, comme l'étude euclidienne des surfaces, revient à partir d'un système cyclique particulier, la congruence des normales [mn].

11. - Nous répresentons tout système cyclique sur la surface (m) par le champ de vecteurs $\frac{a_1}{\varrho}$; soient g_1, g_2; k_1, k_2; h, $-h$ les courbures géodésiques, courbures normales et torsions normales des lignes du champ et des lignes de niveau orthogonales, K la courbure totale de la surface. Avec les notations

$$dm=\tilde{\omega}_1a_1+\tilde{\omega}_2a_2 \qquad d\Phi=\tilde{\omega}_1\Phi_1+\tilde{\omega}_2\Phi_2$$

le système (20) donne

$$\begin{cases} g_1=-(\log\varrho)_2 \\ g_1k_2-g_2h=(\log\varrho)_1h-(\log\varrho)_2k_1+\frac{1}{\varrho}h \end{cases} \tag{21}$$

ce qui, *pour* $h\neq 0$, peut s'écrire

$$\begin{cases} (\log\varrho)_2=-g_1 \\ (\log\varrho)_1+\frac{1}{\varrho}=-g_2+g_1\frac{k_2-k_1}{h}. \end{cases} \tag{22}$$

Or
$$\frac{k_2-k_1}{h}=2\operatorname{cotg}2\varphi=\operatorname{cotg}\varphi-\operatorname{tg}\varphi$$

φ étant l'angle de a_1 avec la 1e ligne de courbure; introduisons donc les tangentes unitaires a_I et a_{II} aux lignes de courbure, et par l'intermédiaire du verseur droit I, les vecteurs

$$a_1=e^{I\varphi}a_I,\ a_2=Ia_1 \qquad b_1=e^{-I\varphi}a_I,\ b_2=Ib_1$$
$$g=-g_2a_1+g_1a_2=\widehat{g}+I\nabla\varphi$$

g étant le *géodèse* (vecteur de courbure géodésique) des lignes du champ et des lignes de niveau, $\widehat{g}$ celui des lignes de courbure, ∇ le symbole des gradients superficiels; avec

(23)
$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\varrho}=d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{a_1}{\varrho}=\nabla\alpha$$
$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\varrho}+\frac{d\varrho}{\varrho}=d\beta \qquad \nabla\alpha+\nabla\log\varrho=\nabla\alpha-\frac{1}{2}\nabla\log\Delta\alpha=\nabla\beta$$

les équations (22) sont équivalentes à

$$\begin{cases}(\nabla\beta+g)\times a_2=0\\(\nabla\beta-g)\times b_2=0\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}\nabla\beta\times a_{II}\cos\varphi=g\times a_I\sin\varphi\\\nabla\beta\times a_I\sin\varphi=g\times a_{II}\cos\varphi\end{cases}$$

mais (1)

(24)
$$g=-\Omega\alpha\cdot\nabla\alpha+\frac{1}{2}\nabla\log\Delta\alpha \qquad \left(\Omega\alpha=\frac{\Delta\alpha}{\frac{2}{\Delta\alpha}}\right)$$
$$\nabla\beta+g=(1-\Omega\alpha)\nabla\alpha \qquad \nabla\beta-g=(1+\Omega\alpha)\nabla\alpha-\nabla\log\Delta\alpha;$$

en posant, pour le tenseur des lignes de courbure

$$g_0^{(2)}=a_Ia_{II}+a_{II}a_I \qquad b_2=g_0^{(2)}\times a_I$$

α est déterminé par l'équation aux dérivées partielles du 2e ordre, (du 1er ordre en $\nabla\alpha=\frac{a_1}{\varrho}$)

(25)
$$g_0^{(2)}\overset{3}{\times}\{(1+\Omega\alpha)(\nabla\alpha)^2-\nabla\alpha\cdot\nabla\log\Delta\alpha\}=0.$$

12. - *a*) Dans le cas $h\neq 0$, le système (22) suffit pour l'étude des systèmes cycliques formés de cercles C de rayon ϱ_0 constant; on a

(26)
$$g_1=0 \qquad g_2=-\frac{1}{\varrho_0} \qquad K=-g_2^2=-\frac{1}{\varrho_0^2}$$

les surfaces (m) et (p) sont à courbure totale constante négative $-\frac{1}{\varrho_0^2}$; les lignes du champ sont géodésiques et isothermes.

Le point qui décrit l'enveloppe du plan normal $[mna_1]$ est en général

$$c=m+\frac{g_1n+ha_1}{g_1k_2-g_2h}$$

---

(1) *Thèse*, p. 81.

et cette expression se réduit ici à

$$c = m - \frac{a_1}{g_2} = m + \varrho_0 a_1 \tag{27}$$

donc ce point est le centre de C; ce cas a été étudié par RIBAUCOUR, BIANCHI, etc. (1).

b) Pour $h=0$, les lignes du champ étant un système de lignes de courbure, il faut revenir aux équations (21); pour $k_1 \neq k_2$, on a

$$g_1 = 0 \quad \varrho = F(\alpha) \quad k_1 = G(\alpha) \quad (F, G, \text{fonctions arbitraires}). \tag{28}$$

Les lignes du champ, géodésiques, sont planes et égales; leurs plans $[mna_1]$ enveloppent la développable décrite par les axes $\left[\left(m + \frac{n}{k_2}\right)\left(m - \frac{a_1}{g_2}\right)\right]$ des cercles de courbure des lignes de niveau. Les surfaces (m) et (p) sont des surfaces moulures générales de Monge; on peut encore dans ce cas obtenir un système cyclique de cercles de rayon constant.

c) Le cas $g_1=0$ est épuisé, dans le cas général et $h \neq 0$, par les solutions

$$\begin{cases} g_1 = 0 \qquad \varrho = F(\alpha) \qquad g_2 = -\dfrac{1}{\varrho} - (\log \varrho)_1 = \Phi(\alpha) \\ \qquad\qquad K = -g_{21} - g_2^2 = \Psi(\alpha). \end{cases} \tag{29}$$

Le long des lignes du champ, géodésiques et isothermes, la courbure totale est constante; les surfaces (m) et (p) sont à ds^2 de révolution; on a encore

$$c = m - \frac{a_1}{g_2} = m + \varrho a_1 - \frac{\varrho \varrho_1}{1 + \varrho_1} a_1$$

mais l'enveloppe de $[mna_1]$ n'est plus décrite par le centre du cercle C.

---

(1) G. DARBOUX: *Théorie des surfaces*, t. III.

P. ZERVOS (Athenai - Grecia)

SUR QUELQUES COURBES INTÉGRALES

1. - Soit

$$F(x, y, z, p, q)=0 \tag{1}$$

une équation aux dérivées partielles du premier ordre et

$$f\left(x, y, z, \frac{Y-y}{X-x}, \frac{Z-z}{X-x}\right)=0 \tag{2}$$

le cône (T) relatif (voir GOURSAT: *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du première ordre.* 2e édition, p. 139).

On peut, en général, représenter le cône (T) par le système d'équations suivant:

$$\begin{gathered} V(x, y, z, a, b)=0 \\ \sum \frac{\partial V}{\partial x}(X-x)=0 \\ \sum \frac{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)}{\partial x}(X-x)=0 \end{gathered} \tag{3}$$

où $V(x, y, z, a, b)=0$ donne l'intégrale complète de l'équation (1).

L'intérêt de cette représentation consiste en ce qu'on utilise directement l'intégrale complète, et on peut déduire aisement des propriétés diverses des courbes intégrales relativement au cône (T).

Soit, par exemple, l'équation

$$(1+p^2+q^2)z^2-K^2=0: \tag{1'}$$

on a

$$V=(x-a)^2+(y-b)^2+z^2-K^2.$$

L'équation (1') peut être considérée comme une équation *adjointe* de l'équation de Monge

$$(K^2-z^2)\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)=z^2\frac{dz^2}{dx^2}$$

et cône (T) est le cône

$$(K^2-z^2)\left[1+\left(\frac{Y-y}{X-x}\right)^2\right]=z^2\left(\frac{Z-z}{X-x}\right)^2. \tag{2'}$$

L'équation (2') résulte de l'élimination des a et b entre les équations correspondantes aux équations (3).

2. - La proposition précédente est un cas particulier d'une autre plus générale.

Soit dans l'espace à $n+1$ dimensions une équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, p_1, p_2, \ldots, p_n)=0, \tag{4}$$

et soit

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \frac{dx_2}{dx_1}, \ldots, \frac{dx_{n+1}}{dx_1}\right)=0 \tag{5}$$

l'équation de Monge dont l'équation (4) *est l'équation adjointe* (1).

Alors l'équation

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, \frac{X_2-x_2}{X_1-x_1}, \ldots, \frac{X_{n+1}-x_{n+1}}{X_1-x_1}\right)=0 \tag{6}$$

donne la variété conique analogue au cône (T) du cas précédent. On voit d'ici immédiatement qu'on peut représenter la variété (6) par le système d'équations

$$\begin{cases} V(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, a_1, a_2, \ldots, a_n)=0 \\ \sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda}(X_\lambda-x_\lambda)=0 & (\lambda=1, 2, \ldots, n+1) \\ \sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\frac{\partial V}{\partial a_n}}\right)(X_\lambda-x_\lambda)=0 & (i=1, 2, \ldots, n-1) \end{cases} \tag{7}$$

où V est l'intégrale complète de l'équation (4) et en effet, nous pouvons utiliser les équations que j'ai données pour l'équation de Monge (5); à savoir, nous pouvons remarquer que l'équation (5) resulte par l'élimination des a entre les équations

$$\begin{cases} V=0 \\ \sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} dx_\lambda=0 \\ \sum \frac{\partial}{\partial x_\lambda}\left(\frac{\frac{\partial V}{\partial a_i}}{\frac{\partial V}{\partial a_n}}\right) dx_\lambda=0. \end{cases} \tag{8}$$

3. - Les équations (8) donnent aussi d'autres propriétés géométriques des courbes intégrales. On prend ainsi pour le cas général une propriété analogue à la propriété bien connue pour le cas de trois variables d'après laquelle: « Toute courbe intégrale a un contact du second ordre avec les surfaces intégrales qui lui sont tangentes ». Je remarque pour cela qu'on peut déduire des équations (8) les équations

$$V=0, \qquad \frac{\Delta V}{\Delta a}=0, \qquad \frac{\Delta^2 V}{\Delta a^2}=0$$

d'où résulte l'équation

$$\sum\sum \frac{\partial^2 V}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} dx_\lambda dx_\mu + \sum \frac{\partial V}{\partial x_\lambda} d^2 x_\lambda=0.$$

---

(1) Voir C. R.: *Sur le problème de Monge*, 1905.

4. - On pourrait aussi arriver au même résultat en partant des équations différentielles

$$\frac{dx_i}{P_i}=\frac{dx_{n+1}}{\sum P_i p_i}=du \qquad (i=1, 2,\ldots, n) \tag{9}$$

et en suivant une marche analogue à celle qu'on suit ainsi pour le cas de trois variables (E. GOURSAT, loc. cit., p. 216) et, en effet, soient

$$x_{n+1}=\varphi(x_1, x_2,\ldots, x_n) \tag{10}$$

une surface intégrale de l'équation (1), M un point de cette surface et I une courbe intégrale passant par M et tangente de la caractéristique située sur la surface (10) et passant par M. Désignons par d^2x_1, d^2x_2,..., les différentielles secondes des x_1, x_2,..., relatives à un déplacement sur la courbe I. Cette courbe satisfait au système d'équations différentielles (9) où les p désignent des fonctions de x_1, x_2,..., x_{n+1} définies par n équations $F_i(x_1, x_2, x_{n+1}; p_1, p_2, p_n)=0$ dont une est l'équation (4). Par conséquent, on aura:

$$P_i du=dx_i, \quad \sum_\lambda X_\lambda dx_\lambda+\sum_i P_i dp_i=0 \qquad \begin{matrix}(\lambda=1, 2,\ldots, n+1)\\ (i=1, 2,\ldots, n)\end{matrix} \tag{11}$$

$$dx_{n+1}=\sum p_i dx_i \tag{12}$$

$$d^2x_{n+1}-\sum p_i d^2x_i=\sum dp_i dx_i=du\sum P_i dp_i=-du\sum X_\lambda dx_\lambda. \tag{13}$$

Prenons d'autre part l'équation (10) de la surface intégrale considérée: si on pose $p_{ik}=\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_i \partial x_k}$ on tire de l'équation (4) en dérivant par rapport à $x_1, x_2,\ldots, x_n$ les équations

$$X_\mu+p_\mu X_{n+1}+\sum P_i p_{i\mu}=0 \qquad (\mu=1, 2,\ldots, n)$$

d'où en vertu des relations (9) et d'après nos hypothèses on déduit

$$(X_\mu+p_\mu X_{n+1})du+\sum p_{i\mu}dx_i=0.$$

En multipliant par dx_μ et en ajoutant les équations qui résultent pour $\mu=1, 2,\ldots, n$ nous prenons

$$du\sum X_\mu dx_\mu+du X_{n+1}\sum p_\mu dx_\mu+\sum\sum p_{i\mu}dx_i dx_\mu=0$$

ou encore, en tenant compte des équations (12), il vient

$$du\sum X_\lambda dx_\lambda+\sum\sum p_{i\mu}dx_i dx_\mu=0$$

d'où la relation (13) devient dans notre recherche

$$d^2x_{n+1}=\sum\sum p_{i\mu}dx_i dx_\mu+\sum p_i d^2x_i. \tag{14}$$

Exprimons maintenant par les $x_i(t)$ les fonctions de t qui donnent les coordonnées des points de la courbe I et considérons l'expression

$$\sigma(t)=x_{n+1}(t)-\varphi[x_1(t), x_2(t),\ldots, x_n(t)].$$

Soient $x_\lambda(t_0)$ les coordonnées du point M qui est aussi un point de la surface (10). On aura à cause des relations (12) et (14)

$$\sigma(t_0)=0, \qquad [\sigma'(t)]_{t=t_0}=0, \qquad [\sigma''(t)]_{t=t_0}=0,$$

ce que nous exprimons en disant que la courbe intégrale I et la surface (E) ont un contact du second ordre.

L. CRELIER (Bern - Svizzera)

SUR QUELQUES FAMILLES DE COURBES CONSIDÉRÉES AU POINT DE VUE CINÉMATIQUE: ASTROÏDES ET CORNOÏDES

I.

Si nous considérons le système formé par un segment rectiligne de longueur donnée, dont les extrémités glissent sur deux axes rectilignes quelconques, nous savons que « *la roulante* » est un cercle de rayon $\frac{1}{2}R$ et « *la base* » un autre de rayon R, la roulante roulant à l'intérieur de la base. Nous savons en outre que tout point de la roulante décrit un diamètre de la base et tout autre point du plan de la roulante décrit une ellipse. Enfin, « *les enveloppes* » des diamètres de la roulante sont des astroïdes régulières, celles des cordes parallèles à un diamètre sont des astroïdes obliques, celles des tangentes sont des demi-croix de Malte et celles des autres droites parallèles à un diamètre sont des parastroïdes avec ou sans rebroussement selon leur distance du diamètre. Toutes sont des développantes d'astroïdes.

J'ai traité cette classification dans mon livre: L. CRELIER, *Systèmes cinématiques.* Collection « Scientia » G. V. Paris (p. 82).

Tableau des enveloppes.

Équation des développantes d'astroïdes:

$$[3(x^2+y^2-R^2)-4d^2]^3+[27Rxy-9d(x^2+y^2)-18R^2d+8d^3]^2=0$$

ou

$$[3(x^2+y^2-R^2)-4d^2]^3+\left[\frac{27}{2}R(x^2-y^2)-9d(x^2+y^2-18R^2d+8d^3\right]^2=0$$

$d=0$	donne:	Astroïde régulière
$\lvert d\rvert<\frac{1}{2}R$	»	Astroïde oblique
$d=\pm{}^1/_2\,R$	»	demi-croix de Malte
${}^1/_2\,R<\lvert d\rvert<\frac{3}{2}R$	»	Parastroïde avec deux points doubles
$d=\pm\frac{3}{2}R$	»	Parastroïde limite
$\lvert d\rvert>\frac{3}{2}R$	»	Parastroïde ovale

Chaque diamètre de la roulante constitue un système mobile formé d'un segment de grandeur fixe, dont les extrémités glissent sur deux axes rectangulaires. Pour chaque position de ce diamètre nous pouvons projeter le C. i. r. correspondant sur lui, nous avons le point de l'astroïde enveloppe et nous pouvons encore prendre le point symétrique du C. i. r. par rapport au diamètre. Ce point symétrique appartient à une rosace

$$\varrho = -R\cos 2\omega \quad \text{ou} \quad \varrho = R\sin 2\omega,$$

suivant les axes.

II.

Ce diamètre mobile et la perpendiculaire abaissée de l'origine constituent un nouveau système cinématique: un angle droit mobile dont un côté s'appuie sur l'origine et l'autre côté sur une astroïde régulière, ou: un angle droit mobile, dont un côté s'appuie sur l'origine, tandis que le sommet décrit la rosace.

La *base* de ce nouveau système est une rosace; la *roulante* est une ellipse:

$$R^2x^2 + 4R^2y^2 - 4R^4 = 0$$

ou

$$x^2 + 4y^2 - 4R^2 = 0$$

en prenant comme origine le sommet de l'angle droit mobile Q. Ce nouveau système a été étudié par un de mes élèves dans sa thèse de doctorat: Mr. E. ANLIKER: *Beitrag zur kinematischen Erzeugung der Astroiden und verwandter Kurven.* Inauguraldissertation, Bern.

Quant l'enveloppe du 2e côté de l'angle droit est un astroïde oblique ou une parastroïde, la *base* est toujours la même rosace, mais la *roulante* a une autre équation:

$$R^2x^2 + 4R^2y^2 + 8R^2dy - 4R^2\left(\frac{R^2}{4} - d^2\right) = 0$$

ou

$$x^2 + y^2 + 8dy - (R^2 - 4d^2) = 0.$$

La courbe est une ellipse et d est la distance de l'astroïde régulière à l'astroïde oblique. Les demis axes sont $2R$ et R et le centre est le sommet de l'angle droit sur la rosace $\varrho = \frac{1}{2}R\sin 2\omega$.

Donc l'ellipse est toujours la même et le système devient indépendant de l'astroïde enveloppe du 2e côté de l'angle droit.

Les *trajectoires* des points du nouveau plan mobile, pris sur la normale du diamètre mobile, par l'origine, sont des conchoïdes de la rosace $\varrho = \frac{1}{2}R\sin 2\omega$; leur équation est

$$(x^2 + y^2)^3 = [Rxy + d(x^2 + y^2)]^2$$

d étant le même paramètre que dans l'ellipse précédente, ou aussi la distance du point décrivant à la rosace.

Tableau des conchoïdes de la rosace.

$d=0$	: la rosace elle même
$\|d\|<R$	: une rosace irrégulière avec 2 branches plus petites.
$d=\pm R$	: le bifolium ou biovale de Münger
$\|d\|>R$	: un bifolium réformé sans noeud.

Si les points sont sur le diamètre mobile, c'est-à-dire sur le 2e côté de l'angle droit, les trajectoires sont des cornoïdes, dont l'équation générale est de la forme:

$$[R(x^2-y^2)-4l(x^2+y^2)+16l^3]^2=[R^2+4l^2-(x^2+y^2)]\cdot[8l^2-(x^2+y^2)]^2$$

ou

$$4[Rxy-2l(x^2+y^2)+8l^3]^2=[R^2+4l^2-(x^2+y^2)]\cdot[8l^2-(x^2+y^2)]^2 \quad (1)$$

$l=$ distance du point décrivant à la rosace.

Tableau des cornoïdes.

$l=0$	$(x^2+y^2)^3=4R^2x^2y^2$: la rosace elle même
$\|l\|<{}^1/_2 R$	courbe intermédiaire
$l=\pm\frac{1}{2}R$	la cornoïde avec 6 points doubles
${}^1/_2 R<\|l\|<R$	courbe intermédiaire
$l=\pm R$	la cornoïde avec 2 boucles simples
$R\|l\|<2R$	courbe intermédiaire
$l=\pm 2R$	la cornoïde avec 2 rebroussements
$\|l\|>2R$	cornoïde sans rebroussements.

Les enveloppes des droites parallèles au premier côté d'un angle droit sont des cercles concentriques autour de l'origine et les enveloppes des droites parallèles au 2e côté sont des astroïdes et des développantes d'astroïdes.

Pour chaque position de la roulante nous avons un C. i. r. déterminé et un point symétrique de celui-ci par rapport au 2e côté de l'angle droit mobile. Le lieu des points symétriques du C. i. r. est, quand le 2e côté de l'angle droit enveloppe une astroïde régulière:

$$x^2+y^2=R^2$$

soit un cercle; puis:

$$4(R-d)^2x^2+4(R+d)^2y^2=16(R^2-d^2)^2$$

c'est-à-dire une ellipse quand le 2e côté enveloppe une développante d'astroïde de paramètre d.

---

(1) V. CRELIER, p. 85.

III.

Dans le N. I, nous avons recherché le lieu des points symétriques du C. i. r. par rapport aux tangentes d'une astroïde régulière. Nous pouvons résoudre le même problème par rapport aux tangentes d'une développante d'astroïde. Nous trouvons une cornoïde générale (CRELIER, p. 85; n. 80 et 81):

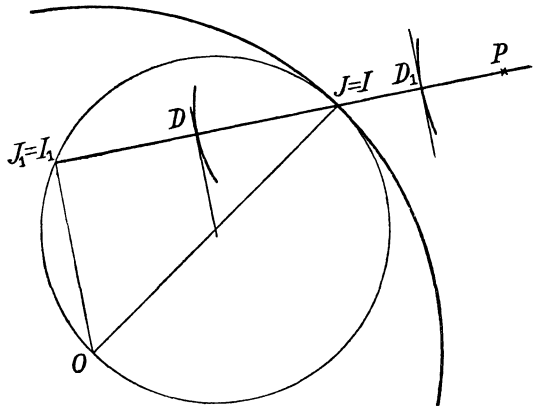


Fig. 1.

$$4[Rxy+8l^3-2l(x^2+y^2)]^2=$$
$$=[R^2+4l^2-(x^2+y^2)]\cdot[8l^2-$$
$$-(x^2+y^2)]^2$$

ou

$$[R(x^2-y^2)-4l(x^2+y^2)+16l^3]^2=$$
$$=[R^2+4l^2-(x^2+y^2)]\cdot$$
$$\cdot[8l^2-(x^2+y^2)]^2.$$

Nous avons également un tableau des cornoïdes possibles suivant la valeur de l.

l signifie ici la distance d'un point de la développante d'astroïde au point correspondant de l'astroïde régulière. C'est le même paramètre que d dans les N. I et II.

Tableau des cornoïdes.

	Développante d'astroïde	*Courbe symétrique*
1.	$l=0$ Astroïde régulière	Rosace
2.	$\lvert l\rvert<\frac{1}{2}R$ » oblique	Cornoïde intermédiaire
3.	$l=\pm\frac{1}{2}R$ Croix de Malte	» avec 6 points doubles
4.	$^1/_2R<\lvert l\rvert<R$ Parastroïde	» intermédiaire
5.	$l=\pm R$ »	» avec 2 boucles simples
6.	$R<\lvert l\rvert<2R$ » ovale	» intermédiaire
7.	$l=2R$ » »	» avec 2 rebroussements
8.	$\lvert l\rvert>2R$ » »	» sans rebroussements

D'autre part au N. II nous avons trouvé les cornoïdes comme trajectoires des points du 2e côté de l'angle droit. Ces cornoïdes se sont présentées comme des orthoconchoïdes des rosaces; en partant de cette remarque il est possible d'établir que ces courbes sont aussi des symétriques au sens de la remarque précédente.

$J_1P \cdot = l =$ constante
Lieu des $J_1 =$ rosace par rapport à J
Lieu des $P =$ orthoconchoïdes de la rosace
$J \cdot D_1 = D_1P$
$J_1D = DJ$
$DD_1 = DJ + JD_1 = \frac{1}{2} J_1P = \frac{1}{2} l =$ constante

Lieu de $D_1 =$ développante de l'astroïde régulière décrit par D avec la paramètre $\frac{l}{2}$. (Fig. 1).

P est symétrique de J par rapport à la tangente en D, de la développante d'astroïde décrite par D_1. En d'autres termes: *L'orthoconchoïde ou la cornoïde est aussi la symétrique des C. i. r. du premier système par rapport à une développante d'astroïde.*

G. DUMAS (Lausanne - Svizzera)

SUR LES SINGULARITÉS DES SURFACES

1. - Deux axes dans le plan (1), trois, dans l'espace, déterminent, respectivement, dans le plan ou dans l'espace, un système de points à cotes entières, des points nodaux. Des droites, contenant respectivement une infinité de points nodaux, des nodales, appartiennent à ces systèmes.

Dans un système nodal plan, deux nodales issues d'un même point nodal, définissent une substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} x=\xi^{p}\eta^{p'} \\ y=\xi^{q}\eta^{q'}, \end{cases}$$

que l'on obtient après avoir écrit les équations des deux nodales.

Le sommet étant à l'origine et α, β désignant les coordonnées des points du système nodal, les équations des nodales, pour la substitution (1), seraient

$$(2) \qquad \begin{cases} p\alpha+q\beta=0 \\ p'\alpha+q'\beta=0. \end{cases}$$

Dans chacune d'elles, les coefficients p et q sont des entiers, sans diviseur commun et de signe bien déterminé. Les deux nodales forment quatre angles. La substitution est liée plus spécialement à l'un deux. A l'intérieur de celui-ci, les premiers membres de chaque égalité (2) doivent être positifs.

Dans l'espace, un angle trièdre nodal, c'est à dire dont les arêtes sont des nodales se coupant en un point nodal, le sommet, définit, d'une manière analogue et uniformément, une substitution :

$$(3) \qquad \begin{cases} x=\xi^{p}\eta^{p'}\zeta^{p''} \\ y=\xi^{q}\eta^{q'}\zeta^{q''} \\ z=\xi^{r}\eta^{r'}\zeta^{r''} \end{cases}$$

Les exposants, aux seconds membres de (3), sont entiers. Les substitutions (1) et (3) sont *unimodulaires* et, par conséquent, réversibles ou de Cremona, lorsque dans celles-ci le déterminant des exposants est égal à ± 1.

---

(1) Voir à propos de l'ensemble de l'exposé: GUSTAVE DUMAS. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 152 et 154.

2. - Soit maintenant

$$f(x, y)=0, \tag{4}$$

l'équation d'une courbe algébrique. On sait que dans un système nodal donné, on peut faire correspondre au polynôme entier du premier membre un polygone de Newton déterminé. On le prendra *fermé*, puis par le moyen d'une substitution unimodulaire (1), relative au système nodal dans lequel est construit le polygone et convenablement adaptée à l'un des côtés de celui-ci, l'on sera conduit, le plus souvent d'une manière immédiate, non pas aux développements classiques de Puiseux relatifs au côté — développements qui peuvent s'obtenir aussi par une substitution (1), en général, non-unimodulaire — mais à un ou plusieurs *éléments de Weierstrass* [1] de la fonction algébrique y de x définie par (4). L'une au moins, des coordonnées x et y du point de (4) correspondant à cet ou à ces éléments est alors nulle ou infinie. Cela dépend du côté sur le polygone fermé.

Pour les éléments de Weierstrass qui correspondent à des points de (4) dont les coordonnées x et y sont, chacune, finie et différente de zéro, une translation préalable au point doit, en outre, avoir lieu.

Sans insister sur les cas où plus d'une substitution en certains points pourrait être nécessaire, on voit que, de la sorte, on peut parvenir au nombre voulu et fini d'éléments de Weierstrass, suffisant à la représentation totale de la courbe.

3. - Soit

$$f(x, y, z)=0, \tag{5}$$

l'équation d'une surface algébrique. En correspondance avec le polynôme entier au premier membre de (5) et relativement à un système d'axes définissant un système nodal, on construit un certain *polyèdre convexe fermé*, complètement déterminé d'ailleurs, et dont seules les faces de la partie convexe du côté de l'origine sont à retenir. Seules, en effet, ces faces sont en rapport avec la singularité que la surface peut présenter en $x=y=z=0$,

Soit π, l'une de ces faces et γ, le polygone convexe qui la limite. Une substitution unimodulaire (3) adaptée à π et relative à l'un des sommets de γ, transforme alors l'équation (5) en une autre

$$F(\xi, \eta, \zeta)=0, \tag{6}$$

où F est un polynôme entier en ξ, η, ζ de la forme:

$$F=\varphi(\eta, \zeta)+\xi\psi(\xi, \eta, \zeta),$$

$\varphi(\eta, \zeta)$ est le polynôme entier que constituent, après la transformation, les

---

[1] *Oeuvres de Weierstrass*, t. IV, Chap. I.

termes de $f(x, y, z)$ dont les points représentatifs se trouvent précisément dans π; $\psi(\xi, \eta, \zeta)$ est également un polynôme entier.

L'équation (6) représente ainsi une surface algébrique, dont la partie située le long de la courbe

$$\varphi(\eta, \zeta)=0, \quad \xi=0 \tag{7}$$

mais extérieure à celle-ci, correspond point par point et de manière univoque et réciproque, à une certaine portion de f, au voisinage de $x=y=z=0$.

Le problème est ainsi transformé; il s'agit, à présent, d'aboutir à un système de représentations paramétriques de la surface (6), tout le long de la courbe (7).

Prises dans leur ensemble, ces représentations conduisent alors pour la surface (5) à un ou plusieurs *éléments complets de Weierstrass*, ces termes désignant par généralisation, ce que, pour les surfaces, on peut faire correspondre aux éléments de Weierstrass pour les courbes (1).

Le problème de local qu'il était, s'est changé en un problème étendu.

4. - Si l'on se place, pour commencer, dans le cas de $\varphi(\eta, \zeta)$ polynôme entier irréductible ou, tout au moins, sans diviseur multiple, les représentations paramétriques de la surface (6) le long de la courbe (7), s'obtiennent, pour ainsi dire, de la même façon que les éléments de Weierstrass relatifs à la courbe algébrique, $\varphi=0$, envisagée pour elle seule.

Pour obtenir une représentation paramétrique de $F=0$, dans le voisinage d'un point quelconque de (7), pris dans le fini ou à l'infini, on utilise, en effet, une substitution spatiale telle que (3). Celle-ci a, toutefois, une structure particulière tenant au fait que le polyèdre de (6) n'est autre chose que celui de (5), rapporté aux arêtes du trièdre qui définit la substitution (3) préalablement introduite, tandis que γ se trouve être le polygone de Newton de $\varphi=0$.

Abstraction faite, le cas échéant, d'une translation non indiquée, on a, pour cette substitution :

$$\begin{cases} \xi=\xi_1\eta_1^{k}\zeta_1^{k'} \\ \eta=\ \eta_1^{l}\zeta_1^{l'} \\ \zeta=\ \eta_1^{m}\zeta_1^{m'} \end{cases} \tag{8}$$

les exposants étant certains entiers et la substitution unimodulaire.

---

(1) D'une manière plus précise, on a sur la surface, en correspondance avec un système complet de Weierstrass, une courbe nulle — courbe se réduisant à un point — et son voisinage. Un point singulier doit être regardé comme constitué par une superposition de courbes nulles en nombre fini et se rattachant aux diverses faces du polyèdre. Le polyèdre montre aussi que le voisinage d'un point singulier est, en général, d'un seul tenant; il donne également les lignes singulières issues, le cas échéant, du point singulier.

(Note ajoutée pendant la correction des épreuves; voir *Actes* de la Société helvétique des Sciences naturelles, St. Gall, 1930).

La forme de (8) montre qu'en correspondance avec toute transformation de F par (8), une transformation parallèle de $\varphi=0$ s'effectue simultanément. Et, comme on peut par cette transformation parallèle ou par une succession de ces transformations parallèles de $\varphi=0$, abstraction faite de translations, épuiser la singularité éventuelle de $\varphi=0$ au point considéré, il se trouve qu'en ce point même, la singularité éventuelle de F se trouvera, elle aussi, épuisée.

En se plaçant successivement aux différents points de $\varphi=0$, on parviendra de la sorte, à l'élément ou aux éléments complets de Weierstrass de la surface $f=0$, se rattachant à la courbe (7) ou, ce qui revient au même, à la face π du polyèdre.

5. - Mais, il peut arriver que φ admette des diviseurs multiples. Posons, pour fixer les idées,

$$\varphi(\eta, \zeta)=\theta(\eta, \zeta)\chi^h(\eta, \zeta),$$

les polynômes θ et χ étant irréductibles et distincts, et h un exposant entier supérieur à l'unité.

Pour les points de la courbe $\theta=0$, non situés sur la courbe $\chi=0$, aucune modification ne doit être apportée à ce qui précède.

Pour un point (a, b) de $\chi=0$, s'il est simple et dans le fini, l'on posera

$$\chi=u \tag{9}$$

et, après résolution de cette équation dans le voisinage de (a, b), on éliminera l'une des variables η ou ζ entre (6) et (9).

On procédera de la même maniere lorsque le point est singulier ou à l'infini, mais on introduira au préalable des transformations telles que (8) qui ramèneront au cas où l'on vient de se trouver avec (a, b).

On sera, de toute façon, conduit à une équation du type:

$$G(\xi, \eta, u)=0, \tag{10}$$

dont le premier membre sera une série entière en ξ, η, u, par exemple, sur laquelle il n'y aura qu'à recommencer les opérations effectuées sur le polynôme $f(x, y, z)$ dans (5).

On ne saurait, en poursuivant, tomber indéfinement sur des polynômes analogues à φ et dont les diviseurs ne cesseraient d'être multiples, si l'on suppose — cas où l'on peut toujours se placer — que le polynôme initial $f(x, y, z)$ n'admettent aucun diviseur multiple *dans le voisinage* de $x=y=z=0$.

6. - L'hypothèse de (5), surface algébrique, hypothèse en vertu de laquelle $f(x, y, z)$ dans (5) doit être regardé comme un polynôme entier, n'est pas essentielle. On aurait pu prendre, en ajoutant quelques remarques au sujet du polyèdre, pour $f(x, y, z)$, une série entière. C'est ce cas, d'ailleurs qui se présente avec le premier membre de (10).

Aucune restriction, d'autre part, n'est à faire au sujet de la position de la surface $f(x, y, z)=0$ relativement aux axes Ox, Oy, Oz.

Rien n'empêche que ceux-ci fassent partie de la surface, mais il ne paraît, à cause de cela, guère opportun de ne pas attribuer le même rôle à x, y et à z dans les démonstrations, en considérant, d'une manière exclusive, l'une de ces variables comme une fonction des deux autres.

Il y a, en outre, avantage à ne pas se borner aux surfaces réelles; il convient, au contraire, de voir, d'emblée et comme on l'a fait implicitement dans qui précède, des variables complexes dans x, y et z.

Dernier point. L'esquisse précédente, dans sa brièveté, a laissé forcément dans l'ombre beaucoup de questions essentielles: celles, entre autres, de l'holomorphie des représentations, de leur nombre limité, de l'épuisement de la singularité par l'introduction successive des diverses faces considérées du polyèdre.

Les lignes singulières ont été passées sous silence et l'on n'a pas attiré l'attention sur les différents types de surfaces auxquels on peut avoir affaire suivant la nature du polyèdre, en particulier dans les cas où celui-ci dégénère en un segment de droite ou en une simple face sans points représentatifs extérieurs à celle-ci.

On peut se demander enfin si, comme il le semble, les méthodes de ci-dessus ne sont pas applicables également, dans des espaces de dimensions en nombre supérieur à trois.

INDICE

COMUNICAZIONI

SEZIONE II-A

BRÜCKNER M. - Ueber die Anzahl $\psi(n)$ der allgemeinen Vielfläche. . Pag. 5

SNYDER V. - Involutorial space transformations contained multiply in a linear line complex . . . . . » 13

EMCH A. - Finite groups and their geometric representation . . . . » 23

FANO G. - Trasformazioni di contatto birazionali del piano . . . . » 35

BYDŽOVSKÝ B. - Remarque sur les groupes finis de transformations de Cremona . . . . . » 43

SCHAAKE G. - Le geometrie degli elementi lineari del piano, degli elementi piani dello spazio e degli elementi lineari dello spazio . . » 45

TORROJA A. - Sobre la correspondencia entre los puntos de un espacio y los grupos de puntos de otros varios . . . . . » 51

BARBARIN P. - Images euclidiennes des plans non euclidiens . . . » 61

SEVERI F. - Sulla condizione d'integrabilità pei differenziali esatti di 1ª specie appartenenti ad una superficie algebrica e sui differenziali semiesatti . . . . . » 69

† ROSATI C. - Sulle corrispondenze fra curve algebriche . . . . . » 79

ROSENBLATT A. - Varietà algebriche a tre e più dimensioni . . . . » 93

FANO G. - Sulle varietà algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli . . . . . » 115

ROSENBLATT A. - Sopra le varietà algebriche a tre dimensioni fra i cui caratteri intercedono certe disuguaglianze . . . . . » 123

SEGRE B. - Sui moduli delle curve algebriche . . . . . » 129

ZARISKI O. - Sopra il teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili . . . . . » 133

BRUSOTTI L. - Le curve gobbe algebriche reali come modelli nella topologia proiettiva dell'allacciamento . . . . . » 139

DELAUNAY B. N. - Ueber die reguläre Teilung des 4-dimensionalen Raumes . . . . . » 147

ALBANESE G. - La teoria della base e l'Analysis situs . . . . . » 157

NICOLADZÉ G. - Sur les systèmes continus de courbes et de surfaces. Pag. 171
DEAUX R. - Sur les faisceaux de complexes linéaires . . . . . » 177
DEAUX R. - Sulle quartiche gobbe . . . . . » 185
SISAM C. H. - On ruled three-dimensional varieties of order five . . » 193
JUEL C. - Beispiele von Elementarkurven und Elementarflächen . . » 195
ZUPANČIČ R. - Sur une décomposition des homographies . . . . . » 217
LABOCCETTA L. - Estensione dei metodi della geometria analitica alla rappresentazione dello spazio fisico . . . . . » 221

SEZIONE II-B

DE KERÉKJÁRTÓ B. - Note on the general translation theorem of Brouwer . . . . . Pag. 235
KURATOWSKI C. - Un système d'axiomes pour la topologie de la surface de la sphère . . . . . » 239
CARTAN E. - Sur les espaces clos admettant un groupe transitif clos fini et continu . . . . . » 243
CARTAN E. - Sur la représentation géométrique des systèmes matériels non holonomes . . . . . » 253
BERWALD L. - Parallelübertragung in allgemeinen Räumen . . . . » 263
BALDUS R. - Zur Axiomatik der Geometrie II. Vereinfachungen des Archimedischen und des Cantorschen Axioms . . . . . » 271
BOMPIANI E. - Teoria della corrispondenza fra due superficie . . . » 277
BLASCHKE W. - Questioni topologiche di geometria differenziale. . . » 285
LUSTERNIK L. - Sur quelques méthodes topologiques dans la géométrie différentielle . . . . . » 291
FUBINI G. - Le trasformazioni di Laplace, di Lévy e di Moutard per le ipersuperficie. . . . . » 297
ČECH E. - Una generalizzazione della deformazione proiettiva . . . » 299
TERRACINI A. - Un nuovo problema di geometria proiettiva differenziale. . . . . » 301
BORTOLOTTI ENEA - Geometria differenziale metrica nello spazio rigato » 305
REIDEMEISTER K. - Fundamentalgruppe und Überlagerung von Mannigfaltigkeiten . . . . . » 317
MCCONNELL A. J. - The torsion of Riemannian space . . . . . » 321
NALLI PIA - Sopra un'operazione introdotta nel calcolo assoluto . . » 339
PETROVITCH M. - Sur un nombre absolu rattaché aux géodésiques des surfaces . . . . . » 347
GODEAUX L. - Sur la théorie des surfaces et l'espace réglé . . . . » 353
VOLK O. - Ueber Flaechen mit geodaetischen Dreiecksnetzen . . . . » 357
GONSETH F. et JUVET G. - Sur les problème des quatres couleurs . » 363

STOUFFER E. B. - On the projective differential geometry of ruled surfaces . . . . . Pag. 367
KAWAGUCHI A. - On the differential geometry of conic-families in the projective space of three dimensions . . . . . » 377
† SANNIA G. - Il fascio canonico di una superficie dedotto dal cono di Segre . . . . . » 383
PALOZZI G. - Sul piano principale di Halphen e sulla retta e sul punto principali di due curve sghembe . . . . . » 385
MENTRÉ P. - Sur les familles de complexes linéaires . . . . . » 389
THOMSEN G. - Über ein Problem der Kugelgeometrie . . . . . » 395
DELENS P. C. - Congruences de cercles et systèmes cycliques . . . » 399
ZERVOS P. - Sur quelques courbes intégrales . . . . . » 409
CRELIER L. - Sur quelques familles de courbes considérées au point de vue cinématique: Astroïdes et cornoïdes . . . . . » 413
DUMAS G. - Sur les singularités des surfaces . . . . . » 419
INDICE . . . . . » 425