ATTI

DEL

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO V.

COMUNICAZIONI

SEZIONE III [A-B] - IV [B]

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

EDITORE

L' EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1931 - IX

COMUNICAZIONI

Sezione Terza A

G. D. BIRKHOFF (Cambridge - Mass. - U. S. A.)

A NEW CRITERION OF STABILITY

Let

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1,\ldots,x_n) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1}$$

be any system of $n=2\mu+1$ equations of the first order, having $x_1,\ldots,x_n$ as dependent variables and the time t as independent variable. Here X_i $(i=1,\ldots,n)$, are real analytic functions of the real variables $x_1,\ldots,x_n$ in the region of $x_1,\ldots,x_n$ space under consideration. Such a system of equations arises for instance in ordinary dynamical problems having $\mu+1$ degrees of freedom, after the energy integral has been employed to reduce the order from $2(\mu+1)$ to $n=2\mu+1$.

Suppose now that a periodic motion is given,

$$x_i = f_i(t) \qquad (i=1,\ldots,n), \tag{2}$$

so that the functions f_i are periodic functions of t of period 2π, and the set $x_i=f_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$, forms a solution of (1). The neighborhood of the corresponding closed curve C in n dimensional $x_1,\ldots,x_n$ space has the topological nature of an n dimensional torus. If we choose an angular variable τ over this torus, and $n-1$ suitable geometric variables which we will call $x_1,\ldots,x_{n-1}$, the equations (1) take the form

$$\frac{dx_i}{d\tau} = X_i(x_1,\ldots,x_{2\mu},\tau) \qquad (i=1,\ldots,2\mu), \tag{3}$$

upon elimination of t, where X_i stand for the new right-hand members. These functions X_i are periodic in τ of period 2π. The equations (3) may be made to have the solution $x_i=0$ $(i=1,\ldots,2\mu)$, corresponding to the given periodic motion.

If we make an arbitrary transformation of variables

$$x_i = \varphi_i(y_1,\ldots,y_{2\mu},\tau) \qquad (i=1,\ldots,2\mu), \tag{4}$$

in which φ_i are arbitrary analytic functions of $y_1,\ldots,y_{2\mu}$, τ, periodic in τ of period 2π, all vanishing but with functional determinant $\Delta_0 \neq 0$ at $y_1=\ldots=y_{2\mu}=0$ for any τ, there is readily obtained a new system of the same type (3) in the variables $y_1,\ldots,y_{2\mu}$. Moreover if (4) be defined by 2μ divergent power series in $y_1,\ldots,y_{2\mu}$, in which the coefficients are analytic periodic functions of period 2π,

with $\Delta_0 \neq 0$, there exists a uniquely determined set of formal differential equations (3) in $y_1,\ldots,y_{2\mu}$, in which the righthand members Y_i $(i=1,\ldots,2\mu)$ are given by similarly constituted series. Thus we obtain the formal group of transformations (4) of (1) [1].

Suppose now that the solution $x_1,\ldots,x_{2\mu}$ of (3) which at $\tau=0$ takes on the values $x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0$ be

$$x_i = F_i(x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0,\tau) \qquad (i=1,\ldots,2\mu).$$

These are also functions analytic in $x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0$, τ, but not in general periodic of period 2π in τ. Moreover, these functions vanish for $x_1^0=\ldots=x_{2\mu}^0=0$ with $\Delta_0 \neq 0$. If we put $\tau=2\pi$ in these equations, we obtain a one-to-one analytic transformation T from $x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0$ to $x_1^1,\ldots,x_{2\mu}^1$, defined by

$$(5) \qquad T: x_i^1 = F_i(x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0,2\pi) = G_i(x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0) \qquad (i=1,\ldots,2\mu),$$

associated with the given periodic motion. This transformation T has an invariant point at the origin in $x_1,\ldots,x_{2\mu}$ space with functional determinant not 0 there. It is not difficult conversely to set up a system (3) corresponding to any such transformation T, nor to prove that if two dynamical systems lead to essentially the same transformation T, then they are equivalent near the corresponding periodic motion in the sense that a transformation (4) carries one system into the other [2].

Thus it is evident that transformations of the general type (5) from $x_1^0,\ldots,x_{2\mu}^0$ to $x_1^1,\ldots,x_{2\mu}^1$ in the vicinity of an invariant point may be classified in the same way as the motions of a dynamical system near a periodic motion. In particular there will enter 2μ multipliers $\sigma_1,\ldots,\sigma_{2\mu}$ defined as the roots of the characteristic determinantal equation

$$\left| \left.\frac{\partial G_i}{\partial x_j^0}\right|_0 - \sigma\delta_{ij} \right| = 0,$$

where as usual $\delta_{ii}=1$ and $\delta_{ij}=0$ if $i \neq j$. If these roots occur in pure imaginary pairs $\pm\nu_i\sqrt{-1}$ $(i=1,\ldots,\mu)$ with $\sigma_1^{m_1}\ldots\sigma_\mu^{m_\mu}\neq 1$ for all sets of integers $m_1,\ldots,m_\mu$ not all 0, the transformation T as well as the multipliers, may be said to be of « general stable type ». Of course a differential system (3) and an associated transformation (5) are both or neither of general stable type. Likewise « completely stable » transformations T may be defined in a way entirely analogous to complete stable periodic motions. A periodic motion and its associated transformation T will either both be completely stable, or neither will be.

The case of general stable type in which the given periodic motion is com-

---

[1] Cf. my book: *Dynamical systems* (New York, 1927), chapters 3, 4, for various facts concerning the formal group, normal forms, complete stability, etc., which I assume as known.

[2] At least if the right-hand members X_i of the corresponding differential equations (3) are required only to be continuous together with their partial derivatives of all orders.

pletely stable is of great interest. I have demonstrated that a necessary and sufficient condition for complete stability is that the given system be reversible in a formal sense, i. e. that there exists a transformation

$$\bar{\tau}_i = -\tau, \quad \bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_{2\mu}, \tau) \qquad (i = 1, \ldots, 2\mu),$$

where the transformation $\bar{x}_i = \varphi_i$ lies in the formal group, for which the new system of equations does not differ from the given system except that $\bar{x}_i$, $\bar{\tau}$ replace x_i, τ respectively (1).

With the aid of this result it is not difficult to establish the following new criterion for complete stability:

A necessary and sufficient condition that a given periodic motion of general stable type be completely stable is that the associated transformation T *be the formal product of two transformations* U, V *of involutoric type*:

$$T = UV; \quad U^2 = V^2 = I \qquad (I, \text{ the identity}).$$

It should be explicitly observed that U and V are to be given by power series in $x_1, \ldots, x_{2\mu}$ without constant terms, and with functional determinant not 0 at the origin.

The proof that the condition is sufficient is immediate. The transformation associated with the modified equations after the introduction of a new variable $\bar{\tau} = -\tau$ is precisely the inverse T^{-1} of the transformation T associated with the given equations, inasmuch as when τ decreases by 2π, the point x_i^1 evidently goes into x_i^0. But we have

$$T^{-1} = (UV)^{-1} = VU = U(UV)U^{-1} = UTU^{-1},$$

because of the involutoric property. Therefore the transformation T^{-1} associated with the transformed equations in $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, $\bar{\tau}$ is equivalent to the transformation T under the formal group. It follows that the modified system is equivalent to the original system under the formal group. Hence by the theorem stated above, the periodic motion is of completely stable type.

The proof that the condition is necessary may be made by means of the normal form of the differential equations, obtained as a result of a transformation of the formal group. This form is

$$\frac{d\xi_i}{d\tau} = M_i\xi_i, \quad \frac{d\eta_i}{d\tau} = -M_i\eta_i \qquad (i = 1, \ldots, \mu),$$

where M_i are pure imaginery power series with constant terms $\lambda_i\sqrt{-1}$ in the μ products $\xi_1\eta_1, \ldots, \xi_\mu\eta_\mu$, such that

$$m_1\lambda_1 + \ldots + m_\mu\lambda_\mu + 2\pi p \neq 0$$

(1) See my book, chap. IV, section 7.

for any integers $m_1,\ldots,m_\mu$, p not all zero. The formal solution of these equations is

$$\xi_i=\xi_i^0 e^{M_i^0\tau}, \quad \eta_i=\eta_i^0 e^{-M_i^0\tau} \qquad (i=1,\ldots,\mu) \tag{6}$$

with corresponding formal transformation T

$$\xi_i^1=\xi_i^0 e^{2\pi M_i^0}, \quad \eta_i^1=\eta_i^0 e^{-2\pi M_i^0}. \tag{7}$$

This transformation is of general stable type since its multipliers

$$\sigma_i=e^{2\pi\lambda_i\sqrt{-1}}$$

have the prescribed property. (Of course this transformation (7) takes real form when real variables are employed instead of the conjugate imaginary variables ξ_i, η_i).

Now (7) may be regarded as the normal form for a completely stable transformation T in normal variables, just as (6) gives the analogous normal solution of the completely stable differential system. Introduce variables $\bar{\xi}_i$, $\bar{\eta}_i$ as defined by the following set of equations:

$$\bar{\xi}_i=\eta_i^0, \quad \bar{\eta}_i=\xi_i^0 \qquad (i=1,\ldots,\mu),$$

thus defining of course an involutoric transformation U in the original variables which appear in T. Further define the similar transformation V

$$\xi_i^{(1)}=e^{2\pi M_i^{(1)}}\bar{\eta}_i, \quad \eta_i^{(1)}=e^{-2\pi M_i^{(1)}}\bar{\xi}_i$$

where $M_i^{(1)}$ denotes the expression for M_i after the products $\xi_j\eta_j$ $(j=1,\ldots,\mu)$, are replaced by $\xi_j^{(1)}\eta_j^{(1)}$. We find from these transformations that

$$\xi_i^{(0)}\eta_i^{(0)}=\bar{\xi}_i\bar{\eta}_i=\xi_i^{(1)}\eta_i^{(1)}.$$

Hence M_i^1 is equal to M_i^0 formally, and the transformation V is also of period 2. It is at once verified that the compound transformation UV is precisely the transformation T expressed in terms of the normal variables.

Thus the condition is necessary as well as sufficient.

The decomposition of T into the product of two involutoric transformations is by no means unique of course. The above discussion shows that this decomposition $T=UV$ admits of being so chosen that each component transformation U, V leaves unaltered every formally invariant function under the complete transformation T.

It is interesting to observe the relation between my earlier theorem and the present theorem. The earlier theorem applied to transformations T of completely stable type shows at once that T^{-1} is equivalent to T, i. e. that a transformation A exists such that

$$T^{-1}=ATA^{-1}.$$

Here A is given by formal power series without constant terms and with functional determinant not 0 at the origin. The present theorem affirms that A may be made involutoric in addition.

An inspection of the above proof shows at once that if the normal form be considered as characteristic of equations of true dynamical type, whether the variables ξ_i, η_i be real or conjugate imaginary series, then the property that T be expressible as a product of two involutoric transformations is equally characteristic of the transformations of dynamical type.

Furthermore, if a periodic motion is of completely stable type, so is also the periodic motion thought of as described k times ($k>1$). But in this case the associated transformation is T^k. Thus in this case the k^{th} power of a completely stable transformation is also of completely stable type. This result is perfectly general, for with any completely stable transformation T may be associated a corresponding completely stable system of differential equations.

The converse is also true: if a transformation T^* of general stable type can be expressed in the form $(UV)^k$, then T^* will be completely stable. In fact we have

$$T^{*-1}=(VU)^k=V(UV)^kU^{-1}=VT^*V^{-1}$$

so that T^{*-1} is equivalent to T^* which, as was pointed out above, necessitates that T^* be of completely stable type.

Moreover any completely stable transformation admits of being expressed in the form $(UV)^k$ for k arbitrary. In fact if we use normal variables ξ_i, η_i, as above, the given transformation appears at once as the formal k^{th} power of the transformation

$$\xi_i^{(1)}=\xi_i^{(0)}e^{\frac{2\pi}{k}M_i^{(0)}}, \qquad \eta_i^{(1)}=\eta_i^{(0)}e^{-\frac{2\pi}{k}M_i^{(0)}}.$$

In the same connection we remark also that any transformation T of general stable type which may be written

$$T=UVU^*V,$$

where U, V, U^* are involutoric, must be of completely stable type, for we have

$$T^{-1}=VU^*VU=UTU^{-1}.$$

The converse is also true since according to what has been proved above we may take $U^*=U$.

This last form of expression of T admits of further generalization.

In connection with the new criterion for complete stability there are at once suggested a number of very interesting questions. It may happen that there exist one or more decompositions of T of such types UV, $(UV)^k$, UVU^*V as are given above, in which the involutoric elements involved are given by *con-*

vergent series. For example, in the restricted problem of three bodies (1), the associated transformation T has the form UV. Similarly in the general geodesic problem on a convex surface, T has the form UVU^*V (2).

The existence of such actual decompositions of these types is highly significant for the dynamical problem. In particular if the transformation T *associated with a given periodic motion of completely stable type has the form* UV *actually and not only formally, there must exist infinitely many periodic motions in the neighborhood of the given periodic motion which intersect a particular analytic* μ *dimensional surface* I *in* $x_1,\ldots, x_{2\mu}$ *space, at least if a certain related functional determinant* $|a_{ij}|$ *does not vanish, where the constants* a_{ij} *appear in the* μ *series* M_i *involved in the normal form*:

$$M_i=(\lambda_i+\sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}\xi_j\eta_j+\ldots)\sqrt{-1}. \tag{8}$$

Before outlining a proof of this statement we observe that this result presents a partial 2μ dimensional generalization of POINCARÉ's last geometric theorem to dynamical systems having an arbitrary number of degrees of freedom, applicable in case T admits of such an actual decomposition UV, since the iterates of T have infinitely many nearby invariant points corresponding to these nearby periodic motions. Unfortunately such an actual decomposition of T does not appear to be always possible.

To prove our statement, we consider first the surface I of invariant points of the involutoric transformation U.

As noted above, the inverse transformation T^{-1} is equivalent to T by means of the change of variables corresponding to U. Upon the basis of the normal form for T above, this fact determines the form of U to be essentially

$$\bar{\xi}_i=\eta_i f_i, \quad \bar{\eta}_i=\frac{\xi_i}{f_i} \qquad (i=1,\ldots, \mu)$$

where f_i are power series in the products $\xi_1\eta_1,\ldots, \xi_\mu\eta_\mu$ with constant term 1 and such that $\frac{1}{f_i}$ are conjugate to f_i (3). By modifying the normal variables to $\xi_i/\sqrt{f_i}$, $\eta_i\sqrt{f_i}$ we may furthemore reduce f_i to 1.

---

(1) Cf. my paper: *The restricted problem of three bodies.* Rendiconti di Palermo, vol. 39 (1915), sections 19, 20.

(2) Cf. my book cited above, chap. VI, section 10.

(3) See the analysis in chap. IV, section 7 of my book where it is shown that the most general transformation of variables preserving the normal form is

$$\xi_i=\bar{\xi}_i\bar{f}_i, \qquad \eta_i=\bar{\eta}_i\bar{g}_i$$

where $\bar{f}_i$, $\bar{g}_i$ are arbitrary conjugate power series in the m products $\bar{\xi}_1\bar{\eta}_1,\ldots, \bar{\xi}_\mu\bar{\eta}_\mu$ not lacking constant terms. This yields $\xi_i\eta_i=\bar{\xi}_i\bar{\eta}_i\bar{f}_i\bar{g}_i$, and thence $f_ig_i\bar{f}_i\bar{g}_i=1$ if U is to be

In the original real variables, say x_i, y_i $(i=1,\ldots,\mu)$, instead of such conjugate imaginary variables, this transformation takes essentially the form

$$\bar{x}_i = x_i + \ldots, \quad \bar{y}_i = -y_i + \ldots \qquad (i=1,\ldots,\mu)$$

where the indicated terms in the series are of the second or of higher degree.

Putting $\bar{x}_i = x_i$, $\bar{y}_i = y_i$ in these equations we obtain as the formal equations of the invariant surface I

$$* + F_i = 0, \quad -2y_i + G_i = 0 \qquad (i=1,\ldots,\mu),$$

where the functions F_i, G_i are convergent power series in $x_1,\ldots, x_\mu, y_1,\ldots, y_\mu$ beginning with terms of higher than the first degree.

If the second set of these equations are satisfied it may be proved that the first set of equations are satisfied in consequence of this fact, and thus that I is an analytic μ dimensional surface through the origin in $x_1, y_1,\ldots, x_\mu, y_\mu$ space.

In fact we have for $i=1,\ldots,\mu$

$$\xi_i = P_i + \sqrt{-1}\,Q_i, \quad \eta_i = P_i - \sqrt{-1}\,Q_i,$$
$$\bar{\xi}_i = \bar{P}_i + \sqrt{-1}\,\bar{Q}_i, \quad \bar{\eta}_i = \bar{P}_i - \sqrt{-1}\,\bar{Q}_i,$$

where

$$P_i = x_i + \ldots, \quad Q_i = y_i + \ldots,$$

are real power series in the variables $x_1,\ldots, x_\mu, y_1,\ldots, y_\mu$, and $\bar{P}_i$, $\bar{Q}_i$ are the same power series in $\bar{x}_1,\ldots, \bar{x}_\mu, \bar{y}_1,\ldots, \bar{y}_\mu$. The transformation from x_i, y_i to $\bar{x}_i$, $\bar{y}_i$ thus may be written formally

$$\bar{P}_i = P_i, \quad \bar{Q}_i = -Q_i,$$

and the formal equations of the invariant surface I reduce to μ equations only:

$$Q_i = y_i + \ldots = 0 \qquad (i=1,\ldots,\mu).$$

Now the 2μ equations equations earlier written in which only convergent series appear may be given the form

$$* + F_i^* = 0, \quad Q_i + G_i^* = 0 \qquad (i=1,\ldots,\mu),$$

in which F_i^*, G_i^* are power series in $P_1,\ldots, P_\mu, Q_1,\ldots, Q_\mu$. These of course must be formally satisfied if and anly if $Q_i=0$ for $i=1,\ldots,\mu$. Hence every term in F_i^*, G_i^* must contain at least one factor $Q_1,\ldots, Q_\mu$. Hence also the last μ equations give not only a necessary, but also a sufficient condition that x_i, y_i is an invariant point of I.

---

involutoric, where $f_i g_i$ and $\bar{f}_i \bar{g}_i$ are the same power series in the m products, save that in the second the products $\bar{\xi}_j \bar{\eta}_j$ appear instead of $\xi_j \eta_j$. Hence we infer $f_i g_i = \bar{f}_i \bar{g}_i = 1$, which yields the stated conclusion.

By proper algebraic manipulation of these equations for I and change of variables they may clearly be given the form

$$y_i + \ldots = 0 \qquad (i=1,\ldots,\mu), \tag{9}$$

where the omitted terms are of as high degree m as desired.

Now it may be proved that under these circumstances $T^{(k)}$ has the form

$$\begin{aligned} x_i^{(k)} &= x_i \cos 2k\pi N_i - y_i \sin 2k\pi N_i + R_i^{(k)} \\ y_i^{(k)} &= x_i \sin 2k\pi N_i + y_i \cos 2k\pi N_i + S_i^{(k)} \end{aligned} \tag{10}$$

where N_i denote the real series $\frac{M_i}{\sqrt{-1}}$ broken of at terms of degree m, and where $R_i^{(k)}$, $S_i^{(k)}$ are of arbitrarily high order m in ε, with

$$\varepsilon^2 = x_1^2 + y_1^2 + \ldots + x_\mu^2 + y_\mu^2,$$

provided that k be of order not greater than $\frac{1}{\varepsilon^m}$. Furthermore, the first partial derivatives of $R_i^{(k)}$, $S_i^{(k)}$ will be of order at least m in ε, throughout the same range of values of k (1).

Our next step is to prove that the surfaces I and I_k (i. e. the k^{th} iterate of I by T) will intersect for k large. The equations determining I_k are evidently obtained by substituting the expressions for $x_i^{(-k)}$, $y_i^{(-k)}$ in (9) for x_i, y_i respectively. Evidently if y_i be eliminated by means of the equations (9) the equations so obtained take the form

$$\Phi_i^{(k)} \equiv x_i \sin 2k\pi N_i + W_i^{(k)} = 0 \tag{11}$$

in which $W_i^{(k)}$ are functions of $x_1,\ldots, x_\mu$ only, of order m in ε, and with first partial derivatives of order m in ε.

But in the range under consideration we can choose k so large and $x_1,\ldots, x_\mu$ arbitrarily small and comparable to one another so that the μ quantities

$$2kN_i = 2k(\lambda_i + \sum_{j=1}^{\mu} a_{ij}x_j^2 + \ldots) \qquad (i=1,\ldots,\mu)$$

are integers. This choice is possible only because $|a_{ij}|$ is not zero by hypothesis, and k may be arbitrarily large in comparison with $\frac{1}{\varepsilon^2}$. It is apparent that at such a point the functions $\Phi_i^{(k)}$ on the left in equation (11) are arbitrarily small of order m in ε, while $\frac{\partial \Phi_i^{(k)}}{\partial x_j}$ has $2k\pi\delta_{ij}a_{ij}x_i^{(0)}$ as its principal part in the neighborhood of the selected point $x_i^{(0)}$. These μ^2 quantities are in general large in absolute value, and nearly constant. Since $|a_{ij}| \neq 0$, and $x_1,\ldots, x_{2\mu}$ are all of

---

(1) The argument necessary to establish these facts is based entirely upon the known form of T, and involves such inequalities as appear in chap. VI, section 2 of my book.

the same order as ε, it is clear that the functions $\Phi_i^{(k)}$ must simultaneously vanish in the neighborhood, so that there must be such a point P of intersection of $I^{(k)}$ and I, as stated.

Let P be such a point of intersection. If we write $Q=T^{-k}(P)$, we have

$$UQ=Q, \quad UP=P, \quad P=T^k(Q).$$

Hence

$$UP=(UV)^kQ=U(VU)^kUQ$$

whence also

$$P=T^{-k}Q, \quad \text{or} \quad Q=T^kP.$$

Therefore we obtain

$$P=T^kQ=T^{2k}P,$$

so that P is a point of the surface I invariant under the involutoric transformation T, which is invariant under T^{2k}. Such a point P evidently corresponds to a periodic motion intersecting the analytic μ dimensional surface I in the original $x_1,\ldots,x_n$ space, and lying arbitrarily near to the given periodic motion.

This establishes the statement to be proved.

The question arises naturally whether or not it is possible to draw similar conclusions in other cases, for example in the case where T may be written in the form UVU^*V referred to above. I do not know whether or not this in the case.

J. CHAZY (Paris - Francia)

SUR LA STABILITÉ À LA POISSON DANS LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

Dans le problème des trois corps, quand la constante des forces vives est négative, et quand le temps croît indéfiniment, il existe *a priori* trois sortes de trajectoires: les trajectoires sur lesquelles un corps s'éloigne indéfiniment des deux autres, les trajectoires sur lesquelles les trois distances mutuelles sont bornées, et les trajectoires *oscillantes*, sur lesquelles tantôt les trois distances mutuelles sont bornées, et tantôt deux d'entre elles sont arbitrairement grandes. Les trajectoires sur lesquelles un corps s'éloigne indéfiniment des deux autres forment dans l'espace à douze dimensions, où l'on représente le mouvement par rapport au centre de gravité, trois continua limités par trois surfaces analytiques; dans la région *intérieure* à ces trois surfaces, les trajectoires sur lesquelles les trois distances mutuelles sont bornées et les trajectoires oscillantes sont mélangées *a priori*, et il est possible que dans cette région l'allure finale de la trajectoire soit fonction discontinue des conditions initiales, comme par exemple M. HADAMARD l'a établi pour les lignes géodésiques restant à distance finie sur les surfaces à courbures opposées d'ordre de connexion supérieur à 2.

J'ai démontré que, *sauf des trajectoires exceptionnelles, les deux dernières sortes de trajectoires possèdent la stabilité à la Poisson.* La démonstration est fondée sur l'invariant intégral considéré par POINCARÉ dans le tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* Le calcul de POINCARÉ peut être simplifié et rectifié par la voie suivante.

S'il existe d'abord un faisceau de trajectoires sur lequel les trois distances mutuelles sont bornées, il résulte facilement des travaux de M. SUNDMAN sur les chocs et sur les approches de deux corps, que l'invariant intégral

$$\int dxdydzd\xi d\eta d\zeta dx'dy'dz'd\xi'd\eta'd\zeta',$$

où x, y, z désignent les coordonnées de la masse m_2 par rapport à la masse m_1, et ξ, η, ζ les coordonnées de la masse m_3 par rapport au centre de gravité des deux autres, a une valeur finie dans le domaine où s'étend le faisceau considéré, pourvu du moins que le vecteur des aires ait une longueur supérieure à une longueur fixe.

Mais l'on doit considérer aussi un faisceau comprenant des trajectoires oscillantes. Si à un instant les masses m_1 et m_2 sont voisines, et la masse m_3 à distance arbitrairement grande de ces masses, les trois quantités $\eta\zeta' - \zeta\eta'$, $\zeta\xi' - \xi\zeta'$, $\xi\eta' - \eta\xi'$ sont bornées par les intégrales des aires; de sorte que, si l'on commence le calcul de l'intégrale d'ordre 12 par les trois variables ξ', η', ζ', le volume d'intégration de l'espace à trois dimensions représentant ces variables est compris d'une part à l'intérieur d'une sphère donnée par l'équation des forces vives, et d'autre part entre trois couples de plans deux à deux parallèles d'équations

$$\eta\zeta' - \zeta\eta' = \text{const.}, \qquad \zeta\xi' - \xi\zeta' = \text{const.}, \qquad \xi\eta' - \eta\xi' = \text{const.}$$

Ce volume sera au plus de l'ordre de l'aire du parallélogramme, section droite du parallélépipède déterminé par deux de ces trois couples de plans, par les deux premiers si l'on veut, c'est-à-dire de l'ordre du produit des distances de ces deux couples de plans par l'inverse du sinus de leur angle aigu V, soit

$$\frac{b}{\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)(\zeta^2+\xi^2)}} \asymp \frac{1}{\sin V},$$

b désignant une quantité bornée. Et l'on a

$$\cos V = \frac{|\eta\xi|}{\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)(\zeta^2+\xi^2)}}, \qquad \sin V = \frac{\varrho\,|\zeta|}{\sqrt{(\eta^2+\zeta^2)(\zeta^2+\xi^2)}},$$

avec $\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$.

Donc la valeur du volume cherché peut s'écrire $\frac{b}{\varrho\zeta}$, $\frac{b}{\varrho\xi}$, $\frac{b}{\varrho\eta}$, et par suite $\frac{b}{\varrho^2}$, les quantités b désignant encore des quantités bornées.

Dès lors, si l'on calcule l'invariant intégral d'ordre 12 ayant pour élément, non plus l'unité, mais la fonction

$$M = \frac{1}{\left[\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}(x^2+y^2+z^2) + \frac{(m_1+m_2)m_3}{m_1+m_2+m_3}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right]^{\alpha}},$$

où α désigne un exposant constant supérieur à $\frac{1}{2}$, ce nouvel invariant intégral étendu au volume de l'espace à douze dimensions occupé par le faisceau de trajectoires considéré, a encore une valeur finie.

Il faut remarquer d'ailleurs que l'intégrale $\int M dt$ ne devient infinie que pour la valeur infinie du temps: par conséquent ce sont les trajectoires considérées elles-mêmes, et non des prolongements de ces trajectoires au delà de la valeur infinie du temps, qui possèdent la stabilité à la Poisson.

T. LEVI-CIVITA (Roma - Italia)

APPLICAZIONI ASTRONOMICHE DEGLI INVARIANTI ADIABATICI

1. - *Preliminari.* — I progressi realizzati nella meccanica celeste da Newton in poi sono indubbiamente grandiosi, sotto il duplice aspetto teorico e pratico. E alla grandiosità si accompagna — esempio insuperato nella filosofia naturale — uno schema logico mirabilmente semplice e perspicuo. Non c'è che da associare le leggi newtoniane del moto e della gravitazione universale per avere le equazioni rigorose; e, per conseguire soluzioni approssimate largamente sufficienti ai bisogni dell'astronomia, basta tener conto di qualche dato ulteriore, suggerito con manifesta evidenza dall'osservazione diretta.

Soltanto recentemente, nell'astronomia stellare e in qualche problema cosmogonico, si sono fatte intervenire ipotesi addizionali probabilistiche e statistiche.

In questa comunicazione mi propongo di mostrare sopra due esempi espressivi, desunti da ovvi problemi della meccanica planetaria, come si possa apprezzare l'influenza delle perturbazioni particolarmente lente, facendo intervenire l'elemento statistico con criterio semplice e generale, già bene codificato.

In modo preciso si tratterà unicamente di sfruttare, nei casi suindicati, la nozione di *invariante adiabatico*, introdotta, come è ben noto, dal fisico olandese EHRENFEST nella meccanica atomica, per giustificare i postulati quantici del BOHR e del SOMMERFELD e renderne possibile l'applicazione a modelli atomici più complessi.

2. - *Richiami concernenti la nozione di invariante adiabatico.* — Sia un sistema differenziale ordinario di rango N

$$\frac{dx_\nu}{dt} = X_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_N \mid t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

e si supponga che i secondi membri X_ν dipendano, oltre che dalle funzioni x_ν e, eventualmente, dalla variabile indipendente t, anche da un certo numero (che non occorre specificare) di parametri a. Se questi si considerano costanti, oppure anche funzioni *conosciute* del tempo, il sistema (1) è atto (sotto condizioni di continuità, derivabilità, ecc., che qui supponiamo largamente soddisfatte) ad individuare le N funzioni incognite x, a partire dai loro valori iniziali.

Se invece — e tale dovrà essere il nostro punto di vista — si considerano le a come quantità variabili molto lentamente, ma in modo *a priori* arbitrario, il sistema (1) è per se stesso indeterminato, contenendo più incognite che equazioni; e precisamente un eccesso di incognite eguale al numero dei parametri a. Tuttavia è ancora possibile pervenire a conseguenze notevoli qualora:

a) il sistema (1) stesso, *allorchè i parametri* a *si considerino addirittura come costanti,* presenti un certo comportamento qualitativo — quasi ergodicità [1] — che dipende essenzialmente dal numero di integrali (in debito senso) uniformi, e indipendenti da t, che esso possiede;

b) i parametri a varino in modo abbastanza lento — si suol dire *adiabatico* — perchè sia giustificata una certa ipotesi statistica concernente i valori medi.

3. - *Esempio tipico offerto dai sistemi canonici con un solo grado di libertà.* — Un caso particolarmente notevole, in cui le condizioni *a*) e (per variazione abbastanza lenta dei parametri, anche) *b*) si trovano soddisfatte, è offerto dai sistemi canonici con un solo grado di libertà, a funzione caratteristica $H(p\,|\,q\,|\,a)$ indipendente dal tempo:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \tag{2}$$

nell'ipotesi che, quando i parametri si considerano costanti, l'integrale (generalizzato) dell'energia

$$H = E \qquad (E \text{ costante}) \tag{3}$$

rappresenti nello spazio delle fasi, cioè nel piano cartesiano (q, p), una curva chiusa, senza punti doppi, cioè tale che, sopra di essa, non si annullino contemporaneamente $\frac{\partial H}{\partial p}$, $\frac{\partial H}{\partial q}$. In tale ipotesi, quando si seguitano a risguardare i parametri a come costanti, il moto risulta periodico, come è sostanzialmente ben noto; se poi i parametri stessi variano lentamente (ma in modo arbitrario) l'area

$$V(E\,|\,a)$$

racchiusa dalla curva (3) rimane inalterata.

Ciò si esprime dicendo che V costituisce un *invariante adiabatico* del nostro sistema differenziale. Se ne desume che l'energia E, la quale, in corrispondenza

---

[1] Ad una esposizione riassuntiva di queste nozioni, con qualche contributo personale circa il modo di formularne e di giustificarne i postulati fisico-statistici, sono dedicate le lezioni, che ho tenuto recentemente all'Università di Amburgo, per benevolo invito di quel Senato Accademico. Cfr.: *Drei Vorlesungen über adiabatische Invariante.* Abh. aus dem math. Seminar der Hamburgischen Universität, B. VI, 1928, pp. 323-366, dove si trovano anche indicazioni bibliografiche.

ad una generica soluzione del sistema (2), si conserva costante, assieme ai parametri a, risente le loro lente variazioni (adiabatiche), a norma della equazione

$$V(E \mid a) = \text{cost.} \tag{4}$$

È questo il solo risultato della teoria generale degli invarianti adiabatici che avremo bisogno di invocare.

I.

Problema dei due corpi di masse variabili.

4. - *Impostazione formale. Ricerche dell'Armellini.* — Il problema dei due corpi di masse variabili è astronomicamente importante a doppio titolo. Da un lato la caduta di meteoriti tende ad aumentare le masse m, m' dei due corpi, e con esse la loro somma M: certo con contributi assai tenui ed irregolari, ma presumibilmente con ritmo medio analogo a quello fornito dalle osservazioni attuali.

D'altro lato radiazioni termiche, elettromagnetiche, luminose, ecc., che siano comunque emesse dai due corpi, ne diminuiscono l'energia e quindi le masse.

In definitiva, anche per due corpi sottratti ad ogni influenza gravitazionale esteriore, se si tratta di previsioni a lunghissima scadenza, bisogna considerare le masse m, m' come parametri (lentissimamente) variabili, in funzione del tempo t.

Gli autori che si sono occupati di tale questione hanno sempre preso come punto di partenza le equazioni del moto *relativo* del problema classico dei due corpi di masse costanti, risguardando in esse m, m' non più costanti, ma funzioni assegnate di t.

Questo criterio non è forse del tutto soddisfacente, potendo apparire preferibile una impostazione più comprensiva in cui fin da principio si tenga conto della variabilità delle masse.

Comunque non è su questo punto che conviene ora soffermarsi; noi vogliamo semplicemente applicare la considerazione dell'invariante adiabatico alle equazioni adottate finora.

Per conseguirle, attraverso passaggi che ci serviranno anche nel secondo esempio, rifacciamoci dal moto assoluto nel problema classico dei due corpi di masse invariabili m, m'.

Siano questi P, P'; G il loro baricentro (che può considerarsi fisso); r la loro distanza; $M=m+m'$ la somma delle masse. Sarà

$$GP=\frac{m}{M}r, \qquad GP'=\frac{m}{M}r.$$

Il moto avvenendo in un piano, in virtù dell'integrale (baricentrale, vettoriale) dei momenti, ove si indichi con ϑ l'anomalia di PP' in questo piano,

contata a partire da una retta fissa, si avrà per P (di massa m) la forza viva (assoluta)

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{m'}{M}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

e analogamente per P' la forza viva

$$\frac{1}{2} m' \left(\frac{m}{M}\right)^2 (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2),$$

donde pel sistema la forza viva

$$T = \frac{1}{2} \frac{mm'}{M} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2).$$

Designando con f la costante di attrazione universale, si avrà d'altra parte la funzione delle forze

$$U = f \frac{mm'}{r}.$$

Se si moltiplicano T ed U per una stessa costante, le equazioni lagrangiane del moto non si alterano. Prenderemo come fattore moltiplicativo $\frac{M}{mm'}$, assumendo così come forza viva la espressione (unitaria)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2)$$

e come funzione delle forze

$$\mathfrak{U} = \frac{fM}{r}.$$

Si ha in conformità l'energia totale

$$H = \mathfrak{T} - \mathfrak{U},$$

la quale introducendosi al posto di $\dot{r}$, $\dot{\vartheta}$ le variabili coniugate

$$p_r = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \qquad p_\vartheta = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2\dot{\vartheta},$$

diviene

$$H = \frac{1}{2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\vartheta^2\right) - \frac{fM}{r}.$$

È questa la funzione caratteristica del sistema canonico

$$\frac{dp_r}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r}; \tag{6}$$

$$\frac{dp_\vartheta}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\vartheta}, \tag{7}$$

che definisce il moto relativo dei due corpi.

Siccome ϑ non compare esplicitamente in H, la prima delle (7) dà luogo all'integrale

$$p_\vartheta = c \qquad (c \text{ costante}) \tag{8}$$

che esprime la costanza della velocità areolare.

Avuto riguardo a ciò, le (6) rientrano nello schema (2) con un solo grado di libertà, involgendo soltanto r e p_r.

Tutto questo nel caso classico in cui m, m' sono costanti.

Nel caso di masse variabili si assumono come equazioni differenziali del problema le stesse (6), (7) le quali seguitano ad ammettere l'integrale (8).

Quindi, per ciò che concerne la coppia r, p_r, si tratta ancora delle (6), con $p_\vartheta = c$: soltanto M non vi designa più una costante, bensì una funzione assegnata di t.

L'andamento del moto in quest'ultima ipotesi fu ripetutamente oggetto di studio da parte di eminenti cultori di meccanica celeste; basterà ricordare OPPOLZER, GYLDÉN, LEHMANN-FILHÈS, STRÖMGREN, PLUMMER.

In epoca recente la questione fu ripresa con più elevati mezzi analitici dal prof. ARMELLINI [1], il quale, oltre a ritrovare i risultati ottenuti dai precedenti autori, altri ne aggiunse di notevole interesse.

Fra le conclusioni rigorose cui egli pervenne (nel caso di orbite osculatrici ellittiche) giova, per lo scopo nostro, ricordare la seguente: Se $M(t)$ va sempre crescendo con t e diviene infinita per $t \to \infty$, il limite inferiore di $r(t)$ è zero, cioè alla lunga i due corpi finiscono per cadere l'uno sull'altro.

Ben più difficile è precisare il comportamento asintotico, quando $M(t)$, pur tendendo all'∞ con t, non è sempre crescente. È possibile che alla lunga intervenga un urto anche in questo caso, ma non si può a rigore escludere che i due corpi vadano invece allontanandosi indefinitamente. Sia per stabilire il primo punto che per rilevare la seconda incertezza l'ARMELLINI dovette ricorrere ad una analisi piuttosto approfondita e delicata.

Vedremo tra un momento che la considerazione dell'invariante adiabatico, di cui al numero precedente, assicura che, se $M(t)$ *cresce indefinitamente con legge lenta, ma qualsiasi, si avrà un urto; mentre, se* $M(t)$ *converge a zero, i due corpi andranno allontanandosi indefinitamente.*

È appena necessario far notare che, ricorrendo ad un invariante adiabatico, si viene ad associare al sistema differenziale (6) un elemento ulteriore di carattere statistico.

È questo il substrato logico del progresso, che vien fatto di conseguire, e si concreta nel precedente enunciato. A rigore, badando alla circostanza che c'è di mezzo un complemento statistico, si dovrebbe limitarsi ad intendere il precedente enunciato nel senso, che è, se non proprio impossibile, almeno infinitamente poco probabile che i due corpi sfuggano ad un urto, quando cresce indefinitamente la somma $M(t)$ delle masse, mentre è *quasi* certo che essi si allontane-

---

[1] Cfr. in particolare la memoria: *Il problema dei due corpi di masse variabili*, Memorie della Società Italiana delle Scienze (detta dei XL), t. XIX, 1915, pp. 75-96, dove sono anche nitidamente riassunti i risultati anteriori, colle relative indicazioni bibliografiche.

ranno indefinitamente se M tende a zero (come accade ad esempio se propenderà l'irraggiamento).

5. - *Calcolo effettivo dell'invariante adiabatico e sua immediata conseguenza.* — A norma delle (3), (5), (6), si tratta di assegnare l'area V (del piano r, p_r) racchiusa da una curva (del 4° ordine)

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2+\frac{c^2}{r^2}\right)-\frac{fM}{r}=E, \tag{9}$$

in cui c, f, M ed E vanno trattate come costanti: le prime tre positive, e l'ultima negativa, in accordo colla premessa (n.° 3) che si tratta di moto periodico e quindi, nel caso attuale, necessariamente kepleriano, ciò che appunto richiede $E<0$.

L'area V suddetta è manifestamente espressa, risguardando t come variabile indipendente, dall'integrale

$$\int p_r dr$$

esteso ad un periodo (del moto kepleriano in questione). Indicando tale periodo con T, e quindi con

$$n=\frac{2\pi}{T}$$

il moto medio, ove si ricordi (n.° precedente) che il momento p_r si identifica con $\dot{r}$, talchè $dr=\dot{r}dt=p_r dt$, si ha

$$V=\int_0^T p_r^2 dt$$

che, in virtù della (9), può essere scritta

$$V=2E\frac{2\pi}{n}+2fM\int_0^T\frac{dt}{r}-c\int_0^T\frac{cdt}{r^2}. \tag{10}$$

L'integrale delle aree (8), cioè $r^2\dot{\vartheta}=c$, consente di sostituire nell'ultimo integrale $d\vartheta$ a $\frac{cdt}{r^2}$, sicchè l'integrale stesso, essendo esteso ad un periodo, vale 2π.

Per assegnare senza calcoli anche il valore dell'integrale

$$\int_0^T\frac{dt}{r}$$

basta introdurvi come variabile indipendente, al posto di t, l'anomalia eccentrica u, notoriamente legata a t dall'equazione di Kepler, che, differenziata, si scrive

$$(1-e\cos u)du=ndt,$$

dove e designa l'eccentricità dell'orbita ellittica. Siccome, dettone a il semi-asse maggiore, si ha ulteriormente

$$a(1-e\cos u)=r,$$

$\frac{dt}{r}$ si identifica con $\frac{du}{an}$, e, dovendosi qui ancora integrare per un periodo, si ha

$$\int_0^T \frac{dt}{r} = \frac{2\pi}{an}.$$

Risulta così dalla (10)

$$V = 2E\frac{2\pi}{n} + \frac{2fM}{a}\frac{2\pi}{n} - 2\pi c. \tag{10'}$$

Il nostro obbiettivo è di valersi dell'invariante adiabatico

$$V = \text{cost.}$$

per desumere la legge di variazione (secolare) di a con M. Giova dunque, traendo partito dalla circostanza che *c è una costante di integrazione anche per M variabile,* far apparire, nella precedente espressione di V, soltanto M ed a, oltre a c.

Basta all'uopo ricordare le classiche relazioni del moto ellittico

$$E = -\frac{fM}{2a}, \qquad n = \sqrt{\frac{fM}{a^3}} \tag{11}$$

per avere

$$\frac{2\pi}{n}\left(2E + \frac{2fM}{a}\right) = 2\pi\sqrt{fMa}.$$

Segue in conformità dalla (10')

$$\frac{V}{2\pi} = \sqrt{fMa} - c, \tag{10''}$$

donde apparisce che, assieme a V e a c, rimane costante il prodotto

$$fMa.$$

Perciò a tende necessariamente a zero quando M cresce indefinitamente (in modo lento ma del resto qualunque), e tende all'∞, qualora M convenga a zero (sempre in modo lento, ma con legge qualsiasi); c. d. d.

II.

Il problema dei due corpi gravitanti e rotanti.

6. - *Espressioni della forza viva e della funzione delle forze* (a meno del fattore $\frac{mm'}{M}$). *Variabili coniugate. Equazioni canoniche. Riduzione conseguente della conoscenza di tre integrali.* — Consideriamo ora più generalmente due corpi solidi, soggetti alla mutua attrazione, da un lato abbastanza distanti perchè tale attrazione si esplichi come se le due masse m, m' fossero concentrate nei rispettivi baricentri P, P', dall'altro abbastanza estesi e rapidamente rotanti perchè non sia trascurabile la forza viva dovuta al moto di rotazione in confronto di quella spettante al moto traslatorio baricentrale.

Supporremo in particolare che la rotazione di ciascuno dei due corpi avvenga esclusivamente attorno all'asse (baricentrale), normale al piano fisso in cui avviene il moto dei due baricentri P, P'. Ammetteremo anzi che tali due assi di rotazione siano principali di inerzia (pel rispettivo baricentro). Con ciò la assunta specificazione dei due atti di moto non richiede appositi vincoli, bastando che essa si verifichi inizialmente perchè seguiti a sussistere in qualsiasi istante.

Ove si indichino con I, I' i momenti di inerzia di ciascuno dei due corpi attorno agli assi suaccennati, con ω, ω' le rispettive velocità angolari, si ha

$$\frac{1}{2}(I\omega^2 + I'\omega'^2)$$

quale espressione del contributo di forza viva proveniente dalle rotazioni. Tale contributo va aggiunto alla T del n.° 4. Applicando anche ad esso, come già alla T, il fattore moltiplicativo $\frac{M}{mm'}$, e ponendo per brevità di scrittura

$$\lambda^2 = \frac{MI}{mm'}, \qquad \lambda'^2 = \frac{MI'}{mm'} \tag{12}$$

(con che λ e λ' hanno le dimensioni di una lunghezza), il problema si tratterà come se la forza viva totale avesse l'espressione

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}\lambda^2\omega^2 + \frac{1}{2}\lambda'^2\omega'^2,$$

e la funzione delle forze quella stessa dell'esempio I, cioè

$$\mathfrak{U} = \frac{fM}{r}.$$

Chiamiamo φ e φ' gli angoli che definiscono le orientazioni dei due corpi attorno ai rispettivi assi di rotazione, contandoli entrambi a partire dalla retta (mobile) PP'. Saranno $\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}'$ velocità angolari *relative* dei due corpi; mentre le loro velocità angolari *assolute* ω, ω', atteso il significato di ϑ (n.° 4) varranno

$$\omega = \dot{\vartheta} + \dot{\varphi}, \qquad \omega' = \dot{\vartheta}' + \dot{\varphi}'. \tag{13}$$

Al pari di ϑ, anche φ e φ' sono coordinate ignorabili perchè non appariscono esplicitamente nè in $\mathfrak{T}$, nè in $\mathfrak{U}$. Sussistono quindi tre integrali primi. Uno, che fa riscontro alla (8) del n.° 4, si scrive, avuto riguardo alle (13),

$$p_\vartheta = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\vartheta}} = r^2\dot{\vartheta} + \lambda^2\omega + \lambda'^2\omega' = c, \tag{14}$$

mentre gli altri due (che corrispondono ai due ulteriori gradi di libertà del problema attuale), cioè

$$p_\varphi = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\varphi}} = \lambda^2\omega = \gamma = \text{cost.}, \tag{15}$$

$$p_{\varphi'} = \frac{\partial \mathfrak{T}}{\partial \dot{\varphi}'} = \lambda'^2\omega' = \gamma' = \text{cost.}, \tag{16}$$

esprimono la costanza delle velocità angolari (assolute) ω, ω'.

La funzione

$$H = \mathfrak{T} - \mathfrak{U},$$

da cui si eliminino $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi}'$, facendovi apparire le coniugate $p_{\dot{\vartheta}}$, $p_{\dot{\varphi}}$, $p_{\dot{\varphi}'}$, e, per esse, addirittura i loro valori costanti c, γ, γ', assume l'aspetto

$$H = \frac{1}{2}\left\{p_r^2 + \frac{(c-\gamma-\gamma')^2}{r^2} + \left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{\gamma'}{\lambda'}\right)^2\right\} - \frac{fM}{r} \tag{17}$$

e dà luogo, per la determinazione di r, p_r, ad un sistema canonico ridotto con un solo grado di libertà, rientrando qui ancora nello schema (2) del n.° 3.

7. - *Variazione lenta di parametri contenuti in H. Invariante adiabatico V. Sua espressione esplicita.* — Supponiamo che sia i parametri strutturali del sistema dei due corpi (gravitanti e rotanti) M, λ, λ', sia i momenti c, γ, γ', anzichè mantenersi rigorosamente costanti, possano subire (per influenze non contemplate nell'impostazione precedente) variazioni di qualsivoglia natura, però molto lente. Sussisterà in tali ipotesi, secondo la premessa generale del n.° 3, un invariante adiabatico

$$V(M, \lambda, \lambda' | c, \gamma, \gamma' | E)$$

corrispondente all'area racchiusa da una generica curva

$$H = E$$

nel piano cartesiano (r, p_r).

Per la valutazione di V non occorre alcun nuovo calcolo. Da un lato si osserva che l'equazione $H = E$, in cui H ha l'espressione (17), può ricondursi alla forma (9) solo che si ponga

$$E_1 = E + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\lambda}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma'}{\lambda'}\right)^2, \tag{18}$$

$$c_1 = c - \gamma - \gamma'. \tag{19}$$

Con ciò infatti l'equazione stessa si scrive

$$\frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{c_1^2}{r^2}\right) - \frac{fM}{r} = E_1.$$

D'altro lato il secondo membro della (10″) (cioè il valore di $\frac{V}{2\pi}$, corrispondente alla espressione (9) di H) può farsi dipendere unicamente da E e da c (oltre che da fM). Basta riporvi per a il suo valore $-\frac{fM}{2E}$ fornito dalla prima delle (11), con che esso diviene

$$\frac{fM}{\sqrt{-2E}} - c.$$

Scrivendovi materialmente E_1 e c_1 per E e c, se ne desume senz'altro la $\frac{V}{2\pi}$ spettante al problema attuale.

L'espressione esplicita dell'invariante adiabatico V è data pertanto da

$$\frac{V}{2\pi} = \frac{fM}{\sqrt{-2E_1}} - c_1, \tag{20}$$

E_1 e c_1 designando le combinazioni (18) *e* (19) *dei parametri che, come risulta dalla* (17), *intervengono nella presente questione.*

8. - *Effetti secolari delle maree.* — Facciamo una applicazione dell'invariante adiabatico testè assegnato, supponendo che varino lentamente (e indipendentemente dagli altri parametri) i due argomenti γ, γ', i quali, in base alle (15), (16) e (12), rappresentano i momenti assiali delle quantità di moto dovute alla rotazione dei due corpi, moltiplicati per il fattore costante $\frac{M}{mm'}$.

Un esempio cospicuo, studiato sistematicamente da GIORGIO DARWIN, in cui questa circostanza si presenta, si ha considerando il fenomeno delle maree, sia in senso proprio, cioè provenienti da eventuali oceani che in tutto od in parte ricoprano la superficie dei due corpi, sia che si intendano sotto questo nome le così dette maree solide, consistenti in deformazioni elastiche dei nuclei. Comunque, si tratta di fenomeni periodici o quasi-periodici, i quali sono inevitabilmente accompagnati da piccole azioni dissipative. Dato il loro incessante rinnovellarsi, l'effetto generale deve essere quello di far decrescere (lentissimamente, ma senza compenso) l'energia totale E del sistema.

Basta tener conto di questa circostanza evidente per ricavare una notevole previsione asintotica circa lo stato limite del sistema.

Infatti, purchè, ben si intende, nulla intervenga a modificare le premesse, dovrà la E, considerata come funzione di γ, γ', tendere ad un valore minimo. Perciò, nello stato finale che si tratta di caratterizzare, dovrà aversi necessariamente [1]

$$\frac{\partial E}{\partial \gamma} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial \gamma'} = 0. \tag{21}$$

La relazione (adiabatica) fra E, γ e γ' è fornita da

$$\frac{V}{2\pi} = \text{cost.}, \tag{22}$$

in cui $\frac{V}{2\pi}$ ha l'espressione (20), e le quantità fM, λ, λ', c devono considerarsi indipendenti da γ, γ', anzi addirittura costanti, allorchè si contemplino unicamente effetti di marea, dovuti a forze mutue, le quali non alterano nè il momento totale c della quantità di moto, nè M, nè (almeno sensibilmente) le altre due caratteristiche di massa λ, λ'.

---

[1] In quanto γ e γ', possono *a priori* variare comunque, e non c'è quindi da considerare anche la eventualità di estremi di frontiera.

Avendosi dalla (22)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \gamma}+\dfrac{\partial V}{\partial E}\dfrac{\partial E}{\partial \gamma}=0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial \gamma'}+\dfrac{\partial V}{\partial E}\dfrac{\partial E}{\partial \gamma'}=0, \end{cases}$$

le condizioni limiti (21) divengono

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial \gamma'}=0, \tag{21'}$$

ossia, avuto riguardo alla espressione (20) di V e alle (18) e (19),

$$\begin{cases} -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\gamma}{\lambda^2}+1=0, \\ -fM(-2E_1)^{-\frac{3}{2}}\dfrac{\gamma'}{\lambda'^2}+1=0. \end{cases}$$

Ora $(-2E_1)^{\frac{3}{2}}:fM$ non è altro che *il moto medio* n, cioè il valore medio della velocità angolare con cui ruota ciascuno dei due corpi, o, se si vuole la loro congiungente PP': questo si può desumere dalle (11), eliminandone a e tenendo conto che alla E di quel problema va nel caso presente sostituita la E_1.

D'altra parte, per le (15) e (16), $\frac{\gamma}{\lambda^2}$, $\frac{\gamma'}{\lambda'^2}$ si identificano con le velocità angolari ω, ω' dei moti di rotazione dei due corpi.

Le precedenti equazioni assumono pertanto la forma semplicissima

$$-\frac{\omega}{n}+1=0, \qquad -\frac{\omega'}{n}+1=0,$$

ossia in definitiva

$$\omega=\omega'=n. \tag{21''}$$

Ne consegue che l'effetto secolare (*in senso asintotico*) *di una lieve ma incessante dissipatività* (quale quella che accompagna i fenomeni di marea) *è di eguagliare le durate di rotazione di entrambi i corpi a quella della loro rivoluzione.*

Nel caso particolare Terra-Luna tale condizione limite è notoriamente già raggiunta per quanto concerne la Luna, mentre ne siamo ancora discosti per la Terra.

In linea storica va rilevato che l'idea generale di spiegare con una considerazione energetica l'eguaglianza fra le durate della rotazione e della rivoluzione lunare è dovuta a Lord KELVIN (1). Ma in quell'epoca non si era ancora presentata la nozione di invariante adiabatico, e il KELVIN si era accontentato di sfruttare direttamente l'integrale dell'energia $H=E$ nel caso particolare in cui, rimanendo costanti anche gli argomenti r e p_r, si può ragionare sulla $H=E$ come abbiamo fatto or ora sulla $V=$cost. Si trattava quindi, nel geniale ravvi-

(1) Cfr. THOMSON e TAIT: *Treatise on natural philosophy*, Parte II (Cambridge University Press); new edition, 1883; appendice G, § b) (di G. H. DARWIN), pp. 505-517.

cinamento indicato dal KELVIN, unicamente del caso particolare di moti circolari uniformi, ai quali del resto si era pure limitato il DARWIN, trascurando inoltre — ciò che per KELVIN non sarebbe stato essenziale — la rotazione dei due corpi.

L'uso degli invarianti adiabatici (pur circoscritto allo schema più elementare che concerne i sistemi canonici con un solo grado di libertà) consente invece, come si è visto, di riconoscere con eguale, se non addirittura maggiore, semplicità, che lo stesso comportamento asintotico delle rotazioni vale anche per il caso generale di un moto ellittico qualsiasi.

V. NOBILE (Napoli - Italia)

SULLA NECESSITÀ E POSSIBILITÀ DI DEFINIRE IN MANIERA RIGOROSA I TRIEDRI DI RIFERIMENTO PER LO STUDIO DEI MOTI STELLARI

Il problema massimo della moderna astronomia gravitazionale è presentemente quello di riconoscere la configurazione dell'universo siderale accessibile ai nostri mezzi di osservazione e di studiare, col sussidio della analisi matematica e delle osservazioni opportunamente e strettamente coordinate, i movimenti delle diverse parti di esso.

Come è ben noto, l'insieme delle stelle cosidette fisse, che aveva fornito fin dai primordi dell'astronomia il più perfetto dei riferimenti pel moto dei pianeti e che in tempi più recenti aveva permesso di materializzare, per così dire, le terne inerziali delle quali si postula la esistenza nella dinamica newtoniana, ci si mostra ora, dopo gli ultimi due secoli di meraviglioso progresso della tecnica strumentale e in seguito all'enorme cammino fatto nell'astronomia pratica di precisione, come un sistema in continua deformazione. Il vocabolo di « moto proprio » stellare, introdotto in un primo tempo per caratterizzare gli spostamenti di poche stelle rispetto all'aggruppamento costituito dall'insieme delle altre e considerato come invariabile (o, ciò che torna lo stesso, rispetto ad una terna di assi rigidamente collegata a quelle stelle) viene così a perdere ogni significato perchè quegli aggruppamenti invariabili non esistono in natura.

Quale può dunque essere la nozione matematicamente e meccanicamente rigorosa di moto proprio da sostituire a quella semplice che viene a mancare? Per rispondere a questa domanda occorre circoscrivere e delimitare i problemi che si hanno in vista. Bisogna ricordare che dagli imponenti lavori di statistica stellare eseguiti nell'epoca precitata e dalla mirabile sintesi del SEELIGER (che ha trovato in epoca posteriore conferme sempre più concludenti) risulta abbastanza bene stabilito che tutto l'insieme delle stelle individualmente percettibili e inoltre quello degli ammassi globulari (risolubili) e molte nebulose possono considerarsi come costituenti un tutto isolato dal resto dell'universo (ammasso galattico) nell'interno del quale le attrazioni mutue non sarebbero del tutto trascurabili. Si ha così un sistema dinamico vero e proprio, analogo al nostro sistema planetario ma immensamente più vasto; e il moto relativo dei corpi di esso offre un problema analogo, sebbene senza confronto più arduo, di quello incontrato nello studio

del movimento del sistema planetario, e l'esame del nuovo problema rappresenterebbe così la seconda e non ultima tappa della astronomia gravitazionale.

Quali che siano i procedimenti coi quali si potrà tentare di costruire la teoria del movimento di un simile sistema, è ben chiaro che lo stato cinetico dell'ammasso nel moto relativo rispetto ad una delle stelle (e pertanto gli elementi della deformazione intrinseca di esso) è definito quando si conoscano le velocità delle stelle rispetto ad una terna di *orientamento* assoluto colla origine nel punto scelto (punto che è sempre lecito immaginare coincidente col centro del Sole).

Una siffatta terna, che nel caso della indeformabilità dell'aggruppamento stellare permetterebbe di riconoscere la rotazione assoluta di esso, servirà, nel caso reale a trovare la distribuzione effettiva delle velocità (relative all'origine).

È solo in base ad un siffatto riferimento che si può, con rigore adeguato alla importanza del problema, parlare di moti proprii e di velocità stellari. La ricerca di leggi, anche provvisorie, sul coordinamento delle velocità è infatti il primo e più elementare compito che ci imponga la meccanica del sistema galattico perchè, non potendosi pensare nell'epoca attuale ad affrontare direttamente il problema analitico della integrazione delle equazioni del moto, si deve tendere a dedurre dalle osservazioni dei postulati intermediarii che permettano ai ricercatori di avanzare contemporaneamente sulla via della deduzione teorica e su quella della osservazione, porgendosi lume a vicenda e senza stare ad attendere progressi immancabili ma presumibilmente assai lenti della teoria matematica pura.

È bene notare qui incidentalmente come, risoluto che sia in modo soddisfacente il problema del riferimento così inteso, la distinzione, indubbiamente artificiosa, dei moti proprii in peculiari e parallattici che ancora si trova alla base delle attuali ricerche, sia destinata a sparire, perchè il problema della deformazione intrinseca dell'ammasso non ha bisogno, per essere enunciato e risoluto, di quel concetto. La conoscenza degli elementi del cosidetto moto proprio solare, cioè del moto relativo del Sole rispetto all'ammasso supposto solidificato nella configurazione attuale, può dunque avere un interesse transitorio ma non ha valore essenziale pel progresso della teoria.

Ciò premesso, si impone il quesito: è possibile in base agli elementi che ci forniscono le osservazioni dell'epoca attuale definire una di quelle terne?

Detti $\mathbf{v}_i$ e $\mathbf{v}_0$ rispettivamente i vettori delle velocità assolute di una stella e dell'osservatore O rispetto ad una terna inerziale esterna all'intero ammasso galattico (velocità definite solo a meno di un vettore additivo costante) è la differenza $\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0$ concettualmente ben definita, che l'osservatore ha il compito di misurare. Il problema richiede (poichè l'osservatore non può *materializzare* un triedro di orientamento assoluto) la conoscenza della rotazione assoluta di un triedro intermediario, che può essere o uno di quelli abituali dell'astronomia pel riferimento immediato delle direzioni stellari, oppure, ciò che sembra preferibile, un triedro collegato a determinate stelle e svincolato del sistema planetario, perchè,

detto S_{ri}' il vettore della velocità relativa di una stella S_i rispetto al triedro mobile, si ha dalla cinematica la relazione vettoriale

$$\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_0 = S_{ri}' + \Omega \wedge (S_i - 0)$$

che fornisce in coordinate cartesiane tre equazioni

$$v_{ix} - v_{0x} = \frac{dx_i}{dt} + qz_i - ry_i$$
$$v_{iy} - v_{0y} = \frac{dy_i}{dt} + rx_i - pz_i$$
$$v_{iz} - v_{0z} = \frac{dz_i}{dt} + py_i - qx_i .$$

Se il triedro intermediario è direttamente collegato a direzioni stellari bisogna determinare i valori numerici delle p, q, r. Se invece quel triedro è uno di quelli dell'astronomia sferica, cioè il triedro che definisce le coordinate equatoriali o eclittiche medie ad una data epoca, bisognerà immaginare le p, q, r, come funzioni analitiche note del tempo e di un gruppo di costanti le quali ultime costituiscono le incognite che prendono il luogo di p, q, r.

Se esistesse, come fino ad epoca molto vicina è stato creduto, un cospicuo aggruppamento di stelle (comprendente il Sole) che si potesse considerare come indeformabile, le differenze dei primi membri sarebbero tutte nulle e il problema di determinare la rotazione del triedro intermediario utilizzato sarebbe estremamente semplice, perchè consistente nella risoluzione, col metodo dei minimi quadrati di un sistema di equazioni lineari a tre o più incognite.

Ma quella ipotesi semplificatrice non è più sostenibile: le equazioni scritte dovrebbero dunque servire a determinare non solo le p, q, r (oppure, come abbiamo detto le costanti di integrazione che si presentano nella teoria del moto orbitale e di rotazione della Terra) ma anche le differenze dei primi membri: problema evidentemente inderminato perchè consistente nella risoluzione di un sistema di $3n$ equazioni (se n è il numero di stelle utilizzate) fra almeno $3n+3$ incognite.

Per rimuovere la indeterminazione rappresentata schematicamente nelle nostre equazioni, si ricorre nella pratica astronomica a procedimenti ed ipotesi sussidiarie che io ho esaminato in un lavoro di imminente pubblicazione e che danno luogo a dubbii di non poca gravità, sia riguardo ai particolari sia pel concetto informatore, che è quello di attribuire ai moti proprii stellari, in una prima fase dei calcoli, il carattere di un fenomeno puramente *accidentale*, con che si ottiene una soluzione priva di ogni significato meccanico rigoroso, in quanto che essenzialmente empirica, e sopratutto non avente carattere di univocità, perchè il sistema dei moti proprii che ne risulta *varia col variare del gruppo di stelle utilizzato.*

Soluzioni siffatte, che possono riuscire provvisoriamente di qualche utilità per

questioni e problemi paticolari, non possono pertanto offrire la base per un esame approfondito delle leggi di coordinazione dei moti proprii.

Bisogna dunque o completare il sistema qui scritto con altre equazioni in numero non minore di tre, oppure ricorrere, come abbiamo innanzi accennato, ad ipotesi e postulati intermediarii da sottoporre poi al controllo delle misure, procedimenti i quali, pur facendoci deviare dalle direttive della stretta deduzione matematica la quale esigerebbe che tutto potesse desumersi dalla legge di gravitazione, non ci facciano cadere in pieno nell'empirismo. In un primo abbozzo di un procedimento fondato su tali concetti e pubblicato nel 1924 (1) ho indicato una soluzione basata sul *postulato* dinamico dell'annullarsi, in prima approssimazione, delle accelerazioni assolute delle stelle (compreso fra esse il Sole) ma nello studio più completo innanzi citato ho sostituito a quel postulato un altro più ampio, consistente nell'ammettere, come già altre volte è stato fatto in ricerche aventi altro indirizzo e dovute a SCHWARZSCHILD, TURNER, EDDINGTON, che l'ammasso galattico abbia raggiunto lo stato di moto stazionario e che la risultante della sua azione sopra un determinato punto interno sia assimilabile a quella dovuta ad un ellissoide con distribuzione di massa continua e stratificazione omogenea. Da una forma molto semplificata del potenziale galattico (considerazione legittimata dalla presumibile tenuità di questa azione) e dopo aver notato che il vettore $S_{ai}'' - O_a''$ si deduce allora da $S_i - O$ applicando a quest'ultimo una omografia vettoriale α, io ottengo, eguagliando la espressione di $S_{ai}'' - O_a''$ che si ottiene dal teorema di Coriolis al vettore $\alpha(S_i - O)$, la relazione vettoriale

$$\varrho\{(\beta-\alpha)s+2\Omega\wedge s'+s''\}+2\varrho'\{\Omega\wedge s'+s'\}+\varrho''s=0,$$

dove l'omografia β dipende da Ω^2 e da Ω'.

Questa, espressa in coordinate cartesiane relative al triedro T, dà luogo a tre equazioni omogenee in ϱ, ϱ' e ϱ'', le quali debbono presentare, evidentemente soluzioni diverse da quella costituita dai valori nulli. Dovrà essere quindi soddisfatta la condizione

$$[(\beta-\alpha)\mathrm{s}+2\Omega\wedge\mathrm{s}'+\mathrm{s}'']\wedge(\Omega\wedge\mathrm{s}+\mathrm{s}')\times\mathrm{s}=0.$$

Questa equazione, del tutto rigorosa, *racchiude completamente la soluzione del problema del riferimento,* la quale rimane subordinata, dal punto di vista teorico all'attendibilità dell'ipotesi a priori sul potenziale galattico e permette di sottoporla ad un controllo rigoroso ed esauriente, dal punto di vista pratico alla possibilità di determinare mediante la osservazione le quantità che figurano come coefficienti, essendo incognite le componenti p, q, r di Ω e p', q', r' di Ω' che

---

(1) *Sulla possibilità di un assetto rigorosamente razionale dei fondamenti della Astronomia stellare di posizione.* (Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei; vol. XXXIII fascicolo 11°).

figura in β e i parametri λ, μ, ν, coefficienti della omografia di accelerazione e che esprimono l'effetto della attrazione galattica.

Non mi diffonderò in considerazioni particolari in base alle quali si giunge a semplificare quella equazione e a renderla lineare. Dirò solo che la via più conveniente è quella di escludere, in un primo calcolo, i termini galattici e partire dalla forma seguente che esprimo in coordinate cartesiane

$$(3\alpha s'^2+\alpha'')p+(3\beta s'^2+\beta'')q+(3\gamma s'^2+\gamma'')r-(p'\alpha'+q'\beta'+r'\gamma')-\Delta=0,$$

dove è

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

Abbiamo così che ogni stella dà luogo ad una equazione lineare fra le sei incognite principali: la risoluzione col metodo dei minimi quadrati del sistema darà i valori più probabili delle incognite, gli errori medii dai quali quei valori potranno presumersi affetti e, ciò che è poi del più alto interesse, permetterà di valutare, in base alla entità dei residui, la possibilità o meno di misurare coi nostri mezzi attuali i termini galattici. I valori trovati potranno poi essere perfezionati col ritorno alla equazione rigorosa, ma su tal punto non mi soffermerò anche perchè non credo che uno schema preciso di calcolo possa tracciarsi senza essere in presenza dei primi risultati di osservazione. Voglio piuttosto notare come, note le p, q, r; p', q', r' le tre equazioni lineari omogenee in ϱ, ϱ' e ϱ'' diano, per ogni stella i valori dei rapporti

$$\frac{\varrho}{\varrho'} \quad \text{e} \quad \frac{\varrho''}{\varrho'},$$

dei quali il primo ha sopratutto un considerevole interesse perchè fornisce (note che siano dalle osservazioni spettroscopiche dirette le componenti radiali ϱ') le distanze delle stelle, con metodo rigoroso applicabile a tutte le stelle abbastanza luminose.

La soluzione completa e razionale del problema del riferimento pei moti stellari e di quello delle distanze — e pertanto l'acquisto di tutti gli elementi per la costruzione della cinematica dell'ammasso galattico e per la determinazione della configurazione geometrica di esso, in attesa che la dinamica del sistema possa costruirsi — dipendono dunque, in ultima analisi, dalla possibilità di misurare con errori inferiori all'importo delle quantità stesse, i valori delle α'', β'', γ'', linearmente dipendenti dalle derivate seconde delle mutue distanze angolari fra le stelle. Se si assume come triedro intermediario quello corrispondente al sistema delle coordinate equatoriali medie ad una data epoca, le α, β, γ (coseni direttori di una stella qualunque) sarebbero espressi, in funzione delle ascensioni rette e declinazioni A e D, colle formole

$$\alpha=\cos A \cos D$$
$$\beta=\operatorname{sen} A \cos D$$
$$\gamma=\operatorname{sen} D.$$

Le derivate seconde α'', β'', γ'' rispetto al tempo sono allora dello stesso ordine di grandezza delle derivate seconde di A e D, le quali non sono certo evanescenti, come è ben noto agli astronomi, quando si consideri la variazione totale, dovuta alla precessione: basta questa osservazione per assicurarci che il metodo qui esposto è certamente atto a dare i valori numerici delle componenti p, q, r, nel caso dei triedri dell'astronomia sferica attuale ai fini di *una revisione su basi rigorose delle costanti fondamentali dell'Astronomia.* Ma è ben chiara anche la convenienza di avvalersi di un riferimento assai più semplice col definire un triedro intermediario collegato a direzioni stellari. Si possono per esempio scegliere due stelle S_1 ed S_2 e quindi dirigere l'asse Ox verso S_1, assumere come piano Oxy quello OS_1S_2 e prendere per asse Oy la perpendicolare condotta ad Ox nel piano OS_1S_2 e per asse z la perpendicolare da O al piano stesso.

La determinazione delle α', β', γ'; α'', β'', γ'' relative ad una data epoca t_0 si otterrà dalle misure ripetute delle α, β, γ per un periodo sufficientemente lungo di anni e quindi dalla risoluzione, col metodo dei minimi quadrati, di sistemi lineari del tipo

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_0' t + \frac{\alpha_0''}{2} t^2.$$

Sono misure che richiedono le più delicate cure e la massima precisione: esse implicano, se fatte con metodo fotografico, la determinazione delle grandi distanze angolari, con refrattori a corto fuoco e quindi con obbiettivo e metodi di riduzione perfezionatissimi ed anche, forse, l'uso di metodi speciali per affinare, in base a criterii più rigorosi, le puntate sulle immagini fotografiche. Ma ci sia lecito esprimere, concludendo questo breve esposto, la più ferma fede nei progressi immancabili della fisica moderna, che ha fatto negli ultimi venti anni il cammino di secoli e che verrà indubbiamente a portare alla astronomia rapidi ed efficaci soccorsi.

E. DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE (Firenze - Italia)

MODI TIPICI DI CALCOLO PER LA FORMA E IL VOLUME DEGLI ASTRI ROTANTI (1)

1. - In base alla legge di gravitazione (Newtoniana) restano definite le formole « naturali » esprimenti la *densità* e la *pressione* in una massa (*astro*) avente la propria materia (la cui densità sia adattabile alla pressione) assestata in equilibrio di gravitazione.

2. - Relazioni di base per le dette formole, sono state dapprima queste riguardanti l'*astro fermo* (e necessariamente sferico),

se *coerente*:

$$p=\frac{4\pi}{a^2}\int_a^1\left[\delta\cdot da\cdot\int_0^a a^2\delta\cdot da\right], \tag{1}$$

cioè, posto $a^2p=q$,

$$\delta\frac{d^2q}{da^2}-\frac{d\delta}{da}\cdot\frac{dq}{da}=-4\pi a^2\delta^3, \tag{2}$$

e se a *tensione elastica*:

$$p=\frac{4\pi}{a^2}\int_a^1\left[\gamma\delta\cdot da\cdot\int_0^a a^2\delta\cdot da\right], \tag{3}$$

cioè, essendovi $p=\gamma\delta$,

$$2p^2-ap\frac{dp}{da}+a^2p\frac{d^2p}{da^2}-a^2\left(\frac{dp}{da}\right)^2=-4\pi p^3\frac{a^2}{\gamma}; \tag{4}$$

poi, rispetto all'*astro rotante* e con riferimento al semiasse equatoriale, le relazioni di base sono state di questo tipo:

$$p=\frac{4\pi}{a^2}\int_a^1\left[(\gamma)\delta\cdot da\cdot\int_0^a\frac{l_p^2}{l_e^2}\delta a^2\cdot da\right]-\frac{M\chi}{a^2}\int_a^1 a^3\delta\cdot da; \tag{5}$$

(1) Da uno studio dell'A.: *Le formole naturali per la densità e la pressione negli astri e per la forma degli astri* (non ancora pubblicato e prettamente originale) e da uno stralcio di detto studio: *La formola naturale per la densità negli astri*, comparso nella Rivista « L'Universo » del marzo 1928.

rimanendo sempre simboli i seguenti:

1, *raggio*, oppure *semiasse equatoriale*,

δ, *densità* (secondo la Fisica),

p, *pressione* (per unità di superficie, con unità di misura la attrazione fra masse 1 a distanza 1),

a, *distanza dal centro di figura*,

γ, *coefficiente di pressione*, collegato dalla relazione $\gamma = 1_\delta + \theta$ al « coefficiente Fisico di tensione » θ,

l_e e l_p, *distanze di gravitazione statiche*, relative ai semiassi equatoriale e polare,

χ, *coefficiente per la forza centrifuga*, cioè rapporto fra la forza centrifuga e la attrazione riferite alle unità di lunghezza e di massa (rapporto che per il Globo Terrestre ha il valore di $\frac{1}{289} = 0{,}00346$).

3. - Risolte (con esatta integrazione) le suddette relazioni, si è trovata, persistente per ogni caso di astro, questa *formola naturale di densità* [1]

$$\delta = h(1 - ma^2)e^{-\frac{3}{2}ma^2}, \tag{6}$$

essendovi comparsi la *densità centrale* h e il *coefficiente* m *caratteristico dello scalamento della densità*. E le corrispondenti *formole naturali di pressione* sono state le seguenti:

per *astro coerente fermo*:

$$p = \frac{\pi h^2}{81 a^2}\{(2 + 6ma^2 - 18m^2a^4)e^{-3ma^2} - (2 + 6m - 18m^2)e^{-3m}\}; \tag{7}$$

per *astro a tensione elastica fermo*:

$$p = \gamma\delta = \frac{ch}{a^2}\left[e^{\frac{4\pi h}{9m}e^{-\frac{3}{2}ma^2}} - e^{\frac{4\pi h}{9m}e^{-\frac{3}{2}}}\right], \tag{8}$$

dove c è una costante occasionale;

---

[1] Il TISSERAND nella sua *Mécanique céleste* cita (a pag. 242 del Tomo II) che il LAPLACE e il ROCHE, per avvisare a una « formola di densità », hanno considerato la stessa relazione (1); che il LAPLACE si è attenuto alla formola $dp = kp \cdot d\delta$, accettando la ipotesi di LEGENDRE per $\delta = \Phi(a)$; e che il ROCHE, rispetto a quella relazione da riconoscere « come « equazione differenziale di secondo ordine per determinare δ in funzione di a, *senza ricer-* « *carne l'integrale generale* ha mostrato che si può soddisfarvi per mezzo di una funzione « della forma $\delta = \delta_0(1 - ka^2)$, e per tale via è arrivato alla propria ipotesi della costituzione interna della Terra ».

Con la formola del ROCHE è da citare quella del HELMERT, pure relativa al Globo Terrestre, $\delta = \delta_0(1 - k_1a^2 + k_2a^4)$, la quale ne è un perfezionamento. Entrambe si rivelano come stralcio della *formola naturale*, ora trovata (6), ridotta in serie.

per *astro coerente rotante*, con riferimento al semiasse equatoriale,

$$(9)\quad p=\frac{\pi h^2}{81a^2}\cdot\frac{l_p^2}{l_e^2}\left\{\begin{array}{l}(2+6ma^2-18m^2a^4)e^{-3ma^2}-(2+6m-18m^2)e^{-3m}+\\ -\dfrac{M\chi}{\pi h}\cdot\dfrac{l_e^2}{l_p^2}\left[(6+9ma^2+27m^2a^4)e^{-\frac{3}{2}ma^2}-(6+9m+27m^2)e^{-\frac{3}{2}m}\right]\end{array}\right\},$$

e per *astro a tensione elastica, rotante*:

$p=$ espressione congenere alle (8) e (9).

4. - La persistenza di una *unica formola di densità* ha sùbito posto in evidenza che valgono soltanto le *posizioni corrispettive finali delle densità*, in una massa qualsiasi, a soddisfare alla gravitazione, come se le varie forze che sono state operanti insieme alla gravitazione per rendere stabili quelle posizioni si sieno annullate ad effetto ottenuto. Quindi, in accordo a tale condizione, le ricerche relative alla forma e al volume dell'astro rotante qualsiasi hanno potuto restringersi al caso di materia coerente.

5. - Secondo la formola di densità (6), l'eguaglianza $1-m\varrho^2=0$ dà la distanza $\frac{1}{\sqrt{m}}$ alla quale la densità può arrivare con valore zero; e, per la massa fino ad $a=1$, si ha il valore della *densità media* dalla formola

$$(10)\qquad \delta_\eta=he^{-\frac{3}{2}m}.$$

6. - Se nella espressione (7) si avvera la eguaglianza $2+6m-18m^2=0$, per cui $m=0{,}539$ e $\varrho=1{,}36$, allora con quell'm l'astro è « *completabile* », ossia gli può essere aggiunta materia fino a farlo arrivare alla densità zero, senza che per ciò vi varii l'assestamento di densità. (L'astro « *completo* » è puramente ideale per materia coerente, ed è invece effettivo e obbligatorio per materia a tensione elastica).

Analogamente, in base alla formola (9), si ha condizione di astro *completabile*, secondo il semiasse equatoriale, quando

$$(11)\qquad 2+6m_e-18m_e^2=\frac{M\chi}{\pi h}\cdot\frac{l_e^2}{l_p^2}\cdot e^{\frac{3}{2}m_e}\cdot(6+9m_e+27m_e^2);$$

e questa stessa relazione è riferibile all'astro « *completo* ».

7. - Nella relazione (11), il rapporto $\frac{l_e^2}{l_p^2}$, è correttivo contro il rapporto delle densità medie quali offerte, secondo i due semiassi, dalla formola (10), e riferite a comune unità di misura; cosicchè si viene ad avere l'eguaglianza

$$(12)\qquad \frac{l_e^2}{l_p^2}=\frac{e^{\frac{3}{2}m_p}}{e^{\frac{3}{2}m_e}};$$

ed analogamente, per ogni semidiametro di inclinazione generica α, si viene ad avere

$$\frac{l_\alpha^2}{l_p^2} = \frac{e^{\frac{3}{2}} m_p}{e^{\frac{3}{2}} m_\alpha}; \tag{13}$$

donde consegue che resta costante il coefficiente

$$\frac{M\chi}{\pi h} \cdot \frac{l_e^2}{l_p^2} \cdot e^{\frac{3}{2}} m_e = \frac{M\chi}{\pi h} \cdot e^{\frac{3}{2}} m_p = \frac{V_p \chi}{\pi} = B; \tag{14}$$

e la relazione (11) può apparire con questa forma:

$$2\varrho_e^4 + 6\varrho_e^2 - 18 = B(6\varrho_e^4 + 9\varrho_e^2 + 27). \tag{15}$$

8. - Ma dunque si può ottenere la *equazione della curva meridiana dell'astro rotante completo*, solo che si riesca a passare dalla relazione (15) ad una relazione generica per ogni semidiametro di inclinazione α. Non intaccando il valore del χ riferito al semiasse equatoriale, ossia lasciando fisso il B, c'è da addossare ai ϱ retti dal B la riduzione di valore, causata dalla forza centrifuga, computandola secondo la misura $\frac{\varrho_\alpha \cdot \cos \alpha}{\varrho_\alpha}$. Ed ecco raggiunta la equazione cercata, espressa in coordinate polari:

$$2\varrho^4 + 6\varrho^2 - 18 = B(6\varrho^4 \cdot \cos^4 \alpha + 9\varrho^2 \cdot \cos^2 \alpha + 27); \tag{16}$$

donde la formola:

$$\varrho^2 = \frac{1}{4 - 12B \cdot \cos^4 \alpha} [-6 + 9B \cdot \cos^2 \alpha + \\ + \sqrt{180 + 216B - 108B \cdot \cos^2 \alpha - (432B + 567B^2) \cos^4 \alpha}]; \tag{17}$$

equivalente a quest'altra in coordinate ortogonali:

$$y^2 = -1{,}5 - x^2 + \frac{1}{4}\sqrt{180 + 216B - 72Bx^2 - 48Bx^4}. \tag{18}$$

9. - L'equazione (16), da dirsi *equazione della curva astromorfa* o *equazione astromorfa*, viene a valere per ogni caso di astro rotante; e cioè: per *astro coerente* « *completo* » (ideale); per *astro coerente* « *ridotto* » e « *completabile* » (di superficie esterna omotetica a quella del completo); per *astro coerente* « *ridotto* » e « *non completabile* » (riferibile ad astro completabile di superficie esterna omotetica); per *astro a tensione elastica* (sempre completo e che presenta alla azione della forza centrifuga soltanto le densità effettive vincolate dalla persistente formola di densità, come da n.° 4); per astro a *nucleo* e *involucri* (di qualità e stato fisico diversi e perciò con singoli m e con h virtuali per gli involucri).

10. - L'equazione astromorfa (16), riferita ad $\alpha=90^\circ$ e ad $\alpha=0^\circ$, fornisce il B se si conosce il *rapporto di schiacciamento* $f=\frac{\varrho_p}{\varrho_e}$. Quindi le espressioni (14) e (13) possono diventare a loro volta equazioni capaci di determinazioni relative all'*astro attuale* che sia provenuto, per restringimento, da quello della equazione astromorfa relativo ad uno *stato originario.*

11. - La *curva astromorfa* incontra perpendicolarmente ciascun semiasse; è un po' più tesa della elittica coàssica, e vieppiù quanto maggiore lo schiacciamento. Il valore $B=0{,}346$ a cui corrisponde $f=0{,}3625$, è il valore massimo ammesso dalla equazione astromorfa per la integrità reale dell'astro rotante. La *curva astromorfa Terrestre,* con l'$f=\frac{296}{297}$ per cui $B=0{,}00446$, presenta per l'$\alpha=45^\circ$ un distacco di 0,000467 dalla elisse coàssica, cioè di meno che 3^{km}; quella di Giove, con l'$f=\frac{14}{15}$, lo presenta di 0,0127; quella dell'*astro integrolimite,* di 0,296 per $\alpha=12^\circ$; e quest'ultima curva appare in leggera rientranza per un tratto fra equatore e polo. Alla superficie Terrestre, con il passaggio dai paralleli elissoidici ai paralleli astromorfi, il luogo di Torino (lat. 45°) rimarrebbe più a nord per $0^{km},040$; quello di Gadames (lat. 30°), più a sud per $5^{km},280$, e quello di Roma (lat. 42°) si manterrebbe fermo, in interferenza.

12. - Per ricavare il *volume astromorfo,* indipendentemente dalla equazione astromorfa, è applicabile il seguente concetto: guardare a due stati dell'astro « ridotto » aventi superficie esterne omotetiche (ossia ad unico valore per f e B) con separazione pari al loro schiacciamento e con invariata densità centrale (come per restringimento scalare proporzionale alle superficie divisorie degli strati); ottenere il cercato volume pareggiando i volumi riferibili ai due astri resi « completi » e considerati di comune grandezza.

Allora, deve essere:

per il conservato B,

$$\chi \cdot e^{\frac{3}{2} m_p} = \chi_x \cdot e^{\frac{3}{2} m_{p_x}}; \tag{19}$$

e per la conservata massa (insieme ad appropriata velocità di rotazione),

$$\chi_x = \chi \cdot \frac{m_p^{\frac{3}{2}}}{m_{p_x}^{\frac{3}{2}}}; \tag{20}$$

e quindi

$$m_{p_x}^{\frac{3}{2}} = m_p^{\frac{3}{2}} \cdot e^{\frac{3}{2}(m_{p_x} - m_p)}. \tag{21}$$

Epperò, considerando virtualmente sferici i due astri « ridotti » (ossia ravvisando fissa la unità di lunghezza relativa ai varî m di ciascun astro), si

possono avere i volumi astromorfi col richiederli agli astri « completi » e guardando alla formola generica

$$V_0 = \frac{M}{\delta_\eta} = \frac{M}{h} \cdot e^{\frac{3}{2}m}, \text{ come da (10);}$$

ma l'astro minore deve essere reso virtualmente « completabile » correggendo le sue lunghezze secondo $\sqrt[3]{f}$, ossia i suoi m secondo $f^{-\frac{2}{3}}$; e inoltre, per il pareggiamento dei due volumi astromorfi, bisogna moltiplicare per $\frac{1}{m_{p_x}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{f}$ quello relativo all'astro minore.

Si può quindi porre:

$$V_0 = (\text{valore fisso}) \cdot \frac{1}{m_{p_x}^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{f} \cdot e^{\frac{3}{2}(m_{p_x} - m_p)}, \tag{22}$$

ossia

$$V_0 = (\text{valore fisso}) \cdot \varrho_e^3 \cdot f^2 \cdot e^{\frac{3}{2\varrho_e^2} \cdot \frac{1-f^2}{f^2} \cdot f^{-\frac{2}{3}}}; \tag{23}$$

ma per $f=1$, si deve avere la sfera di raggio ϱ_e; e perciò:

$$(\text{valore fisso}) = \frac{4\pi}{3};$$

donde, per semiasse equatoriale 1, e considerato $\varrho_e^2 f^2 = \varrho_p^2$,

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} \cdot f^2 \cdot e^{\frac{3}{2\varrho_p^2} \cdot \frac{1-f^2}{f^{\frac{8}{3}}}}. \tag{24}$$

Se poi si considera che questo volume V_0 contiene in sè l'effetto delle replicate variazioni per il passaggio fatto dagli astri « ridotti » agli astri « completi », ecco che il volume astromorfo cercato deve essere desunto dal volume V_0 mediante la potenza $\frac{2}{3}$ e il coefficiente $(f^{\frac{1}{3}})^3 = f$; per cui, mantenendo come unità il semiasse equatoriale, la *formola del volume astromorfo* risulta:

$$V_{.1} = \frac{4\pi}{3} \cdot f \cdot f^{\frac{4}{3}} \cdot e^{\frac{1}{\varrho_p^2} \cdot \frac{1-f^2}{f^{\frac{8}{3}}}}, \tag{25}$$

diventando, se riferita al volume elissoidico coàssico,

$$V_{.1} = V_E \cdot f^{\frac{4}{3}} \cdot e^{\frac{1}{\varrho_p^2} \cdot \frac{1-f^2}{f^{\frac{8}{3}}}}. \tag{26}$$

Conviene citare che la identica formola si ottiene mediante un ragionamento che parta dal volume relativo alla curva astromorfa dell'f^2, lungo i cui varî raggi vettori resta pareggiata ogni densità media

$$\delta_{\eta_\alpha} = h \cdot e^{-\frac{3}{2}m_\alpha} \cdot \frac{m_e}{m_\alpha} = h \cdot e^{-\frac{3}{2}m_e} = \delta_{\eta_e}.$$

13. - Come già la *curva astromorfa*, così il *volume astromorfo* può essere riferito a qualunque caso di struttura dell'astro. All'*astro integro-limite* è da attribuire (secondo la relazione (14)) una esigua densità (materia a tensione elastica) e una forte velocità di rotazione.

Per il *Globo Terrestre* si trova $V_A = V_E \cdot 0{,}9991333$; ossia, fra i raggi dei due volumi elissoidico e astromorfo resi sferici, consegue una differenza di 0,000289. Per il pianeta *Giove*, la analoga differenza è di 0,0083; e per l'*astro integro-limite* è di 0,199.

14. - Il *calcolo astromorfo*, del quale le cose riportate non rappresentano che il primo avviamento, trova sviluppo per risolvere le tante questioni relative alla *struttura di ogni astro in qualunque stato fisico*, rimanendo utile non alla sola Astronomia pura. Caratteristici vi si mostrano, come *strumenti di calcolo*, il B e gli m forniti, per mezzo dei ϱ, dalla equazione astromorfa, e come *elementi di calcolo* le dimensioni dell'astro la sua massa e la sua velocità di rotazione; ai quali elementi di calcolo, altri possono aggiungersi secondo gli occasionali problemi.

Circa la bontà del *calcolo astromorfo*, basti dire che esso fornisce, per il Globo Terrestre, dei « valori di gravità » i quali concordano molto bene con quelli di esperienza accettati dalla « Conferenza internazionale pesi e misure ».

A. BILIMOVITCH (Beograd - Jugoslavia)

SUR LES ÉQUATIONS INTRINSÈQUES DU MOUVEMENT D'UN SYSTÈME MATÉRIEL

1. - *Forme vectorielle des équations du mouvement d'un système.*

Avec les notations suivantes:

m_s $(s=1, 2,...., N)$, les masses de $\frac{1}{3}N$ points matériels $(m_1=m_2=m_3; m_4=m_5=m_6;....)$;

x_s, les coordonnées cartésiennes de ces points;

X_s, les mêmes coordonnées de forces actives;

$f_l(x_1, x_2,...., x_N, t)=0$, $(l=1, 2,...., k)$, les équations des liaisons finies;

$\varphi_{l_1}=\sum_{s=1}^{N} A_{l_1,s}x_s'+A_{l_1}=0$, $(l_1=1, 2,...., k_1)$, les équations des liaisons non holonomes;

λ_l, μ_{l_1}, les multiplicateurs de ces liaisons en les supposant idéales:

On peut écrire les équations du mouvement de ces points matériels:

$$m_s x_s''=X_s+\sum_{l=1}^{k}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial x_s}+\sum_{l_1=1}^{k_1}\mu_{l_1}A_{l_1,s}, \qquad (s=1, 2,...., N). \tag{1}$$

En introduisant la conception de l'espace à N dimensions, on peut donner à ce système d'équations la forme vectorielle suivante (1):

$$\dot{\text{grad}}\, T=\vec{F}+\sum_{l=1}^{k}\lambda_l \text{ grad } f_l+\sum_{l_1=1}^{k_1}\mu_{l_1} \text{ grad } \varphi_{l_1}=\vec{\Phi}. \tag{2}$$

Ici nous avons désigné par $\dot{\text{grad}}\, T$ la dérivée vectorielle du gradient de la force vive T du système par rapport au vecteur $\vec{v}(x_s')$ qui caractérise les vitesses des points, par grad f_l, le gradient de la fonction f_l par rapport à la position du système et par grad φ_{l_1} le vecteur, quasi-gradient de la liaison différentielle, et enfin par $\vec{F}$ la force active.

Au point de vue géométrique, on peut prendre les coordonnées arbitraires q_s au lieu des coordonnées cartésiennes x_s et déduire de l'équation vectorielle (2)

---

(1) ANTON BILIMOVIĆ: *Jednačine kretanja materijalnog sistema, ako su ose potpuno proizvoljne.* Glas Srpske Kraljevske Akademije. CXXVIII knjiga. Beograd, 1927.

les équations scalaires par le procédé covariant, c'est-à-dire par la projection orthogonale sur les axes de N-èdre arbitraire, ou par le procédé contravariant en calculant les composantes sur les mêmes axes.

Comme exemple écrivons les équations covariantes:

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{grad} T, \vec{u}_i) - (\operatorname{grad} T, \dot{u}_i) = (\vec{\Phi}, \vec{u}_i), \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{3}$$

par rapport aux vecteurs arbitraires $\vec{u}_i$ dans leur forme développée:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta}{\partial v_i'} - \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial \Theta}{\partial q_s} u_{si} - \sum_{p=1}^{N} \frac{\partial \Theta}{\partial v_p'} \left(\sum_{q=1}^{N} A_{p,q,i} v_q' + B_{p,i} \right) = \sum_{s=1}^{N} Q_s u_{si} + \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \sum_{s=1}^{N} \frac{\partial \bar{f}_l}{\partial q_s} u_{si} + \sum_{l_1=1}^{k_1} \mu_{l_1} A^*_{l_1,i}, \quad (i=1, 2, \ldots, N), \tag{4}$$

où u_{si} sont les produits scalaires des vecteurs $\vec{u}_i$ par les vecteurs $\dot{r}_{q_s}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_s}, \frac{\partial x_2}{\partial q_s}, \ldots, \frac{\partial x_N}{\partial q_s}\right)$; v_i' et $v_{i\sigma}$ sont definis par les relations: $q_s' = \sum_{i=1}^{N} u_{si} v_i'$, $v_i' = \sum_{s=1}^{N} v_{is} q_s'$; Θ est la force vive en fonction de v_i', Q_s la force généralisée de manière que $\sum_{s=1}^{N} Q_s \delta q_s = \sum_{s=1}^{N} X_s \delta x_s$, $\bar{f}_l$ le résultat de la transformation de la fonction f_l aux variables nouvelles q_s et enfin:

$$A_{p,q,i} = \sum_{s=1}^{N} \sum_{\sigma=1}^{N} \left(\frac{\partial v_{p\sigma}}{\partial q_s} - \frac{\partial v_{ps}}{\partial q_\sigma} \right) u_{\sigma q} u_{si}, \qquad B_{p,i} = -\sum_{s=1}^{N} \frac{\partial v_{ps}}{\partial t} u_{si},$$

$$A^*_{l_1,i} = \sum_{\sigma=1}^{N} \sum_{s=1}^{N} A_{l_1,s} \frac{\partial x_s}{\partial q_\sigma} u_{\sigma i}.$$

Des équations (4) on peut déduire, pour les expressions speciales de vecteurs $\vec{u}_i$, les équations de LAGRANGE pour les systèmes holonomes et les équations de VOLTERRA, d'APPELL, de TCHAPLIGINE-WORONETZ, d'EULER-LAGRANGE de HAMEL pour les systèmes non holonomes (1).

Dans cette communication j'utiliserai les équations (3) pour écrire les équations intrinsèques du mouvement d'un système matériel; la construction des axes, sur lesquels nous projetons les membres de l'équation vectorielle (2), ne dépend que de la structure ou du mouvement du système même.

2. - *La construction d'un n-èdre intrinsèque.*

Supposons que la position du système soit définie par n coordonnées ($n \leqslant N$). La formule élémentaire $(\dot{\vec{V}}, \vec{u}) = \frac{d}{dt}(\vec{V}, \vec{u}) - (\vec{V}, \dot{u})$ pour la projection de la dérivée

(1) ANTON BILIMOVIĆ: *O jednačinama kretanja neholonomnog sistema.* Glas Srpske Kraljevske Akademije. CXXVIII knjiga. Beograd, 1927.

vectorielle sur une direction variable $\vec{u}$ dans le cas $\vec{u}=\vec{r}_i$ $(i=1,2,....,n)$, où $\vec{r}_i$ sont les vecteurs identifiant l'égalité: $2T=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}q_i'q_j'=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\vec{r}_i,\vec{r}_j)q_i'q_j'$ prend la forme suivante:

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt},\vec{r}_i\right)=\frac{d}{dt}(\vec{V},\vec{r}_i)-\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\begin{matrix} i & j \\ s & \end{matrix}\right\}V_s q_j' \tag{5}$$

où $\{\}$ est le deuxième symbole de CHRISTOFFEL.

Prenons un vecteur invariant $\vec{u}_1$ invariablement lié aux points du système ou bien au mouvement de ces points. Soit $u_{1i}=(\vec{u}_1,\vec{r}_i)$, alors par le procédé (5) on peut toujours calculer les projections des vecteurs $\dot{u}_1$, $\ddot{u}_1$,..., $\overset{(n_1)}{u_1}$ sur les vecteurs $\vec{r}_i$. De la même manière on peut construire les vecteurs $\dot{u}_2$, $\ddot{u}_2$,..., $\overset{(n_2)}{u_2}$ en partant d'un autre vecteur invariant $\vec{u}_2$ et enfin les vecteurs $\dot{u}_k$, $\ddot{u}_k$,..., $\overset{(n_k)}{u_k}$ de vecteur $\vec{u}_k$, de manière qu'on ait $n_1+n_2+....+n_k+k=n$. Désignons tous les vecteurs ainsi construits par $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,..., $\vec{v}_n$. Suivant la règle bien connue, on peut orthogonaliser et normaliser le n-èdre de vecteur $\vec{v}_i$. Désignons les vecteurs nouveaux par $\vec{w}_p$, alors

$$\vec{w}_p=\frac{1}{\sqrt{D_{p-1}D_p}}\begin{vmatrix} (\vec{v}_1,\vec{v}_1), & (\vec{v}_1,\vec{v}_2),...., & (\vec{v}_1,\vec{v}_{p-1}), & \vec{v}_1 \\ (\vec{v}_2,\vec{v}_1), & (\vec{v}_2,\vec{v}_2),...., & (\vec{v}_2,\vec{v}_{p-1}), & \vec{v}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{v}_p,\vec{v}_1), & (\vec{v}_p,\vec{v}_2),...., & (\vec{v}_p,\vec{v}_{p-1}), & \vec{v}_p \end{vmatrix},$$

$$D_p=\begin{vmatrix} (\vec{v}_1,\vec{v}_1),...., & (\vec{v}_1,\vec{v}_p) \\ \cdots & \cdots \\ (\vec{v}_p,\vec{v}_1),...., & (\vec{v}_p,\vec{v}_p) \end{vmatrix}, \qquad D_0=1.$$

Pour calculer les dérivées $\dot{w}_p$ il faut remarquer que dans les formules $\dot{w}_p=\sum_{q=1}^{n}a_{pq}\dot{w}_q$ la matrice $\|a_{pq}\|$ est asymétrique et alors nous avons

$$a_{pq}=(\dot{w}_p,\vec{w}_q)=\frac{1}{\sqrt{D_{p-1}D_p}}\begin{vmatrix} (\vec{v}_1,\vec{v}_1),...., & (\vec{v}_1,\vec{v}_{p-1}), & (\dot{v}_1,\vec{w}_q) \\ (\vec{v}_2,\vec{v}_1),...., & (\vec{v}_2,\vec{v}_{p-1}), & (\dot{v}_2,\vec{w}_q) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (\vec{v}_p,\vec{v}_1),...., & (\vec{v}_p,\vec{v}_{p-1}), & (\dot{v}_p,\vec{w}_q) \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Dans le cas spécial de $n_1=n-1$, c'est-à-dire dans le cas d'une direction principale $\vec{u}$, nous avons $a_{p,p+1}=-a_{p+1,p}=\frac{1}{\varrho_p}=\frac{\sqrt{D_{p-1}D_{p+1}}}{D_p}$ et tous les autres $a_{pq}=0$.

Les quantités $\frac{1}{\varrho_p}$ ne sont que les courbures d'une courbe dans l'espace de RIEMANN.

3. - *Les équations intrinsèques d'un système matériel.*

En posant $q_s' = \sum_{i=1}^{n} w_{si} w_i^*$, il n'est pas difficile de démontrer que

$$(\operatorname{grad} T, \vec{w}_i) = \frac{\partial \Theta^*}{\partial w_i^*},$$

où Θ^* est l'expression de la force vive en fonction de w_i^*.

En projetant le deux membres de l'équation (2) sur les axes $\vec{w}_i$ et en utilisant les expressions (6), nous avons les équations intrinsèques :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta^*}{\partial w_i^*} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \Theta^*}{\partial w_j^*} a_{ij} = (\vec{\Phi}, \vec{w}_i), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dans le cas de coordonnées indépendantes et d'un seul vecteur invariant initial, les équations sus-dites prennent la forme:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta^*}{\partial w_i^*} + \frac{1}{\varrho_{i-1}}\frac{\partial \Theta^*}{\partial w^*_{i-1}} - \frac{1}{\varrho_{i+1}}\frac{\partial \Theta^*}{\partial w^*_{i+1}} = (\vec{F}, \vec{w}_i) + \sum_{l_1=1}^{k_1} \mu_{l_1} (\operatorname{grad} \varphi_{l_1}, \vec{w}_i),$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour un système non holonome, si on peut construire les vecteurs invariants $\vec{w}_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n' = n - k_1)$ de façon que pour ces vecteurs: $(\operatorname{grad} \varphi_{l_1}, \vec{w}_r) = 0$, nous aurons les équations intrinsèques du mouvement d'un système non holonome sans multiplicateurs des liaisons sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Theta^*}{\partial w_r^*} - \sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial \Theta^*}{\partial w_j^*} a_{rj} = (\vec{F}, \vec{w}_r), \qquad (r = 1, 2, \ldots, n').$$

4. - *Les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide.*

Pour le corps solide, on peut remplacer l'équation vectorielle (2) de l'espace V_6 par deux équations vectorielles dans l'espace R_3 :

$$\operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T = \vec{F}, \qquad \operatorname{grad}_{\vec{\Omega}} T + [\vec{v}_A, \operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T] = \vec{L}_A$$

où $\vec{v}_A$ est la vitesse du point A du corps solide, $\vec{\Omega}$ la vitesse angulaire, $\operatorname{grad}_{\vec{v}_A} T$, $\operatorname{grad}_{\vec{\Omega}} T$ sont les gradients partiels de la force vive par rapport aux vecteurs désignés, $\vec{F}$ la résultante des forces actives et $\vec{L}_A$ le moment des ces forces par rapport au point A; [ ] le symbole du produit vectoriel.

En partant d'une direction invariante $\vec{u} = \vec{w}_1$ (par exemple: la vitesse du point A, la vitesse angulaire, le moment des quantités du mouvement, une droite invariante liée avec le corps etc.) nous avons :

$$\dot{w}_1(0, k_u, 0), \qquad \dot{w}_2(-k_u, 0, l_u), \qquad \dot{w}_3(0, -l_u, 0)$$

où $k_u^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$, $l_u k_u^2 = (\vec{u}\,[\dot{u}, \ddot{u}])$, et alors les équations du mouvement se présentent sous la forme suivante (1):

$$(7) \qquad \frac{dK_1}{dt} - K_2 k_u = F_1, \qquad \frac{dK_2}{dt} + K_1 k_u - K_3 l_u = F_2, \qquad \frac{dK_3}{dt} + K_2 l_u = F_3;$$

$$\frac{dG_{A1}}{dt} - G_{A2} k_u \qquad + v_{A12} K_3 - v_{A13} K_2 = L_{A1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où en particulier: $K_1 = \frac{\partial T}{\partial v_{A1}}$, $G_{A1} = \frac{\partial T}{\partial \Omega_1} + b\frac{\partial T}{\partial v_{A3}} - c\frac{\partial T}{\partial v_{A2}}$ et a, b, c sont les coordonnées du point A par rapport au trièdre $A\vec{w}_1\vec{w}_2\vec{w}_3$.

Dans le cas du mouvement de translation, c'est-à-dire pour un point matériel, si le vecteur $\vec{u}$ a la direction de la tangente de la trajectoire, les équations (7) se ramenent aux équations intrinsèques d'EULER.

Les équations du mouvement d'un système matériel par rapport aux axes arbitraires jouent un rôle principal dans la Mécanique Analytique. La nature de ces équations dépend du choix de ces axes et est liée étroitement à la géométrie de n-èdre, à la géométrie de RIEMANN et de WEYL. On peut appeler cette branche de la mécanique classique la Mécanique Absolue au sens de la Géométrie Absolue. Il convient de soulever les questions relatives à cette branche de Science dans le pays de RICCI et LEVI-CIVITA, fondateurs de la Géométrie Absolue.

---

(1) A. BILIMOVITCH: *Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un corps solide.* C. R., t. 171. Séance du 4 octobre 1920.

K. POPOFF (Sofija - Bulgaria)

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS

SUNDMAN (1) a demontré qu'autour d'un choc binaire au moment $t=0$, les équations différentielles du problème des trois corps sont verifiées par des fonctions holomorphes de $t^{\frac{1}{3}}$ et JEAN CHAZY (2) a constaté que les intégrales de SUNDMAN contiennent deux constantes de moins que les intégrales générales.

Dans son étude des intégrales des équations du mouvement autour d'un choc réel, SUNDMAN ramène les équations différentielles à un système régulier qu'on peut intégrer par le méthode de CAUCHY. Nous avons taché d'approfondir cette étude en ramenant les équations du mouvement à un système d'équations qui présentent elles mêmes des singularités et dont l'étude a été faite par H. POINCARÉ et poursuivie par E. PICARD et DULAC. Nous arrivons ainsi à montrer que les intégrales de SUNDMAN, au point de vue analytique, ne sont pas les plus générales qui puissent satisfaire aux équations différentielles autour d'un choc. En effet les résultats de DULAC font entrevoir qu'il y aura encore une infinité d'intégrales qui satisfont aux équations differentielles pour $r=0$ et differences de coordonnées nulles. Pourtant les intégrales de SUNDMAN sont les seules qui satisfassent aux équations différentielles en faisant décrire à la variable indépendante des chemins d'une longueur finie.

Pour plus de simplicité nous considérons le problème dans le plan, le passage au problème de l'espace ne présentant aucune difficulté. Pour eviter des répétitions inutiles, nous prendrons les équations différentielles sous la forme étudiée par SUNDMAN (1) en nous dispensant de la reproduire ici.

Considérons trois corps P_0, P_1, P_2 qui s'attirent suivant la loi de Newton et dont les masses m_0, m_1, m_2 sont positives. Soit x, y les coordonnées de P_1 par rapport à des axes rectangulaires de direction fixe, dont l'origine est à P_0 et ξ, η les coordonnées de P_2 par rapport au centre de gravité de P_0 et P_1.

---

(1) KARL F. SUNDMAN: *Mémoire sur le problème des trois corps,* Acta mathematica, 36 (1912-13). Voir aussi T. LEVI-CIVITA: *Sur la régularisation du problème des trois corps,* Acta math., 42 (1920).

(2) JEAN CHAZY: *Sur les points singuliers de l'intégrale générale du problème des n corps,* C. R., 157 (1913^2).

En faisant le changement de variables

$$p=\sqrt{x},\quad q=\sqrt{y},\quad X=\frac{1}{x'\sqrt{x}},\quad Y=\frac{1}{y'\sqrt{y}},$$

où x', y' sont les dérivées de x par rapport à t, et en introduisant les quantités λ, μ définies par

$$\lambda^2=\frac{p^2}{r},\quad \mu^2=\frac{q^2}{r},\quad r^2=p^4+q^4,$$

on arrive à mettre facilement les équations du mouvement de P_1 par rapport à P_0 sous la forme

$$(A)\qquad \frac{dX}{X(-1+2mX^2\lambda^6+p^4P)}=\frac{d\lambda}{\lambda\left[1-\lambda^3X\left(\frac{\lambda}{X}+\frac{\mu}{Y}\right)\right]}=\frac{\mu^3Y}{\lambda^3X}\cdot\frac{dq}{q}=$$

$$=\frac{\mu^3Y}{\lambda^3X}\cdot\frac{dY}{Y[-1+2mY^2\mu^6+q^4Q]}=\frac{\mu^3Y}{\lambda^3X}\cdot\frac{d\mu}{\mu\left[1-\mu^3Y\left(\frac{\lambda}{X}+\frac{\mu}{Y}\right)\right]}=\frac{dp}{p},$$

$$dt=2p^2Xdp.$$

Ces équations admettent l'intégrale des forces vives qu'on peut mettre sous la forme

$$\frac{1}{X^2}\cdot\frac{\mu^2}{\lambda^2}+\frac{1}{Y^2}-2m\mu^2=-q^2(K-m_3L),$$

où K est la constante des forces vives et L, P, Q sont des fonctions de x, y, ξ, η qu'on peut former facilement.

On satisfait aux équations (A) par des séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives de p et on a de plus

$$t=\frac{2}{3}p^3X_0+\ldots.$$

où X_0 est la valeur de X au moment du choc ($t=0$). Pour démontrer la convergence de ces séries et se rendre compte de la généralité de l'intégrale ainsi obtenue nous suivrons la marche suivante:

En choisissant convenablement la direction des axes de coordonnées, on peut supposer toujours, sans restreindre la généralité, qu'on ait autour d'un choc ($p=0$, $q=0$) $\lambda_0\neq 0$, $\mu_0\neq 0$ et par conséquent

$$\lim_{p\to 0}1-\lambda^3X\left(\frac{\lambda}{X}+\frac{\mu}{Y}\right)=0,\qquad \lim_{p\to 0}1-\mu^3Y\left(\frac{\lambda}{X}+\frac{\mu}{Y}\right)=0,$$

$$\lim_{p\to 0}-1+2mX^2\lambda^6=0,\qquad \lim_{p\to 0}-1+2mY^2\mu^6=0.$$

En désignant par X_0, Y_0, λ_0, μ_0 les valeurs de X, Y, λ, μ pour $t=0$ ($p=0$, $q=0$) on aura les relations

$$\lambda_0^4+\mu_0^4=1,\qquad X_0^2\lambda_0^6=\frac{1}{2m},\qquad Y_0^2\mu_0^6=\frac{1}{2m},\qquad \frac{\lambda_0}{X_0}+\frac{\mu_0}{Y_0}=\sqrt{2m},$$

d'autre part, λ_0 et μ_0 étant différents de zéro, X_0 et Y_0 seront des quantités finies.

Pour étudier les équations (A) autour de $p=q=0$ nous poserons

$$X=X_0+\delta X=X_0+rX_0, \qquad Y=Y_0+\delta Y=Y_0+sY_0$$
$$\lambda=\lambda_0+\delta\lambda=\lambda_0+l\lambda_0, \qquad \mu=\mu_0+\delta\mu$$

avec

$$\delta\mu=-\frac{\lambda_0^3}{\mu_0^3}\delta\lambda.$$

Après ce changement de variables, et en tenant compte de l'équation des forces vives, les équations du mouvement pourront être mises sous la forme

$$p\frac{dq}{dp}=q\left(1+r-s+3\frac{l}{\mu_0}+....\right)$$
$$p\frac{dr}{dp}=2r+6l+p^4P+....$$
$$p\frac{ds}{dp}=2s-6\frac{\lambda_0^4}{\mu_0^4}l+q^4Q+....$$
$$p\frac{dl}{dp}=-r-3l+A(K+m_2L_0)q^2+....$$

la lettre A désignant un coefficient dont l'expression est facile à obtenir. Nous avons à étudier ici les intégrales q, r, s, l qui s'annulent pour $p=0$. Ces équations sont du type étudié par H. POINCARÉ et approfondi par E. PICARD et DULAC. Par des transformations propres nous tacherons de les ramener aux équations étudiées d'une manière plus particulière par DULAC. Pour cela nous poserons

$$r=\varrho p^2, \qquad s=\sigma p^2, \qquad l=\psi p^2, \qquad q=\alpha p$$

et nous obtiendrons le système suivant

$$\frac{d\alpha}{dp}=\alpha p\left(\varrho-\sigma+\frac{3}{\mu_0^4}\psi+....\right),$$
$$p\frac{d\varrho}{dp}=6\psi+p^2P+....,$$
$$p\frac{d\sigma}{dp}=-6\frac{\lambda_0^4}{\mu_0^4}\psi+p^2Q+....,$$
$$p\frac{d\psi}{dp}=-\varrho-5\psi+A\alpha_0^2(K+m_2L_0)+p^2N+....,$$

En posant

$$v=\varrho+\frac{\mu_0^4}{\lambda_0^4}\sigma$$

on obtient enfin le système

$$\frac{d\alpha}{dp}=\alpha p\left(\frac{\varrho}{\mu_0^4}-\frac{\lambda_0^4}{\mu_0^4}v+\frac{3}{\mu_0^4}\psi+....\right),$$
$$\frac{dv}{dp}=pP+....,$$
$$p\frac{d\varrho}{dp}=6\psi+p^2P+....,$$
$$p\frac{d\psi}{dp}=-5\psi-\varrho+A\alpha_0^2(K+m_2L_0)+p^2N+....$$

Les deux premières équations sont régulières. Leur intégration avec les valeurs initiales $a=a_0$, $v=v_0$ pour $p=0$ introduit les deux constantes a_0, v_0, dont la première dépend de la constante λ_0 déjà introduite (λ_0^2 est le cosinus et α_0^2 la tangente d'un même angle).

Tachons d'intégrer les deux dernières équations avec les conditions initiales

$$p=0, \qquad \psi=0, \qquad -\varrho_0+A\alpha_0^2(K+m_2L_0)=0,$$

ce qui introduit une relation entre la valeur initiale ϱ_0 de ϱ et la constante des forces vives K.

Pour simplifier l'écriture nous poserons

$$\varrho-A\alpha_0^2(K-m_2L_0)=\varphi$$

et les deux dernières équations deviennent

$$\frac{d\varphi}{6\psi+p^2P+\ldots.}=\frac{d\psi}{-5\psi-\varphi+p^2N}=\frac{dp}{p}.$$

L'équation formée par les coefficients des termes du premier dégré des équations ci-dessus

$$\begin{vmatrix} 1-\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & -5-\varepsilon & -1 \\ 0 & 6 & -\varepsilon \end{vmatrix} =(1-\varepsilon)(\varepsilon+3)(\varepsilon+2)=0$$

admettant les racines $\varepsilon=+1, -2, -3$, l'étude de E. PICARD montre que ces équations admettent comme intégrales φ, ψ des fonctions holomorphes de p s'annulant avec p et ces intégrales ne contiennent aucune constante arbitraire. *On démontre facilement que ce système n'admet pas d'autres intégrales à tangente déterminée s'annullant pour* p$=0$ *ou bien tendant vers zéro quand* p *tend vers zéro en décrivant un chemin de longueur finie et correspondant à un argument restant fini.*

Pour arriver à ce résultat on remarquera qu'on peut mettre notre système sous la forme

$$\frac{d\xi}{-3\xi+\ldots.}=\frac{d\eta}{-2\eta+\ldots.}=\frac{dp}{p},$$

où ξ, η s'expriment linéairement au moyen de φ et ψ et où les points remplacent des termes de second dégré en ξ, η et p^2.

Les équations ci-dessus admettent-elles d'autres intégrales qui s'annulent quand p tend vers zéro sur des chemins qui ne satisfont pas aux conditions ci-dessus?

En étudiant des équations différentielles qui rentrent dans ce type, E. PICARD observe: « On a longtemps présumé que ces deux intégrales sont en dehors de toute hypothèse les seules qui passent à l'origine ou qui s'en raprochent indéfiniment ».

« Dans un excellent travail sur les points singuliers des équations différentielles DULAC a montré que la question était très complexe » [1].

---

[1] E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 3, p. 30.

DULAC montre, par exemple, que l'équation

$$p\frac{dy}{dp} = -y(\nu + \ldots.),$$

où ν est un nombre rationel positif, a en général *une infinité* d'intégrales pour lesquelles y et p tendent vers zéro. Citons comme exemple l'équation

$$p\frac{dy}{dp} = -2y + 2y^2p^2$$

qui rentre dans le type ci-dessus et dont l'intégrale est

$$Cyp^2 - yp^2 \log p^2 = 1.$$

Cette équation détermine des courbes intégrales qui dépendent d'une constante arbitraire C et qui s'annulent pour $p=0$ quand p tend vers zéro sur une infinité de courbes: pour cela il suffit qu'on ait

$$\lim \frac{1}{2p^2 \log p} = 0 \text{ ou bien } \lim |p^2 \log p| = \infty.$$

En posant

$$p = \varrho e^{i\varphi},$$

faisons tendre p vers zéro de façon qu'on ait

$$\varphi = K : \varrho^{2n}.$$

Dans ce cas on aura $\lim\limits_{\varrho \to 0} |p^2 \log p| = \infty$ pour $n > 2$ et l'intégrale

$$y = \frac{1}{Cp^2 - p^2 \log p^2}$$

tendra vers zéro en même temps de ϱ. *Cette intégrale n'est pas du type des intégrales* établies par SUNDMAN [1].

Remarques: 1°) Pour arriver à ces résultats on aurait pu poser de même

$$q = \alpha p, \qquad r = \varrho p^2, \qquad s = \sigma p^2, \qquad l = \eta p^3.$$

2°) On aurait pu de même ramener l'étude des deux dernières équations à une équation différentielle linéaire.

3°) On aurait pu introduire $\sqrt{r}$ au lien de $p = \sqrt{x}$ comme variable indépendante.

4°) Enfin on aurait pu, au lieu des variables X, Y, introduire les variables $\frac{1}{X}$, $\frac{1}{Y}$.

---

[1]) De même le système

$$\frac{dy}{-2y + y^2p^2} = \frac{dz}{-3z + y^2p} = \frac{dp}{p}$$

admet l'intégrale de même nature

$$y = \frac{1}{p^2C + p^3 \log p}, \qquad z = \frac{1}{p^3C - p^3 \log p}.$$

H. GEPPERT (Giessen - Germania) (1)

DIE ADIABATISCHEN INVARIANTEN BELIEBIGER DIFFERENTIALSYSTEME

Es sei das n-gliedrige Differentialsystem vorgelegt:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho), \qquad (i=1,\dots, n) \tag{1}$$

in dem die $a_1 \dots a_\varrho$ (zunächst konstante) Parameter sind und die regulären Funktionen X_i die Variable t nicht enthalten. Das System besitzt Lösungen, die man formal schreiben kann:

$$\begin{aligned} f_i(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho) &= c_i, \qquad (i=1,\dots, n-1) \\ f_n(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho) &= t - t_0\,; \end{aligned} \tag{2}$$

sie bestimmen die Integralkurven oder Trajektorien von (1). Sind die Parameter $a_1 \dots a_\varrho$ nicht mehr konstant, sondern Funktionen von t, so kann man der Lösung die Form (2) belassen, muss aber die c_i, t_0 auch als Funktionen von t auffassen, die sich durch Integration des Systems:

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt}, \qquad \frac{dt_0}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{\partial f_n}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt} \tag{3}$$

bestimmen. Substituieren wir hieren mittels (2) statt $x_1 \dots x_n$ die Grössen c_i $t-t_0$, so werde etwa:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} = \varphi_{i\nu}(t-t_0, c_1 \dots c_{n-1} \mid a_1 \dots a_\varrho), \quad (i=1,\dots, n;\ \nu=1,\dots, \varrho)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \varphi_{i\nu} \frac{da_\nu}{dt}, \qquad \frac{dt_0}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \varphi_{n\nu} \frac{da_\nu}{dt}; \tag{3'}$$

letzteres Differentialsystem enthält nur noch die Grössen t, t_0, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$, und seine Integration gibt die Integralkurven von (1).

Auf das Systèm (3') wenden wir nun eine Funktionaloperation an, die im einfachsten Falle — und den wollen wir hier allein betrachten — eine Mittelwertbildung darstellt (2). Setzen wir — unter der Voraussetzung, dass diese Grösse

(1) Fellow of the Rockefeller-Foundation.

(2) Bezüglich der allgemeinen Operation vergl. GEPPERT 4.

einen Sinn hat — für eine beliebige Funktion a von $t-t_0$, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ bei konstanten Parametern:

$$\bar{a} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t-t_0, c_1 \dots c_{n-1} \mid a_1 \dots a_\varrho) dt, \tag{4}$$

so betrachten wir statt (3′) das System:

$$dc_i = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_{i\nu} da_\nu, \qquad dt_0 = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_{n\nu} da_\nu, \tag{5}$$

das die Variablen $c_1 \dots c_{n-1}$, t_0 mit den unabhängigen Variablen $a_1 \dots a_\varrho$ in Beziehung setzt und t nicht mehr enthält; nach (4) sind die $\bar{\varphi}_{i\nu}$, $\bar{\varphi}_{n\nu}$ von t_0 frei. Wir definieren nunmehr:

Jede Invariante des Systems (5) *heisst adiabatische Invariante des ursprünglichen Systems* ([1]). Für diese ist also charakteristisch das simultane Bestehen der Gleichungen:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial I}{\partial c_i} \bar{\varphi}_{i\nu} - \frac{\partial I}{\partial t_0} \bar{\varphi}_{n\nu} + \frac{\partial I}{\partial a_\nu} = 0, \qquad (\nu = 1, \dots, \varrho). \tag{6}$$

Wir wollen uns auf von t_0 freie Invarianten beschränken, die also Lösungen des Systems:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial I}{\partial c_i} \bar{\varphi}_{i\nu} + \frac{\partial I}{\partial a_\nu} = 0, \qquad (\nu = 1, \dots, \varrho) \tag{7}$$

und vollständige Invarianten der ersten $n-1$ Gleichungen (5) sind.

Das System (5) ist nicht immer komplett integrabel; seine Integrabilitätsbedingungen sind die Existenzbedingungen der adiabatischen Invarianten. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit im Levi-Civitaschen Sinne einfach imprimitiven Systemen ([2]), d. h. solchen, die ein einziges endlichdeutiges Integral

$$f_1(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho) = c_1 \tag{8}$$

gestatten, das im R_n der $x_1 \dots x_n$ eine geschlossene Hyperfläche Φ darstellt, auf der die Trajektorien quasiergodisch verteilt sind. Bezeichnet μ einen Jacobischen Multiplikator von (1), der als Integral der Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \mu}{\partial x_i} + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \tag{9}$$

definiert ist, so gilt der Poincarésche Satz ([3]), dass

$$\int \mu dx_1 \dots dx_n$$

([1]) Für die Definition bei hamiltonschen Systemen vergl. LEVI-CIVITA, 1, S. 329 f.

([2]) Zur Definition vgl. LEVI-CIVITA, 1, S. 330 f.

([3]) Vgl. POINCARÉ, 1, S. 41 ff.

eine Integralinvariante des Systems (1) ist; unter Beachtung der Quasiergodenhypothese kann man daher die Operation (4) durch eine räumliche Mittelbildung ersetzen (1):

$$\bar{a}=\int_{\dot{\Phi}} a(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho)\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi : \int_{\dot{\Phi}}\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi, \qquad \Gamma^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\right)^2 \tag{10}$$

so dass an die Stelle von (7) das System tritt

$$\frac{\partial I}{\partial c_1}\cdot\int_{\dot{\Phi}}\frac{\partial f_1}{\partial a_\nu}\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi+\frac{\partial I}{\partial a_\nu}\cdot\int_{\dot{\Phi}}\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi=0, \qquad (\nu=1,\dots,\varrho). \tag{11}$$

Es gibt in diesem Falle, wenn überhaupt, so nur eine Invariante, die c_1 mit den Parametern in Beziehung setzt.

Schreibt man abkürzend:

$$g=\int_{\dot{\Phi}}\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi, \qquad g_\nu=\int_{\dot{\Phi}}\frac{\partial f_1}{\partial a_\nu}\frac{\mu}{\Gamma}d\Phi, \tag{12}$$

so lauten die Integrabilitätsbedingungen von (11):

$$g\left(\frac{\partial g_k}{\partial a_\lambda}-\frac{\partial g_\lambda}{\partial a_k}\right)+g_\lambda\left(\frac{\partial g_k}{\partial c_1}+\frac{\partial g}{\partial a_k}\right)-g_k\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial c_1}+\frac{\partial g}{\partial a_\lambda}\right)\equiv 0, \quad (k,\lambda=1,\dots,\varrho). \tag{13}$$

Wir wollen sie umformen. Dazu betrachten wir das über das Innere von Φ erstreckte Integral über eine beliebige stetige Ortsfunktion $G(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho)$:

$$H=\int G(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho)dx_1 \dots dx_n$$

und bestimmen deren Ableitungen nach c_1 und a_ν. Um erstere zu finden, müssen wir neben Φ die durch die Gleichung

$$f_1(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\varrho)=c_1+dc_1 \tag{14}$$

bestimmte Fläche Φ' einführen; bedeutet dn die normale Verrückung, die die Punkte von Φ beim Übergang zu Φ' erleiden, so ist offenbar

$$\frac{\partial H}{\partial c_1}=\int_{\dot{\Phi}} G d\Phi dn : dc_1;$$

sind dx_i die Komponenten von dn, so ist einerseits

$$dx_i=\frac{1}{\Gamma}\frac{\partial f_i}{\partial x_i}dn, \qquad (i=1,\dots,n)$$

andererseits wegen (14)

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}dx_i=\Gamma dn=dc_1,$$

mithin wird

$$\frac{\partial H}{\partial c_1}=\int_{\dot{\Phi}} G\frac{d\Phi}{\Gamma}. \tag{15}$$

---

(1) Vgl. LEVI-CIVITA, 1, S. 332-338.

Um nun $\frac{\partial H}{\partial a_\nu}$ zu ermitteln, müssen wir einmal die Aenderung von Φ und dann die von G in Erwägung ziehen. Ist Φ'' die Fläche, deren Gleichung

$$f_1(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\nu + da_\nu \dots a_\varrho) = c_1 \tag{16}$$

ist und dn' die normale Verschiebung von Φ nach Φ'', so wird wegen (16)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} dx_i \equiv \Gamma dn' = -\frac{\partial f_1}{\partial a_\nu} da_\nu$$

und daher durch denselben Schluss wie oben

$$\frac{\partial H}{\partial a_\nu} = -\int_{\dot\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_\nu} G \frac{d\Phi}{\Gamma} + \int \frac{\partial G}{\partial a_\nu} dx_1 \dots dx_n . \tag{17}$$

Aus diesen Formeln sieht man, dass es zweckmässig sein wird, die Grössen (12) durch die Ableitungen von

$$V = \int \mu dx_1 \dots dx_n \tag{18}$$

auszudrücken, wenn die Integration sich über das Gesamtinnere von Φ erstreckt. Es ist nämlich:

$$g \equiv \frac{\partial V}{\partial c_1}, \qquad g_\nu \equiv -\frac{\partial V}{\partial a_\nu} - \int \frac{\partial \mu}{\partial a_\nu} dx_1 \dots dx_n, \qquad (\nu = 1, \dots, \varrho) \tag{19}$$

und daher nehmen die Bedingungen (13) die Form an:

$$\int_{\dot\Phi} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi \cdot \int_{\dot\Phi} \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_i} \frac{\partial \mu}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\partial \mu}{\partial a_i} \right) \frac{d\Phi}{\Gamma} - \int_{\dot\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_k} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi \cdot \int_{\dot\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial a_\lambda} \frac{d\Phi}{\Gamma} +$$
$$\int_{\dot\Phi} \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\mu}{\Gamma} d\Phi \cdot \int_{\dot\Phi} \frac{\partial \mu}{\partial a_k} \frac{d\Phi}{\Gamma} \equiv 0,$$

oder mittels der Bezeichnung (10):

$$\overline{\frac{\partial f_1}{\partial a_k} \frac{\partial \log \mu}{\partial a_\lambda}} - \overline{\frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda} \frac{\partial \log \mu}{\partial a_i}} + \overline{\frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda}} \cdot \overline{\frac{\partial \log \mu}{\partial a_k}} - \overline{\frac{\partial f_1}{\partial a_k}} \cdot \overline{\frac{\partial \log \mu}{\partial a_\lambda}} \equiv 0 \quad (k, \lambda = 1, \dots, \varrho). \tag{20}$$

Dies sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der adiabatischen Invarianten.

Zwei wichtige Spezialfälle wollen wir anführen, in denen (20) erfüllt ist:

1°) Wenn sämtliche $\frac{\partial f_1}{\partial a_i}$ auf Φ konstant sind d. h.

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_i} = F_k(f_1 \mid a_1 \dots a_\varrho), \qquad (k = 1, \dots, \varrho).$$

Dann werden die Gleichungen (5) mit (3) identisch, die Funktionaloperation verliert ihren Einfluss; *f_1 ist dann ein stationäres Integral,* d. h. nicht nur ein Integral des Systems (1), sondern auch der Systeme

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial X_i}{\partial a_k} \qquad (i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, \varrho). \tag{21}$$

2°) Wenn sämtliche $\frac{\partial \mu}{\partial a_k}$ auf Φ konstant sind, d. h.

$$\frac{\partial \mu}{\partial a_k} = \psi_k(f_1 \mid a_1 \ldots a_\varrho) \qquad (k=1,\ldots,\varrho) \tag{22}$$

gilt. Dies besagt, dass μ *ein stationärer Multiplikator,* d. h. nicht nur ein solcher von (1), sondern auch der Systeme (21) sein muss, wofür notwendig ist, dass in der Matrix

$$\begin{pmatrix} X_1 \ldots & X_n, & \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial X_1}{\partial a_k} \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial a_k}, & \frac{\partial}{\partial a_k} \sum \frac{\partial X_i}{\partial x_i} \end{pmatrix} \qquad (k=1,\ldots,\varrho)$$

sämtliche $n+1$ = reihigen Determinanten verschwinden. Im Besonderen ist (22) erfüllt, wenn μ von den Parametern unabhängig, also

$$\frac{\partial \mu}{\partial a_k} = 0, \qquad (k=1,\ldots,\varrho) \tag{23}$$

ist, und in der Tat sind wir sofort in der Lage, in diesem Falle das Integral von (11) anzugeben: man erkennt aus (19), dass

$$I = V = \int \mu dx_1 \ldots dx_n \tag{24}$$

die gesuchte adiabatische Invariante ist. Durch dieses Resultat wird das Theorem von Gibbs-Hertz (1) auf beliebige Differentialsysteme ausgedehnt.

Alles im Vorangehenden Entwickelte gilt unabhängig von der Quasiergodenhypothese und in weiterem Umfange, wenn das vorgelegte System zweidimensional ist (2). Ist das System (1) imprimitiv von der Ordnung m, d. h. gestattet es m und nur m endlichdeutige Integrale

$$f_i(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = c_i, \qquad (i=1,\ldots,m) \tag{25}$$

die im R_n die $n-m$ = dimensionale Mannigfaltigkeit Φ bestimmen, auf der wieder die Quasiergodenhypothese gilt, so löst man die Funktionen

$$f_1 \ldots f_{k-1}, f_{k+1} \ldots f_m \tag{26}$$

nach $x_1 \ldots x_{m-1}$ auf, reduziert damit das System (1) auf ein $n-m+1$ = gliedriges System in den Variablen $x_m \ldots x_n$ und fällt damit auf den vorangehenden Fall zurück, indem dieses System einfach imprimitiv ist und nur das Integral

$$f_k(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = c_k$$

gestattet. Bezeichnet man

$$D_k = \frac{\partial(f_1 \ldots f_{k-1}, f_{k+1} \ldots f_m)}{\partial(x_1 \ldots x_{m-1})},$$

---

(1) Vergl. LEVI-CIVITA 1, S. 339 f. und die dort angeführte Literatur.

(2) Vergl. GEPPERT, 2, 4.

und ist μ_0 ein Multiplikator des ursprünglichen Systems (1), so werden entsprechend zu (20) die Existenzbedingungen der adiabatischen Invarianten:

$$\overline{\frac{\partial f_k}{\partial a_\mu}\,\overline{\frac{\partial \log \mu_0 : D_k}{\partial a_\lambda}}} - \overline{\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}\,\overline{\frac{\partial \log \mu_0 : D_k}{\partial a_\mu}}} + \overline{\frac{\partial f_k}{\partial a_\lambda}} \cdot \overline{\frac{\partial \log \mu_0 : D_k}{\partial a_\mu}} - \overline{\frac{\partial f_k}{\partial a_\mu}} \cdot \overline{\frac{\partial \log \mu_0 : D_k}{\partial a_\lambda}} \equiv 0$$
$$(\mu, \lambda = 1, \ldots, \varrho).$$

Ist im Besonderen $\mu_0 : D_k$ von den Parametern unabhängig, so gilt die zu (24) analoge Tatsache, dass die Grösse

$$F_k = \int_{\Phi^*} \frac{\mu_0}{D_k}\, dx_m \ldots dx_n$$

eine adiabatische Invariante von (1) ist; Φ^* bezeichnet hierin die Projektion von Φ auf den Unterraum der $x_m \ldots x_n$.

Die gefundenen Ergebnisse gestatten reiche Anwendungen in der Mechanik und Differentialgeometrie.

ZITIERTE LITERATUR

GEPPERT, HARALD: 1. *Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale.* Nota I. Rend. Acc. Lincei, 8 (6), 2° sem. 1928.

2. Id. Nota II. Rend. Acc. Lincei,

3. Id. Nota III. Rend. Acc. Lincei,

4. *Theorie der adiabatischen Invarianten allgemeiner Differentialsysteme.* Mathem. Annalen,

HERTZ, PAUL: 1. *Weber-Gans.* Repertorium der Physik, Leipzig, 1916, Band. I, 2.

LEVI-CIVITA, TULLIO: 1. *Drei Vorlesungen über adiabatische Invarianten.* Abh. des Math. Semin., Hamburg, 6, 1928, S. 323-366.

2. *Sugli invarianti adiabatici.* Rend. Congr. Intern. Fisici, 1927, vol. 2.

POINCARÉ HENRI: 1. *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.* Tome 3. Paris, 1899.

G. VRANCEANU (Jasi - Romania)

PARALLÉLISME ET COURBURE DANS UNE VARIÉTÉ NON HOLONOME

Les variétés non holonomes sont des variétés que j'ai obtenues par l'interprétation géométrique des systèmes non holonomes de la Mécanique (1).

Soit donné dans l'espace des variables x^1, x^2,...., x^n, un système de n vecteurs contrevariants indépendants (λ_a) $(a=1, 2,...., n)$, définis dans chaque point de l'espace par leurs composantes λ_a^i. Les courbes tangentes à ces vecteurs seront appelées les congruences λ et les λ_a^i leurs paramètres. Si on indique par $\lambda_{a/i}$ les réciproques du déterminant $\Delta=\| \lambda_a^i \|$, lequel est différent de zéro, parceque les n vecteurs (λ_a) sont indépendants, on sait que les $\lambda_{a/i}$ sont des quantités covariantes et seront appelées les moments des congruences λ.

Cela dit, considérons le groupe de transformations des congruences

$$(N)\qquad \begin{cases} \bar{\lambda}_{h/i}=\sum_{1}^{m}{}_{\alpha} c_h^{\alpha}\lambda_{a\,i} & (h=1, 2,...., m), \\ & (i=1, 2,...., n), \\ \bar{\lambda}_{h'/i}=\sum_{m+1}^{n}{}_{\alpha'} c_{h'}^{\alpha'}\lambda_{\alpha'/i} & (h'=m+1,...., n), \end{cases}$$

où m est un nombre quelconque, mais fixe, plus petit que n, et où c_h^{α} sont les coefficients d'une transformation orthogonale, c'est à dire satisfaisant aux équations

$$(1)\qquad \sum_{1}^{m}{}_{h} c_h^{\alpha} c_h^{\beta}=\delta_{\alpha}^{\beta} \begin{Bmatrix} 1, & \alpha=\beta \\ 0, & \alpha\neq\beta \end{Bmatrix}.$$

Quant aux coefficients $c_{h'}^{\alpha'}$, ils sont quelconques à déterminant différent de zéro. *L'étude des propriétés invariantives par rapport au grupe* (N), *est pour moi* (2) *l'étude de la géométrie d'une variété non holonome* V_n^m.

---

(1) Voir mon mémoire: *Studio geometrico dei sistemi anolonomi.* Annali di Matematica, Serie IV, tomo V (l'ultimo fascicolo del 1928).

(2) Cette précision est nécessaire, car l'étude géométrique des systèmes non holonomes de la Mécanique, peut être faite en portant à des points de vue différents, comme a fait voir, en particulier, M. SCHOUTEN. Pour voir les différences entre ces points de vue, voir ma Note: *Les trois points de vue dans l'étude des espaces non holonomes,* Comptes Rendus, t. 188, p. 973, 1929.

Les invariants de la variété V_n^m.

Si l'on indique par dx^1, dx^2,...., dx^n, les composantes d'un déplacement quelconque, les projections de ce déplacement sur les congruences λ sont données par les formules connues

$$ds_a = \sum_1^n {}_i \lambda_{a/i}\, dx^i, \qquad (a = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

On constate facilement, que le groupe (N) laisse invariante la forme quadratique

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 + \ldots + ds_m^2. \tag{3}$$

Par conséquent un déplacement dx^i, situé à l'intérieur de la *première variété linéaire* (formée par les m premières congruences λ); c'est-à-dire un déplacement satisfaisant aux équations

$$ds_{h'} = \sum_1^n {}_i \lambda_{h'/i}\, dx^i = 0, \qquad (h' = m+1, \ldots, n) \tag{4}$$

(que j'appelle encore équations de non holonomie), a une longeur invariante par rapport aux transformations du groupe (N), donnée précisément par la formule (3). Un tel déplacement sera dit intérieur, et un déplacement situé à l'intérieur de la *seconde variété linéaire* (formée par les $n-m$ dernières congruences λ) sera dit extérieur.

On peut dire encore que le groupe (N) conserve la notion d'orthogonalité à l'intérieur de la première variété linéaire.

Le groupe (N) laisse encore invariantes les équations

$$\sum_1^n {}_i \lambda_{h'/i} \lambda_h^i = \sum_1^n {}_i \lambda_{h'}^i \lambda_{h/i} = 0, \qquad (h \leqslant m,\ h' > m); \tag{4'}$$

c'est à dire il conserve la notion d'orthogonalité entre les congruences des deux *variété linéaires* considérées plus haut, ou, ce qui revient au même, il conserve la notion de vecteur (déplacement) intérieur et vecteur extérieur.

Le groupe (N) ne conserve pas la notion d'orthogonalité à l'intérieur de la seconde variété linéaire.

Cycles élémentaire. Parallélisme dans une V_n^m.

Considérons à partir d'un point $P(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ de notre espace, les points $Q(x^i + dx^i)$ et $R(x^i + \delta x^i)$, qui s'obtiennent de P par les déplacements indépendants (dx^i) et (δx^i). On sait qu'on peut dire encore que les points Q et R sont obtenus de P par l'application des opérateurs d et δ. Si on considère maintenant les points $T(x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i))$ et $S(x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i))$, lesquels s'obtiennent en appliquant au point Q l'opérateur δ et au point R l'opérateur d, les points

S et T sont confondus, si les opérateurs d et δ sont permutables; c'est-à-dire si on a

$$\delta dx^i - d\delta x^i = 0 \qquad (i=1, 2,...., n), \tag{5}$$

autrement les premiers membres de ces équations sont précisément les composantes du vecteur $\overline{ST}$.

On sait par exemple, que si les opérateurs d et δ sont les symboles de transport par parallélisme de LEVI-CIVITA dans une variété de Riemann, les conditions (5) sont remplies et on exprime ce fait, en disant que dans l'espace de Riemann, il existe la notion de parallélogramme élémentaire.

Si on indique maintenant par ds_a et δs_a les composantes des déplacements (dx^i) et (δx^i) sur les congruences λ, leurs valeurs en fonction des dx^i et δx^i, étant données par les formules (2), on trouve sans difficulté les formules

$$\delta ds_a - d\delta s_a = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha\beta} w^a_{\alpha\beta} ds_\alpha \delta s_\beta + \sum_{1}^{n}{}_{i} \lambda_{a|i}(\delta dx^i - d\delta x^i), \tag{6}$$

dans lesquelles les $w^a_{\alpha\beta}$ sont donnés par les expressions

$$w^a_{\alpha\beta} = \sum_{1}^{n}{}_{ij}\left(\frac{d\lambda_{a|i}}{dx^j} - \frac{d\lambda_{a|j}}{dx^i}\right)\lambda^i_\alpha \lambda^j_\beta = \gamma_{a\alpha\beta} - \gamma_{a\beta\alpha}. \tag{5'}$$

Les $\gamma_{a\alpha\beta}$ sont les coefficients de rotation de RICCI relatifs aux n congruences λ et sont donnés en fonction de $w^a_{\alpha\beta}$ par les formules

$$\gamma_{a\alpha\beta} = \frac{1}{2}(w^a_{\beta a} + w^a_{\alpha\beta} + w^\beta_{\alpha a}), \tag{6'}$$

ce qui constitue une définition intrinsèque, bien connue, des coefficients $\gamma_{a\alpha\beta}$, en fonction des paramètres et moments des congruences λ seulement. Les formules (5) et (6) nous disent que les conditions nécessaires et sufisantes pour que le vecteur $\overline{ST}$ soit nul, s'expriment dans le système des congruences λ, par les relations

$$\delta ds_a - d\delta s_a = \sum_{1}^{n}{}_{\alpha\beta} w^a_{\alpha\beta} ds_\alpha \delta s_\beta \qquad (a=1, 2,...., n). \tag{7}$$

Cela dit, passons à notre variété non holonome V^m_n et soient ds_h et δs_h $(h \leqslant m)$ deux déplacements intérieurs PQ et PR. Si nous considérons les opérateurs d et δ, comme les symbole du parallélisme que j'ai donné autrefois [1], qui permet de transporter un vecteur intérieur le long d'un chemin intérieur aussi, on a

$$\delta ds_h = \sum_{1}^{m}{}_{ke} \gamma_{hke} ds_k \delta s_e,$$

---

[1] Voir ma Note: *Sur les espaces non holonomes*, Comptes rendus, t. 183, 1926, p. 852.

et une formule analogue pour $d\delta s_h$. On constate immédiatement que ces opérateurs du second ordre satisfont aux m premières équations (7), ce qui signifie d'après les (6), que les composantes intérieures du vecteur ST sont zéro et les composantes extérieures sont données par les formules

$$(7') \qquad d's_{h'} = \sum_1^n{}_i \lambda_{h'/i}(\delta dx^i - d\delta x^i) = -\sum_1^m{}_{ke} w_{ke}^{h'} ds_k \delta s_e,$$

les $w_{ke}^{h'}=0$ étant précisément les conditions d'intégrabilité des équations (4), que nous ne supposons pas remplies en général. Par conséquent le vecteur ST n'est pas en général nul, mais c'est toujours un vecteur extérieur, ses composantes étant du second ordre par rapport aux composantes des vecteurs élémentaires intérieurs PQ, PR.

C'est le pentagone gauche $PQTSRP$, qui se présente tout naturellement dans une V_n^m comme la généralisation du parallélogramme élémentaire d'une V_n, et que nous appelerons *le premier cycle élémentaire de* V_n^m.

Pour avoir un autre cycle élémentaire de V_n^m, considérons a partir du point P, le point Q qui s'obtient par un déplacement intérieur ds_h $(h \leqslant m)$ et le point R qui s'obtient par un déplacement extérieur $\delta s_{h'}$ $(h' > m)$. En ce cas $ds_{h'}$, δs_h, $\delta ds_{h'}$, $d\delta s_h$, sont tous zéro et les équations (7) s'écrivent

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta ds_h = \sum_1^m{}_k \sum_{m+1}^n{}_{e'} w_{ke'}^h ds_k \delta s_{e'}, \\ d\delta s_{h'} = \sum_1^m{}_e \sum_{m+1}^n{}_{k'} w_{k'e}^{h'} \delta s_{k'} ds_e. \end{cases}$$

Il en résulte que les opérateurs δds_h *et* $d\delta s_{h'}$ *sont complétement définis par la condition que le parallélogramme considéré soit fermé.*

Par conséquent on peut définir les deux transports par parallélisme, que j'appelle transports extérieurs :

a) Le transport d'un vecteur intérieur $\overline{R}$ ayant les composantes r_h $(h \leqslant m)$ le long d'un chemin extérieur $ds_{h'}$, par les formules

$$(8') \qquad dr_h = \sum_1^m{}_k \sum_{m+1}^n{}_{e'} w_{ke'}^h r_k ds_{e'};$$

b) Le transport d'un vecteur extérieur R' le long d'un chemin intérieur ds_h

$$(8'') \qquad dr_{h'} = \sum_1^m{}_e \sum_{m+1}^n{}_{k'} w_{k'e}^{h'} r_{k'} ds_e.$$

J'ajoute immédiatement que ces deux transports ont un caractère invariantif par rapport au groupe (N); c'est-à-dire si les équations du parallélisme sont satisfaites dans un système de congruences λ, elles sont satisfaites encore dans

tout autre système du groupe (N). Il est à remarquer encore que ce parallélisme n'est pas métrique, comme on peut le constater directement.

Les transports (8′) et (8″) sont en effet *des transports par parallélisme dans le sens de Weyl*, les w_{ke}^{h} et $w_{k'e}^{h'}$, étant les coefficients de deux connexions affines (partielles), par rapport au groupe (N). Il est tout à fait remarquable, que des espaces tirés de la Mécanique, admettent à côté d'un parallélisme métrique, encore un parallélisme à connexion affine.

Le parallélogramme obtenu par les transports extérieurs sera *le second cycle élémentaire de la* V_n^m.

Les deux tenseurs de courbure d'une V_n^m.

Dans ma Note: *Sur quelques tenseurs dans une variété non holonome* (1), où je ne considère pas le groupe (N) complet, j'ai donné un tenseur du quatrième ordre $\lambda_{hk,er}$, qui reste encore un tenseur du quatrième ordre (quatre fois intérieur) par rapport au groupe (N) et j'ai donné encore $n-m$ tenseurs du troisième ordre $V_{hk,e}^{h'}$, lesquels par rapport au groupe (N), individuent un seul tenseur du quatrième ordre, trois fois intérieur et un fois extérieur.

Je vais faire voir que ces deux tenseurs sont des tenseurs de courbure de la variété V_n^m. Pour cela, considérons, en premier lieu, la variation des composantes r_h $(h \leqslant m)$ d'un vecteur intérieur $\bar{r}$, dans le transport par parallélisme au long du premier cycle élémentaire $PQTSR$, ou, ce qui est la même chose, la différence entre la valeur des r_h en S, obtenu par le transport au long de chemin $PQTS$, et celle obtenue par le transport au long du PRS. Les valeurs des r_h en T sont données évidemment par les formules

$$r_h + dr_h + \delta(r_h + dr_h), \tag{9}$$

où d et δ sont les symboles du parallélisme. La variation des composantes (9) par le transport extérieur (8′), le long du chemin ST (voir les formules (7′)), est, tant qu'on tient compte seulement des termes du second ordre, donnée par les expressions

$$d'r_h = -\sum_{1}^{m}{}_{ker} \sum_{m+1}^{n}{}_{e'} w_{ke'}^{h} w_{er}^{e'} r_k \, ds_e \delta s_r. \tag{9'}$$

Quant aux variations totales, elles sont données par les formules

$$\Delta r_h = \delta dr_h - d\delta r_h - d'r_h. \tag{10}$$

Pour avoir la valeur de l'expression $\delta dr_h - d\delta r_h$, on remarque que si les relations (4) sont complétement intégrables, cette expression est celle d'une V_m,

(1) Comptes rendus, t. 186, p. 995.

déterminée par les m premières congruences λ et par conséquent donnée par la formule

$$\delta dr_h - d\delta r_h = \sum_{1}^{m}{}_{ker} \gamma_{hk,er} ds_e \delta s_r r_k,$$

où les $\gamma_{kk,er}$ sont les coefficients de RICCI a quatre indices, relatifs aux m premières λ seulement.

Dans le cas général nous aurons évidemment les formules

$$\Delta r_h = -\sum_{1}^{m}{}_{ker} \lambda_{kh,er} r_k ds_e \delta s_r, \tag{11}$$

où les quantités

$$\lambda_{kh,er} = \gamma_{kh,er} - \sum_{m+1}^{n}{}_{e'} w_{ke'}^{h} w_{er}^{e'}, \tag{12}$$

sont les composantes du premier tenseur de courbure de la V_u^m, ou de la courbure intérieure. En indiquant par ds et δs les longeurs des déplacements PQ et PR et par θ l'angle de ces déplacements, la formule (11) peut encore s'écrire sous la forme remarquable

$$\Delta r_h = -\frac{dS}{\sin\theta} \sum_{1}^{m}{}_{ker} \lambda_{kh,er} r_k u_e v_r, \tag{13}$$

où les u_e et v_r sont les cosinus que les déplacements PQ, PR, forment avec les m congruences λ, et $dS = ds\delta s \sin\theta$, est assimilable, à moins des infinitésimaux d'ordre supérieur, à la surface du quadrilatère obtenu par la projection du pentagone gauche sur le plan PQ, PR.

Considérons maintenant le transport du même vecteur $\bar{r}$, le long du second cycle élémentaire, qui est comme on sait, un parallélogramme fermé. On trouve sans difficulté que les variations des composantes de $\bar{r}$ sont exprimées par les formules

$$\Delta' r_h = \sum_{1}^{m}{}_{ke} \sum_{m+1}^{n}{}_{r'} V_{hk,e}^{r'} r_k ds_e \delta s_{r'}, \tag{14}$$

où les $V_{hk,e}^{r'}$ ont les expressions données dans la note citée plus haut.

Nous dirons que les $V_{hk,e}^{r'}$ sont les composantes du second tenseur de courbure de la V_u^m, ou la courbure extérieure.

Pour comprendre le rôle de cette courbure extérieure, supposons que dans l'espace ordinaire, nous ayons une équation à différentielles totales complétement intégrable, c'est-à-dire qu'elle représente une famille de surfaces dépendant d'une constante arbitraire.

Si nous avons une géodésique B sur une de ces surfaces S, on sait que les équations aux variations des géodésiques voisines à B et situées sur la même surface S, sont condensées dans l'équation classique de Jacobi, équation du second ordre dans laquelle entre seulement la courbure de Gauss de la surface S.

Mais si nous cherchons les équations aux variations, non seulement des géodésiques voisines situées sur S, mais encore des géodésiques voisines situées sur les surfaces de la famille, voisines a S, le système des équations aux variations est du troisième ordre et dans cette système entre encore la courbure extérieure.

Dans le cas général, si les équations de non holonomie sont complétement intégrables, l'étude de V_n^m se réduit à l'étude d'une famille des variété V_m dépendant de $n-m$ constantes arbitraires, et on trouve des propriétés intéressantes sur ces familles, en interprétant les résultats obtenus dans une variété non holonome proprement dite.

J. Le Roux (Rennes - Francia)

LA RELATIVITÉ DU LANGAGE ET LA THÉORIE DE LA GRAVITATION

1. - La notion du temps est l'une de celles sur lesquelles s'est exercée avec le plus d'activité l'imagination constructive des métaphysiciens. Les discussions auxquelles elle a donné lieu et la diversité des opinions émises ne doivent pas nous surprendre: elles sont inhérentes à la méthode métaphysique.

Francisque Sarcey raconte qu'au temps de son professorat, il avait ébauché, entre autres sujets de thèse, un travail de philosophie sur cette idée « que la plupart des querelles des hommes viennent, non de ce qu'ils ne sont pas d'accord sur le fond des choses, mais de ce qu'ils prennent les mêmes mots dans des sens différents ».

Il est certain que nous n'avons aucun moyen direct de contrôler les pensées d'autrui, ni de reconnaître si deux personnes différentes attachent au même mot des idées entièrement semblables.

D'un autre côté, cependant, toute discussion scientifique est stérile et vaine, si l'on n'est pas d'accord sur le sens des termes employés. Comment reconnaître que cet accord existe?

Les définitions logiques se font à l'aide de mots: elles reculent le problème sans le résoudre.

Mais, à côté des définitions par les mots, il y a une véritable définition objective, une définition par les choses. Elle consiste dans la correspondance régulière établie entre certains éléments du langage et les faits sensibles d'observation courante. Cette définition objective s'ajoute aux définitions logiques et les complète; elle supprime l'hiatus qui résulte de l'impossibilité de définir logiquement la totalité des termes employés.

Or, si nous ne pouvons explorer le domaine de la pensée, nous pouvons du moins contrôler l'emploi du langage pour la description des faits d'observation. Partant ensuite des faits directement observables, nous pouvons remonter à la représentation des idées qui s'en déduisent par une série de comparaisons, de généralisations et d'abstractions.

Ainsi, dans l'expression des idées les plus abstraites, il subsiste une trace de l'image des faits concrets qui ont servi à les définir. L'observation commune de l'univers sensible devient donc une condition essentielle de l'emploi du langage

pour la transmission de la pensée. Le pouvoir d'expression des symboles est en rapport nécessaire avec l'observation concrète. Cette dépendance fondamentale constitue la relativité du langage (1).

2. - *Définition objective du temps.*

En ce qui concerne le *temps*, il est indifférent, au point de vue scientifique, que l'on soit, ou non, d'accord sur l'origine et la nature métaphysique de cette notion; mais il est indispensable qu'on arrive à lui faire correspondre la même représentation numérique.

La définition objective du temps est constituée par l'ensemble des procédés employés pour déterminer le temps *numérique* de manière que cette valeur puisse être observée partout et qu'elle puisse être acceptée par tous.

Or en examinant les détails de cette détermination numérique, on est amené à faire certaines remarques qui m'ont paru dignes d'être signalées.

Le principe commun à toutes les méthodes consiste à prendre pour base un mouvement de comparaison, dépendant d'un paramètre et auquel on rapporte tous les autres. Ce mouvement doit être observable sur toute la surface de la Terre. On satisfait à ces conditions d'une manière suffisante par l'emploi du temps sidéral ou du temps solaire moyen.

Or l'emploi du temps sidéral en mécanique conduit à une contradiction curieuse quand on augmente la précision des observations. Les lois de Newton se déduisent de l'observation et il est certain que le temps qui y figure se ramène au temps sidéral au point de vue de la vérification expérimentale. Dans ces conditions, si l'on désigne par θ l'angle horaire d'une certaine étoile, le temps sidéral t est proportionnel à θ; on a $\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$

Or si l'on écrit, suivant les principes de la Mécanique newtonienne, les équations du mouvement de la Terre par rapport à son centre de gravité et à un système de référence (S) orienté par rapport au ciel étoilé, on reconnaît que ce mouvement ne se réduit pas à une rotation uniforme par rapport au temps des équations considérées. L'hypothèse fondamentale $\frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$ n'est pas vérifiée. Telle est la contradiction.

Le temps marqué par une pendule n'est pas plus régulier; la durée des périodes n'est pas influencée uniquement par des circostances accidentelles, elle l'est également par la variation de l'intensité de la pesanteur.

On résout la difficulté par l'introduction d'un temps théorique défini par la condition de conserver la forme newtonienne des équations de la mécanique. On

---

(1) Si l'observation conditionne le langage, le langage, à son tour, conditionne la pensée dans la mesure où elle est transmissible. Telle est, sans doute, l'origine de la prétendue harmonie préétablie entre les lois de la nature et celles de notre entendement.

lui donne quelquefois le nom de temps absolu; il me paraît plus régulier de le considérer comme une variable canonique, à laquelle correspond une forme canonique des lois de la gravitation.

3. - *Détermination théorique du temps canonique.*

La détermination pratique de la différence entre le temps canonique et le temps sidéral, ou le temps solaire moyen, est du domaine de l'astronomie.

Le principe de la moindre action donne une expression théorique du temps canonique.

Considérons seulement le système planétaire, supposé assez éloigné du reste de l'univers gravitant pour qu'il n'en résulte aucune action accélératrice observable.

Je suppose l'ensemble rapporté à une base de référence à laquelle s'appliquent les équations de la Mécanique newtonienne.

J'admets qu'à une position d'un élément correspondent des positions déterminées de tous les autres éléments; l'ensemble de ces positions correspondantes définit une position du système. Je suppose enfin que le système passe, par un déplacement continu, d'une position à une autre infiniment voisine. Soit ds l'arc infiniment petit décrit par un élément de masse m et soit, d'autre part, $U+h$ une fonction dépendant des positions relatives des éléments, telle qu'elle figure dans l'intégrale des forces vives.

Le principe de la moindre action exprime que l'intégrale

$$I = \int_A^B \sqrt{(U+h)\Sigma m ds^2}$$

évaluée entre deux positions A et B du système, est minima pour le mouvement réel entre ces deux positions.

Remarquons que le temps ne figure pas dans l'integrale I.

La succession des positions se trouve ainsi définie comme une géodésique d'une forme quadratique de différentielles dont le nombre des variables est égal à celui des paramètres servant à définir la position du système.

Or pour ramener la détermination de cette géodésique à la forme ordinaire des équations différentielles de la mécanique, il suffit de prendre une variable auxiliare t définie par l'egalité

$$dt = \sqrt{\frac{\Sigma m ds^2}{2(U+h)}}$$

Telle est la définition théorique du temps canonique de la gravitation.

4. - *Le système de référence canonique et le principe de l'inertie.*

Le système de référence auquel nous avons rapporté l'ensemble mobile est celui auquel la mécanique classique attache la notion de mouvement absolu. Je

préfère lui donner le nom de système canonique pour écarter l'idée d'absolu qui est d'origine métaphysique. On sait que le système canonique est orienté d'une manière à peu près invariable par rapport au ciel étoilé. Cette circonstance doit être remarquée. Elle semble indiquer que les corps les plus éloignés appartenant au monde observable, ceux dont l'action accélératrice est négligeable, dans le système canonique, sont néanmoins liés, par une cause actuellement inconnue, à la détermination de ce système canonique.

Par une répercussion curieuse il en résulte que le principe de l'inertie se trouve lié lui-même au fait de la gravitation (1).

D'après le principe de l'inertie, tel qu'on l'énonce fréquemment, le mouvement d'un élément ponctuel, non soumis à une action extérieure, est rectiligne et uniforme c'est-à-dire, en précisant les termes, rectiligne par rapport au système canonique de référence et uniforme par rapport au temps canonique de la gravitation.

Les deux éléments servant à définir le mouvement rectiligne et uniforme sont donc déterminés par les influences extérieures qu'on voulait écarter.

Les phénomènes lumineux se rattachent également à la gravitation par la communauté du système de référence canonique et par la constance de la vitesse de propagation dans le vide. Il est naturel de penser que la corrélation doit se manifester d'une manière plus étroite et plus précise.

5. - *Perfectionnements possibles.*

Les lois de Newton, étant déduites de l'observation, peuvent admettre sans contradiction tous les perfectionnements que des observations plus précises pourraient rendre nécessaires. M. CHAZY en a indiquées quelques unes, qu'il serait facile d'introduire dans l'intégrale de la moindre action. On peut dire que la difficulté est moins grande de trouver des corrections que de les justifier par des raisons théoriques.

La théorie d'Einstein se rapproche du principe de la moindre action par le fait que le mouvement d'un point y est défini par une géodésique d'une forme quadratique de différentielles. Mais on admet que cette forme de différentielles, définissant *l'espace-temps*, ne comprend que quatre variables et que le mouvement de chaque point mobile annule la variation du premier ordre de cette forme. Elle amène donc à considérer les points isolément. Si l'on connaissait l'intégrale générale des géodésiques de l'espace-temps, il suffirait d'y particulariser les constantes pour passer d'un mobile à un autre.

Dans cette théorie il ne peut y avoir aucune corrélation nécessaire, élément par élément, entre deux mouvements différents. Il en est comme de deux géodésiques d'une surface. Il n'existe aucune correspondance ponctuelle entre deux grands cercles d'une sphère. C'est cette absence de corrélation qui exlut la pos-

(1) Mach l'avait déjà observé, comme l'a rappelé récemment M. CHAZY.

sibilité de l'application à la théorie d'Einstein de la méthode des perturbations ou de quelque chose d'équivalent. Or sans les perturbations, la théorie d'Einstein ne représente pas, même avec une approximation grossière, les mouvements observés des différents astres du système solaire. Ainsi l'on ne peut déduire résultats satisfaisants de la théorie d'Einstein qu'en renonçant au principe même de la théorie.

Les travaux intéressants auxquels elle a donné lieu peuvent d'ailleurs, par une extension facile, s'appliquer aussi bien à la Mécanique classique, considérée au point de vue du principe de la moindre action.

F. GONSETH et G. JUVET

SUR LA RELATIVITÉ À CINQ DIMENSIONS ET SUR UNE INTERPRÉTATION DE L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER

L'exposé présenté au Congrès avait pour but de faire connaître les recherches des auteurs, résumées tout d'abord dans quatre notes des Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (1), développées ensuite dans un mémoire, alors sous presse, et devant paraître aux Helvetica physica Acta (2), et de montrer en outre les nouvelles conséquences qu'une approximation plus poussée a permis d'obtenir.

Nous nous bornerons ici à résumer très brièvement le mémoire en question et à donner ensuite avec plus de détails les nouveaux résultats que nous avons obtenus depuis sa rédaction.

1. - Après avoir montré que les équations du mouvement d'une particule électrisée conduisent nécessairement à la considération d'un déplacement parallèle dans un espace à cinq dimensions dont la connexion ne peut être rattachée à un ds^2 non dégénéré, on peut faire voir, qu'un léger changement de la connexion affine qu'on était tout d'abord amené à introduire, confère à cet espace à cinq dimensions une métrique dont le ds^2 est de la forme suivante:

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k + 4\varphi_i dx^i dx^4 + \psi^2 dx^4 dx^4,$$

où x^0, x^1, x^2, x^3 sont les coordonnées de temps et d'espace et où x^4 est la cinquième variable introduite par la relation

$$dx^4 = \frac{e}{m}\, ds,$$

valable sur la ligne de l'Univers E_5 de la particule en mouvement dont m est la masse et e la charge.

Les g_{ik} sont en première approximation les potentiels du champ gravifique einsteinien de l'Univers E_4 de la théorie classique; les φ_i sont les potentiels du champ électro-magnétique; ψ^2 est, contrairement à l'hypothèse faite par les

(1) C. R., tome 185, p. 341, 412, 448, 535.

(2) Vol. I, fasc. 6, p. 421-436. (Manuscrit déposé le 28-VI-1928).

savants qui ont traité de l'électromagnétisme à cinq dimensions, une fonction et non pas une constante.

Les lignes d'Univers (dans E_5) d'un point matériel chargé sont les géodésiques de ce ds^2.

Dans les approximations que nous avons étudiées, nous n'avons jamais tenu compte des dérivées par rapport à x^4 des fonctions précédentes; nous les avons toujours négligées vis-à-vis des autres grandeurs, car jusqu'ici on ne connaît pas de phénomènes qui fassent intervenir une variation de la charge des particules électrisées en mouvement.

2. - La première approximation que nous avons étudiée concerne le cas où les φ_i sont nuls, et où l'on se place dans une région de l'Univers où ne se trouve aucune masse. Pour déterminer les coefficients g_{ik} et ψ^2, nous sommes partis des équations einsteiniennes:

$$R_{\alpha\beta}=0 \tag{1}$$

où les $R_{\alpha\beta}$ sont les composantes du tenseur de Riemann contracté, attaché au ds^2 proposé. Dans ce cas, les équations (1) pour α, $\beta=0, 1, 2, 3$ se trouvent être les équations d'Einstein définissant les seuls g_{ik}, pour $\alpha=4$, $\beta=0, 1, 2, 3$, les équations (1) sont identiquement satisfaites et pour $\alpha=\beta=4$, on obtient une équation aux dérivées partielles du second ordre qui n'est autre que l'équation de Schrödinger.

3. - En deuxième approximation, nous avons introduit les φ_i en supposant qu'on peut les négliger, ainsi que leurs dérivées, seulement vis-à-vis de ψ. Les équations du champ ne peuvent plus être de la forme (1), mais au contraire, à cause de la présence des φ_i, elles sont

$$R_{\alpha\beta}=\mu\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right) \tag{2}$$

où $R_{\alpha\beta}$ est un tenseur qui généralise le tenseur impulsion-énergie d'Einstein, et qu'on pourrait appeler le tenseur *impulsion-énergie-charge*; μ est une constante qui se réduit à la constante k d'Einstein lorsque les φ_i sont seuls.

Les équations (2) donnent alors:

pour α, $\beta=0, 1, 2, 3$, les équations du champ électro-magnétique [un des groupes des équations de Maxwell; l'autre groupe étant donné par des identités auxquelles satisfont les symboles de Christoffel, comme l'a montré M. KALUZA];

pour $\alpha=4$, $\beta=4$ on a une équation de Schrödinger en ψ (1).

---

(1) Cfr. notre mémoire des Helv. Phys. Acta, p. 435 où nous indiquons en quoi notre équation dite de Schrödinger diffère de celle qu'a proposée M. SCHRÖDINGER.

4. - Ce qui caractérise notre extension à l'Univers à cinq dimensions de la relativité einsteinienne, c'est que d'une part, elle donne une base étonnamment, solide pour fonder l'existence de l'équation de Schrödinger et que, d'autre part elle permet de rattacher d'une manière très simple la théorie des bicaractéristiques de M. HADAMARD et celle qu'a édifiée M. VESSIOT de la propagation des ondes attachées à un système dynamique, à la mécanique ondulatoire de M.M. L. DE BROGLIE et SCHRÖDINGER. Nous croyons bien que nous avons fait ainsi la première tentative pour donner à la mécanique ondulatoire une justification qui ne soit pas fondée uniquement sur le succès, mais qui le soit sur des bases théoriques formant une doctrine complètement cohérente, dont un grand avantage, par surcroit, est de fournir la géométrisation de l'électromagnétisme.

5. - Si l'on cherche les conséquences des équations (2) dans le cas très général où les g_{ik}, les φ_i et ψ ont des dérivées par rapport à x^4 dont les valeurs ne soient plus négligeables, on trouve naturellement des expressions très compliquées où les φ_i et ψ ne peuvent plus être séparés des g_{ik}, ou pour mieux dire, on trouve des équations du champ où les g_{ik} ne peuvent pas être isolés pour être calculés tout d'abord, les φ_i et ψ se calculant ensuite; de plus la belle simplicité des relations entre les géodésiques du ds^2 et les bicaractéristiques de l'équation de Schrödinger a disparu.

6. - C'est à l'équation (2) où $\alpha=\beta=4$ que nous allons consacrer notre attention. C'est encore une équation aux dérivées partielles du second ordre en ψ. Elle contient les dérivées du second ordre linéairement, mais les coefficients de ces dérivées dépendent de ψ. Par conséquent (1), les caractéristiques, et par suite, les bicaractéristiques de cette équation ne seront bien définies que pour une intégrale déterminée de l'équation: elles ne dépendent plus de la seule équation du second ordre.

Les termes du second ordre sont en effet:

$$\sum_0^3 a_{ik}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^k}+\sum_0^3 b_i\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i\partial x^4}$$

avec

$$a^{ik}=\gamma^{ik}\psi^2-4G^{ik,rs}\varphi_r\varphi_s, \qquad b_i=-2\varphi_i$$

où γ^{ik}=mineurs des g_{ik} de $d\sigma^2$, divisés par le déterminant $|g_{ik}|$ de ds^2; où $d\sigma^2$ est la partie $g_{ik}dx^idx^k$ du ds^2 et où les $G^{ik,rs}$ sont des expressions dépendant des seuls g_{ik}.

Il serait intéressant de rechercher la signification physique du fait analytique que nous venons de signaler. A quelles particularités physiques se rattache la

(1) Cf. HADAMARD: *Propagation des ondes*, p. 268.

distinction entre les équations des ondes dont la forme seule détermine les caractéristiques et celles pour lesquelles il faut avoir une intégrale déterminée pour que les caractéristiques soient définies.

7. - Une remarque importante qu'il convient de faire, c'est que l'équation en ψ ne contient pas de termes en $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^4 \partial x^4}$. Dès lors, il y a une différence entre les géodésiques du ds^2 et les bicaractéristiques de l'équation en ψ. Les rayons de l'onde attachée au mouvement d'un point matériel ne sont plus les trajectoires de ce point matériel, il y a une certaine *aberration* des ondes de DE BROGLIE. Si l'on peut se permettre une manière très elliptique de parler: les lignes les plus droites de l'Univers ne sont plus, dans le cas général, les lignes les plus courtes.

On peut voir facilement que cette aberration est liée à la variabilité de la charge, puisque cette variabilité doit être prise en considération dès l'instant où, dans les équations proposées, on tient compte des dérivées par rapport à x^4.

Notre théorie mathématique dépasse donc le cadre des phénomènes physiques connus.

J. LARMOR (Cambridge - Inghilterra)

HISTORICAL NOTE ON HAMILTONIAN RAYS AND DYNAMICAL ACTION

The original ideas of WILLIAM ROWAN HAMILTON, nurtured, like all the Irish school of his time, on the writers of the great age in France, have constituted an epoch in fundamental mathematical physics. They began with consideration of the properties of what he at first named on historical grounds the « Action function » for a system of optical Rays, in a memoir communicated in june 1824 to the Royal Irish Academy when he was an undergraduate at the University of Dublin, of nineteen years of age. As printed three years afterwards in the *Transactions*, there are prefixed very copious analytical tables of contents for three parts; but only the first part appeared in print — very dishevelled in form, doubtless from the distraction of his wide range of philosophical and poetic interests, not to mention early settlement of his academic career as Astronomer Royal for Ireland: *Trans. R. I. A.* Vol. XV (1828) pp. 81-174. The other two parts seem never to have appeared at all, though the tables of contents give a definite digest of their material, including already an adumbration of the extension to dynamics. Incidentally, among other partially related topics, the differential geometry of systems of lines, straight or curved, was developed in extensive but undigested fashion, long before it emerged from Plücker as a systematic and fertile branch of abstract mathematics. There followed three Supplements, enforcing the fundamental ideas, but perhaps also still further confusing their application by excess of detail only partially relevant.

Of these the first Supplement, dated 1830 and sliding away into geometry of ray-systems straight and curved, is in the next volume of *Trans. R. I. A.*, pp. 1-61.

The second Supplement (1831), relating to expansions of the Characteristic Function such as are required for changes of the origin in optical systems, soon branches away into complex and hardly practicable mathematical formulas, but ends up with a workmanlike verification of Sir JOHN HERSCHEL's result for aberration of lenses. This application, and interesting short notes, extracted incidentally from HAMILTON, *Phil. Mag.*, 1833, on aberration in refraction of a pencil across a prism, and *Phil. Mag.*, 1841, on the aberrations of a lens formed of uniaxial crystal such as quartz, alone seem to survive to testify to

his own practical mastery, when prevented from digression, of the new formulation for geometrical optics.

The third Supplement, *Trans. R. I. A.* Vol. XVII (jan.-oct. 1832) pp. 1-141, again with detailed table of contents once more restating the foundation principle, but then largely drifting into general analytical discussion of Complexes and Congruences of Rays and their caustic surfaces, finally diverges into Fresnelian optics, and ends with the once famous incidental prediction of conical refraction in crystals.

A main field of application of the matured theory, there restricted perforce into more practical optical form yet still liable to digression into more abstract topics, appeared in a note hidden away for half a century in *British Association Report,* Cambridge 1833, pp. 360-372, the essential part of which was at length disinterred and reprinted by Lord RAYLEIGH in two pages in *Phil. Mag.* 1908; « Scientific Papers », vol. V pp. 456-464. In it the modern five types of aberrations of an axial optical system are already exhibited as lying naturally within the modified caracteristic function — recovered in recent times in a special form as the « Eikonal » — which HAMILTON advances as the compendious systematic foundation for all practical investigations on optical instruments. Another form utilized by RAYLEIGH himself as a still more compact foundation for this purpose, semi-modified as involving coordinates of points at the image-end and directions of rays at object-end of the system, had already been expounded in detail, but as usual branching away into abstract digressions, by HAMILTON as the function W of the first Supplement.

In the year following, these desultory developments, which had extended now over ten years from the undergraduate beginnings, converging toward what was to be essentially a new outlook in physical mathematics, culminated in a magnificent synthesis, « On a general method in Dynamics », in two memoirs, *Phil. Trans.*, 1834-1835. This departure has expanded the algebraic structure of abstract dynamics so as to fit that science to be the essential symbolic guide and touchstone for progress in all departments of physical science. Here again, under limitation as regards space, as he had doubtless also been in the memoir itself in *Phil. Trans.*, he has provided a coherent and significant abstract of the guiding principles in *Brit. Assoc. Report*, Edinburgh, 1834, pp. 513-518.

After this date (1835) HAMILTON seems to have parted company with fundamental dynamics and optics, devoting the remaining twenty-five years of his life largely to the domain of symbolic algebras, and particularly to the development, and the detailed application over wide ranges of subjects, of his system of quaternions, being the precursor in this extensive and imaginative field, on the future practical importance of which he laid great stress. An interesting very simple account of the efforts which finally hit upon quaternions, and are embalmed in their name, is given by him in *Phil. Mag.* of date 1844.

The fundamental character of his culminating doctrine of Varying Action, as implicating the whole range of physical science, seems to have been first emphasized for a wider audience in THOMSON and TAIT's classic book on « Natural Philosophy » (1867). It appears from surviving letters that TAIT had a large share of the merit of this recognition, by insistance on his more physical colleague's study of the work of his own Irish friend, of which the development, apart from applications in dynamical astronomy natural to the time, had hitherto, following the lead of JACOBI, been in the direction of abstract analysis of the implications of systems of partial differential equations. TAIT failed however in interesting Lord KELVIN in HAMILTON's quaternions as a working instrument; though as an invariant or intrinsic mode of expression of results it had more success with MAXWELL and naturally with HAMILTON's compatriot FITZ GERALD. From THOMSON and TAIT the illumination passed on to HELMHOLTZ, culminating in his extensive memoir « Ueber die physikalische Bedeutung des Princips der kleinsten Wirkung », *Crelle's Journ. für Math.*, 1886.

The practical applications in the extended Action domain made by HAMILTON himself, both in optics and in astronomy, rested on the simple plan of successive improvements, starting from an initial approximate form of the Action function with the suitable number of adjustable parameters, a function which, as was thus implied, must be expected to involve within itself alone the complete and immediate consummation of any problem in hand. This was the method suitable to the actual dynamical astronomy, which was then confined to working out the modifications of the motions of the stable Solar system due to slight perturbing causes. The formal verification that any function whatever, satisfying the characteristic partial differential equation and containing the proper number of arbitrary constants, does in fact provide within itself a complete conspectus of the solution of the dynamical equations, was supplied by JACOBI, who also developed the theory far into the recondite domain of the formal implications inherent in knowledge that is conditioned by partial differential equations. The classic exposition is his « Lectures on Dynamics » as published in 1843, reprinted in « Werke », Supplement-Band. (Cf. also CAYLEY's: « Reports on Theoretical Dynamics », *Brit. Assoc. Reports*, 1857, 1862, or « Collected Papers », Vols. III, IV, historically very instructive, especially as regards the early evolution of general dynamics from the problems of planetary astronomy in the hands of the French analysts). HAMILTON was content to take this for granted in his own simpler astronomical problems. The far-flung physical interpretations, involving reciprocal relations between any two distant stages of the progress of the dynamical system, separated by finite time, that were doubtless indicated in their early beginnings by the familiar yet profound physical fact of image correspondences in the optical domain, and later illustrated in arresting manner by problems of dynamical aim in THOMSON and TAIT, forming the other aspect of the HAMILTONIAN theory, even

more fundamental for the study of nature, were first expanded systematically into general physical science by HELMHOLTZ. That concise consolidation of the criterion for the coherent dynamical nature of physical systems is obviously still open to far-reaching developments.

As a matter of scientific history, a germ of the earlier HAMILTONIAN developments for rays may be found, already in NEWTON's day, in the principle of COTES, expanded by R. SMITH in his « System of Opticks » and recalled to modern attention by RAYLEIGH. It asserts that the apparent distance of an object at A, seen across any optical instrument by an observer at any other place B, is equal to the apparent distance of the same object located at B as seem from A. For the special case when A and B are conjugate foci, the relations of object and image, as earlier generalized for all systems by HUYGENS, emerge from this principle (1). When rays are replaced by their analogues, the paths of projectiles in a field of force, the principle becomes a reciprocal relation expressive as *supra* of the accuracies of aim from any position in order to strike a target at any other position whatever. Under this aspect the subject was explored, involving the conjugate pattern relations on any two targets anyhow situated and for the general non-symmetrical case, as *supra*, in THOMSON and TAIT's « Natural Philosophy » (1867) as an early overt illustration of the wide scope of the terminal relations inherent in the method of Varying Action, afterwards systematically developed and utilized by HELMHOLTZ and RAYLEIGH.

---

(1) This important historical note of 1886 by RAYLEIGH is in « Scientific Papers » Vol. II pp. 513-21. The way in which the relations, near the focal pairs of positions that are involved in the one more general reciprocal relation which asserts that apparent distance is a mutual property of any pair of positions on a ray, is indicated, perhaps too briefly, in the last paragraph.

G. Y. RAINICH (Ann Arbor - U. S. A.)

ON A SPACE-TIME POSSESSING THE SYMMETRY PROPERTIES OF RADIATION

This paper forms a continuation of two papers already published in the Proceedings of the Nat. Acad. of Sciences (Washington); it will be necessary, before we come to the exposition of results which form the body of this paper, to recall the ideas and results of the two preceding papers.

1. - The fundamental idea is this: guided by the analogy with the case of an elementary particle of matter we want to arrive at a description of the elementary process of radiation — or photon — using on the one hand the general field equations and, on the other, the symmetry properties of the photon. The general field equations may be MAXWELL's equations, or the equations of the general relativity theory as the case might be. The symmetry properties of a photon are expressed in terms of a group of transformations G under which an elementary process of radiation is invariant just as the symmetry properties of a material particle are expressesd by stating that the field of the particle must admit the group of rotations around that particle. This group G which, of course, is of a more complicated character than the group of rotations around a point, because time cannot be eliminated here, can be written in the following form (Proc. Nat. Acad. Sc., 1927, Vol. 13, p. 30);

$$
\begin{aligned}
x' &= x + ay + bz + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)(t-x) + c,\\
y' &= y + a(t-x),\\
z' &= z + b(t-x),\\
t' &= t + ay + bz + \tfrac{1}{2}(a^2+b^2)(t-x) + c.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

A MAXWELL field that is invariant under this group has already been determined (Ibidem, June, 1928, vol. 14 p. 484); we may state here that it has been found to consist of two parts: one is what is usually called a plane wave; it admits the group but does not *belong* to it, it admits also a wider group which deprives this solution of the corpuscular character; the other part is an electromagnetic field which travels together with the photon with the velocity of light and *has a plane singularity* a plane which passes at every moment through

the photon, is perpendicular to the direction of propagation of light, and in all of whose points, with the exception of the photon itself where they become indeterminate, the electric and magnetic vectors become infinite.

2. - So far we presented our former results; the present paper is devoted to the discussion of the situation arising when instead of the ordinary classical or special relativistic electromagnetic field we consider as our fundamental field the field of general relativity, i. e., the curvature field of space-time which satisfies the condition that the contracted Riemann tensor is equal to, or has the form of the electromagnetic stress-energy tensor. The problem is, therefore, to find a curved space-time such that (*a*) it admits the group G introduced above and (*b*) its contracted Riemann tensor has the form of an electromagnetic stress-energy tensor.

3. - What does it mean that a curved space-time admits group (1)? Following the procedure adopted by PALATINI in the case of central symmetry we formulate, more precisely, the question as follows: we consider a curved space-time C in one-to-one correspondence with a flat space-time F; in virtue of this correspondence to every transformation of the flat space-time F there corresponds a trasformation of C; to the group (1) of F there corresponds a certain group of transformation in C; we require that the curvature field — or, what is the same, that the metric field — shall admit this group; if this requirement is fulfilled we say that C possesses the symetry properties of a photon.

In actually establishing such a correspondence much help can be derived from a system of curvilinear coordinates which in many ways is analogous to the system of polar coordinates used in the centrosymmetric case. To arrive at this system we notice in the first place that the whole space-time falls naturally into hyperplanes $t-x=\text{const}$. Each point of such a hyperplane can be transformed into every other point of the same hyperplane by a transformation of the group (1). It is natural then to characterize a point by first giving the number $u=t-x$ which specifies the hyperplane to which it belongs and then giving the values a, b, c, of the parameter of the transformation which brings into that point some fixed point, say the point 0, 0, 0, u that means the point of the hyperplane which lies on the t-axis. These four numbers a, b, c, u we take then as coordinates of a points; this system of coordinates can be used for all points with the exception of the points in the hyperplane $u=0$, i. e. the points for which $x=t$ (the hyperplane $u=0$ is a singular locus of the group (1); in it the group is not transitive, the point 0, 0, 0, 0 is transformed into itself by all the transformations of the group). The new coordinates of a point of space-time are expressed in terms of x, y, z, t as follows:

$$(2) \qquad a=y/(t-x), \quad b=z/(t-x), \quad u=t-x, \quad c=x-(y^2+z^2)/2(t-x).$$

After having introduced this system of coordinates in the space F we can transfer it to the space C by using a, b, u, c as the coordinates of the point of C which corresponds in the fundamental one-to-one correspondence to the point of coordinates a, b, u, c in F.

In the new coordinate system the transformations of group (1) take the very simple form

$$(1') \qquad a'=a+A, \qquad b'=b+B, \qquad u'=u, \qquad c'=c+C$$

where A, B, C are constansts.

According to our general definition we have to loock now for metrics which are not affected by (1'). It is obvious that such a metric must be given by a quadratic form $g_{\varrho\sigma}du^\varrho du^\sigma$ in which the *g's are functions of u alone.* So the first part (*a*) of our problem has been solved easily.

4. - We know now that the g's must be fonctions of u alone and we must determine these ten functions in such a way that the contracted Riemann tensor be of the form of an electromagnetic stress-energy tensor; that means that the components R_{ab} must satisfy the relations

$$(3) \qquad R_{ab}-\frac{1}{4}\delta_{ab}R=f_{a\varrho}f^\varrho_b-\frac{1}{4}\delta_{ab}f_{\varrho\sigma}f^{\varrho\sigma}$$

where the f's are the components of an antisymmetric tensor satisfying MAXWELL'S equations. This problem seems to be of some difficulty and I do not possess a general solution of it. I can not even answer the important question whether the general solution depends only on arbitrary constants or *also on arbitrary functions.* Instead I have to present a particular solution which has been arrived at more or less by guesswork. The line element of a flat space-time, of F, in the a, b, u, c coordinates is

$$(4) \qquad ds^2=u^2da^2+u^2db^2-du^2-2du\cdot dc$$

as can be easily calculated; we investigate a generalization of this, viz.,

$$(5) \qquad ds^2=u^2da^2+u^2db^2+Zdu^2+2du\cdot dc+Ldc^2$$

where Z and L are functions of u to be determined. Calculating the contracted Riemann tensor and making $a=u^1$, $b=u^2$, $u=u^3$, $c=u^4$ we find in the first place that

$$R^2_1=0, \qquad R^1_2=0, \qquad R^1_1=R^2_2.$$

This means that the 1-2 plane, i. e. the a-b plane is a plane all of whose vectors are transformed into vectors of the same direction. We know (Trans. Amer. Math. Soc., 27, p. 118) that the contracted Riemann tensor must possess two such planes and that these two planes must be absolutely perpendicular; it follows

that we must have the same relations for the plane which is absolutely perpendicular to the 1-2 plane, that is for the 3-4 plane, viz.,

$$R_3^4=0, \qquad R_4^3=0, \qquad R_3^3=R_4^4. \tag{6}$$

The second of these equations in satisfied identically, the first gives

$$LZ'+L'Z=0 \tag{7}$$

i. e., LZ must be a constant; and the third is also satisfied under this condition.

If we neglect the cosmological term, i. e. assume $R=0$, we know (ibidem, p. 135) that the characteristic numbers in the two absolutely perpendicular planes mentioned above must be equal in absolute value and of opposite sign; that means that we must have

$$R_1^1+R_3^3=0. \tag{8}$$

This leads, if we take account of the relation (7) between L and Z arrived at above to the equation for L

$$\tfrac{1}{2}L''+2L'/u+L/u^2=0 \tag{9}$$

which may be written as $(u^2L)''=0$ and gives

$$L=a/u+b/u^2; \tag{10}$$

if the constant product of L and Z is denoted by p we have also

$$Z=pu^2/(au+b). \tag{11}$$

5. - The process of determining L and Z just completed should be compared to the process of determining the two unknown functions in the expression for the linear element corresponding to a material particle, i. e., in the centro-symmetry case (section 12 of the Transaction paper quoted above). Although there are no a priori reasons why we should expect similarity between the function L and Z on one hand and the function ξ and η on the other, it is interesting to note that equation (7) coincides whit equation 12.3 of the paper mentioned and that equation (9) differs from the corresponding equation for the centro-symmetric case in one term only.

6. - The remaining part of the calculation, the determination of an electromagnetic field compatible with the metric, is not dificult and leads to the result

$$f_{12}=\sqrt{2Mb}\cdot\cos\varphi, \quad f_{13}=f_{14}=f_{23}=f_{24}=0, \quad f_{34}=\sqrt{2b}\,\sin\varphi/u^2 \tag{12}$$

which is not unlike the result in the centrosymmetric case with the differenc that here u appears instead of r; φ is here an arbitrary constant, and $M=1/(1-LZ)$ also a constant.

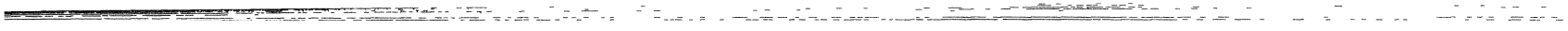
In order to find an interpretation of the result just arrived at it is natural to compare it to the electromagnetic field in *flat* space-time invariant under the group G which has been obtained in the second note quoted in sect. 1. Expressing that field in curvilinear coordinates introduced in sect. 3 and comparing its components to the components (12) we find that the electromagnetic field determined by the metric studied corresponds to the electromagnetic field of flat space-time in which in the notations of the note quoted

$$\gamma=\delta=0, \qquad f(u)=g(u)=0 \tag{13}$$

i. e. to a field whose electric and magnetic vectors have the components

$$\begin{aligned} X&=\alpha/u^2, & Y&=-(\alpha y+\beta z)/u^3, & Z&=(\beta y+\alpha z)u^3 \\ L&=\beta/u^2, & M&=-(\beta y-\alpha z)/u^3, & N&=-(\alpha y+\beta z)/u^3. \end{aligned}$$

The general character of this field is described at the end of the first section of the present communication.



DOROTHY WRINCH (Oxford - Inghilterra)

ON A METHOD FOR CONSTRUCTING HARMONICS FOR SURFACES OF REVOLUTION

1. - Summary.

Certain classical problems of hydrodynamics and electrostatics require the construction of a function V, which satisfies LAPLACE's equation $\Delta^2 V=0$, is evanescent on S the sphere at infinity, takes a specific value on a closed surface s, and is free from singularities in the region between S and s.

This communication gives, in outline, a method which allows the systematic exploration of the class of surfaces of revolution with reference to which these problems may be solved, and the construction of harmonics, symmetric about the axis of figure, which can be made to take specific forms on these surfaces.

2. - The method.

Consider s, the surface of revolution with equation

$$z/a=(1+b_1\lambda)\cos v+b_2\lambda^2\cos 2v+ \ldots. +b_n\lambda^n\cos nu \ldots.$$
$$\varrho/a=(1-b_1\lambda)\sin v-b_2\lambda^2\sin 2v- \ldots. -b_n\lambda^n\sin nv \ldots.$$

If we write $w=u+iv$, S the sphere at infinity is represented by $v=+\infty$, and this surface s by $v=0$ in the transformation

$$W=z+i\varrho=a(e^{iw}+b_1\lambda e^{-iw}+ \ldots. +b_n\lambda^n e^{-niw} \ldots.)$$

which it will be convenient also to write

$$W=a(e^{iu}/\eta+b_1\lambda\eta e^{-iu}+ \ldots. +b_n\lambda^n\eta^n e^{-niu} \ldots.) \tag{2.1}$$

in terms of the co-ordinate $\eta=e^v$. It will be assumed that the parameters b_n are such that dW/dw has no infinities and no zeros in the region between s and S, that is for values of v between zero and $-\infty$, of η between unity and zero: also that these parameters are all of the same order of magnitude: finally that $\lambda^2<1$.

The appropiate form of LAPLACE's equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\varrho\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\varrho\frac{\partial}{\partial v}\right)V=0$$

can be written in the form

$$(D-b_1\lambda D_2-b_2\lambda^2 D_2-\ldots.-b_n\lambda^n D_n\ldots.)\,V=0$$

where the operators D, D_n are defined by the equations

$$D=\frac{1}{\sin u}\frac{\partial}{\partial u}\sin u\frac{\partial}{\partial u}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-1\right)$$

$$D_n=\eta^{n+1}\left[\frac{1}{\sin u}\frac{\partial}{\partial u}\sin nu\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\sin nu}{\sin u}\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}+n\right)\right].$$

On the basis of the function

$$(2.2)\qquad {}_kf_0=\eta^{k+1}P_k(\cos u)$$

a harmonic for the sphere — which is the surface $\eta=1$ in the transformation (2.1) when $\lambda=0$ — a harmonic for the surface s in general may be constructed in powers of λ, in the form

$${}_kV={}_kf_0+\lambda_kf_1-\ldots.+\lambda^n{}_kf_n\ldots.$$

where the equations determining the f_n-function are

$$Df_n=b_1D_1f_{n-1}+b_2D_2f_{n-2}+\ldots.+b_nD_nf_0$$

just as the equation determining f_0, yielding the well known functions (2.2) is

$$Df_0=0.$$

The equation for f_1 is

$$Df_1=b_1D_1f_0.$$

Since

$$(2.3)\qquad D_1\eta^\sigma P_m(\cos u)=(\sigma-m)(\sigma+m+1)\eta^{\sigma+2}P_m(\cos u)$$

this equation takes the form

$$Df_1=2b_1(k+1)\eta^{k+3}P_k(\cos u).$$

Now, in view of the fact that

$$(2.4)\qquad D\eta^\sigma P_m(\cos u)=(\sigma+m)(\sigma-m-1)\eta^\sigma P_m(\cos u)$$

a particular integral is available for f_1 in the form

$$f_1=\frac{k+1}{2k+3}\eta^{k+3}P_k(\cos u),$$

the complementary function being

$$(2.5)\qquad \sum A_s\eta^{s+1}P_s(\cos u)$$

All the functions f_n evidently share the same complementary function.

Again, the equation for f_2 is

$$Df_1=b_1D_1f_1+b_2D_2f_0$$

Since

$$(2.6)\quad D_2\eta^\sigma P_m(\cos u)=\frac{2}{2m+1}\eta^{\sigma+3}\{m(\sigma-m+1)(\sigma+m+1)P_{m-1}+(m+1)(\sigma-m)(\sigma+m+2)P_{m+1}\}$$

in view of the result (2.4) there is a particular integral for f_2 of the form

$$f_2=b_1\eta^{k+5}P_k(\cos u)+b_2\eta^{k+3}[\zeta_k P_{k-1}(\cos u)+\xi_k P_{k+1}(\cos u)].$$

Now, in view of the result (2.4), it follows that an equation

$$DF=\sum_{s,t} B_{s,t}\eta^s P_t(\cos u)$$

has a particular integral of the form

$$F=\sum_{s,t} C_{s,t}\eta^s P_t(\cos u)$$

and the same complementary function [given in (2.5)] as all the f_n-functions. Also, any of the D_n-operators acting on such a function as F produces merely a function

$$\sum_{s',t'} E_{s',t'}\eta^{s'}P_{t'}(\cos u).$$

Thus, by an inductive argument it may be established that all the functions f_n are of one « standard form »,

$$(2.7)\quad \sum E_{\sigma,m}\eta^\sigma P_m(\cos u)$$

where (σ, m) take a finite set of integer values. The actual coefficients, written down for f_1 and f_2 may be evaluated by a step-by-step procedure.

It is impossible in this note to go further into the general determination of the coefficients. A detailed investigation of the whole method will appear shortly after the Congress in an English periodical.

It will be sufficient for the present purpose of outlining the method to remark that the typical function

$${}_k V=\lambda_k f_0+\lambda_k f_1+\ldots.+\lambda_k^n f_n\ldots.$$

satisfying LAPLACE's equation, is evanescent on S the sphere at infinity (given by $\eta=0$): there is no theoretical difficulty in building up a composite harmonic function

$$V=V_0+V_1+V_2+\ldots.+V_n\ldots.$$

which takes any specific value on the surface s.

The fact that these harmonic functions are all of the « standard form » given in (2.7) is of considerable interest and of practical importance in that the properties of the P_m-function are well-known and the function itself has been tabulated.

3. - An illustration of the method.

As an example of the method, we give the solution of the problem of finding the electric capacity of a conductor in the form of the surface of revolution s correct to terms of order λ^3.

Applying the procedure given in § 2 we obtain the harmonic

$$V=P_k\eta^{k+1}[1+a_kb_1\lambda\eta^2+\beta_k(b_1\lambda\eta^2)^2+\gamma_k(b_1\lambda\eta^2)^3+\delta_kb_3\lambda^3\eta^4]+$$
$$+b_2\lambda^2\eta^{k+4}[\xi_kP_{k+1}+\zeta_kP_{k-1}]+b_3\lambda^3\eta^{k+5}[\mu_kP_{k+2}+\nu_kP_{k-2}]$$

terms of order λ^4 being neglected.

In order, therefore, to construct a harmonic which will be constant on $\eta=1$, it is necessary merely to take

$$V=V_0+K_1V_1+K_2V_2$$

K_1 and K_2 being appropriate constants. On $\eta=1$, $V=K$ where

$$K=1+a_0b_1\lambda+\beta_0b_1^2\lambda^2+(\gamma_0b_1^3+\delta_0b_3)\lambda^3$$
$$=1+\frac{1}{3}b_1\lambda+\frac{1}{5}b_1^2\lambda^2+\left(\frac{1}{7}b_1^3=\frac{15}{1}b_3\right)\lambda_3.$$

The charge on the conductor is

$$\lim_{r\to\infty}(Vr)=a\lim_{\eta\to0}(V/\eta)=a\lim_{\eta\to0}(V_0/\eta)=a.$$

Hence the capacity of the conductor is C where $C=a/K$.

The same technique will yield the solution to any higher degree of accuracy which may be required. By taking a potential

$$V=V_0+K_1V_1+\ldots.+K_nV_n$$

(for example) the capacity could be found correct to terms of order λ^{n+1}.

4. - Conclusion.

The mode of attack given in this note is of interest from several point of view (1).

It demonstrates the fact that the natural method of finding harmonics for a general surface of revolution is by means of a step-by-step procedure from the sphere treated by the transformation

$$z+i\varrho=ae^{iw}$$

via the spheroid treated by the transformation

$$z+i\varrho=a(e^{iw}+b_1\lambda e^{-iw})$$

---

(1) Cp. a paper by the present writer: Proceedings of the London Mathematical Society, Series 2, Volume 24, part 6.

to the more general form of surface treated by the transformation

$$z+i\varrho=a(e^{iw}+b_1\lambda e^{-iw}+b_2\lambda^2 e^{-2iw})$$

and so on. The remarkable point is that there is a simple inductive procedure always available, whereby a more general form for the surface s does not require a wholly new treatment, but merely the correction of the harmonics used in the simpler cases, in certain clearly defined ways. It is no longer a case of requiring a kind of « mathematical mutation » before a new type of surface can be treated. On the contrary, the method covers the surface of revolution

$$z/a=(1+b_1\lambda)\cos u+b_2\lambda^2\cos 2u+ \ldots. +b_n\lambda^n\cos nu\ldots.$$
$$\varrho/a=(1-b_1\lambda)\sin v-b_2\lambda^2\sin 2u- \ldots. -b_n\lambda^n\sin nu\ldots.$$

which with its aleph$_0$ constants b_n (limited only by the general assumptions already mentioned) allows a very considerable degree of generality.

The method under discussion, further, emphasizes the fact that the electric capacity of a conductor in the form of a surface s (to take a simple illustration) is simply a *geometrical* property of the surface s, in the same way as the volume contained by the surface s, or its moments of inertia or the position of its mean centre are geometrical properties of s. Again « coefficients of hydrodynamical mass » used in discussing the translational motion of a body in a liquid, are of the same type. In consequence, just as it was useful to find a general form for the volume contained by any surface of revolution, so it is useful to view these classical problems of electrostatics and hydrodynamics as a whole and to devise a method which allows the systematic exploration of the class of surfaces of revolution with reference to which these problems may be solved. In this way, it is possible to make a methodological inventory of some of the various constants associated with these surfaces, which have interpretations in mathematical physics.

Finally, it will be noticed that there is a considerable advantage from the point of view of actual applications, in the fact that a step-by-step method of building harmonics is available. In practice it is of the first importance that results shoult be expressed in such a form that an approximation to any required degree is immediately deducible. Indeed, it is sometimes the case that elegant solutions of problems of pure mathematics give only cold comfort to those who wish to use them to obtain further information about the external world. It is therefore relevant to draw attention to the fact that the harmonics developed by this method are of a type which allows the solution of these problems of physics to be pursued to just that degree of approximation which the particular circumstances may require.

L. DONATI (Bologna - Italia)

RELAZIONI GENERALI CONCERNENTI LE RETI DI TRASMISSIONE E DISTRIBUZIONE DELL'ENERGIA ELETTRICA, DESUNTE DALLA LEGGE DI RECIPROCITÀ

Lo sviluppo imponente e sempre in via di aumento delle reti in discorso rende sempre più difficile il compito del loro divisamento per commisurarne in modo razionale ed organico gli elementi alle loro funzioni, non essendo più applicabili in sistemi così complessi gli ordinarî metodi di calcolo colle formole classiche.

Ora io penso che un aiuto efficace per disciplinare questa materia possa aversi dall'applicazione della *legge di reciprocità* (1), la quale si presta a mettere in luce certi elementi caratteristici da cui dipende il giuoco delle azioni interne e trarne relazioni sintetiche, accessibili al controllo sperimentale, che rispecchiano con evidenza le condizioni di funzionamento.

Esponendo qui come saggio alcune di queste leggi, io mi propongo in certo modo di additare agli elettrotecnici l'uso di uno strumento versatile atto ad agevolare il loro lavoro.

1. - Data una qualunque rete di fili conduttori, attivata da forze elettromotrici costanti (E) inserite nei rami (alimentazione interna), o mediante immissione a potenziale costante (V) di correnti dal di fuori (alimentazione esterna), o nell'uno e nell'altro modo insieme, se si considerano in essa due diversi stati elettrici:

$$S(E, V;\ I, J), \qquad S'(E', V';\ I', J')$$

indicando con I ed J rispettivamente le intensità delle correnti nei rami e nei punti di immissione (o di egresso), si ha la relazione

$$(A) \qquad \sum EI' + \sum VJ' = \sum rJI'$$

dove le due somme del primo membro s'intendono estese a tutti i rami in cui esistono le E e rispettivamente a tutti i punti d'ingresso (o egresso) delle correnti fornite dall'esterno, mentre la somma del secondo membro si riferisce a

(1) La legge di reciprocità, quale è qui riprodotta, fu primamente formulata e dimostrata dall'A. in una nota comunicata all'Accademia delle Scienze di Bologna nel 1899, ed illustrata in quella e poi in varie altre note posteriori comunicate alla stessa Accademia.

tutti i rami dove si hanno correnti tanto nel primo come nel secondo stato, e le r indicano la resistenza dei rami stessi.

Permutando i due stati, il secondo membro non varia: onde segue senz'altro la predetta legge di reciprocità nella forma:

$$(B) \qquad \sum EI' + \sum VJ' = \sum E'I + \sum V'J$$

e da questa poi associata alle espressioni delle potenze P e P' dei due sistemi:

$$P = \sum EI + \sum VJ, \qquad P' = \sum E'I' + \sum V'J'$$

si deduce l'espressione della differenza $P' - P$ nella forma:

$$(C) \qquad P' - P = \sum (E' - E)(I' + I) + \sum (V' - V)(J' + J).$$

Quanto ai modi di alimentazione della rete va notato che il secondo è riduttibile al primo, giacchè ogni somministrazione di corrente dall'esterno mediante due elettrodi aventi una d. d. p. λ equivale ad inserire fra essi un ramo di resistenza trascurabile in cui agisca una f. e. m. uguale a λ. Tuttavia è utile la considerazione diretta della seconda forma.

Questa poi ci porta a considerare, oltre la resistenza (r) dei rami, un'altra specie di resistenza (R) correlativa alle correnti J: poichè, quando mediante l'applicazione in una coppia di punti (α) di due elettrodi con una d. d. p. (λ_α) è immessa una corrente (J_α), che entrando dall'anodo si dirami in vario modo nella rete per poi uscire ricomposta dal catodo, il rapporto $\lambda_\alpha / J_\alpha$ viene a significare la resistenza (R_α) offerta dalla rete fra i due punti, che chiameremo resistenza *globale* e che viene così ad essere definita mediante il valore di detto rapporto. Queste nuove resistenze R differiscono sostanzialmente dalle r dei rami in quanto che esse, oltrechè dalla posizione dei due punti cui si riferiscono, dipendono *da tutta la compagine della rete*, e cangiano per ogni cangiamento arrecato alla compagine stessa (per aggiunta o soppressione dei rami, dislocamento, alterazione della loro resistenza, ecc.). Esse, come vedremo, hanno una parte importante in tutto ciò che segue.

2. - Passando alle applicazioni della (B), ci riferiremo alle due forme di alimentazione considerate separatamente, incominciando dal caso di alimentazione interna.

Indicando in generale con $C_{\beta\alpha}$ ciò che chiameremo *rimando* di corrente da α a β, cioè la corrente che una f. e. m. uguale a 1 inserita in un qualunque ramo r_α determina in un altro ramo r_β, dall'applicazione della (B) in cui si supponga $E_\alpha = 1$, $E_\beta' = 1$ e tutte le altre E, E' (nonchè tutte le V, V') uguali a zero, si ha

$$(\xi_1) \qquad C_{\beta\alpha} = C_{\alpha\beta};$$

mentre dalla stessa (B) prendendo le E' come sopra, ma conservando al sistema (E, P) la sua generalità (sempre con l'esclusione delle V), si ottiene per la corrente I_β in r_β:

$$I_\beta = \sum_\alpha C_{\beta\alpha} E_\alpha$$

da cui, qualora si conoscano le $C_{\beta\alpha}$, si ha l'espressione diretta delle I in funzione delle E. Sostituendo poi questi valori nella espressione ΣEI della potenza P della rete, si ottiene tale potenza in funzione quadratica $P(E)$ delle f. e. m. E:

$$P(E) = \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} E_\alpha E_\beta$$

onde si deduce un'altra espressione notevole per la I_β

$$I_\beta = \frac{1}{2} \frac{\partial P(E)}{\partial E_\beta}.$$

Per l'altro caso (alimentazione esterna, tutte le E, E' uguali a zero) si prendano a considerare due coppie α e β di elettrodi ed i rispettivi *rimandi* di potenziale che indicheremo con $\lambda_{\beta\alpha}$ e $\lambda_{\alpha\beta}$, cioè il rapporto dalle d. d. p. che si produce in β a quella applicata in α e viceversa. Si ha allora dalla (B) operando come sopra

(ξ_2)
$$\frac{\lambda_{\beta\alpha}}{R_\beta} = \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{R_\alpha},$$

relazione che ha stretta corrispondenza colla (ξ_1) trattandosi sempre in sostanza di diramazione di correnti cui si coordina la distribuzione del potenziale. Va notato a questo proposito che una f. e. m. E_α inserita in un ramo r_α determina ai capi del ramo una d. d. p. λ_α rappresentata, come è facile riconoscere, da

(a)
$$\lambda_\alpha = \frac{R_\alpha}{r_\alpha} E_\alpha,$$

che per $E_\alpha = 1$ si riduce a

$$\lambda_\alpha = \frac{R_\alpha}{r_\alpha}$$

relazione da tener presente anche per il seguito. Qui essa ci serve per trasformare l'espressione della corrente $C_{\beta\alpha} = \lambda_\beta / r_\beta = \lambda_{\beta\alpha} \cdot \lambda_\alpha / r_\beta$ in

$$C_{\beta\alpha} = \frac{\lambda_{\beta\alpha} R_\alpha}{r_\alpha r_\beta},$$

e analogamente

$$C_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha\beta} R_\beta}{r_\alpha r_\beta};$$

mediante le quali la (ξ_1), moltiplicando i due membri per $r_\alpha r_\beta / R_\alpha R_\beta$, si riduce senz'altro alla (ξ_2).

3. - Vediamo ora come per mezzo della (B) si possa determinare la legge di distribuzione del potenziale in una rete attivata mediante l'applicazione di una

d. d. p. in due punti a' e a'', supponendo per fissare le idee che a' faccia da *anodo* col potenziale V_1 ed a'' da *catodo* col potenziale V_0, essendo $V_1 - V_0 = \lambda$.

Si consideri per ciò un terzo punto generico a e s'indichi con x il valore incognito del potenziale in a che ci proponiamo di determinare. Mettendo in relazione questo stato mediante la (B) con quello che si avrebbe portando l'anodo in a'', il catodo in a ed indicando con y il valore del potenziale che ne risulterebbe in a', si ottiene un'equazione che, unita alle altre due dedotte da essa con permutazione circolare, dà luogo con facili riduzioni al sistema:

$$\begin{aligned} R_{a'a''}(x - V_0) + R_{a''a}(y - V_0) &= R_{a''a}\lambda, \\ R_{a''a}(y - V_0) + R_{aa'}(z - V_0) &= R_{aa'}\lambda, \\ R_{aa'}(z - V_0) + R_{a'a''}(x - V_0) &= R_{a'a''}\lambda. \end{aligned}$$

Questo è sufficiente alla determinazione delle differenze $(x - V_0)$, $(y - V_0)$, $(z - V_0)$ in funzione di λ e delle resistenze $R_{a'a''}$, $R_{a''a}$, $R_{aa'}$; e in particolare per avere $x - V_0$ basta sommare la prima equazione con la terza e sottrarre dal risultato la seconda, con che vengono eliminate $(y - V_0)$ e $(z - V_0)$, e si ricava il valore di $(x - V_0)$, ossia di $V_a - V_0$:

$$(b) \qquad V_a - V_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda}{a'a''}(R_{a'a''} + R_{a''a} - R_{aa'}).$$

È questa la legge cercata, dalla quale poi prendendo successivamente per a i punti b' e b'' di una qualunque coppia β, si ottiene per differenza il valore di $V_{b'} - V_{b''}$ che diviso per λ corrisponde a $\lambda_{\beta a}$: e se si pone per brevità

$$(c) \qquad W = \frac{1}{2}(R_{a'b''} + R_{a''b'}) - \frac{1}{2}(R_{a'b'} + R_{a''b''}),$$

e si tien conto del carattere simmetrico di tale espressione $(W_{\beta a} = W_{a\beta})$, si ha

$$\frac{\lambda_{\beta a}}{R_\beta} = \frac{\lambda_{a\beta}}{R_a} = \frac{W}{R_a R_\beta},$$

da cui, per quanto precede, risulta anche l'altra

$$C_{\beta a} = C_{a\beta} = \frac{W}{r_a r_\beta};$$

e così, oltre alla riproduzione delle (ξ_1) e (ξ_2), abbiamo per mezzo della W anche il valor comune dei due membri di ciascuna e l'espressione diretta dei rimandi.

La W dipende dalla *posizione relativa* della coppia a e β, e può avere valori positivi e negativi. La sua espressione agevola la visione simbolica delle condizioni della rete e l'illustrazione mediante prospetti schematici.

Così p. es., dal valore $\frac{W}{r_a r_\beta}$ di $C_{\beta a}$, cioè dalla parte diramata in r_β della corrente prodotta dalla f. e. m. $E_a = 1$ agente nel ramo r_a, la qual parte si può pensare isolata dal resto seguendone mentalmente il percorso attraverso la rete,

si deduce che in tale concetto $\frac{r_\alpha r_\beta}{W}$ viene a rappresentare la *resistenza virtuale* del circuito della stessa $C_{\beta\alpha}$: il che permette di immaginare sostituito a quest'ultimo un circuito semplice di egual resistenza.

Il senso che va attribuito a codesta *resistenza virtuale* si può precisare osservando in generale che nel caso di più correnti, la cui risultante s'indichi con I, sovrapposte in un ramo di resistenza r, la resistenza virtuale r_h di detto ramo *relativa ad una qualunque* (I_h) della I si può intendere definita da

$$r_h I_h = rI = \lambda\,; \qquad r_h = rI/I_h$$

avendo indicato con λ la d. d. p. agli estremi del ramo. Ma per calcolare in tal modo la resistenza del circuito della $C_{\beta\alpha}$ converrebbe aver prima risoluto l'intero problema della distribuzione delle correnti generate dalla $E_\alpha = 1$ agente in r_α, mentre come si è visto il suo valore ci è dato direttamente da $\frac{r_\alpha r_\beta}{W}$.

Quanto alla corrente totale, cioè alla corrente che sboccando da r_α si dirama nella rete e che è data da

$$\frac{1}{r_\alpha + \varrho_\alpha} \quad \text{con} \quad \varrho_\alpha = \frac{r_\alpha R_\alpha}{r_\alpha - R_\alpha}, \quad \text{cioè da} \quad \frac{r_\alpha - R_\alpha}{r_\alpha^\varepsilon},$$

essa pure può pensarsi sostituita da un circuito semplice di resistenza $r_\alpha^\varepsilon / r_\alpha - R_\alpha$ dal cui rapporto a $\frac{r_\alpha r_\beta}{W}$ si deduce il rapporto fra $C_{\beta\alpha}$ e la suddetta corrente totale il cui circuito verrebbe a corrispondere all'insieme delle parti diramate associate in parallelo.

4. - Prendiamo ora a considerare in una rete in azione gli effetti derivanti dall'aggiunta di un nuovo ramo (r_β) tra due punti di una coppia β avente già una d. d. p. λ_β. Supponiamo di procedere in due tempi immaginando dapprima che in r_β sia inserita una f. e. m. uguale ed *opposta* alla d. d. p. λ_β — il che farà si che non si produca corrente in r_β e non venga alterato il regime delle correnti nella rete — e che poi si *sostituisca* a $-\lambda_\beta$ una f. e. m. generica ε (ciò che equivale ad *aggiungere* una f. e. m. uguale ad $\varepsilon + \lambda$). In questo secondo tempo si manifesteranno gli effetti del cambiamento di compagine della rete per l'inserzione del nuovo ramo r_β: onde supponendo la rete attivata da una sola *coppia* alimentatrice α (interna o esterna), la resistenza R_α assumerà un altro valore R_α', R_β si cangerà in $R_\beta' = \frac{r_\beta R_\beta}{r_\beta + R_\beta}$ e $\lambda_{\beta\alpha}$ si cangerà in $\lambda_{\beta\alpha}'$ mentre *rimarrà invariato* $\lambda_{\alpha\beta}$ che per la natura stessa dei rimandi non è affetto dall'aggiunta di r_β o da qualsiasi variazione della sua resistenza.

Fra i nuovi valori e i precedenti corrono poi le relazioni

$$(d) \qquad \lambda_{\beta\alpha}\lambda_{\beta\alpha}' = r_\beta\left(\frac{1}{R_\alpha'} - \frac{1}{R_\alpha}\right), \qquad \frac{\lambda_{\beta\alpha}'}{\lambda_{\beta\alpha}} = \frac{R_\beta'}{R_\beta}\,\frac{R_\alpha}{R_\alpha'} \qquad \left(R_\beta' = \frac{r_\beta + R_\beta}{r_\beta R_\beta}\right)$$

di cui la prima risulta dall'applicazione della (B) ai due stati della rete (modificata per l'aggiunta del nuovo ramo) *con* o *senza* la f. e. m. uguale a $-\lambda_\beta$ (supponendo nel secondo caso $\varepsilon=0$); mentre la seconda si ottiene applicando la (ξ_2) a ciascuno dei due stati in discorso e poi confrontando le due relazioni e tenendo conto dell'invariabilità di $\lambda_{\alpha\beta}$.

Si può anche osservare che l'invarianza del regime delle correnti nel primo tempo può intendersi dovuta a *compensazione* fra la corrente $-\frac{\lambda_\beta}{r_\beta+R_\beta}$ prodotta dalla f. e. m. inserita nel nuovo ramo e quella che si avrebbe senza tale inserzione per effetto della modificazione arrecata alla rete dall'aggiunta del ramo stesso.

A parte ciò, il processo di passaggio dal primo stato al secondo (con la ε generica) può essere lumeggiato con l'applicazione della relazione energetica (C).

Denotando con P la potenza iniziale della rete e con P' il nuovo valore assunto nel secondo tempo, l'espressione della differenza $P'-P$ data dalla (C), per le condizioni supposte, si riduce al solo termine relativo al nuovo ramo e rappresentato per quanto sopra da $(\varepsilon+\lambda_\beta)I_\beta$ indicando con I_β la corrente che si genera in esso ramo. E poichè questa implica un erogazione di potenza εI_β fornita dalla ε, l'aumento che chiameremo ΔP della potenza alimentatrice si riduce alla parte $\lambda_\beta I_\beta$. Indicando inoltre con P_β la potenza derivata in r_β abbiamo così le relazioni

(e) $$\Delta P=\lambda_\beta I_\beta, \qquad P_\beta=\lambda'' I_\beta,$$

dove λ_β'' indica il valore (dipendente da ε) assunto nel secondo tempo dalla d. d. p. agli estremi di r_β.

Per $\varepsilon=0$, in particolare, λ_β'' si riduce a λ_β', ed I_β a $\frac{\lambda_\beta'}{r_\beta}$; e qui vi è poi da far distinzione in ordine al valore del rapporto $\frac{\lambda_\beta'}{\lambda_\beta}$ secondo che si tratta in α di alimentazione interna o esterna. Poichè coll'alimentazione interna, a senso della relazione (a) del n.° 2, si ha per il detto rapporto il valore $\frac{\lambda_{\alpha\beta}'}{\lambda_{\alpha\beta}}\cdot\frac{R_\alpha'}{R_\alpha}$, mentre con l'esterna si ha semplicemente $\frac{\lambda_{\alpha\beta}'}{\lambda_{\alpha\beta}}$: onde segue in base alla seconda delle relazione (d), che il valore del rapporto suddetto si riduce ad $\frac{R_\beta'}{R_\beta}$ ossia a $\frac{r_\beta}{r_\beta+R_\beta}$ con l'alimentazione interna, mentre con l'esterna vi resta il fattore $\frac{R_\alpha}{R_\alpha'}$.

Ponendo per brevità $R_\alpha'/R_\alpha=\theta$, avremo così rispettivamente

(f) $$\frac{\lambda_\beta'}{r_\beta}=\frac{\lambda_\beta}{r_\beta+R_\beta} \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_\beta'}{r_\beta}=\frac{\lambda_\beta}{\theta(r_\beta+R_\beta)}.$$

Ne segue che la prima di queste relazioni si può estendere al caso che vi siano più coppie alimentatrici (intendendo che λ_β e λ_β' rappresentino le somme $\sum_\alpha \lambda_{\alpha\beta}\lambda_\alpha$ e $\sum_\alpha \lambda_{\beta\alpha}'\lambda_\alpha$ per tutte le coppie α) e viene così a corrispondere ad una nota preposizione (teorema Thevenin) relativa alle derivazioni di correnti in sistemi ad

alimentazione interna. Non può dirsi lo stesso per l'altra dove θ ha valori diversi per le diverse coppie: e qui non vale più il teorema predetto.

Si può tuttavia, interpretando l'ufficio di θ in base all'osservazione fatta in principio sull'equivalenza fra una d. d. p. λ_α impressa in α e l'aggiunta di un ramo di *resistenza trascurabile* in cui agisca una f. e. m. uguale a λ_α, rientrare formalmente nell'ambito del teorema ponendo

$$\theta(r_\beta + R_\beta) = r_\beta + \overline{R}_\beta$$

dove $\overline{R}_\beta$ indica il valore che viene ad assumere R_β per tale aggiunta (cioè per la chiusura di α in *corto circuito* con l'interposizione di detta f. e. m.). Tale procedimento ha il merito di essere estensibile al caso che vi siano più coppie di immissione intendendo allora che in $\overline{R}_\beta$ si assommino gli effetti derivanti dalle singole coppie.

Notiamo ancora che per mezzo delle relazioni precedenti si possono ottenere altre espressioni equivalenti per il denominatore $\theta(r_\beta + R_\beta)$, tra cui citeremo

$$r_\beta + R_\beta - R_\alpha \lambda^2_{\beta\alpha}, \quad (r_\beta + R_\beta)(1 - R_\alpha' \lambda_{\beta\alpha} \lambda_{\beta\alpha}').$$

5. - Per ε diverso da zero interviene nella seconda fase la f. e. m. $\varepsilon + \lambda_\beta$ che mediante la posizione

$$\sigma = 1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_\beta}$$

si riduce alla forma $\sigma\lambda_\beta$: onde si vede che le relazioni (f) sono applicabili al caso di ε generico moltiplicando i secondi membri per σ e ponendo nei primi membri λ_β'' al posto di λ_β' col quale esso è collegato dalla relazione semplice:

$$(g) \qquad \lambda_\beta'' = \lambda_\beta' + \varepsilon \frac{R_\beta'}{R_\beta}.$$

Da quanto precede risultano per la corrente I_β che percorre il ramo aggiunto diverse espressioni rapportate ai tre valori λ_β, λ_β', λ_β'' della d. d. p. agli estremi di r_β, con varie forme equivalenti per ciascuna di esse: e dal confronto di tali espressioni emerge una ricca serie di relazioni che prospettano le azioni interne collegandole a manifestazioni direttamente controllabili coll'osservazione (misura di λ_β, λ_β', λ_β''; ε, I_β). Ne risulta la possibilità di tener dietro, mentre *la rete è in funzione*, alle vicende dell'andamento, che è naturalmente coordinato al valore di ε. In particolare si vede che per valori di ε negativi e numericamente superiori a λ_β, la corrente I_β viene invertita e la coppia derivatrice si cangia in *coppia alimentatrice.*

Alle vicende di I_β corrispondono le variazioni della corrente in α. Riferendoci al caso di alimentazione esterna, essa passerà dal valore λ_α/R_α a λ_α/R_α' per $\varepsilon = 0$, onde:

$$\Delta J_\alpha = \lambda_\alpha \left(\frac{1}{R_\alpha'} - \frac{1}{R_\alpha} \right)$$

che tenendo conto della prima delle (α) si può ridurre a

$$\Delta J_\alpha = \lambda_{\beta\alpha} \cdot \frac{\lambda_\beta'}{r_\beta} = \lambda_{\beta\alpha} \cdot I_\beta .$$

Questa poi vale anche per ε diverso da zero, come risulta dal confronto dell'espressione $\lambda_\alpha \Delta J_\alpha$ di ΔP con l'altra $\lambda_\beta I_\beta$ trovata di sopra. Essa ci mostra che ΔJ_α si mantiene minore di I_β, il che si spiega colla reazione provocata nel resto della rete.

6. - Quando si passa al caso di una rete alimentata da più coppie α, in cui pertanto λ_β, λ_β', λ_β'' risultano dall'azione cumulativa delle coppie stesse, sorgono complicazioni portate dall'influenza mutua che si esercita fra loro, in quanto che l'efficienza delle d. d. p. λ_h impressa nella coppia α_h corrisponde alla differenza fra λ_h e la d. d. p. che si avrebbe nella stessa α_h, senza l'azione diretta della λ_h, per effetto dei rimandi da parte delle altre coppie eccitate.

Ma se, prescindendo da ciò, si riguardano λ_β, λ_β', λ_β'' e I_β come derivanti da una sola coppia alimentatrice, e si applicano le relazioni precedenti a quei valori *desunti dall'osservazione* in β, si viene a creare un ente fittizio che può come *schema* sostituirsi alla rete.

D'altra parte si è visto (n.° 3) come per un gruppo di coppie β alimentate da una coppia α si possa immaginare sostituito un circuito virtuale unico di determinata resistenza.

Si delinea così la possibilità, nel caso di una grande rete attivata da più centrali disseminate in una vasta regione e associate in parallelo, di semplificare il problema mediante la considerazione di sottocentri di distribuzione (debitamente attrezzati e corredati di adatti strumenti di misura) equiparabili a singole coppie derivatrici di larga portata.

Qui si è trattato solo di correnti continue (in regime di permanenza); ma si può con opportuni procedimenti estendere l'applicazione della legge di reciprocità alle correnti alternative: il che del resto s'intuisce pensando alla portata delle idee generali prospettate in questa rapida esposizione.

A. DENIZOT (Poznań - Polonia)

SUR LE RAPPORT DU COEFFICIENT DE DILATATION À LA CHALEUR SPÉCIFIQUE ET AU COEFFICIENT DE COMPRESSIBILITÉ

1. - De même que l'expression du rendement du cycle infiniment petit de Carnot donne une intégrale dont la fonction intégrée ne dépend que de la température, de même le rendement du cycle infiniment petit formé de deux adiabatiques et de deux isochores fournit une intégrale dont la fonction intégrée ne dépend que du volume. Cette fonction intégrée a la valeur $\frac{\alpha}{ck}$, où α, c, k, signifient les coefficients de dilatation et de compressibilité et la chaleur spécifique du corps. De là suit immédiatement la loi trouvée par Mr. GRÜNEISEN que le rapport de α à c ne dépend pas de la température, mais comme on voit, seulement à condition que le coefficient de compressibilité ne varie pas avec la température. Une comparaison des fonctions intégrées pour un corps quelconque et pour un corps noir conduit à une relation remarquable que M. le Prof. PLANCK donne dans sa Thermodynamique, mais qui est valable seulement pour les basses températures, en s'appuyant sur l'hypothèse des quanta, tandis que l'interprétation présentée ici ne se borne pas à un intervalle spécial de température. Enfin un tableau des valeurs de $\frac{\alpha}{ck}$ établies pour les divers éléments montre qu'en général ces valeurs augmentent avec la densité croissante. En deux cas, notamment pour le cuivre et le platine, ces valeurs calculées par rapport à deux diverses températures montrent en effet l'indépendance de la température.

Je rattache cette étude à un travail que j'ai publié (1), il y a plusieurs années, sur le second principe de la thermodynamique.

I. - Théorie générale.

2. - Considérons l'unité de masse d'un corps, auquel nous fournissons une petite quantité de chaleur dq; désignons par u l'énergie interne du corps, par v

(1) A. DENIZOT, Annalen der Physik, 7, 1902, p. 357.

son volume spécifique et par p la pression exercée normalement sur l'unité de surface du corps, nous aurons :

$$dq = du + p\,dv. \tag{1}$$

Dans la suite, nous prenons comme variables indépendantes le volume v et la température t, celle-ci étant exprimée dans une échelle conventionelle.

Nous aurons

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t dv + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt \tag{2}$$

et par rapport à (1)

$$dq = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p\right] dv + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt. \tag{3}$$

L'expression (3) n'est pas, comme on sait, une différentielle exacte; pour la rendre exacte, nous multiplions les deux membres de l'équation (3) pour une fonction des variables t et v que nous désignons par h et nous avons :

$$ds = h\left\{\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p\right] dv + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt\right\} \tag{4}$$

où

$$h\,dq = ds$$

sera la différentielle exacte d'une fonction s.

En appliquant à (4) la relation

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)$$

nous obtenons l'équation

$$\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p\right\} \frac{\partial \log h}{\partial t} - \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v \frac{\partial \log h}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

La solution de cette équation différentielle conduit au système d'équations :

$$-d \log h = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dv}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v}. \tag{6}$$

3. - Le terme qui se trouve au milieu de (6) définit le rendement d'un cycle de Carnot infiniment petit et sert en même temps à la définition de la température absolue T, par conséquent nous obtenons la relation connue

$$\frac{dT}{T} = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p} \tag{7}$$

qui détermine la température absolue comme fonction de la température conventionelle t.

4. - Nous appliquons maintenant l'équation (3) à une variation adiabatique. En posant $dq=0$ nous avons

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t+p\right]dv+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt=0, \tag{8}$$

d'où nous obtenons par une petite transformation, en tenant compte de (7), la relation

$$\frac{dT}{T}=\frac{-\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dv}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v} \tag{9}$$

qui représente en (6) la seconde valeur de $-d\log h$.

5. - On peut démontrer que la relation (9) exprime le rendement du cycle infiniment petit formé de deux adiabatiques et deux isochores. À cet effet nous ferons subir à l'unité de masse du corps une série de transformations réversibles, représentées par le diagramme ci-contre:

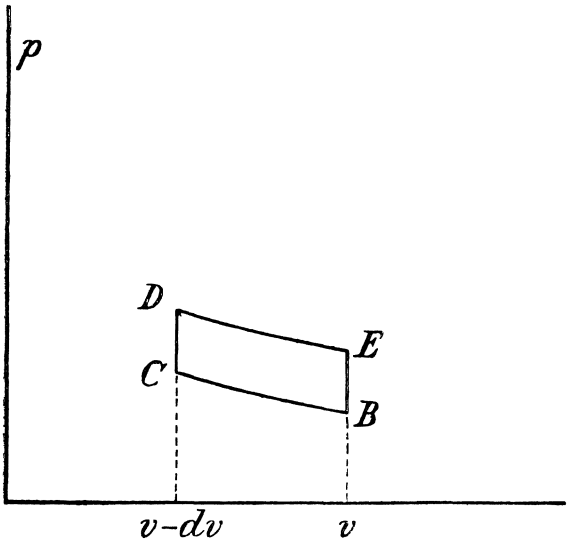


Fig. 1.

a) partant de l'état initial B du corps donné par la pression p_0, le volume spécifique v et la température t_0 mesurée dans l'échelle conventionnelle;

b) le long de BC, nous comprimons le corps jusqu'à ce qu'on ait atteint la pression p_1, la température t_1 et le volume $v-dv$;

c) le long de CD, à volume constant, nous échauffons le corps en lui fournissant la chaleur

$$Q_1=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v dt, \tag{10}$$

ce qui augmente sa température de dt et la pression de $CD=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt$;

d) le long de DE, nous étendons le corps adiabatiquement jusqu'à ce qu'il reprenne le volume initial v;

e) le long de EB, à volume constant, nous lui soustrayons la quantité de chaleur Q_2, jusqu'à ce qu'il reprenne la pression et la température initiales.

L'aire $BCDE$ égale à

$$CD\times(-dv)=-\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt\,dv$$

représente le travail obtenu par le cycle équivalant à la différence $Q_1 - Q_2$. Or nous obtenons pour le rendement, en tenant compte de (11) et (10), l'expression

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{-\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dv}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v}.$$

Ce rendement, ainsi que celui du cycle de Carnot, ne dépend pas de la nature du corps; du reste il n'est pas nécessaire de faire parcourir les deux cycles par le même corps, on peut prendre pour le cycle de Carnot un corps convenable et un autre corps pour le second cycle.

6. - En supposant qu'à la température initiale conventionelle corresponde la température absolue T_0, nous tirons de (7) la relation bien connue:

$$\log \frac{T}{T_0} = \int_{t_0}^{t} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v}{\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t + p} dt. \tag{12}$$

La fonction sous le signe de l'intégrale n'est qu'une fonction de la température t et l'intégrale même exprime la valeur dont s'approche le rendement de tous les cycles infiniment petits de Carnot (1), compris entre les températures t_0 et t ou T_0 et T, en définissant en même temps la température absolue T en fonction de la température conventionnelle.

7. - D'une manière analogue l'équation (9) fournit le rendement de tous les cycles infiniment petits formés par des adiabatiques et isochores:

$$\log \frac{T}{T_0} = -\int_{v_0}^{v} \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v}{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v} dv, \tag{13}$$

où le volume v_0 correspond à T_0. La relation (13) est l'expression des variations adiabatiques et la fonction sous le signe de l'intégrale ne dépend en général que du volume, en particulier elle ne dépend pas de la température. Ce dernier point est essentiel, car il conduit immédiatement à une interprétation thermodynamique de la loi de M. GRÜNEISEN (V. § 11).

8. - Aux relations qui precèdent nous joignons encore celle qui suit de la varation isochore c), appliquée au cycle formé par deux adiabatiques et deux isochores. En appliquant la relation générale

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t dp + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p dt,$$

(1) v. A. DENIZOT, l. c.

nous trouvons pour $dv=0$:

$$\frac{dp}{dt}=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v=\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p}{-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_t}.$$

II. - Applications.

9. - Pour mettre en évidence l'utilité des formules (12) et (13), nous les appliquons d'abord au phénomène du corps noir.

Quant à la relation (12) je m'en suis déjà servi dans un travail antérieur (1) où j'ai montré qu'on peut obtenir à l'aide des principes thermodynamiques et d'une échelle électro-chimique (2) la simple relation $p=\frac{1}{3}u$, où p désigne la pression et u la densité du rayonnement du corps noir. Pour l'énergie totale nous avons

$$U=Vu,$$

où V est le volume renfermant le rayonnement du corps noir. Il s'ensuit

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_V=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_V=\frac{1}{3}\frac{du}{dt}, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_t=u, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_V=V\frac{du}{dt}.$$

Ceci posé dans les relations (12) et (13), où nous mettons au lieu de v le volume V et au lieu de u l'énergie totale U, nous obtenons

(12′) $$u=\sigma T^4 \qquad \text{où} \qquad \sigma=\frac{U_0}{T_0^4},$$

relation bien connue, exprimant la loi de STEFAN et BOLTZMANN qui sert comme définition de la température absolue en fonction de la densité u du rayonnement noir, et

(13′) $$\log\frac{T}{T_0}=-\frac{1}{3}\int\frac{dV}{V},$$

d'où il suit

(14) $$T^3V=\text{const.},$$

relation exprimant, comme on sait, la variation adiabatique du corps noir.

10. - Dans la suite nous introduisons les coefficients thermodynamiques d'un corps, savoir les coefficients de dilatation, de pression et de compressibilité, définis par les formules:

(15) $$\alpha'=\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p\frac{1}{v} \qquad \beta'=\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)\frac{1}{p} \qquad k'=-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)\frac{1}{v}.$$

Pour définir la température nous nous servons d'un gaz parfait, en conséquence de quoi nous aurons encore

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t=0$$

(1) A. DENIZOT, Travaux de l'Université de Poznań, Section des Sciences Nr. 1 (1921).

(2) A. DENIZOT, Annalen der Physik, 13 (1903) p. 193, Wiadomości matematyczne (Varsovie) 8 (1904) p. 47.

et la relation (12) fournit

(12″) $$T = T_0 e^{\beta(t-t_0)},$$

c'est-à-dire l'échelle logarithmique (1).

11. - En conservant cette échelle dans ce qui suit nous appliquons la formule (13) à un corps quelconque dont la chaleur spécifique est donnée par

(16) $$c_v' = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_v.$$

Alors, en tenant compte de (14), (15), (16), la relation (13) fournit

(13″) $$\log \frac{T}{T_0} = -\int_{v_0}^{v} \frac{\alpha'}{c_v' k}\, dv.$$

Comme l'expression intégrée ne dépend pas de la température, nous recevons le théorème suivant:

Le rapport du coefficient de dilatation au produit de la chaleur spécifique et du coefficient de compressibilité est indépendant de la température.

Il s'ensuit que la loit, déduite par M. GRÜNEISEN (2) des données numériques, est valable dans la mesure où le coefficient de compressibilité ne varie pas avec la température. La relation (13″), surtout sa différentielle, n'est pas inconnue, on la trouve ça et là dans la littérature, ainsi que dans les travaux de M. GRÜNEISEN (3), mais à un autre point de vue et dans une autre combinaison.

12. - Dans ce qui précède nous nous sommes servi, afin d'appliquer la formule (12), de l'échelle logarithmique, mais s'il ne s'agit que de démontrer la loi sus-mentionnée, on n'a pas besoin de recourir à cette échelle ou à une autre, cette loi découlant immédiatement de la formule (13). En introduisant les difinitions usuelles des coefficients de dilatation et de compressibilité et de chaleur spécifique, c'est-à-dire

(15′) $$\alpha = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \frac{1}{v}, \qquad \beta = \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_v \frac{1}{p}, \qquad k = -\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T \frac{1}{v}, \qquad c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v,$$

nous aurons

$$\alpha' = \alpha \frac{dT}{dt}, \qquad \beta' = \beta \frac{dT}{dt}, \qquad k' = k, \qquad c_v' = c_v \frac{dT}{dt},$$

---

(1) A. LEDUC: *Thermodynamique,* Paris (1924) p. 39. — R. H. WEBER, Physikalische Zeitschrift, 16 (1915) p. 9.

(2) E. GRÜNEISEN, Annalen der Physik, 26 (1908), p. 211.

(3) E. GRÜNEISEN, Verhandlungen der D. Physikal. Gesellsch., 13 (1911), p. 503; Annalen der Physik, 26 (1908) p. 397.

et à l'aide de la relation (14), écrite par rapport à la température absolue, il s'ensuit de (13)

$$\log \frac{T}{T_0} = -\int_{v_0}^{v} \frac{\alpha}{c_v k} dv. \tag{13''}$$

13. - M. DEBEYE (1) a donné, à l'aide de l'hypotèse des quanta, une interprétation théorique de la loi de M. GRÜNEISEN, mais seulement pour les basses températures, tandis que l'interprétation ici donnée est générale et ne se limite pas à un intervalle spécial de température.

14. - Si nous comparons encore la relation (13') avec (13'') il s'ensuit

$$\gamma = \frac{\alpha}{c_v k} = \frac{1}{3} \frac{1}{V} \frac{dV}{dv}, \tag{17}$$

où V se présente comme une fonction du volume. C'est la même relation que donne M. PLANCK (2) pour les basses températures comme conséquence de l'hypothèse des quanta. La relation (17) confirme simultanément que l'expression γ n'est une fonction que du volume.

15. - Nous ajoutons encore un tableau contenant les valeurs de γ pour les divers corps. Les valeurs pour α et k se rapportant en général à une température moyenne de ca. 18°C, proviennent de diverses tables, (LANDOLT-BÖRNSTEIN: *Physikalisch-chemische Tabellen.* Tables annuelles de constantes et données numériques) et des travaux de M. GRÜNEISEN (3). Quant au tungstène (W_0) les valeurs de α et k sont empruntées à une étude de M. MAGNUS et DANZ (4) qui s'en rapportent aux mesures de M. WORTHING (5) et M. BRIDGMANN (6).

La chaleur spécifique a été calculée pour tous les corps simples d'après la formule (7),

$$c_v = \alpha \log T$$

que j'ai pu vérifier dans un certain intervalle de température pour beaucoup d'éléments.

---

(1) P. DEBEYE: *Vorträge über die Kinetische Theorie der Materie etc.* Leipzig und Berlin (B. G. Teubuer) 1914, p. 36.

(2) M. PLANCK: *Thermodynamique.* Berlin und Leipzig, 1921, p. 277.

(3) E. GRÜNEISEN, Verh. d. Dt. Physik. Ges., 13, 1911, p. 491. Annalen der Physik, 39, 1912, p. 273.

(4) A. MAGNUS und DANZ, Annalen der Physik, 81, 1926, p. 420.

(5) A. G. WORTHING, Bull. Nela Res. Lab., 1, 1922, p. 338.

(6) A. W. BRIDGMANN, Proc. Nat. Acad. Amer., 8, 1922, p. 361.

(7) A. DENIZOT, Bull. de la Soc. des Amis des Sciences de Poznań, B, 1926, p. l. Physikalische Berichte, 8, 1927, p. 1584. Atti d. Accademia d. Sc. Nuovi Lincei, Roma, 82, 1929, Suppl. pag. 344.

	Densité	Coefficient de dilatation		Coefficient de compressibilité	CHALEUR SPÉCIFIQUE				$\gamma = \frac{a}{c_v k}$
		t° C	$10^6 a$	$10^{12} k$ CGS	a	t° C	$c_0 = a \log T$	$10^{-6} C_v$ CGS	
Li	0,534		180	8,7	0,3785	18°	0,933	39,04	0,5
K	0,86		250	36	0,0573	30°	0,1422	5,90	1,2
Na	0,97		266	15,6	0,1174	30°	0,291	12,11	1,4
Rb	1,52		270	40,0	0,02915	18°	0,0718	3,01	2,2
Mg	1,74		75	2,9	0,0986	18°	0,243	10,17	2,5
Cs	1,87		291	61,0	0,0195	18°	0,0480	2,01	2,4
S	1,92		212	12,9	0,0673	18°	0,1658	6,942	2,4
Si	2,34		75	0,32	0,0790	18°	0,1946	8,148	2,9
Al	2,7		65,4	1,47	0,08686	18°	0,214	8,96	5,0
Se	4,3		148	12,0	0,03175	18°	0,0782	3,275	4
I	4,94		248	13,2	0,02025	18°	0,0499	2,09	9
Ga	5,9		55	2	0,0349	20°	0,0861	3,60	7,6
Sb	6,67		33	2,4	0,02105	18°	0,0519	2,17	6
Cr	6,7		25,2	0,9	0,0459	18°	0,1131	4,26	6
Zn	7,1		78	1,74	0,03723	18°	0,0917	3,84	11,7
In	7,25		74,3	2,7	0,02197	18°	0,0541	2,67	12
Sn	7,28		61	1,9	0,02152	18°	0,0530	2,22	15
Mn	7,3		62	0,84	0,0440	18°	0,108	4,54	16
Fe	7,86		37	0,60	0,04230	18°	0,104	4,36	14
Cd	8,64		74,1	2,1	0,0224	18°	0,0552	2,31	15
Co	8,8		37	0,55	0,0406	18°	0,1000	4,188	16,1
Ni	8,8		37	0,57	0,0390	18°	0,0961	4,02	16,1
Cu	8,93	17° 50°	48,25 50,94	0,773 0,7984	0,03724	17° 50°	0,0918 0,0934	3,84 3,91	16,3 16,3
Bi	9,8		49	2,9	0,01213	18°	0,0299	1,25	14
Mo	10,2		16	0,35	0,02560	18°	0,0631	2,64	17
Ag	10,5		55,5	1,0	0,02284	18°	0,0563	2,356	24
Pb	11,34		82	2,4	0,01226	18°	0,0302	1,265	27
Pd	11,5		35	0,53	0,02335	18°	0,0575	2,41	27
Tl	11,85		90	2,5	0,01242	18°	0,0306	1,28	28
Ta	16,6		19,65	0,5	0,01385	18°	0,03412	1,428	28
Ur	18,7	30°		0,98	0,01105	18°	0,0274	1,15	
Wo	19,1		13,5	0,26	0,01365	18°	0,0336	1,41	36
Au	19,3		41	0,63	0,01277	20°	0,0315	1,32	48,5
Pt	21,4	17° 50°	26,28 27,0	0,391 0,395	0,01295	17° 50°	0,0319 0,0325	1,335 1,360	50,3 50,3

En cas du tungstène, où $a=0{,}01365$, on obtient pour $t=18^{\circ}$ ou $T^{\circ}=291^{\circ}$ la valeur $c_v=0{,}00336$. Pour $t=400^{\circ}$ C la même formule donne $c_v=0{,}00386$, en très bonne concordance avec la valeur $c_v=0{,}0385\cdot$, calculée de la chaleur atomique $C_v=7{,}092$, celle-ci trouvée par MAGNUS et DANZ d'une autre manière.

Nous pouvons constater qu'il y a en général un accroissement de γ avec la densité, c'est-à-dire une dépendance de cette grandeur du volume spécifique. Pour deux éléments, *Co* et *Ni*, dont la densité est la même, il résulte la même valeur de γ, savoir 16,1. Il en est de même avec *Sb* et *Cr*, dont les densités sont presque égales. Pour les éléments *Cu* et *Pt*, grâce aux recherches de M. GRÜNEISEN qui a determiné la dépendance de a et k de la température, γ put être calculée exactement par rapport à deux diverses températures de 17° et 50° C et on obtient pour chacun de ces éléments les mêmes valeur de γ, pour *Cu* 16,3 et pour *Pt* 50,3. Ces résultats confirment que γ ne dépend pas de la température, comme exige l'exposé théorique ici donné. Mais une remarque s'impose encore. Les valeurs de a et k, contenues dans ce tableau, ne sont pas déterminées pour tous les éléments avec une précision suffisante, et il en est de même des valeurs correspondantes de γ. Pourtant la série de ces valeurs peut être utilisée avec profit. Par e. pour l'uranium des mesures du coefficient de dilatation manquent, mais si l'on choisit γ convenablement, il est clair qu'on pourra trouver ce coefficient.

ANGELINA CABRAS (Cagliari - Italia)

FENOMENI TRANSITORI IN UN PONTE DI WHEATSTONE A COSTITUZIONE COMPLESSA

1. - La teoria del ponte di Wheatstone è stata ampiamente svolta per le correnti continue e anche (limitatamente almeno al caso in cui intervengono combinazioni semplici di induttanze e capacità) pel caso di correnti alternanti sinusoidali.

Manca ancora una teoria generale pel caso in cui i lati siano reti comunque composte di resistenze, induttanze e capacità e pel caso in cui le correnti abbiano andamento qualunque anche non periodico. In questo caso rientrano le correnti impulsive, le correnti alternanti non sinusoidali, le correnti continue interrotte e riprese e i fenomeni transitori in generale.

In questo lavoro mi sono proposta di sviluppare metodi di calcolo adatti per la trattazione di questi fenomeni complessi, metodi che possono avere un interesse applicativo per la composizione di dispositivi di misura i quali siano indipendenti dalla frequenza e dalla forma delle correnti adoperate, e per la progettazione di filtri d'onda di tipo particolare.

* * *

2. - Considero un ponte di Wheatstone in cui ciascuno dei quattro lati e la diagonale contenente il dispositivo di misura possono essere conduttori complessi. Col nome di conduttore complesso intendo una rete comunque composta di un numero finito di resistenze, induttanze e capacità, e terminata a due capi che costituiscono il punto d'entrata e il punto d'uscita della corrente.

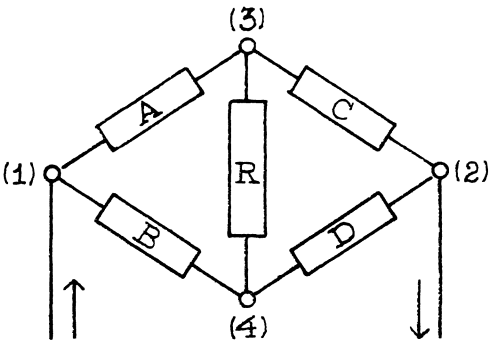


Fig. 1.

Prendo come punto di partenza il caso « ohmico » cioè quello delle correnti continue. Dette A, B, C, D, R le resistenze dei singoli lati, detta V la differenza di potenziale che agisce fra il nodo (1) e il nodo (2), se si appli-

cano le leggi di KIRCHHOFF pei nodi e per le maglie del sistema, si trova la corrente I che fluisce nel lato R data dalla formula

$$I = \frac{1}{\alpha R + \beta} V \tag{1}$$

dove

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{(A+C)(B+D)}{BC-AD} \\ \beta = \dfrac{ABC+BCD+CDA+DAB}{BC-AD}. \end{cases} \tag{2}$$

Per ricavare la soluzione valevole per le correnti variabili mi valgo del metodo degli operatori funzionali, secondo le teorie di G. GIORGI, di N. WIENER e di J. R. CARSON. Considero come V una $V(t)$ funzione arbitrariamente data del tempo; in luogo di A, B, C, D, R introduco le *resistenze funzionali*, le quali sono operatori che si presentano sotto la forma di espressioni simboliche contenenti il simbolo differenziatore $\Delta = \frac{d}{dt}$, e che si trattano con lo stesso algoritmo come se Δ fosse un moltiplicatore.

Ecco il modo di calcolare queste espressioni simboliche. Per ognuna delle reti che nel caso più generale costituisce uno dei lati del sistema, la resistenza nel caso ohmico si troverebbe come quoziente di due determinanti composti per mezzo delle conduttanze e delle resistenze dei singoli elementi (1). Se invece di conduttori ohmici si tratta di conduttori generalizzati, la resistenza funzionale è data dalla medesima formula, dove però ogni induttanza l si consideri come una resistenza funzionale o simbolica $l\Delta$ e dove ogni capacità k si consideri come una conduttanza funzionale $k\Delta$ ovvero come una resistenza funzionale $k^{-1}\Delta^{-1}$. In ogni caso la resistenza funzionale di una rete risulta espressa come quoziente di due polinomi in Δ. Per esempio nel caso semplice di un lato del ponte che sia composto di una resistenza r, di un'induttanza l e di una capacità k in serie fra loro, la resistenza funzionale risulta espressa da:

$$r + l\Delta + k^{-1}\Delta^{-1} = \frac{rk\Delta + kl\Delta^2 + 1}{k\Delta}. \tag{3}$$

Ottenute tutte le resistenze funzionali dei singoli lati del ponte e intendendone sostituite le espressioni in luogo delle A, B, C, D, R che figurano nelle (2), la corrente $I = I(t)$ risulta data dalla medesima espressione scritta per le correnti continue; in esse la frazione $\frac{1}{\alpha R + \beta}$ che precede V dev'essere interpretata come un operatore funzionale che agisce sulla funzione $V(t)$. Sostituendo ad α e β i loro sviluppi dati dalle (2) la formula risultante si scrive

$$I(t) = \frac{BC-AD}{(A+C)(B+D)+ABC+BCD+CDA+DAB} V(t) \tag{4}$$

---

(1) Cfr. I. H. JEANS: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.* Vth. edition, Cambridge 1925; Ch. IX, Art. 360-364, pp. 324-331.

e questa formula, nella quale A, B, C, D, R sono espressioni razionali in Δ, dev'essere interpretata con le regole ormai note del calcolo degli operatori funzionali.

3. - Si ricava anzitutto che la condizione di equilibrio, cioè di nullità della corrente, dovuta a qualunque azione elettromotrice variabile o impulsiva esercitata fra i nodi (1) e (2) è l'annullarsi dell'espressione

$$BC-AD;$$

cioè si ha una condizione della stessa forma come per le correnti continue, salvo il significato più generale che acquistano A, B, C, D.

Introducendo in luogo di questi simboli le loro espressioni rappresentative, l'equazione di condizione

$$BC-AD=0 \tag{5}$$

si risolve, dopo aver mandato via i denominatori, in un polinomio in Δ uguagliato a zero. Affinchè la condizione sia soddisfatta devono annullarsi tutti i coefficienti del polinomio. Se questo è di grado m si ottengono così $m+1$ condizioni a cui devono soddisfare gli elementi che compongono i lati.

4. - Nel caso generale in cui $BC-AD$ non sia nullo, si presenta il problema di calcolare $I(t)$ quando $V(t)$ è arbitrariamente data per tutti i valori passati del tempo fino all'istante che si considera.

Nella formula (4) indichiamo con $f(\Delta)$ l'operatore a secondo membro, il quale quando ad A, B, C, D, R si sostituiscono le loro espressioni si presenta come una frazione razionale (quoziente di due polinomi) in Δ; scriviamo cioè:

$$f(\Delta)=\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}=\frac{BC-AD}{(A+C)(B+D)+ABC+BCD+CDA+DAB}. \tag{6}$$

In altro mio lavoro (1) ho intrapreso lo studio degli operatori di questo tipo. Da quanto ivi ho dedotto consegue che $P(\Delta)$ può essere di grado immediatamente superiore o uguale o inferiore a $Q(\Delta)$. Il primo caso può verificarsi solo allorquando fra i due cammini 1-4-3-2 e 1-3-4-2 della figura 1 ve ne sia uno composto di sole capacità senza resistenze nè induttanze; gli altri due casi si verificano o per riduzione del caso primo, oppure quando detto cammino di sole capacità non esiste.

In qualunque dei tre casi si può applicare la formula generale che vale per

(1) Questa ricerca è stata, successivamente alla lettura della presente comunicazione, pubblicata nella Nota col titolo: *Sulle operazioni funzionali della fisica matematica che si presentano come funzioni razionali del simbolo di derivazione*, nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie 6ª, vol. IX (6 gennaio 1929), pp. 312-318. (Annotazione aggiunta durante la stampa di questo scritto).

l'interpretazione di qualunque operatore funzionale originato da sistemi fisici che soddisfano alla condizione di successione (1)

$$(7) \qquad I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \int_{0}^{\infty} \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{\omega\theta} V(t-\theta) d\theta$$

dove il cammino d'integrazione fra $-i\infty$ e $+i\infty$ deve essere una linea qualunque che lascia a sinistra le radici del polinomio $Q(\omega)$, e salvo l'eventuale intervento di un fattore di convergenza ove ciò sia necessario (il che nei casi fisici effettivi non avviene mai).

Con questo il problema è risoluto dal punto di vista teorico perchè è ricondotto alle quadrature; ma applicando i risultati che ho ottenuto nella mia ricerca citata, il calcolo può essere spinto ancora oltre; ed ecco in qual modo.

Effettuando la divisione dei due polinomi P e Q si può scrivere:

$$(8) \qquad \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)} = a + b\Delta + \frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)},$$

dove P_0 è di un grado inferiore a Q e dove i coefficienti a, b sono entrambi nulli secondo che è verificato il primo o il secondo o il terzo dei casi citati. Allora l'operatore così separato in tre termini si può applicare termine a termine.

Ricordando che Δ significa derivazione si ottiene

$$(9) \qquad I(t) = a V(t) + b V'(t) + \frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)} V(t).$$

La valutazione del terzo termine, sempre applicando quanto ho dedotto nella mia ricerca citata, è data da questa formula:

$$(10) \qquad \frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)} V(t) = \int_{0}^{\infty} G(\theta) V(t-\theta) d\theta,$$

dove G è la cosidetta funzione generatrice che si ottiene come segue. Si decompone la frazione $\frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)}$ in frazioni semplici in corrispondenza alle radici ϱ_i del denominatore, e queste frazioni risultano tutte del tipo $\frac{\alpha_i}{\Delta - \varrho_i}$ se le radici sono tutte semplici, altrimenti figurano anche termini del tipo $\frac{\alpha_{is}}{(\Delta - \varrho_i)^s}$ in corrispondenza alle radici multiple. Si scrive cioè l'operatore sotto la forma:

$$(11) \qquad \frac{P_0(\Delta)}{Q(\Delta)} = \sum \frac{\alpha_i}{\Delta - \varrho_i} + \sum \frac{\alpha_{is}}{(\Delta - \varrho_i)^s}.$$

---

(1) Cfr. G. GIORGI: *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi d'elettrodinamica*, Atti dell'Associazione Elettrotecnica Italiana, Vol. IX (dic. 1905), pp. 651-699, Parte III, § 7, Art. 32; stesso Autore: *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo 52, (1928), pp. 265-312, Art. 3; cfr. anche N. WIENER: *The Operazional Calculus*, Mathematische Annalen, Bd. 95,

Effettuata questa decomposizione la funzione generatrice risulta data da questa espressione:

$$G(\theta)=\sum_i a_i e^{\varrho_i\theta}+\sum_{i,s} a_{is}\frac{e^{\varrho_i\theta}}{(s-1)!}\theta^{s-1}. \tag{12}$$

Quindi sostituendo e riassumendo, l'espressione finale di $I(t)$ è data da

$$I(t)=aV(t)+bV'(t)+\sum a_i\int_0^\infty e^{\varrho_i\theta}V(t-\theta)d\theta+\sum_{i,s}\frac{a_{is}}{(s-1)!}\int_0^\infty e^{\varrho_i\theta}\theta^{s-1}V(t-\theta)d\theta. \tag{13}$$

E con questo, sostituendo ad a, b e alle a_i, a_{is} e alle ϱ_i i valori che risultano in base alla struttura del ponte, tenuto conto della (6), della (9) e delle (11), il problema di calcolare $I(t)$ è risoluto. Per molte applicazioni è sufficiente la semplice ispezione della formula (9) unita con la discussione o con la costruzione grafica della funzione generatrice data dalla (12).

5. - Un caso particolare singolarmente importante è quello in cui si ricerchi la forma di corrente dovuta all'applicazione di una $V(t)$ che sia nulla per $t<0$ e uguale all'unità per $t>0$ (caso telegrafico, caso della corrente transitoria dovuta a un'onda di voltaggio a fronte ripida). L'applicazione della formula (7) darebbe $I(t)$ sotto la forma:

$$I(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty}d\omega\int\frac{P(\omega)}{Q(\omega)}e^{\omega\theta}d\theta \tag{14}$$

dove il cammino d'integrazione fra $-i\infty$ e $+i\infty$ dev'essere scelto con le stesse avvertenze come per la formula (7). Invece applicando le formule (13) si ottiene il risultato esplicito (valevole per $t>0$)

$$\begin{aligned} I(t)&=a+\sum a_i\int_0^t e^{\varrho_i\theta}d\theta+\sum_{i,s}\frac{a_{is}}{(s-1)!}\int_0^t e^{\varrho_i\theta}\theta^{s-1}d\theta= \\ &=a+\sum\frac{a_i}{\varrho_i}(e^{\varrho_i t}-1)+\sum\frac{a_{is}e^{\varrho_i t}}{\varrho_i^s(s-1)!}[(\varrho_i t)^{s-1}-(s-1)(\varrho_i t)^{s-2}+ \\ &+(s-1)(s-2)(\varrho_i t)^{s-3}-\ldots\pm(s-1)!]\pm\sum\frac{a_{is}}{\varrho_i^s}. \end{aligned} \tag{15}$$

Altro problema importante è quello di ricercare la corrente susseguente dovuta a un impulso di voltaggio d'intensità unitaria avvenuto all'epoca $t=0$. Il valore della corrente allora, per ogni $t>0$ è dato dalla funzione generatriee stessa $G(t)$ perchè i due termini con a e b non danno contributo; si ottiene cioè

$$I(t)=\sum_i a_i e^{\varrho_i t}+\sum_{i,s} a_{is}\frac{e^{\varrho_i t}}{(s-1)!}t^{s-1}, \qquad \text{per } t>0. \tag{16}$$

(1926), pp. 557-584, dove le operazioni che soddisfano alla condizione di successione vengono denotate col nome di *retrospettive*.

6. - Semplicemente per lo scopo di mostrare come si conducono i calcoli, faccio un esempio considerando un ponte costituito come in figura, di cui due lati opposti sono resistenze ohmiche, un terzo lato è una capacità pura e un quarto lato è una induttanza pura, mentre il lato diagonale nel quale si vuol conoscere la corrente contiene solo una resistenza ohmica; il tutto coi valori segnati nella figura stessa.

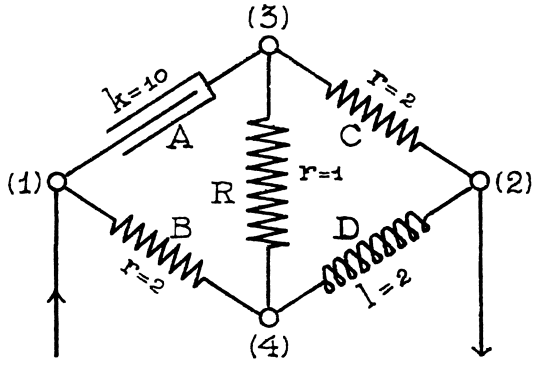


Fig. 2.

Si ha allora, con riferimento ai simboli usati precedentemente:

$$A=\frac{10}{\Delta};\quad B=2;\quad C=2;$$
$$D=2\Delta;\quad R=1.$$

Quindi sostituendo nella formula (6) ed effettuando le riduzioni:

$$\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}=\frac{-4\Delta}{3\Delta^2+26\Delta+15}.$$

L'equazione caratteristica che dà le radici del denominatore risulta allora:

$$3\varrho^2+26\varrho+15=0.$$

Per un calcolo pratico prendiamo questi valori approssimati delle radici:

$$\varrho_1=-0{,}6215....;\quad \varrho_2=-8{,}0452....$$

Servendoci di questi valori per decomporre $\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}$ in frazioni semplici risulta

$$\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}=\frac{0{,}11167....}{\Delta+0{,}6215....}-\frac{1{,}4450....}{\Delta+8{,}0452....}.$$

Sostituendo nella (16) i valori di ϱ_1, ϱ_2, α_1, α_2 così conosciuti si può ricavare l'andamento della corrente che segue a un impulso elettromotore unitario; e si ha

$$I(t)=0{,}11167e^{-0{,}6215t}-1{,}4450e^{-8{,}0452t},\qquad \text{per } t>0.$$

Similmente si procede in ogni altro caso più complicato.

S. TIMPANARO (Parma - Italia)

CELERIMENSURA MAGNETICA

Le più gravi difficoltà che s'incontrano nelle ricerche magnetiche speditive a scopo minerario (che, con una felice espressione del PALAZZO, ho chiamato *celerimensura magnetica*) sono dovute alle correzioni di temperatura e di tempo e al fatto che le misure richiedono due apparecchi differenti, i quali non sempre si mantengono confrontabili.

Queste difficoltà si superano assai bene col metodo da me adoperato per la determinazione della componente verticale nel Parmense per conto dell'*Azienda Generale Italiana Petroli*. Questo metodo consiste essenzialmente nell'eseguire la correzione di tempo con lo stesso apparecchio col quale si fa il rilievo magnetico: ed è di esso che mi occuperò in questa breve comunicazione, rimandando chi voglia conoscere la parte generale al recente volume di HANS HAALCK: *Die magnetische Verfahren der Angewandten Geophysik* (Berlino, Borntraeger, 1927).

Il metodo da me adoperato è assai semplice.

Scelto verso il centro della zona da studiare un punto senza anomalie come stazione fondamentale (o stazione base) si fa una prima misura e poi se ne torna a fare un'altra ogni volta che si fa una stazione (o due, o anche più, se le stazioni sono abbastanza vicine). Portando sulle ascisse i tempi e sulle ordinate i valori, in divisioni della scala, delle deviazioni alla stazione base, dopo eseguite le correzioni di temperatura e di livello e quelle eventualmente dovute all'indice e al magnete ausiliario, si costruisce la curva delle variazioni di tempo della componente verticale durante il periodo delle misure e si ricavano, per interpolazione a vista, i valori delle deviazioni alla stazione base negl'istanti delle singole misure.

Se indichiamo con s la lettura eseguita in una stazione qualunque A in un certo istante e con s_0 quella che si avrebbe con lo stesso apparecchio, nello stesso istante, alla stazione base, dopo eseguite le correzioni a cui abbiamo accennato adesso, con z_0 e z rispettivamente l'intensità verticale alla stazione base e alla stazione A corrette della variazione normale, e con ε l'intensità corrispondente a una divisione della scala del nostro apparecchio, si avrà evidentemente:

$$z = \varepsilon(s - s_0) + z_0.$$

Se si facesse uso di due apparecchi, come si fa di solito, per calcolare z

avremmo dovuto adoperare una formola più complicata, perchè avremmo dovuto tener conto della diversa sensibilità di due apparecchi e della loro diversa posizione di zero.

Gli errori dovuti a incertezza del coefficiente di temperatura si possono, col metodo da me adoperato, ridurre a piacere se si fa in modo che la temperatura dell'apparecchio vari di pochissimo tra una temperatura e l'altra.

Siano infatti $\bar{s}$ ed $\bar{s}_0$ le due letture dell'esempio precedente non corrette per la temperatura, t e t_0 le temperature corrispondenti, α il coefficiente di temperatura, T la temperatura di riferimento. Avremo:

$$s = \bar{s} \pm \alpha(t - T)$$
$$s_0 = \bar{s}_0 \pm \alpha(t_0 - T).$$

Sottraendo membro a membro:

$$s - s_0 = \bar{s} - \bar{s}_0 \pm \alpha(t - t_0)$$

e quindi la correzione di temperatura è nulla se $t = t_0$ ed è tanto più piccola quanto più sono vicine le temperature t e t_0.

Poichè è opportuno che tra una misura e l'altra passi meno tempo ch'è possibile, quando si può conviene far uso dell'automobile; quando non si può, occorre, dopo tre o quattro stazioni, cambiare la stazione base, riducendo poi tutte le misure alla stazione base principale.

La correzione normale si può eseguire, senza ricorrere a misure assolute, determinando, in una zona in cui il magnetismo abbia andamento normale, la variazione media n per chilometro della componente verticale in direzione nord-sud. Per trovare questa zona, basta eseguire una serie convenientemente grande di misure a distanza crescente dalla stazione base. Costruendo allora su carta millimetrata la retta $y = nx$ e ricavando a vista, per ogni stazione, il valore di y che corrisponde alla distanza x in direzione nord-sud tra essa e la stazione base, si può applicare la correzione normale alle singole misure con la massima rapidità. Nello stesso modo si possono eseguire gli altri calcoli occorrenti, per esempio la determinazione di valori $\varepsilon(s - s_0)$.

Sezione Terza B

B. DEMTCHENKO (Paris - Francia)

SUR UNE GÉNÉRALISATION DES INVARIANTS INTÉGRAUX

É. CARTAN (1) a démontré que les équations différentielles du mouvement d'un système matériel à liaisons holonomes parfaites soumis à des forces dérivant d'une fonction des forces, sont caractérisées par la propriété que l'intégrale du tenseur « quantité de mouvement-énergie », étendue à une suite continue linéaire fermée quelconque d'états du système, ne change pas de valeur quand on déplace d'une manière quelconque ces états le long de leurs trajectoires respectives.

Le principe de Cartan remplace le principe d'Hamilton, c'est-à-dire que les équations différentielles du mouvement sont les seules qui admettent comme invariant intégral relatif, l'intégrale du tenseur « quantité de mouvement-énergie ».

Le principe de Cartan ainsi que celui d'Hamilton ne sont pas applicables dans le cas des systèmes non holonomes, c'est-à-dire des systèmes assujettis aux liaisons différentielles.

Cependant, comme P. VORONETZ (2) l'a démontré, le principe d'Hamilton peut être facilement généralisé dans ce dernier cas. Nous allons indiquer, dans ce qui suit une généralisation analogue du principe de Cartan.

Rappelons d'abord le principe de Voronetz.

Soient $q_1 \ldots q_n$, $q_{n+1} \ldots q_{n+k}$ les coordonnées d'un système matériel, T sa force vive, U la fonction des forces.

Ce système est assujetti à k liaisons différentielles

$$dq_{n+\nu} = \omega_\nu(d) \qquad (\nu = 1, 2 \ldots k) \tag{1}$$

où ω_ν sont des formes linéaires de dq_1, $dq_2 \ldots dq_n$, dt:

$$\omega_\nu(d) = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} dq_i + a_i dt \qquad (\nu = 1, 2 \ldots k). \tag{2}$$

---

(1) CARTAN: *Leçons sur les invariants intégraux.* Paris, 1922.

(2) P. VORONETZ: *Sur les équations du mouvement des systèmes non holonomes.* Recueil Mathématique, Moscou, 1902. *Équations du mouvement d'un corps solide roulant sans glissement sur un plan fixe.* Kiev, 1903 (en russe). *Ueber die Bewegung eines starren Körpers.* Math. An., 70, 1911.

Désignons par W l'action d'Hamilton

$$W=\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt \tag{3}$$

par $p_1, p_2 \ldots p_n, p_{n+1} \ldots p_{n+k}$ les quantités $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}, \ldots \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_n}, \ldots \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{n+k}}$

$$p_i=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \qquad (i=1, 2 \ldots n, n+1 \ldots n+k) \tag{4}$$

et par ω_ν' la dérivée extérieure de la forme ω_ν

$$\omega_\nu'=d\omega_\nu(\delta)-\delta\omega_\nu(d)=\sum_{i=1}^{n}[da_{\nu i}dq_i]+[da_i dt]. \tag{5}$$

Le principe de Voronetz peut être exprimé par la formule

$$\delta W+\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k}p_{n+\nu}\omega_\nu'(d, \delta)=0 \tag{6}$$

où les variations δq_i s'annulant aux moments t_1 et t_0 satisfont aux conditions :

$$\delta q_{n+\nu}=\sum_{i=1}^{n}a_{\nu i}\delta q_i \qquad (\nu=1, 2 \ldots k) \tag{7}$$

$$\delta dq_i=d\delta q_i \qquad (i=1, 2 \ldots n). \tag{8}$$

L'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k}p_{n+\nu}\omega_\nu'(d, \delta)$$

qui entre dans l'expression (6) est une forme fonctionnelle linéaire des variations δq_i. Nous pouvons dire qu'elle s'obtient sous la forme extérieure

$$\sum_{\nu=1}^{k}p_{n+\nu}\omega_\nu'(d, \delta)$$

de deuxième dégré par contraction. Les formes fonctionnelles extérieures jouent dans la mécanique des systèmes non holonomes le même rôle que les formes différentielles extérieures dans la mécanique des systèmes holonomes.

Introduisons les variations totales δq_i des coordonnées q_i $(i=1, 2 \ldots n+k)$ en supposant que le temps varie aussi. On a alors

$$\delta q_i=\delta q_i+\dot{q}_i\delta t \qquad (i=1, 2 \ldots n) \tag{9}$$

$$\delta q_{n+\nu}=\omega_\nu(\delta) \qquad (\nu=1, 2 \ldots k) \tag{10}$$

Il est facile de voir que

$$\omega_\nu'(\delta, d)=\omega_\nu'(\delta, d). \tag{11}$$

Calculons δW, en supposant que les variations $\delta q_1, \ldots, \delta q_{n+k}$ ne s'annulent pas aux moments t_0 et t_1. On trouve facilement

$$\delta W = \delta W + (\omega_\delta)^1 - (\omega_\delta)^0 \tag{12}$$

où

$$\omega_\delta = \sum_{i=1}^{n+k} p_i \delta q_i - H\delta t$$
$$H = \sum_{i=1}^{n+k} p_i q_i - T - U. \tag{13}$$

En substituant, dans l'expression (12), l'équation (6) et en prenant en considération l'identité (11), on obtient:

$$\delta W = (\Pi_\delta)^1 - (\Pi_\delta)^0 \tag{14}$$

où Π_δ est une forme fonctionnelle linéaire

$$\Pi_\delta = \omega_\delta + \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu} \omega_\nu'(\delta, d). \tag{15}$$

Cette formule donne la variation de l'action le long des trajectoires réelles. Supposons que nous ayons un tube de trajectoires. La variation totale de l'action quand on est revenu à la trajectoire initiale est évidemment nulle, de sorte que l'on obtient le théorème fondamental suivant:

L'intégrale curviligne

$$\int_C \Pi_\delta = \int_C \omega_\delta + \int_C \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu} \omega_\nu'(\delta, d) \tag{16}$$

étendue à une courbe fermée quelconque de l'espace des états ne varie pas si l'on déplace d'une manière quelconque chacun des états qui la composent le long de la trajectoire correspondant à cet état.

La forme fonctionnelle linéaire Π_δ jouit de propriétés analogues à celles de la forme ω_δ.

Si l'on considère une suite d'états satisfaisant aux relations

$$\delta q_i = \dot{q}_i \delta t, \qquad \delta p_i = \dot{p} \delta t$$

l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu} \omega_\nu'(\delta, d)$$

devient identiquement nulle, car $\omega_\nu'(d, d) = 0$ et la forme Π_δ se réduit à l'action élémentaire d'Hamilton

$$(T + U)\delta t.$$

Si le système de Pfaff (10) est complètement intégrable, les dérivées ω_ν' s'annulent en tenant compte du système (10). Les liaisons deviennent holonomes et la forme Π_δ se réduit à la forme ω_δ.

Démontrons maintenant que la propriété d'invariabilité de l'intégrale (16) remplace le principe de Voronetz, c'est-à-dire qu'en partant de cette propriété on peut obtenir les équations différentielles du mouvement.

En effet, on a

$$d\int_C \Pi_\delta = d\int_C \omega_\delta + \int_C \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu'(\delta, d) = 0.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\sum_{i=1}^{n+k} \int_C (dp_i\delta q_i - dq_i\delta p_i) - dH\delta t + \delta H dt = 0.$$

Cette identité doit avoir lieu pour n'importe quelle suite fermée des états satisfaisant aux conditions (10). D'où l'on obtient les équations classiques du mouvement des systèmes non holonomes avec les multiplicateurs

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu a_{\nu i}$$

(17) $\qquad (i = 1, 2 \ldots n+k) \qquad (i = 1, 2 \ldots n)$

$$\frac{dp_{n+\nu}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_{n+\nu}} - \lambda_\nu \qquad (\nu = 1, 2 \ldots k).$$

On sait que chaque invariant intégral relatif entraîne comme conséquence un invariant intégral absolu. Cette propriété peut être facilement généralisée pour l'invariant relatif (16) et nous conduit à l'invariant intégro-fonctionnel à deux dimensions.

Désignons par Ω_δ le résultat de substitution des formules (10) dans la forme $\sum_{i=1}^{n+k} p_i\delta q_i$

(18) $$\Omega_\delta = \sum_{i=1}^{n} p_i\delta q_i + \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu(\delta).$$

La dérivée extérieure de Ω_δ est égale à

(19) $$\Omega_\delta' = \omega_\delta' + \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu'$$

où

$$\omega_\delta' = \sum_{i=1}^{n+k} [\delta p_i \delta q_i] - [\delta H \delta t].$$

Nous définirons la dérivée extérieure de la forme fonctionnelle linéaire Π_δ comme la différence

(20) $$\Pi_\delta' = \delta\Pi_{\delta'} - \delta'\Pi_\delta.$$

D'où, d'après la formule (19)

(21) $$\Pi_\delta' = \omega_\delta' + \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu' - \left[\int_{t_1}^{t_0} \sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu'\right]'.$$

Démontrons que

$$\left[\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu'\right]' = \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k} p_{n+\nu}\omega_\nu' - \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k}[dp_{n+\nu}\omega_\nu']. \tag{22}$$

Considérons une intégrale de la forme

$$K_\delta = \int_{t_0}^{t_1}\omega(d,\delta) \tag{23}$$

où $\omega(d,\delta)$ est une forme extérieure quelconque. On a

$$K_\delta' = \delta\int_{t_0}^{t_1}\omega(d,\delta') - \delta'\int_{t_0}^{t_1}\omega(d,\delta) = \int_{t_0}^{t_1}\delta\omega(d,\delta') - \int_{t_0}^{t_1}\delta'\omega(d,\delta) = \Big|_{t_0}^{t_1}\omega(\delta,\delta') -$$
$$-\int_{t_0}^{t_1}d\omega(\delta,\delta') + \int_{t_0}^{t_1}\delta\omega(d,\delta') - \int_{t_0}^{t_1}\delta'\omega(d,\delta) = \Big|_{t_0}^{t_1}\omega(\delta,\delta') - \int_{t_0}^{t_1}\omega'(d,\delta,\delta').$$

D'où il résulte immédiatement la formule (22). Le procédé de dérivation (20) permet de passer d'une intégrale curviligne étendue à un contour fermé à l'intégrale double étendue à une surface limitée par le contour. On obtient ainsi un invariant intégro-fonctionnel absolu à deux dimensions:

$$\iint_S \omega_\delta' + \iint_S\int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k}[dp_{n+\nu}\omega_\nu']. \tag{24}$$

Cette intégrale est étendue à une aire S dans l'espace des états et est invariante en ce sens qu'elle ne change pas de valeur si l'on déplace chacun des états le long de la trajectoire correspondante.

La forme extérieure

$$\Gamma(\delta,\delta') = \omega'(\delta,\delta') + \int_{t_0}^{t_1}\sum_{\nu=1}^{k}[dp_{n+\nu}\omega_\nu'] \tag{25}$$

qui correspond à l'élément de cette intégrale, est un invariant.

Il en résulte que

$$\Gamma(\delta,d)\equiv 0. \tag{26}$$

Mais il est facile de voir que

$$\Gamma(\delta,d) = \omega'(\delta,d).$$

D'où l'on obtient

$$\sum_{i=1}^{n+k}(\delta p_i dq_i - \delta q_i dp_i) - (\delta H dt - dH\delta t) = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les variations δq_i et δp_i satisfaisant aux conditions (10). Ce fait nous conduit de nouveau aux équations (17) de systèmes non holonomes.

On voit déjà, d'après ces quelques exemples, que les propriétés des invariants intégraux de Poincaré et de Cartan se généralisent facilement pour une autre espèce d'invariants que nous avons appelés ici des invariants intégro-fonctionnels. Nous sommes conduits à ces invariants en considérant les systèmes non holonomes. Mais on peut donner une notion beaucoup plus générale des invariants de cette espèce et établir une théorie analogue à celle des invariants intégraux.

P. BURGATTI (Bologna - Italia)

SOPRA A UNA PARTICOLARE DEFORMAZIONE DEI CILINDRI SOGGETTI A FORZE LATERALI

1. - Nel 1926 feci conoscere (1) due forme notevoli dell'integrale generale dell'equazione per l'equilibrio elastico

$$b^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{s} - a^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{s} = 0,$$

in cui s è lo spostamento; una delle quali è la seguente:

$$\mathbf{s} = \frac{a^2 - b^2}{2} z \operatorname{grad} \varphi + \frac{a^2 + b^2}{2} \varphi \mathbf{k} + \operatorname{grad} \psi \wedge \mathbf{k} + \operatorname{grad} \chi, \tag{1}$$

ove φ, ψ e χ sono tre funzioni armoniche arbitrarie e k il versore che definisce la direzione dell'asse delle z. Mostrai come da esse si possano dedurre quasi tutte le soluzioni dei problemi più classici (problemi di S.t Venant, di Clebsch, del suolo isotropo, ecc.). Hanno anche il vantaggio di permettere la costruzione *a priori* di numerose soluzioni, salvo poi a vedere a quali problemi concreti corrispondano. Qui voglio mostrare appunto che assumendo φ e ψ indipendenti da z e $\chi = z\chi'(x, y)$, si ottiene una soluzione che corrisponde a un nuovo problema relativo alla deformazione dei cilindri, diverso cioè da quelli già noti.

In tal caso la (1) diventa

$$\mathbf{s} = z\left[\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{grad}_0 \varphi + \operatorname{grad}_0 \chi'\right] + \operatorname{grad}_0 \theta + \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \varphi + \chi'\right) \mathbf{k},$$

ove l'indice (o) indica che si opera su funzioni delle sole variabili x e y, e $\theta(x, y)$ è la coniugata armonica di ψ, cioè legata a ψ dalla relazione

$$\operatorname{grad}_0 \theta = \operatorname{grad}_0 \psi \wedge \mathbf{k}.$$

La prima parte

$$\mathbf{s}_0 = z\left(\frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{grad}_0 \varphi + \operatorname{grad}_0 \chi'\right) + \operatorname{grad}_0 \theta$$

rappresenta lo spostamento normale a k, (parallelo cioè al piano (x, y)).

Applicando gli operatori div e rot, si ottiene facilmente, rammentando che φ, ψ e χ sono armoniche,

$$\operatorname{div} \mathbf{s} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{s} = b^2 \operatorname{grad}_0 \varphi \wedge \mathbf{k},$$

(1) Mem. R. Acc. Sc. Bologna.

ed anche

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} = \frac{a^2 - b^2}{2} \operatorname{grad}_0 \varphi + \operatorname{grad}_0 \chi'.$$

Sia ora β l'omografia degli sforzi interni, o delle tensioni elastiche. Il vettore $\beta\mathbf{k}$ definisce gli sforzi che si esercitano attraverso le sezioni normali a $\mathbf{k}$. Per calcolarlo si applica la formola

$$\beta\mathbf{k} = (2a^2 - b^2) \operatorname{div} \mathbf{s} \cdot \mathbf{k} - 2a^2 \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial z} + a^2 \operatorname{rot} \mathbf{s} \wedge \mathbf{k}.$$

Si trova, valendosi delle formule precedenti

$$\begin{aligned} \beta\mathbf{k} &= -a^2(a^2 - b^2) \operatorname{grad}_0 \varphi - 2a^2 \operatorname{grad}_0 \chi' - a^2 b^2 \operatorname{grad}_0 \varphi \\ &= -a^4 \operatorname{grad}_0 \varphi - 2a^2 \operatorname{grad}_0 \chi' ; \end{aligned}$$

la quale dimostra che questi sforzi sono nel piano stesso delle sezioni normali a $\mathbf{k}$. Questo vale in generale.

2. - Supponiamo ora che il corpo abbia sezione cilindrica con le basi piane normali a $\mathbf{k}$. In questo caso anche le forze agenti sulle basi, atte a mantenere l'equilibrio nel considerato stato di deformazione, dovranno essere nei piani stessi delle basi e distribuite come coteste tensioni $\beta\mathbf{k}$.

Sulla superficie laterale del cilindro si ha:

$$\beta\mathbf{n} \times \mathbf{k} = \beta\mathbf{k} \times \mathbf{n} = -a^4 \frac{d\varphi}{dn} - 2a^2 \frac{d\chi'}{dn}, \tag{2}$$

essendo $\mathbf{n}$ la normale. Calcoliamo anche $\beta\mathbf{n} \times \mathbf{i}$, $\beta\mathbf{n} \times \mathbf{j}$ ($\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ paralleli agli assi Ox e Oy). Posto

$$\mathbf{s} \times \mathbf{i} = \mathbf{s}_0 \times \mathbf{i} = u, \qquad \mathbf{s} \times \mathbf{j} = \mathbf{s}_0 \times \mathbf{j} = v,$$

si trova subito

$$\beta\mathbf{i} \times \mathbf{i} = -2a^2 \frac{\partial(\mathbf{s} \times \mathbf{i})}{\partial x} = -2a^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

e analogamente

$$\beta\mathbf{j} \times \mathbf{j} = -2a^2 \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \beta\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -2a^2 \frac{\partial u}{\partial y} = -2a^2 \frac{\partial v}{\partial x}$$

talchè risulta

$$\begin{aligned} \beta\mathbf{n} \times \mathbf{i} &= (\beta\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \frac{dx}{dn} + (\beta\mathbf{j} \times \mathbf{i}) \frac{dy}{dn} = -2a^2 \frac{du}{dn} \\ \beta\mathbf{n} \times \mathbf{j} &= -2a^2 \frac{dv}{dn}. \end{aligned}$$

In base a questo, se diciamo $\mathbf{f}$ le forze agenti al contorno nel piano delle sezioni ($\mathbf{f} \times \mathbf{k} = 0$), avremo la condizione

$$\mathbf{f} = -2a^2 \frac{d\mathbf{s}_0}{dn}.$$

Poichè $\mathbf{s}_0$ è funzione lineare di z, anche $\mathbf{f}$ dovrà essere della forma

$$\mathbf{f}_1 z + \mathbf{f}_2 ;$$

nella quale ipotesi la precedente condizione si scinde nelle seguenti:

$$-\frac{\mathfrak{f}_1}{2a^2}=\frac{a^2-b^2}{2}\frac{d\,\mathrm{grad}_0\,\varphi}{dn}+\frac{d\,\mathrm{grad}_0\,\chi'}{dn},$$
$$-\frac{\mathfrak{f}_2}{2a^2}=\frac{d\,\mathrm{grad}_0\,\theta}{dn}.$$

Per poterle soddisfare occorre che le forze $\mathfrak{f}_1/2a^2$ e $\mathfrak{f}_2/2a^2$ al contorno siano dotate di potenziale. Indicando con V_1 e V_2 questi potenziali, quelle condizioni diventano

$$V_1=\frac{a^2-b^2}{2}\frac{d\varphi}{dn}+\frac{d\chi'}{dn},\qquad V_2=\frac{d\theta}{dn}.$$

A queste va unita la (2):

$$V_3=-\frac{a^2}{2}\frac{d\varphi}{dn}+\frac{d\chi'}{dn}.$$

Date V_1, V_2 e V_3 al contorno d'una sezione, queste condizioni definiscono, a meno di costanti, le tre funzioni armoniche φ, θ, χ' (problema di Neumann). Le costanti si determinano poi con le note condizioni di compatibilità

$$\int_s V_i\,ds=0,\qquad (i=1,2,3).$$

J. HADAMARD (Paris - Francia)

SUR LE BATTAGE DES CARTES ET SES RELATIONS AVEC LA MÉCANIQUE STATISTIQUE

La question du battage des cartes (1), dont l'importance est connue depuis POINCARÉ, se pose, rappelons le, dans les conditions suivantes: Le joueur peut effectuer un certain nombre de gestes, produisant chacun une certaine permutation entre les rangs des cartes, et chacun d'eux avec une certaine probabilité, laquelle (si le jeu est supposé sans fraude ni défaut) a une valeur bien déterminée, indépendante des noms des cartes ainsi permutées. L'une quelconque des ces opérations ou « substitutions élémentaires » étant ainsi possible à chaque « coup de battage » leur combinaison peut produite l'une quelconque de certaines substitutions

$$S_0=1, \qquad S_1,\ldots, S_{N-1},$$

lesquelles forment évidemment un groupe G; et, au bout d'un nombre déterminé quelconque n de coups celles-ci se présentent avec des probabilités, en général différentes, fonctions de n, soit $P_i^{(n)}$ quelle pour la substitution S_i.

Le problème peut d'ailleurs s'envisager sous deux aspects:

a) On peut considérer les probabilités P que nous venons de définir;

b) On peut aussi porter son attention sur la probabilité $p_{hk}^{(n)}$ pour que, au $n^{\text{ième}}$ coup, la carte de rang h soit amenée au rang k, probabilité qui est d'ailleurs liée aux P par la relation

$$p_{hk}^{(n)}=\sum_i P_i^{(n)}, \tag{1}$$

la sommation étant étendue à toutes les substitutions S qui changent le rang h en k; (de sorte que, comme il peut il y avoir lieu de le noter, le premier membre

(1) Comme me l'a fait remarquer M. POLYÀ, la question des « grandeurs enchaînées », traitée par MARKOFF (Ac. Russe des Sciences 1908 et Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1912, Anhang II) puis, plus récemment par M. SERGE BERNSTEIN (Math. Ann., t. 97), est voisine de celle du texte, qu'elle combine en quelque sorte avec celle de la loi des grands nombres. On y est conduit en faisant correspondre à chaque substitution S une valeur d'une grandeur x et considérant la distribution en probabilité de la somme des valeurs prises par x dans les n premiers courps.

a la même valeur lorsqu'on considère h comme donné et k comme aléatoire ou lorsqu'on se place au point de vue inverse).

On considérera les P et les p pour les très grandes valeurs de n. En général, c'est-à-dire à certains cas exceptionnels ou « cas singuliers » près, *tous les* P (différents de zéro) *tendent, lorsque* n *augmente indéfiniment, vers une même limite*, égale évidemment à l'inverse de l'ordre N du groupe G; et, de même, *toutes les probabilités* p *différentes de zéro, tendent, dans les mêmes conditions, vers une limite unique,* évidemment égale à l'inverse du nombre total ν des rangs qu'on peut appeler *associés* à h, c'est-à-dire en lesquels la carte de rang h peut être amenée pour une valeur au moins de n.

Le problème consiste: 1°) à démontrer l'une ou l'autre de ces deux convergences; 2°) à caractériser (pour l'une ou l'autre des deux formes a), b)) les « cas singuliers », par opposition au « cas ordinaire » auquel le théorème s'applique.

1. - POINCARÉ [1] a traité la forme a), mais par une méthode assez indirecte reposant sur l'emploi des unités complexes; de plus, les conditions d'existence des cas singuliers lui ont échappé. Nous avons donné [2] de ce même problème, toujours sous la forme a), une solution directe, en discutant également les cas singuliers correspondants. Le rôle fondamental est joué par la formule

$$P_i^{(n)} = \sum P_{i|j}^{(n')} P_j^{(n'')}, \tag{2}$$

où n', n'' sont deux entiers tels que $n'+n''=n$ et où $P_{i|j}$ (avec un indice supérieur quelconque) désigne la probabilité de la substitution $S_{i|j}=S_i^{-1}S_i$. Cette formule, application immédiate des principes généraux du Calcul des Probabilités, montre tout de suite que les valeurs des P vont toujours en se reserrant les unes vers les autres à mesure que n augmente, c'est-à-dire que si m_n désigne la plus petite et M_n la plus grande des N quantités $P_i^{(n)}$, les nombres m_n ne vont jamais en décroissant et les nombres M_n jamais en croissant. Cette remarque est dûe à M. URBAN [3], auquel je tiens d'autant plus à rendre justice que sa priorité à cet égard m'avait échappé lors de mes publications antérieures.

D'autre part, je me suis aperçu que, dans ses *Leçons sur le Calcul des probabilités,* M. PAUL LÉVY a donné (sans démonstration) la formule qui concerne le problème posé sous forme b), et qui peut s'obtenir par une méthode tout analogue à celle qui nous a servi par la suite. La formule (2) est remplacée, pour la forme b), par la suivante:

$$p_{hl}^{(n)} = \sum_k p_{hk}^{(n')} p_{kl}^{(n'')}. \tag{2'}$$

---

(1) *Leçons sur le Calcul des Probabilités*, rédigées par QUIQUET.

(2) C. R. Ac. de Paris, t. 185 (1927), p. 5.

(3) *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler.* Leipzig, Teubner, 1923.

Ici encore, la convergence est assurée du moment que, au moins pour n suffisamment grand, tous les p sont différents de zéro.

Il reste toutefois à caractériser le cas contraire, ou cas singulier; et c'est ce que je me propose de faire ici. Convenons de dire que le rang k est *un conséquent* $n^{\text{ième}}$ de h si l'on peut passer de h à k en n coups exactement. Le cas singulier est celui dans lequel la liste des conséquents $n^{\text{ièmes}}$ de h varie avec n (et cela, si grand que soit n), leur nombre total pour toutes les valeurs de n étant, bien entendu, le nombre ν des associés.

Notons encore que si k est associé de h, l'inverse a lieu, puisque tout groupe fini qui contient une substitution contient la substitution inverse.

Cela posé, portons notre attention sur un h déterminé et soit r_n le nombre de ses conséquents $n^{\text{ièmes}}$. On voit immédiatement que r_n est une fonction non décroissante de n. Il faut donc que à partir d'une certaine valeur n_0 de n, r_n garde une valeur constante r que nous supposons actuellement inférieure à ν.

On voit également que tous les conséquents $n^{\text{ièmes}}$ de h ont même système de conséquents $n'^{\text{ièmes}}$, quelque soit $n' \geqslant n_0$.

Enfin, le *nombre* r *est nécessairement le même pour tous les associés de* h, puisque l'un quelconque k d'entre eux est un conséquent $n^{\text{ième}}$ de h (n pouvant toujours être supposé supérieur à n_0) et que, inversement, h est un conséquent de k.

Soit alors Σ, un système de r indices (les conséquents de même rang d'un même indice h) ayant un même système de conséquents $n'^{\text{ièmes}}$ pour toute valeur suffisamment grande de n'. Comme ces conséquents sont eux mêmes en nombre r, aucun autre indice ne peut partager avec ceux de Σ_1 la propriété en question.

Soit maintenant l un indice associé à h, mais non contenu dans Σ_1. Alors l fera partie d'un système Σ_2 de r indices, analogue à Σ_1 et sans élément commun avec Σ_1. Continuant ainsi, on aura distribué les ν indices associés entre eux en q systèmes de r éléments tels que les indices d'un même système (et ceux là seuls) aient le même système de conséquents d'un rang quelconque suffisamment grand. En un mot, le groupe G est non-primitif, toutes les permutations que l'on peut obtenir en un même nombre n de coups de battage permutant de la même façon les systèmes de non-primitivité.

2. - *Le problème de l'itération des transformations aléatoires*, traité par M. HOSTINSKY (1), puis par nous même (2), relève de méthodes analogues à celles qui s'appliquent au battage des cartes. La substitution que l'on itère un nombre quelconque n de fois est supposée faire correspondre à une valeur donnée x prise arbitrairement dans l'intervalle (a, b) non pas une valeur déter-

(1) Comptes Rendus, t. 186, 1928, p. 59.

(2) Ibid, p. 189.

minée y, mais l'une quelconque des valeurs y comprises dans (a, b) avec une certaine loi de distribution en probabilité

$$f(x, y)dy \tag{4}$$

ou, en introduisant, comme cela peut être nécessaire, des intégrales de Stiltjes

$$dF(x, y) \tag{3'}$$

avec la relation évidente

$$\int_a^b f(x, y)dy = \int_{y=a}^{y=b} dF(x, y) = 1. \tag{4}$$

En itérant n fois, on a une nouvelle transformation de nature analogue à la primitive, avec une nouvelle loi de probabilité

$$f_n(x, y)dy \qquad [\text{ou } dF_n(x, y)]$$

qui se déduit de la première par une formule de récurrence analogue à (2'). Nous avons montré (1) que l'étude asymptotique de la distribution f_n pour n très grand revient à la résolution de l'équation intégrale

$$\varphi(y) = \lambda \int_a^b \varphi(x) f(x, y)dx, \tag{5}$$

de sorte que l'étude générale des problèmes de cette espèce n'est autre que celle des propriétés communes à toutes les équations intégrales de la forme (4) dont le noyau f, toujours positif ou nul, vérifie, quel que soit x, la relation (4).

Remplaçant tout d'abord l'équation (5) par son associée, nous avons tout d'abord à noter qu'un tel noyau admet nécessairement la valeur fondamentale 1 et n'en admet aucune de module inférieur à 1 (ce fait pouvant être au fond, comme l'a fait remarquer M. POLYÀ, être considéré comme se rattachant aux résultats de FROBENIUS et de JENTZSCH sur les substitutions linéaires (2)).

Le cas ordinaire est celui où $\lambda = 1$ est la seule valeur fondamentale de module égal à 1.

Cherchons, ici encore à caractériser le cas singulier. Soit donc $\lambda = e^{i\alpha}$ un nombre (en général complexe) de module 1 auquel correspond une fonction

$$\varphi(x) = \varphi_1 + i\varphi_2$$

---

(1) Comptes Rendus, t. 186, 1928, p. 189.

(2) Le fait que parmi les valeurs fondamentales de module minimum figure nécessairement une valeur réelle et positive résulte d'ailleurs immédiatement du théorème correspondant sur les singularités des séries entières. Cette curieuse remarque m'a été également signalée par M. POLYÀ.

telle que l'on ait la relation associée à (5)

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \varphi(y)f(x,y)dy. \tag{5'}$$

Si, dans le plan de la variable complexe $z=\varphi_1+i\varphi_2$, nous traçons la ligne L décrite par le point $z=\varphi(y)$ lorsque y varie de a à b, nous aurons, pour chaque valeur de x, à prendre le centre de gravité de cette ligne L, en supposant les différents arcs élémentaires affectés de masses respectives définies par l'expression (3) ou (3'). Il faudra que ce centre de gravité ne soit autre qu'un point de la ligne L elle même, à une rotation près d'angle α.

La fonction φ, telle que la donnent, par exemple, les formules de Fredholm, est bornée et l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer que son module maximum est l'unité. Soit $z_0=\varphi(x_0)=e^{i\theta}$ une des valeurs de module 1 ainsi prises par la fonction φ. Le point d'affixe z_0, lequel doit résulter, par la construction qui vient d'être indiquée, de la ligne ou d'une partie de cette ligne, *ne peut dériver d'aucun arc fini de* L: car un tel arc, qu'il soit intérieur à la circonférence C ou emprunté (même totalement) a cette circonférence, a nécessairement son centre de gravité en dedans de C. On peut dès lors définir la fonction φ, tout au moins en ce qui regarde ses valeurs de module 1, par les règles suivantes:

1°) Sur le cercle C, les arguments θ des valeurs z susceptibles d'être prises par la fonction φ forment un certain ensemble ε, invariant par une rotation d'angle α.

2°) A chaque argument θ appartenant à l'ensemble ε, correspond un certain ensemble e_θ de valeurs de x pour lesquelles on a $\varphi(x)=e^{i\theta}$. Les divers ensembles e_θ sont sans point commun deux à deux et forment un ensemble total E.

3°) Lorsque x est pris dans l'ensemble E, donc dans un certain ensemble partiel e_θ, les probabilités $f(x,y)dy$ ou $dF(x,y)$ ne sont différentes de zéro que pour les valeurs de y prises dans $e_{\theta-\alpha}$.

Si l'ensemble E comprend tout l'intervalle (a,b), toutes les valeurs de $\varphi(x)$ sont de module 1. Il est clair que ceci peut être réalisé de toute sorte de manières très différentes (même en ne considérant pas comme essentiellement distinctes les formes des fonctions f et φ qui dérivent les unes des autres par une transformation ponctuelle quelconque, continue ou non, de l'intervalle (a,b) en lui même): toutes fournissent des exemples du cas singulier.

Je n'entreprendrai pas ici d'étudier la distribution des valeurs inférieures en module à 1, lorsque E ne comprend pas tout l'intervalle (a,b), ni d'examiner si et comment il pourrait arriver que le module de $\varphi(x)$ approche asymptotiquement de sa borne supérieure sans jamais l'atteindre.

Il convient de noter que le problème de l'itération tel que nous venons de le considérer correspond à l'aspect ci-dessus désigné par b) du problème du

battage des cartes. M. HOSTINSKY m'a fait connaitre qu'il a également abordé la question sous son aspect analogue à *a*) et m'a comuniqué certains des résultats qu'il a obtenus à ce sujet.

3. - Les considérations contenues dans les Notes citées des « Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris » et que nous venons de compléter sur certains points, nous paraissent élucider une partie de la question du « principe ergodique », celle qui releve du Calcul des Probabilités. Il ne faut pas oublier que les difficultés de nature dynamique, — grâce auxquelles cette question fait songer à celle, posée à l'Académie des Sciences, de « comuniquer avec une planète *autre que Mars* » —, restent entières. On sait combien elles sont encore loin de leur solution, même lorsqu'on s'abstient de faire intervenir les chocs.

Il est aisé de voir que l'on ne saurait, en dernière analyse, éviter de les rencontrer. Essayons, par exemple, de ramener un problème de Mécanique analytique à ceux qui viennent d'être étudiés, de la maniere suivante : m étant le nombre des dégrés de liberté, l'extension en phase totale (espace à $2m$ dimensions) sera divisée en un certain nombre de volumes partiels v_1, v_2,...., suffisamment petits dans toutes leurs dimensions, mais cependant finis. Le point représentatif étant supposé pris, à un premier instant initial, dans l'un détérminé quelconque v_h des volumes partiels en question, il pourra, au bout du temps T, se trouver dans l'un ou dans l'autre de ces volumes, avec des probabilités respectives p_{hk}. On est ainsi placé dans des conditions analogues à celles du problème du battage des cartes, du moins si l'on pose ce problème sous sa forme *b*).

Donnons au temps un second accroissement égal au premier. On sera conduit à calculer la distribution en probabilité des différentes portions v au bout du temps total $2T$, en combinant entre elles les probabilités p par la formule correspondant à (2'), ce qui étendrait au problème de dynamique considérée toutes nos conclusions précédentes.

Un tel raisonnement serait incorrect. Si, en effet, un point représentatif parti de l'intérieur du volume v_h peut, au bout du temps T, être parvenu dans v_k, les points intérieurs à ce même volume v_k peuvent aussi provenir (toujours au bout du temps T) d'antécédents intérieurs à d'autres volumes initiaux $v_{h'}$, $v_{h''}$,....; suivant qu'on est dan l'un ou l'autre de ces cas, c'est une partie ou une autre de v_k qui est ainsi atteinte. Le fait que v_k est connu comme atteint *en partant de* v_h constitue donc une donnée nouvelle, laquelle changera, en général, les valeurs des probabilités p_{kl} que l'on doit introduire dans (2'). Tout au plus pourrait-on admettre, à titre de postulat, que dans des problèmes très généraux, une telle modification des probabilités n'a pas lieu, toutes les parties du volume v_k possédant à cet égard les mêmes propriétés : là où ce postulat serait vérifié, toute difficulté disparaitrait.

Quant à la mise en équations du problème en supposant qu'il s'agisse d'un

point initial parfaitement déterminé et, par conséquent, d'un mouvement parfaitement déterminé, il est bien entendu qu'elle ne peut, au moins au premier abord, comporter l'application des méthodes précédentes, la phase au bout du temps T ne comportant plus aucun élément aléatoire.

On peut toutefois se demander si l'on ne pourrait pas tourner ces difficultés en suivant l'idée fondamentale que POINCARÉ a appliquée à la stabilité au sens de POISSON, c'est-à-dire en recherchant des résultats valables non plus partout, mais presque partout.

B. HOSTINSKÝ (Brno - Cecoslovacchia)

SUR LA PROPAGATION DIRIGÉE DES ONDES

La propagation du son dans un milieu gazeux indéfini est régie par l'équation classique

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0. \tag{1}$$

Une fonction $u(x, y, z, t)$ qui satisfait a (1) et qui vérifie les conditions initiales suivantes

$$u=f(x, y, z), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}=g(x, y, z) \qquad \text{pour } t=0 \tag{2}$$

est déterminée par la formule de Poisson

$$4\pi c u(x, y, z, t)=\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma}\frac{f(\alpha, \beta, \gamma)}{ct}\,d\sigma+\iint_{\Sigma}\frac{g(\alpha, \beta, \gamma)}{ct}\,d\sigma; \tag{3}$$

le domaine d'intégration Σ est la surface de la *sphère de Poisson* décrite autour du point (x, y, z) comme centre et dont le rayon est égal à ct.

Considérons le cas où l'ébranlement initial, défini par les fonctions f et g, est limité à une partie de l'espace. La propagation consiste *en général* à ce que la frontière qui sépare la partie ébranlée du reste de l'espace se déplace vers ce reste de sorte qu'elle demeure parallèle à elle même. Il y a donc dans le cas général propagation dans tous les directions.

Mais si les fonctions f et g sont choisies d'une manière particulière, la propagation peut être supprimée dans certaines directions. Je rappelle l'exemple classique des ondes sphériques convergentes ou divergentes; une telle onde se propage dans un seul sens a partir d'un ébranlement initial.

Considérons encore l'exemple suivant avec une constitution particulière de l'ébranlement initial. Soit V un cylindre droit à base circulaire divisé en un grand nombre de couches minces égales $T_1, T_2, T_3, \ldots$ par des sections droites. Je suppose que la fonction f, nulle en dehors du cylindre, ait des valeurs positives dans les couches d'indice pair et des valeurs négatives dans les autres. Construisons les sphères de Poisson autour d'un point A situé sur l'axe du cylindre et autour d'un autre point B.

Si les deux points sont assez éloignés du cylindre et si l'angle AOB (O centre du cylindre) est assez grand, les propagations sont différentes suivant les direc-

tions OA et OB. Car l'intersection de la première sphère de Poisson avec V est située dans une même couche T_1 et l'intégrale telle que $\iint_{\Sigma} f d\sigma$ est positive ou négative; la figure d'intersection de la seconde sphère avec V est formée par un grand nombre de bandes minces, de sorte que notre intégrale a une valeur voisine de zéro. On comprend que, d'après la formule (3), la propagation suivant OB sera plus faible que celle suivant OA.

L'étude de l'influence de l'état initial sur la propagation conduit au problème suivant: *Déterminer une intégrale $u(x, y, z, t)$ de l'équation* (1) *sous les conditions que l'on ait*

$$\left.\begin{aligned} &u = f_1(x, y, z) \text{ dans } V_1 \\ &u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en dehors de } V_1 \end{aligned}\right\} \text{ pour } t = t_1$$

et

$$\left.\begin{aligned} &u = f_2(x, y, z) \text{ dans } V_2 \\ &u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ en dehors de } V_2 \end{aligned}\right\} \text{ pour } t = t_2.$$

Voilà le type de problèmes qu'il faut considérer pour comprendre mieux les rapports entre la théorie electromagnétique classique et entre la théorie des quanta. En effet, la propagation des ondes electromagnétiques dans le vide est encore régie par l'équation (1); si un *quantum* pouvait se propager, l'énergie électromagnétique qui se trouve à l'instant t_1 localisée à l'intérieur d'un petit volume V_1, serait à l'instant t_2 localisée à l'intérieur d'un autre petit volume V_2 qui ne devrait pas différer beaucoup de V_1 (1). Par conséquent notre problème admettrait une solution, du moins pour un choix convenable de fonctions f_1 et f_2. C'est par cette voie qu'on pourrait rechercher les forces électromagnétiques à l'intérieur d'un quantum et la manière dont elles changent avec le temps.

(1) C'est-à-dire V_2 ne diffère pas beaucoup *en forme* de V_1, mais il y a une distance entre V_1 et V_2.

F. SBRANA (Genova - Italia)

CONSIDERAZIONI SUL CALCOLO DEGLI OPERATORI FUNZIONALI CHE SI PRESENTANO NELLA FISICA MATEMATICA

1. - Sulla rappresentazione di una funzione reale di variabile reale mediante un integrale definito. — È noto che nel calcolo degli operatori $f(\Delta)$, con $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, e t variabile reale, usato da diversi autori in numerose questioni di Fisica Matematica (1), se l'operando è una qualunque funzione reale $V(t)$, riesce opportuno valersi della rappresentazione formale

$$V(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) Fu(t-\tau) d\tau, \tag{1}$$

dove $Fu(t)$ è simbolo di funzione impulsiva.

Mostriamo facilmente che se $V(t)$ è definita in un intervallo (finito o infinito), integrabile, e coincide con la derivata del proprio integrale, per ogni valore di t compreso nel detto intervallo, si può sostituire alla (1) la seguente identità effettiva:

$$V(t) = \Delta \int_{-\infty}^{+\infty} V(\tau) K(t-\tau) d\tau, \tag{2}$$

dove $K(t)$ è definita dall'uguaglianza

$$K(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{e^{\omega t}}{\omega} d\omega, \qquad (i = \sqrt{-1}), \tag{3}$$

in cui ω indica variabile complessa ed s è una linea del piano ω, che va da $-i\infty$ a $+i\infty$, senza passare per l'origine. Se, p. es., s lascia a sinistra l'origine, $K(t)$ coincide con la funzione rappresentata ordinariamente con $1(t)$, che si annulla per $t<0$, ed è uguale ad uno per $t>0$.

---

(1) Ved., per questa teoria, G. GIORGI: *Sul calcolo delle soluzioni funzionali originate dai problemi di Elettrodinamica* (Atti dell'Associazione Elettrotecnica Ital., vol. IX, 1904, pp. 651-699). Cfr. anche il corso litografato delle lezioni di Fisica Matematica dettate dal prof. GIORGI all'Università di Cagliari (1926-1927), dove si trovano numerose indicazioni bibliografiche sull'argomento.

Supposto allora che l'intervallo in cui $V(t)$ è definita, nel modo poc'anzi indicato, sia esteso da $-\infty$ a $+\infty$, la (2) si riduce all'altra

$$V(t)=\Delta\int_{+\infty}^{t}V(\tau)d\tau,$$

che è appunto un'identità, per le ipotesi fatte.

Se poi l'intervallo in questione è finito, o infinito da una sola parte, basta supporre $V(t)=0$ fuori di questo intervallo, per riconoscere ancora valida la (2) (1).

2. - Sul calcolo degli operatori. — È noto che se $f(\Delta)$ è un operatore lineare e normale, e se $f(\omega)$ è una funzione analitica lungo una qualche linea che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$, e si annulla per $\omega\to\pm i\infty$, si ha

$$f(\Delta)V(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}V(\tau)G(t-\tau)d\tau+f(\Delta)[0], \tag{4}$$

dove $G(t)$ è la funzione generatrice di $f(\Delta)$, data da

$$G(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s}f(\omega)e^{\omega t}d\omega, \tag{5}$$

mentre $f(\Delta)[0]$ è la cosidetta funzione caratteristica di $f(\Delta)$.

È noto pure che tra le diverse possibili determinazioni di $G(t)$ ha importanza essenziale, per le applicazioni ai problemi fisico-matematici, quella che offre la valutazione *fondamentale* (secondo GIORGI), o *retrospettiva* (secondo WIENER (2)), di $f(\Delta)V(t)$, la quale si ottiene assumendo per s il semicerchio infinito di destra. Per la valutazione opposta, o *retrospettiva*, la funzione generatrice $G_1(t)$ corrisponde naturalmente al semicerchio infinito di sinistra.

Per la ricerca della funzione caratteristica, giova notoriamente la seguente rappresentazione esponenziale dello zero

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\Phi(\omega)e^{\omega t}d\omega,$$

---

(1) Se nella (3) la linea s è scelta in modo da lasciare a destra l'origine, indicando con $K_1(t)$ la nuova determinazione di $K(t)$, si trova

$$K_1(t)=-K(-t).$$

Sarebbe agevole dimostrare la validità della (2) anche quando in essa compaia $K_1(t)$ in luogo di $K(t)$, ovvero la loro media

$$\frac{1}{2}[K_1(t)+K(t)].$$

(2) Cfr. N. WIENER: *The operational calculus* (Math. Ann., Bd. 95, 1926, pp. 557-584).

dove c è una linea chiusa del piano ω e $\Phi(\omega)$ una funzione olomorfa entro c; da cui segue, supponendo che c contenga nel suo interno qualche punto singolare di $f(\omega)$,

$$f(\Delta)[0]=\frac{1}{2\pi i}\int_c \Phi(\omega)f(\omega)e^{\omega t}d\omega,$$

Evidentemente si ha pure

$$f(\Delta)[0]=\Phi(\Delta)\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\omega)e^{\omega t}d\omega,$$

per conseguenza ci si trova condotti alla valutazione particolare

$$f(\Delta)[0]=\frac{1}{2\pi i}\int_c f(\omega)e^{\omega t}d\omega. \tag{6}$$

Tale valutazione ha notevole importanza nella interpretazione generale di $f(\Delta)V(t)$. Supponendo infatti che c coincida col cerchio all'infinito, si trova

$$f(\Delta)[0]=\begin{cases} G(t), & \text{per } t>0, \\ -G_1(t), & \text{per } t<0 \ (^1). \end{cases}$$

In questo caso si ha pure, ovviamente,

$$f(\Delta)[0]=\frac{1}{2\pi i}\int_s f(\omega)e^{\omega t}d\omega=G(t), \qquad (t>0), \tag{7}$$

se la linea s (che va, come al solito, da $-i\infty$ a $+i\infty$), lascia a sinistra tutti i punti singolari al finito di $f(\omega)$.

Per mezzo della (7) si può stabilire la seguente identità, valida quando $f(\omega)$ ed $f'(\omega)$ si annullano per $\omega\to\pm i\infty$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)f(\Delta)[0]=0 \quad (^2), \tag{8}$$

della quale ci varremo nel numero che segue.

(^{1}) Se, in particolare, $f(\omega)$ è pari, cambiando nell'integrale ω in $-\omega$, si ottiene

$$G(t)=G_1(-t),$$

mentre se $f(\omega)$ è dispari si ha, similmente.

$$G(t)=-G_1(-t).$$

(^{2}) Più generalmente, si può dimostrare che se $f(\omega)$ si annulla con le sue derivate dei primi $n-1$ ordini, per $\omega\to\pm i\infty$, si ha

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)^n f(\Delta)[0]=0.$$

Infatti, segue dalla (7) che

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)f(\Delta)[0]=\frac{1}{2\pi i}\int_s e^{\omega t}\left(\frac{d}{d\omega}+t\right)^n f(\omega)d\omega,$$

3. - Rapporti tra una speciale classe di operatori e l'equazione di Laplace alle derivate ordinarie. — Notevole interesse, per le applicazioni a diversi problemi di Elettrodinamica, presentano gli operatori del tipo

$$\left[\frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)}\right]^n, \tag{9}$$

dove P e Q siano due polinomi in Δ, coi coefficienti indipendenti da t, ed n rappresenti una costante reale. Consideriamo, più generalmente, il seguente

$$\varphi(\Delta)=\frac{P_1^{p_1},\ P_2^{p_2},\ldots,\ P_h^{p_h}}{Q_1^{q_1},\ Q_2^{q_2},\ldots,\ Q_k^{q_k}}, \tag{10}$$

dove P_1, P_2,...., P_h, Q_1, Q_2,...., Q_k siano polinomi come P e Q, p_1, p_2,...., p_h, q_1, q_2,...., q_k costanti reali. *La funzione generatrice $G(t)$ di tale operatore, è soluzione dell'equazione di Laplace*

$$[(a_s t+b_s)\Delta^s+(a_{s-1}t+b_{s-1})\Delta^{s-1}+\ldots.+a_0 t+b_0]G(t)=0, \tag{11}$$

in cui s è la somma dei gradi di tutti i polinomi P_i e Q_i, se questi sono due a due primi tra loro, inferiore a tale somma, nel caso opposto, e le a_i, b_i sono costanti (rispetto a t).

È chiaro intanto che si può porre

$$\varphi(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)^{r_1}(m_2+l_2\Delta)^{r_2}\ldots.(m_s+l_s\Delta)^{r_s},$$

con le m_i, l_i costanti rispetto a t (reali o complesse) e le r_i costanti reali, e ritenere tutti distinti i fattori $m_i+l_i\Delta$, quindi diversi da zero tutti i minori di 2° ordine della matrice

$$\left\| \begin{matrix} m_1, & m_2,\ldots, & m_s \\ l_1, & l_2,\ldots, & l_s \end{matrix} \right\|.$$

Inoltre, è possibile determinare s numeri interi N_i, positivi o nulli, tali che risulti

$$r_i=N_i-n_i, \qquad (i=1, 2,\ldots., s),$$

con

$$n_i>1.$$

---

ed essendo

$$e^{\omega t}\left(\frac{d}{d\omega}+t\right)^n f(\omega)=\frac{\partial^n}{\partial\omega^n}[f(\omega)e^{\omega t}],$$

risulta

$$\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)^n f(\Delta)[0]=\frac{1}{2\pi i}\left|\frac{\partial^{n-1}}{\partial\omega^{n-1}}[f(\omega)e^{\omega t}]\right|_{\omega\to-i\infty}^{\omega\to+i\infty}=0.$$

Ancora più in generale, si può stabilire l'identità

$$F\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)f(\Delta)[0]=0,$$

valida quando $F(\omega)$ è nulla nell'origine, e analitica in un suo intorno, e si annullano per $\omega\to\pm i\infty$ tutte le derivate di $f(\omega)$.

Si trova allora

$$\varphi(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)^{N_1}(m_2+l_2\Delta)^{N_2}\ldots.(m_s+l_s\Delta)^{N_s}\psi(\Delta), \tag{12}$$

con

$$\psi(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)^{-n_1}(m_2+l_2\Delta)^{-n_2}\ldots.(m_s+l_s\Delta)^{-n_s}, \tag{13}$$

Dimostreremo dapprima la proprietà annunziata per l'operatore (13), di cui diremo $\bar{G}(t)$ la funzione generatrice. Osserviamo per questo che se si possono determinare due polinomi $f_1(\Delta)$, $f_2(\Delta)$, di grado minore o uguale ad s, per modo che si abbia

$$\left.\begin{aligned}\psi(\Delta)f_1(\Delta)&=f(\Delta),\\ \psi(\Delta)f_2(\Delta)&=f'(\Delta),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

con $f(\Delta)$ analitica lnngo una linea s del piano ω, che vada da $-i\infty$ a $+i\infty$, nulla per $\Delta\to\pm i\infty$, insieme con $f'(\Delta)$, si trae dalla (8),

$$[tf_1(\Delta)+f_2(\Delta)]\psi(\Delta)[0]=[f'(\Delta)+tf(\Delta)][0]=0,$$

ovvero

$$[tf_1(\Delta)+f_2(\Delta)]\bar{G}(t)=0, \tag{15}$$

e quindi, per $\bar{G}(t)$, un'equazione della forma (11).

Cerchiamo ora di verificare le condizioni (14), dalle quali segue

$$\frac{f'(\Delta)}{f(\Delta)}=\frac{f_2(\Delta)}{f_1(\Delta)}=\frac{d\log\psi(\Delta)}{d\Delta}+\frac{f_1'(\Delta)}{f_1(\Delta)},$$

o anche

$$f_2(\Delta)=f_1'(\Delta)-f_1(\Delta)\left[\frac{n_1l_1}{m_1+l_1\Delta}+\frac{n_2l_2}{m_2+l_2\Delta}+\ldots.+\frac{n_sl_s}{m_s+l_s\Delta}\right]. \tag{16}$$

Essendo tutti tra loro distinti i binomi $m_i+l_i\Delta$, si trova che $f_1(\Delta)$ dev'essere divisibile per ciascuno di essi. Assumendo senz'altro

$$f_1(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)(m_2+l_2\Delta)\ldots.(m_s+l_s\Delta), \tag{17}$$

la (16) dà per $f_2(\Delta)$ un polinomio di grado $s-1$.

Dalle (13), (14) si ha poi

$$f(\Delta)=\psi(\Delta)f_1(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)^{-(n_1-1)}(m_2+l_2\Delta)^{-(n_2-1)}\ldots.(m_s+l_s\Delta)^{-(n_s-1)},$$

ed è chiaro che $f(\Delta)$ soddisfa a tutte le condizioni richieste, avendosi $n_i>1$ $(i=1, 2,\ldots., s)$.

Con ciò è dimostrato che $\bar{G}(t)$ è soluzione della (15) [cioè della (11)].

Proveremo ora che se si eseguisce sull'equazione (15) l'operazione

$$g(\Delta)=(m_1+l_1\Delta)^{N_1}(m_2+l_2\Delta)^{N_2}\ldots.(m_s+l_s\Delta)^{N_s}, \tag{18}$$

(che dà risultato nullo, poichè questo operatore è funzione intera di Δ, dal momento che gli esponenti N_i sono numeri interi), la (15) si trasforma in una

equazione dello stesso tipo, e dello stesso ordine, per $g(\Delta)\overline{G}(t)$, cioè per $G(t)$, funzione generatrice dell'operatore (10) (1).

Ci varremo per questo della seguente identità

$$g(\Delta)[tV(t)]=\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)g(\Delta)V(t) \quad (2), \tag{19}$$

che, applicata alla funzione

$$V(t)=f_1(\Delta)\overline{G}(t),$$

porge

$$g(\Delta)[tf_1(\Delta)\overline{G}(t)]=tg(\Delta)f_1(\Delta)\overline{G}(t)+g'(\Delta)f_1(\Delta)\overline{G}(t).$$

Per conseguenza risulta

$$g(\Delta)[tf_1(\Delta)+f_2(\Delta)]\overline{G}(t)=\left[tf_1(\Delta)+f_2(\Delta)+f_1(\Delta)\frac{g'(\Delta)}{g(\Delta)}\right]g(\Delta)\overline{G}(t)=0. \tag{20}$$

Ma si ha

$$\frac{g'(\Delta)}{g(\Delta)}=\frac{N_1l_1}{m_1+l_1\Delta}+\frac{N_2l_2}{m_2+l_2\Delta}+\ldots.+\frac{N_sl_s}{m_s+l_s\Delta},$$

---

(1) Si noti che dalle (12), (18) segue

$$g(\Delta)\psi(\Delta)[0]=g(\Delta)\overline{G}(t)=\varphi(\Delta)[0]=G(t).$$

(2) Per giustificare la (19) basti osservare che se $g(\Delta)$ è un qualsiasi polinomio in Δ, di grado n, si ha

$$g(\Delta)[tV(t)]=\sum_0^n{}_h a_h\Delta^h[tV(t)]=\sum_0^n{}_h a_h[t\Delta^hV(t)+h\Delta^{h-1}V(t)],$$

e perciò

$$g(\Delta)[tV(t)]=t\sum_0^n{}_h a_h\Delta^hV(t)+\sum_0^n{}_h ha_h\Delta^{h-1}V(t)=tg(\Delta)V(t)+g'(\Delta)V(t).$$

Questa identità sussiste anche se $g(\Delta)$ è un operatore diffusivo, purchè lo sia ugualmente $g'(\Delta)$. Si ha allora

$$g(\Delta)[tV(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\tau V(\tau)d\tau\int_s e^{\omega(t-\tau)}g(\omega)d\omega;$$

ma con una integrazione per parti [lecita per le ipotesi fatte riguardo a $g'(\Delta)$], si trova

$$\tau\int_s e^{\omega(t-\tau)}g(\omega)d\omega=\int_s g(\omega)\left[te^{\omega(t-\tau)}-\frac{\partial e^{\omega(t-\tau)}}{\partial\omega}\right]d\omega=\int_s e^{\omega(t-\tau)}[tg(\omega)+g'(\omega)]d\omega,$$

da cui discende appunto

$$g(\Delta)[tV(t)]=\frac{t}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}V(\tau)d\tau\int_s e^{\omega(t-\tau)}g(\omega)d\omega+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}V(\tau)\int_s e^{\omega(t-\tau)}g'(\omega)d\omega=tg(\Delta)V(t)+g'(\Delta)V(t).$$

In modo simile si può provare che se $F(t)$ è una generica funzione derivabile, si ha, sotto condizioni facili a stabilirsi per $g(\Delta)$ [dipendenti del resto dalla natura di $F(t)$],

$$f(\Delta)[F(t)V(t)]=F\left(\frac{\partial}{\partial\Delta}+t\right)f(\Delta)V(t).$$

e quindi, dalla (17), segue che

$$f_2(\Delta)+f_1(\Delta)\frac{g'(\Delta)}{g(\Delta)}$$

è un polinomio di grado $s-1$ in Δ (1); e dalla (20) si trae che $g(\Delta)\bar{G}(t)$, cioè $G(t)$, è soluzione di un'equazione di Laplace di ordine s.

Termineremo osservando che mentre è notissima la possibilità di risolvere l'equazione (11) mediante integrali analoghi a quelli che abbiamo considerati, riteniamo invece nuova la proprietà riconosciuta per gli operatori (10). Inoltre, il risultato ottenuto induce a prevedere una connessione notevole tra operatori funzionali generici ed equazioni differenziali (2).

---

(1) Tenendo anche presente la (16), si trova di più che

$$f_1(\Delta)\frac{g'(\Delta)}{g(\Delta)}+f_2(\Delta)=f_1'(\Delta)+f_1(\Delta)\frac{d\log\varphi(\Delta)}{d\Delta}=$$
$$=f_1'(\Delta)+f_1(\Delta)\left[\frac{r_1l_1}{m_1+l_1\Delta}+\frac{r_2l_2}{m_2+l_2\Delta}+\ldots.+\frac{r_sl_s}{m_s+l_s\Delta}\right],$$

e quindi una espressione che si presta ad un calcolo semplice.

(2) Una relazione di questo genere, tra un'equazione alle derivate parziali, ad uno speciale operatore funzionale, è stata recentemente rilevata dal GIORGI; ved. G. GIORGI: *Sugli integrali di propagazione in una dimensione.* Rend. del Circ. Matem. di Palermo, T. LII, 1928, pp. 265-312.

F. MURNAGHAN (Baltimore - U. S. A.)

ON FINITE DEFORMATIONS AND THE ENERGY OF DEFORMATION OF A NON-ISOTROPIC MEDIUM

If we denote by ds_0 and ds the initial and final elements of arc of the medium, we may write

$$ds^2 - ds_0^2 = 2[E_1 dx^2 + E_2 dy^2 + E_3 dz^2 + 2E_4 dy dz + 2E_5 dz dx + 2E_6 dx dy]$$

where

$$E_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right\};$$

$$E_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right\};$$

etc. Here (u, v, w) are the displacement components and are regarded as functions of the final position (x, y, z). The coefficients $(E_1, \ldots E_6)$ are the strain components. The virtual work of all the forces, both mass and surface, acting on any portion of the medium is given by the classical volume integral

$$\int\Big\{X_x \frac{\partial}{\partial x}\delta u + Y_y \frac{\partial}{\partial y}\delta v + Z_z \frac{\partial}{\partial z}\delta w + Y_z\left(\frac{\partial}{\partial y}\delta w + \frac{\partial}{\partial z}\delta v\right) + Z_x\left(\frac{\partial}{\partial z}\delta u + \frac{\partial}{\partial x}\delta w\right) + X_y\left(\frac{\partial}{\partial x}\delta v + \frac{\partial}{\partial y}\delta u\right)\Big\}\, d\tau$$

where $(X_x, \ldots Y_z \ldots)$ are the components of the stress-tensor. The subsequent discussion is simplified if we use for a moment the notation of tensor-analysis. Thus if we denote (u, v, w) by (u_1, u_2, u_3) and X_x by X^{11}, Y_z by X^{23}, etc., the integrand of the virtual work integral is $X^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\delta u_\beta)$. Now

$$\delta u_r = \frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}\delta x^\alpha = \frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}\delta u_\alpha$$

so that

$$\frac{\partial}{\partial x^s}\delta u_r = \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^\alpha \partial x^s}\delta u_\alpha + \frac{\partial u_r}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^s}\delta u_\alpha = \delta\frac{\partial u_r}{\partial x^s} + \frac{\partial x^r}{\partial x^\alpha}\frac{\partial}{\partial x^s}\delta u_\alpha$$

or, equivalently,

$$f_\alpha^r \frac{\partial}{\partial x^s}\delta u_\alpha = \delta\frac{\partial u_r}{\partial x^s}$$

where

$$f_s^r = \delta_s^r - \frac{\partial u_r}{\partial x^s},$$

δ_s^r being Kronecker's unit tensor. Denoting the reciprocal matrix to f_s^r by $\bar{f}_s^r$, so

that $\bar{f}_s^r$ is the cofactor of f_r^s in the expansion of the determinant $\left\| \delta_s^r - \frac{\partial u_r}{\partial x^s} \right\|$ divided by the value of this determinant, we have $\frac{\partial}{\partial x^s} \delta u_p = \bar{f}_p^a \delta \frac{\partial u_a}{\partial x^s}$ and so the integrand of the volume integral giving the virtual work is

$$X^{\alpha\beta} \bar{f}_\beta^\delta \delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\alpha}.$$

Now the principle of energy conservation is equivalent to the assumption that this is the virtual differential of a certain function φ and it is usually assumed that φ is a function of the strain-components $(E_1, \ldots, E_6)$. It is the purpose of this note to show that this is equivalent to the assumption that the medium is elastically isotropic so that the assumption, which is now classic, is not valid for crystalline media.

In fact our equation

$$X^{\alpha\beta} \bar{f}_\beta^\delta \delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\alpha} = \delta\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial u_\delta}{\partial x^\alpha} \right)} \delta \frac{\partial u_\delta}{\partial x^\alpha}$$

leads to

$$X^{p\beta} \bar{f}_\beta^q = \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial u_q}{\partial x^p} \right)}$$

$\left(\text{the partial derivatives } \frac{\partial u_q}{\partial x^p} \text{ being assumed independent}\right)$ or, equivalently,

$$X^{pk} = f_\alpha^k \frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x^p} \right)}.$$

Upon using equations such as

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial E_5} - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial E_6},$$

which are an immediate consequence of the assumption that φ is a function of $(E_1 \ldots E_6)$ and of the equations of definition of the E's, we obtain the equations

$$X_x = \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} - \left(2E_1 \frac{\partial \varphi}{\partial E_1} + E_5 \frac{\partial \varphi}{\partial E_5} + E_6 \frac{\partial \varphi}{\partial E_6} \right);$$

$$Y_y = \qquad\qquad ; \quad Z_z =$$

$$Y_z = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial E_4} - \left(2E_4 \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} + E_5 \frac{\partial \varphi}{\partial E_6} + E_3 \frac{\partial \varphi}{\partial E_4} \right);$$

$$Z_y = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial E_4} - \left(2E_4 \frac{\partial \varphi}{\partial E_3} + E_2 \frac{\partial \varphi}{\partial E_4} + E_6 \frac{\partial \varphi}{\partial E_5} \right); \text{ etc.}$$

The necessary conditions $Y_z = Z_y$ etc., which express the symmetry of the stress-tensor, yield three equations on φ of which the first is

$$2E_4 \frac{\partial \varphi}{\partial E_2} - 2E_4 \frac{\partial \varphi}{\partial E_3} + (E_3 - E_2) \frac{\partial \varphi}{\partial E_4} - E_6 \frac{\partial \varphi}{\partial E_5} + E_5 \frac{\partial \varphi}{\partial E_6} = 0;$$

the other two being obtained by cyclic permutations of the triads (E_1, E_2, E_3) and (E_4, E_5, E_6). This system of three partial differential equations is readily seen to be complete. In fact it has as particular solutions the three invariants

$$I_1 = E_1 + E_2 + E_3$$
$$I_2 = E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2 - E_4^2 - E_5^2 - E_6^2$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} E_1 & E_6 & E_5 \\ E_6 & E_2 & E_4 \\ E_5 & E_4 & E_3 \end{vmatrix}$$

and so the general solution is $\varphi = \varphi(I_1, I_2, I_3)$. But this form of the volume density energy of deformation is characteristic of an isotropic medium. It seems, then, necessary to drop, for a non-isotropic medium, the assumption that φ is a function of the strain components alone.

It is perhaps necessary to point out, in conclusion, why the result of the present note has so long escaped attention. In order to simplify the discussion the classical treatment limits itself, in the main, to infinitesimal strains for which the strain components reduce to

$$E_1 = \frac{\partial u}{\partial x};\ldots \qquad E_4 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right);\ldots$$

The expressions for the stress components reduce to

$$X_x = \frac{\partial \varphi}{\partial E_1};\ldots \qquad Y_z = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial E_4};\ldots \qquad Z_y = \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial E_4}$$

and the conditions on φ which we have obtained by equating Y_z to Z_y become vacuous.

E. MEISSNER (Zürich - Svizzera)

ZUR ELASTIZITÄTSTHEORIE DÜNNER SCHALEN

Es handelt sich um drei Ergänzungen zur Elastizitätstheorie dünner rotationssymmetrischer Schalen von konstanter Wandstärke $2h$.

1. - Diese Theorie führt auf eine Differentialgleichung 4. Ordnung, die homogen ist, wenn nur an den Schalenrändern Kräfte wirken. Für eine Ringfläche (Kreis als Meridian) hat sie die Form $LL(U)+k^2U=0$.

Hiebei ist

$$L(U)=\frac{\lambda+\sin\alpha}{\sin\alpha}\frac{d^2U}{d\alpha^2}+\operatorname{cotg}\alpha\frac{dU}{d\alpha}-\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha(\lambda+\sin\alpha)}U \qquad k^2=\frac{3(1-\nu^2)R^2}{h_2} \qquad \lambda=\frac{a}{R}$$

ν ist die reziproke POISSON'sche Konstante und die übrigen Bezeichnungen ergeben sich aus der Fig. 1. Sie reduziert sich weiter auf die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$L(U)+ikU=0$$

welche mit $x=\sin\alpha$ in eine Gleichung der FUCHS'schen Klasse übergeht. Ihre singulären Stellen sind

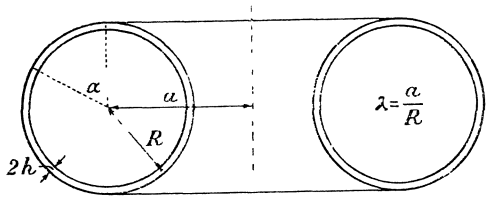


Fig. 1.

$$x=+1 \quad x=-1 \quad x=-\lambda \quad x=\infty$$

und die zugehörigen determierenden Exponenten sind resp. gleich

$$0,\frac{1}{2} \qquad 0,\frac{1}{2} \qquad 1,-1 \qquad \beta_1,\ \beta_2$$

wo β_1, β_2 die Wurzeln von $\beta^2-\beta-(1+ik)=0$ bedeuten.

Im Falle der Kugelschale ist $\lambda=0$ und die Gleichung wird hypergeometrisch in x, sodass man die Lösung völlig beherrscht.

Es ist bis jetzt übersehen worden, dass auch im Fall $\lambda=1$ eine ähnliche Vereinfachung auftritt, d. h. im Fall, wo der Meridiankreis die Rotationsaxe berührt. Auch hier erweist sich das Integral als hypergeometrisch in der Variablen $y=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Damit ist Manches auch für die numerische Berechnuug erreicht. Man wird das Beispiel verwenden können um etwa im Fall des in Fig. 2 dargestellten Dampfkessels mit Boden die Spannungen in der Krempe genau zu berechnen.

2. - Die zweite Ergänzung zur Schalentheorie bezieht sich auf die durch Kräfte rotationssymmetrisch belastete Ringflächenschale. Hier hat die zu lösende Differentialgleichung die Form

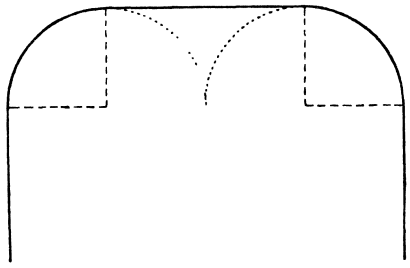


Fig. 2.

$$LL(U)+k^2\cdot U=\Phi \tag{1}$$

wo Φ eine durch die Lasten bestimmte Funktion ist. Auch diese Gleichung ist, wie ich gezeigt habe, einer solchen 2. Ordnung gleichwertig. Für die sich neu stellende Aufgabe, eine Partikulärlösung von (1) zu finden, ist aber seither nichts geschehen. Das hängt damit zusammen, dass ich für den wichtigsten Spezialfall der Kugelschale in allen technisch interessanten Belastungsfällen elementare Partikulärlösungen angeben konnte. (Konstanter Druck, Eingengewicht, rotierende Schale). Diese Verhältnisse sollen hier weiter verfolgt werden.

Ich gehe von der Bemerkung aus, dass wenn in (1) zufällig Φ der Beziehung

$$L(\Phi)+\varrho\Phi=0$$

genügt, die Gleichung durch

$$U=\frac{\Phi}{k^2+\varrho^2}$$

gelöst wird. Es tritt somit die Gleichung

$$L(\Omega)+\varrho\Omega=0 \tag{2}$$

in den Vordergrung, und man wird in Hinblick auf die gefundenen Kugellösungen nach ihren periodischen Integralen fragen (geschlossene Schale). Dies Problem ist aber für eine eigentliche Ringflächenschale ($\lambda>1$) einer polaren Integralgleichung aequivalent. Nach HILBERT ([1]) giebt es unendlich viele positive und unendlich viele negative Eigenwerte ϱ_n und es gelten die üblichen Entwicklungssätze nach den Eigenfunktionen Ω_n. Giebt die Entwicklung von Φ in (1) alsdann

$$\Phi=\sum c_n\Omega_n$$

so ist das gesuchte Partikulärintegral gegeben durch

$$U=\sum c_n\frac{\Omega_n}{k^2+\varrho_n^2}.$$

([1]) HILBERT: *Grundzüge e. allg. Theorie d. lin Integralgleichungen*, 5, Mittlg. Göttinger Nachr., 1906.

Alles dies ist aber nur dann praktisch von Vorteil, wenn sich die Eigenwerte einfach angeben lassen und die Eigenfunktionen elementar sind. Die ϱ sind so zu bestimmen, dass ein Integral Ω beim Umlauf um die Stellen 0 und 1, oder was damit gleichbedeutend, um $-\lambda$ und ∞, zu seinem Ausgangswert zurückkommt. Eine hinreichende Bedingung kann man dafür sofort finden: Es genügt, dass das zum Exponenten $+1$ in $x=-\lambda$ gehörende Integral auch beim Umlauf um ∞ eindeutig bleibe, was zu den Eigenwerten

$$\varrho_n = n^2 + n - 1$$

führt. Leider sind die zugehörigen Eigenfunktionen nicht elementar, wie schon das erwähnte Beispiel $\lambda = 1$ zeigt.

Anders bei der Kugelschale. Hier hat die Periodizitätsforderung zur Folge, dass die hypergeometrischen Reihen abbrechen. Mit Ausnahme der Funktion $\sin^{-1} \alpha$, die zu $\varrho = -1$ gehört, erhält man als Eigenfunktionen im Wesentlichen Polynome in x, die sich als identisch herausstellen mit dem (normierten) vollständigen Orthogonalsystem der Funktionen

$$P_{n,1} = \sqrt{\frac{2n+1}{2n(n+1)}} \cdot \sqrt{1-x^2}\, \frac{dP_n}{dx}$$

wo P_n das n. LEGENDRE'sche Polynom bedeutet. Die Eigenwerte sind

$$\varrho_n = n(n+1) - 1$$

Entwickelt man die Belastungsfunktion Φ in (1) nach Fourierart nach diesen Funktionen in die Reihe

$$\Phi = \sum c_n P_{n,1}$$

so erhält man in

$$U = \sum \frac{c_n}{k^2 + n(n+1) - 1} P_{n,1}$$

das gesuchte Partikulärintegral. Für die geschlossene Kugelschale giebt es die fertige Lösung des Elastizitätsproblems. In den erwähnten, früher gefundenen Spezialfällen war Φ mit der ersten, resp. zweiten Eigenfunktion identisch. Ich habe als weitere Anwendung das Beipiel einer auf oder in einer Flüssigkeit schwimmenden Kugelschale behandelt.

3. - Meine letzte Bemerkung bezieht sich auf Schalen beliebiger Meridianform. Wenn die an einem Schalenrand angreifenden Kräfte und Momente für sich ein Gleichgewichtssystem bilden, d. h. wenn axiale Kräfte fehlen, so erstreckt sich nach de St. Venant ihr Einfluss nur auf die unmittelbare Umgebung des Randes. Es wird auf die Schalenform ausserhalb dieser Zone überhaupt nicht mehr ankommen und es wird erlaubt sein, den Meridian durch den Krümmungskreis, ja sogar durch seine Tangente am Rand zu ersetzen. Im letztern Fall, wo der Tangentialkegel der Fläche substituiert wird, können dann die auftretenden Besselfunktionen

noch durch ihre asymptotischen Entwicklungen ersetzt werden. Ich habe diese Methode selbst auf das Beispiel einer Hochdrucktrommel angewandt. Wenn man auch von den asymptotischen Entwicklungen wieder nur das 1. Glied benutzt, so gelangt man zu Annäherungen, wie sie neuerdings von GECKELER ([1]) durch summarische Vereinfachung der Differentialgleichung erzielt worden sind. Will man bessere Annäherungen, so sind die Entwicklungen zu benützen, die schon 1899 von HORN ([2]) gegeben worden sind für Differentialgleichungen, die grosse Parameter enthalten.

([1]) GECKELER: *Ueber die Festigkeit achsensymmetrischer Schalen.* (Forsch. Arbeiten, V. D. I.) Berlin, 1926.

([2]) HORN: *Ueber lineare Differentialgleichungen m. e. veränderlichen Parameter. Ueber eine lineare Diff. Gleichung 2. Ordnung,* etc. Math. Ann, Bd. 52 (1899).

A. MESNAGER (Paris - Francia)

ÉLASTICITÉ À DEUX DIMENSIONS

I. - Pièce rectangulaire subissant seulement des pressions normales sur deux côtés opposés.

II. - Plaque encastrée, chargée de $\varpi = f(y)$.

III. - Pièce rectangulaire subissant seulement des cisaillements sur deux côtés opposés.

I.

Pièce rectangulaire subissant seulement des pressions normales sur deux côtés opposés.

Exposé. - Pour arriver d'une manière simple à l'équation de la tige rectangulaire $ABCD$ à deux dimensions, de côtés $a = AB = CD$ et $b = AC = BD$, soumise à des efforts perpendiculaires à ses sections extrêmes AC et BD, je me suis proposé de trouver l'équation du déplacement vertical w d'une plaque horizontale $ABCD$ qui serait astreinte pendant sa déformation :

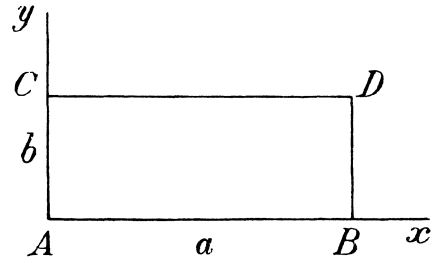


Fig. 1.

1°) à subir sur AC et BD des déformations verticales arbitraires (pour simplifier je les ai supposées ici symétriques par rapport aux axes de la plaque), les tangentes à la surface en des points de AC et BD, primitivement parallèles à AB et CD, restant parallèles à ces droites pendant la déformation ;

2°) à rester tout le long du côté AB tangente à un même plan (donc à tourner d'un angle constant autour de AB) ; de même à rester sur son côté CD tangente à un plan.

Pour y parvenir :

a) j'ai pris pour axe ox le côté AB et pour axe oy le côté AC. J'ai cherché les déplacements w_1 de la plaque infiniment longue suivant ox, articulée suivant $y = 0$ et $y = b$, chargée d'une manière arbitraire, mais identique, sur toutes les droites $x = ka$;

b) je leur ai superposé les déplacements w_2 produits par des moments l'encastrant suivant $y = 0$ et $y = b$;

c) j'y ai ajouté les déplacements verticaux w_3 d'un cylindre parabolique passant par AB et CD.

La somme de ces déplacements w m'a donné celui d'une plaque remplissant les conditions proposées.

Cette plaque résoudra le problème indiqué dans le titre.

On sait en effet qu'en élasticité à deux dimensions on a

$$N_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \qquad N_2 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad T = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

w étant la fonction d'Airy du problème, c'est-à-dire une fonction dont les dérivées permettent d'obtenir les quantités N_1, N_2 et T, convenant à ce problème. w représente le déplacement perpendiculaire à la surface d'une plaque mince convenablement chargée, ayant le contour du corps étudié. C'est ce qui permet de ramener toujours les problèmes à deux dimensions à des problèmes de plaque. Les pressions N_1 sur $x=d$ de la tige sont les courbures de la plaque suivant ces droites et de même les pressions N_2 sur $y=d'$ (d et d' étant des nombres quelconques).

On voit immédiatement que la plaque ayant les déplacements w définis plus haut correspond au problème que je me suis proposé. Car $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}=0$ sur tout le contour, donc $T=0$ sur ce contour et $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ sur AB et CD, donc aussi N_2.

Je vais chercher à déterminer w. Pour y parvenir je chercherai les équations de w_1, w_2 et w_3.

Équation de w_1. - En utilisant les propriétés des séries trigonométriques, on a constaté que la courbe

$$u = \frac{1}{2} + \sum_m \cos mz, \qquad \left(\sum_m = \sum_{m=1}^{m=\infty}\right)$$

donne $u=0$ pour toute valeur de z, sauf $z=2k$, pour lesquelles elle grandit indéfiniment. La surface infiniment étroite et infiniment longue en chacun de ces points est égale à π. Car on sait que

$$\sum_m \cos mz = -\frac{1}{2}$$

partout, sauf aux points $z=2\pi$, où la valeur est $1+1+1+\ldots = +\infty$. D'autre part on sait que

$$\int_{z_0}^{z_0+2\pi} \cos mz \cdot dz = 0,$$

donc

$$\int_{z_0}^{z_0+2\pi} \sum_m \cos mz \cdot dz = 0,$$

donc la surface infiniment longue et étroite est $\frac{1}{2}\,2\pi=\pi$. Multiplions par une fonction quelconque de y que, pour la simplicité de l'exposé, je prendrai symé-

trique par rapport à la droite $y=\frac{b}{2}$. Nous obtiendrons une expression en x et y, qui peut s'écrire, en posant $\alpha=\frac{p\pi}{a}$, $\beta=\frac{i\pi}{b}$, p étant un nombre pair et i un nombre impair :

$$c=\left(\frac{1}{2}+\sum_{p}\cos\alpha x\right)\sum_{i}M_i\sin\beta y.$$

Elle pourra représenter la charge par unité de longueur appliquée sur les droites $x=ka$.

En posant $H=\frac{\varepsilon i}{1-\eta^2}=\frac{\varepsilon h^3}{12(1-\eta^2)}$ (ε module d'Young, η coefficient de Poisson, h épaisseur de la plaque), on en déduira les déplacements verticaux w_1 de la plaque portant c,

$$w_1=\frac{1}{H}\left[\frac{1}{2}\sum_{i}\frac{M_i\sin\beta y}{\beta^4}+\sum_{i}\sum_{p}M_i\frac{\cos\alpha x\sin\beta y}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]$$

par application de la formule, de la pression subie par une plaque et comptée dans le même sens que les déplacements, $\tilde{\omega}=H\Delta\Delta w$, en admettant $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Équation de w_2. - Prenons la dérivée par rapport à y et annulons y, il vient pour $y=0$

$$\frac{\partial w_1}{\partial y}=\frac{1}{H}\left[\frac{1}{2}\sum_{i}\frac{M_i}{\beta^3}+\sum_{i}\sum_{p}M_i\frac{\beta\cos\alpha x}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right].$$

On sait, en employant des définitions convenables pour les valeurs des séries (1), que les charges par unité de surface

$$\tilde{\omega}=\sum_{i}\beta\sin\beta y$$

équivalent à un moment constant sur $y=0$ et un moment égal et de signe contraire sur $y=b$. D'autre part

$$f(x)=A+\sum_{p}B_p\cos\alpha x$$

représente une fonction quelconque symétrique par rapport à $x=\frac{a}{2}$, ayant pour période a. Donc

$$\tilde{\omega}_2=-\left(A+\sum_{p}B_p\cos\alpha x\right)\sum_{i}\beta\sin\beta y$$

sera la pression équivalente à un moment symétrique par rapport à $x=\frac{a}{2}$ et ayant pour période a. Les déplacements verticaux de la plaque subissant ces moments seront

$$w_2=-\frac{1}{H}\left[\sum_{i}\frac{A\beta\sin\beta y}{\beta^4}+\sum_{i}\sum_{p}B_p\frac{\beta\cos\alpha x\sin\beta y}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right],$$

d'où pour $y=0$

$$\frac{\partial w_2}{\partial y}=-\frac{1}{H}\left[\sum_{i}\frac{A}{\beta^2}+\sum_{i}\sum_{p}B_p\frac{\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\cos\alpha x\right].$$

---

(1) LEBESGUE: *Séries trigonométriques*, Gauthier-Villars, 1906.

Pour que, sur la droite $y=0$, $\frac{\partial w_1}{\partial y}+\frac{\partial w_2}{\partial y}=0$, on peut poser

$$(1)\qquad A=\frac{1}{2}\frac{\sum_i M_i\beta^{-3}}{\sum_i \beta^{-2}}, \qquad B_p=\frac{\sum_i M_i\beta(a^2+\beta^2)^{-2}}{\sum_i \beta^2(a^2+\beta^2)^{-2}}.$$

Les dénominateurs sont des sommes connues. En particulier quand $M_i=\beta^{-(2m-1)}$ toutes les sommes sont connues. On sait aussi qu'alors les charges sur les droites $x=ka$ de w_1 sont exprimées par des polynomes, si $m=1$ la charge y est uniforme.

Équation de w_3. - C'est $w_3=Dy(y-b)$.

Équation de w. - En ajoutant w_1, w_2 et w_3, on obtient

$$(2)\qquad w=Dy(y-b)+\frac{1}{H}\left[\left(\sum_i\frac{M_i}{2}-A\beta\right)\frac{\sin\beta y}{\beta^4}+\sum_i\sum_p(M_i-B_p\beta)\frac{\cos\alpha x\sin\beta y}{(a^2+\beta^2)^2}\right].$$

Ce sera la fonction générale d'Airy relative à la tige soumise sur ses sections extrêmes $x=0$ et $x=a$ à des pressions uniquement normales à ces bases et libre sur les côtés $y=0$ et $y=b$.

II.

Plaque encastrée subissant une pression fonction de y seul.

Faisons $D=0$ dans (2), nous obtenons les déplacements d'une plaque infiniment longue suivant $0x$ encastrée sur $y=0$ et $y=b$, chargée seulement suivant $x=ka$. En lui superposant les déplacements (2), après y avoir fait $D=0$ et $x=0$ et changé les signes, ce qui donne une plaque infinie dans le sens $0x$ encastrée sur $y=0$, $y=b$, chargée de $\tilde{\omega}=f(y)$, nous obtenons l'équation

$$w=-\frac{1}{H}\sum_i\sum_p(M_i-B_p\beta)\frac{(1-\cos\alpha x)\sin\beta y}{(a^2+\beta^2)^2}$$

qui est celle de la plaque encastrée, portant la charge arbitraire $\tilde{\omega}=f(y)$ dans tout son contour, ainsi qu'on peut le contrôler facilement.

III.

Tige subissant seulement des cisaillements sur ses bases.

Par des calculs analogues et une formule (p. 45 de la thèse de M. Estanave), on arriverait à la fonction d'Airy de la tige, soumise seulement à des cisaillements symétriques, par rapport à l'axe sur les sections extrêmes $x=0$ et $x=a$

$$(3)\quad w=\frac{1}{H}\sum_i\sum_j\frac{Bj}{(a^2+\beta^2)^2}\left\{\sin\beta y-\frac{\beta}{ab+\operatorname{sh}ab}[(b-y)\operatorname{sh}ay+y\operatorname{sh}a(b-y)]\right\}\sin\alpha x$$

dans laquelle $\alpha=\frac{i\pi}{a}$ et $\beta=\frac{j\pi}{b}$, i et j étant des nombres impairs.

A. C. DIXON (Belfast - Irlanda)

THE THEORY OF A THIN ISOTROPIC RECTANGULAR PLATE CLAMPED AT THE EDGES

The problem is to construct a function $\chi(z)$ bounded at the origin, having given poles in a fundamental rectangle whose sides are a, b and such that

$$\chi(a+ib-z) = -\alpha\beta\chi(z) \tag{1}$$

$$\chi(z) - \chi(ze^{i\pi}) = 2az\chi'(a-z) \tag{2}$$

$$-\alpha\chi(a-z) + \alpha\chi(a-ze^{-i\pi}) = 2z\chi'(z). \tag{3}$$

Here $\alpha^2=\beta^2=1$. (See Proc. Lond. Math. Soc., ser. 2, vol. 25, p. 423).

Near the origin it follows that $\chi(z)$ and $\chi(a-z)$ must satisfy the functional equation

$$\varphi(ze^{i\pi}) + \varphi(ze^{-i\pi}) - 2\varphi(z) + 4\left(z\frac{d}{dz}\right)^2\varphi(z) = 0, \tag{4}$$

which is also satisfied by

$$\int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{z^\lambda d\lambda}{e^{\lambda i\pi} + e^{-\lambda i\pi} - 2 + 4\lambda^2}$$

say $\theta(z)$. This expression for $\theta(z)$ is valid so long as $|I(z)|<\pi$, and $\theta(z)$ has no finite singularity except at the origin and at -1, where there is a simple pole.

If there are two functions φ, ψ satisfying the equation (4) and bounded near the origin, then the integral

$$\int \{\varphi(te^{-i\pi})\psi(t) - \varphi(t)\psi(te^{-i\pi})\}\, t^{-1}dt$$

may be taken round a contour consisting of a straight line from 0 to k, a curve from k to $ke^{i\pi}$, and then the straight line from $ke^{i\pi}$ to 0. Thus it is found that

$$\int_k^{ke^{i\pi}} \{\varphi(te^{-i\pi})\psi(t) - \varphi(t)\psi(te^{-i\pi})\}\frac{dt}{t}$$

is equal to an expression containing only the values of φ at k and at the poles of ψ, those of ψ at k and at the poles of φ, the respective residues and the derivatives of φ, ψ at k.

The curve from k to $ke^{i\pi}$ is taken to be an arc of a closed convex oval,

symmetrical about each of the coordinate axes, passing through four points $\pm p$, $\pm q$ such that:

$$\text{at } p, \qquad a>x>\tfrac{1}{2}a, \qquad b>y>\tfrac{1}{2}b;$$

$$\text{at } q, \qquad -a<x<-\tfrac{1}{2}a, \qquad b>y>\tfrac{1}{2}b.$$

(for instance, an ellipse with semiaxes $\frac{4}{5}a$, $\frac{4}{5}b$).

Then $\varphi(t)$, $\psi(t)$, k are taken to be

$$\theta\left(\frac{t}{z}\right), \qquad \chi_1(t), \qquad p$$

in the first place

$$\theta\left(\frac{t}{z}\right), \qquad \chi_2(t), \qquad qe^{-i\pi}$$

in the second, where

$$\chi_1(t)=\chi(t), \qquad \chi_2(t)=\beta\chi(ib-t).$$

Then it follows from the given conditions (1), (2), (3) that

$$\chi_1(z)-\frac{\beta}{2i\pi}\int_{ib-p}^{ib-q}\left\{\frac{\chi_2(t)}{ib-t}\left(\theta\frac{ib-t}{ze^{i\pi}}-\theta\frac{ib-t}{z}\right)+\frac{2}{z}\chi_1(t)\theta'\frac{ib-t}{z}\right\}dt$$

$$-\frac{\alpha}{2i\pi}\int_{-q-a}^{p-a}\frac{\chi_2(t)}{t+a}\left(\theta\frac{t+a}{z}-\theta\frac{t+a}{ze^{-i\pi}}\right)dt+\frac{\alpha}{2i\pi}\int_{q+a}^{-p+a}\frac{2}{z}\chi_1(t)\theta'\frac{t-a}{ze^{i\pi}}\,dt$$

and

$$\chi_2(z)+\frac{\beta}{2i\pi}\int_{ib-p}^{ib-q}\left\{\frac{\chi_1(t)}{ib-t}\left(\theta\frac{ib-t}{ze^{-i\pi}}-\theta\frac{ib-t}{z}\right)+\frac{2}{z}\chi_2(t)\theta'\frac{ib-t}{z}\right\}dt$$

$$+\frac{\alpha}{2i\pi}\int_{q+a}^{-p+a}\frac{\chi_1(t)}{t-a}\left(\theta\frac{t-a}{z}-\theta\frac{t-a}{ze^{i\pi}}\right)dt-\frac{\alpha}{2i\pi}\int_{-q-a}^{p-a}\frac{2}{z}\chi_2(t)\theta'\frac{t+a}{ze^{-i\pi}}\,dt$$

are equal to known functions at points within the oval and in particular at points on the paths of integration which are those described by $ib-t$ when t runs from p to q:

by $t+a$ when t runs from q to $pe^{i\pi}$;

by $t-a$ when t runs from $qe^{-i\pi}$ to p.

Thus the construction of $\chi(z)$ is made to depend on the solution of two integral equations for $\chi_1(z)$ and $\chi_2(z)$ in which the nuclei are regular functions on the whole path, so that the ordinary methods apply without special preparation.

A. ROSENBLATT (Kraków - Polonia)

SOPRA CERTI MOTI PERMANENTI DEI LIQUIDI VISCOSI INCOMPRESSIBILI

1. - In un lavoro recente [1]: *Sur certains mouvements plans stationnaires des liquides visqueux incompressibles*, ho studiato i movimenti piani permanenti di un liquido viscoso incompressibile nei quali la pressione che agisce sopra un elemento di una linea di flusso è normale a questa linea.

Lo sforzo è dato dalla formola

$$(2) \qquad \Phi_n = -p\vec{n} - \frac{2}{3}\mu\Theta\vec{n} + 2\mu\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} - \mu \operatorname{rot}\vec{v}\wedge\vec{n},$$

$\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n}$ essendo l'omografia della velocità $\vec{v}$.

Sia $\psi = C$ una linea di flusso (ψ funzione di Stokes), q il valore assoluto della velocità, u, v le componenti di $\vec{v}$ e l, m i coseni direttori della direzione positiva della linea di flusso

$$(2) \qquad l = \cos\alpha = \frac{u}{q}, \qquad m = \sin\alpha = \frac{v}{q}.$$

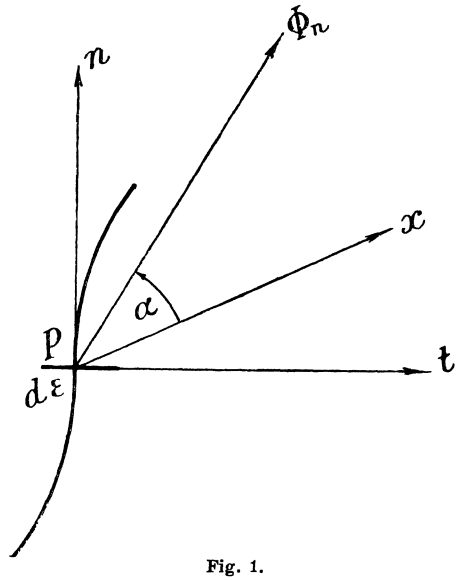


Fig. 1.

Consideriamo un elemento $d\varepsilon$ normale ad una linea di flusso $\vec{n}$ essendo la normale a questo elemento, abbiamo

$$2\mu\frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} - \mu \operatorname{rot}\vec{v}\wedge\vec{n} = \frac{d\vec{v}}{dP}\vec{n} + \operatorname{grad} q.$$

Lo sforzo *tangenziale* che agisce sopra questo elemento nella direzione t, che contiene colla direzione dell'asse degli x l'angolo $\alpha - \frac{\pi}{2}$, è dato dall'espressione

$$(3) \qquad \Phi_{nt} = \mu[2lm(u_x - v_y) + (m^2 - l^2)(u_y + v_x)],$$

[1] Buletinul Societâtii de Stinte din Cluj., T. IV, 1928.

$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ecc. Ponendo

(4) $$u = -\psi_y, \qquad v = \psi_x,$$

abbiamo dunque

(5) $$\Phi_{nt} = \mu[4\psi_x\psi_y\psi_{xy} + (\psi_y^2 - \psi_x^2)(\psi_{yy} - \psi_{xx})] \cdot \frac{1}{q^2}.$$

Troviamo così la seguente condizione necessaria e sufficiente affinchè Φ_n sia normale a $d\varepsilon$, affinchè dunque anche lo sforzo che agisce sopra un elemento ds della linea di flusso sia normale all'elemento:

(6) $$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\psi_x}{\psi_x^2 + \psi_y^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\psi_y}{\psi_x^2 + \psi_y^2} = 0.$$

2. - Ho dato il significato *geometrico* di questa condizione, supposta soddisfatta nel tutto il fluido. Ponendo

$$\frac{\psi_x}{\psi_x^2 + \psi_y^2} = \varphi_y, \qquad \frac{\psi_y}{\psi_x^2 + \psi_y^2} = -\varphi_x,$$

abbiamo

(7) $$\psi_x\varphi_y - \psi_y\varphi_x = 1.$$

La trasformazione delle x, y nelle ψ, φ *conserva le aree.*

Introducendo le funzioni

$$x(\psi, \varphi), \qquad y(\psi, \varphi)$$

e le espressioni fondamentali

(8) $$E = x_\psi^2 + y_\psi^2, \qquad G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2, \qquad F = x_\psi x_\varphi + y_\psi y_\varphi$$

abbiamo

(9) $$E = G = 1, \qquad F = 0.$$

ψ soddisfa, oltre alla (6), alla condizione di compatibilità

(10) $$\nu \Delta\Delta\psi - \frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(x, y)} = 0.$$

Si può introdurre G invece di ψ come funzione ignota. Essa soddisfa alla equazione di Gauss

(11) $$\frac{\partial^2 G}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\left(\frac{1}{G}\right) = 0.$$

Dall'equazione (10) troviamo l'equazione seguente per la funzione G:

(12) $$\frac{\partial}{\partial \psi}(\nu G G_{\psi\psi} - G_\varphi) + \nu \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{G_{\varphi\varphi}}{G}\right) = 0.$$

Non ho potuto integrare il sistema (11), (12), cioè trovare tutti i moti di cui si tratta.

3. - Supponiamo adesso la condizione di normalità soddisfatta lungo *certe* linee di flusso. Queste linee possono allora essere linee di contatto con un fluido perfetto.

Lo sforzo normale che agisce sopra un elemento ds della linea di flusso di normale $\vec{n}$ corrispondente all'angolo $\alpha+\frac{\pi}{2}$ è dato dalla formola

$$\Phi_{nn}=-p+\frac{2\mu}{q}\left[-\psi_{xy}(\psi_x^2-\psi_y^2)-\psi_x\psi_y(\psi_{yy}-\psi_{xx})\right], \tag{13}$$

oppure dalla formola

$$\Phi_{nn}=-p+2\mu q\frac{\partial\alpha}{\partial n}, \tag{14}$$

$\frac{\partial\alpha}{\partial n}$ significando la derivata di α nella direzione della normale $\vec{n}$.

La pressione (media) p è data dalla formola

$$d\left(\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2\right)=\Delta\psi\cdot d\psi-\nu\cdot\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}dx+\nu\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\cdot dy. \tag{15}$$

4. - Applichiamo questi risultati allo studio di *speciali* movimenti scoperti da Hamel e Oseen ed anche a certi movimenti nuovi.

Introducendo le coordinate *isometriche* φ, χ, abbiamo l'equazione di compatibilità

$$\begin{aligned}\nu[\Delta\Delta\psi+(a^2+b^2)\Delta\psi+2(a(\Delta\psi)_\varphi-b(\Delta\psi)_\chi)]=\\ =(\Delta\psi)_\chi\cdot\psi_\varphi-(\Delta\psi)_\varphi\cdot\psi_\chi-\Delta\psi(a\psi_\chi+b\psi_\varphi).\end{aligned} \tag{16}$$

Hamel ha studiato le soluzioni di forma

$$\psi=F(\varphi), \tag{17}$$

e Oseen più generalmente quelle di forma

$$\psi=F(\varphi)+C\chi. \tag{18}$$

a e b sono costanti ed abbiamo

$$\varphi=-\frac{2}{a^2+b^2}(a\log r+b\theta),\qquad \chi=\frac{2}{a^2+b^2}(b\log r-a\theta). \tag{19}$$

La funzione F di Hamel verifica l'equazione

$$\nu[F^{IV}+(a^2+b^2)F''+2aF''']=-bF'F'' \tag{20}$$

e quella di Oseen l'equazione

$$\nu\left[F^{IV}+\left(a^2+b^2+\frac{C}{\nu}\right)F''+\left(2a+\frac{C}{\nu}\right)F'''\right]=-bF'F''. \tag{21}$$

Si può naturalmente domandare se esistono soluzioni più generali della forma

$$\psi=\chi^m F_1(\varphi)+F(\varphi), \tag{22}$$

m intero $\geqq 1$. Si trova che nel caso $b\neq 0$ le *uniche soluzioni sono quelle di Oseen.* Ma nel caso speciale

$$b=0$$

esistono di più le soluzioni di forma

$$\psi=\chi F_1+F. \tag{23}$$

Le funzioni F, F_1 soddisfano al sistema d'equazioni

$$\begin{aligned}\nu(F_1^{IV}+a^2F_1''+2aF_1''')&=-F_1F_1'''-aF_1F_1''+F_1'F_1'',\\ \nu(F^{IV}+a^2F''+2aF''')&=-F_1F'''-aF_1F''+F'F_1''.\end{aligned} \tag{24}$$

Abbiamo

$$\varphi=-\frac{2}{a}\log r,\qquad \chi=-\frac{2}{a}\theta. \tag{25}$$

5. - Studiamo adesso i nostri movimenti speciali contenuti nei movimenti di Hamel e Oseen. La condizione di normalità (6) assume nelle coordinate isometriche la forma

$$\begin{aligned}\Delta\psi(\psi_\varphi^2+\psi_\chi^2)-\psi_\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}(\psi_\varphi^2+\psi_\chi^2)-\psi_\chi\frac{\partial}{\partial\chi}(\psi_\varphi^2+\psi_\chi^2)+\\ +(\psi_\varphi^2+\psi_\chi^2)(a\psi_\varphi-b\psi_\chi)=0.\end{aligned} \tag{26}$$

Per le soluzioni generali (23) abbiamo dunque la condizione

$$\begin{aligned}&[F_1^2+(\chi F_1'+F')^2][\chi F_1''+F'''-a(\chi F_1'+F')+bF_1]-\\ &-2(\chi F_1'+F')[F_1F_1'+(\chi F_1'+F')(\chi F_1''+F'')]-F_1[2(F'+\chi F_1')F_1']=0.\end{aligned} \tag{27}$$

Per soluzioni di Oseen la condizione è ($F_1\equiv c$):

$$(c^2+F'^2)(F'''-aF'+bc)-2F'^2F'''=0, \tag{28}$$

e pei movimenti di Hamel ($C=0$):

$$F'^2F'''+aF'^3=0,$$

dunque

$$F'''+aF''=0. \tag{29}$$

Supponiamo dapprima che la condizione di normalità sia soddisfatta nel *tutto il fluido.*

Nel caso di movimenti *non radiali*, $a\neq0$ deve essere

$$F=-\frac{c}{a}e^{-a\varphi}+c_1, \tag{30}$$

dunque l'equazione (20) dà

$$-\nu ab^2F'=abF'^2.$$

Deve essere

$$b=0.$$

Abbiamo

$$F=-\frac{c}{a}r^2+c_1. \tag{31}$$

Abbiamo dunque il

TEOREMA 1°: « I soli moti di Hamel *non radiali* soddisfacenti alla condizione, cioè nei quali la pressione è sempre normale alle linee di flusso, sono le *rotazioni rigide* ».

Studiamo adesso i movimenti *radiali*, $a=0$. È

$$F''=0,$$

dunque

$$F=-\frac{2A}{b}\theta+B \tag{32}$$

e la velocità radiale è

$$v_r=\frac{2A}{br}. \tag{33}$$

Dunque abbiamo il

TEOREMA 2°: « I soli movimenti *radiali* soddisfacenti alla condizione sono i movimenti potenziali indipendenti dall'angolo θ ».

6. - Occupiamoci adesso di movimenti con *linee libere di flusso.*

Essi sono gli unici movimenti che possono essere determinati dall'equazione nostra (23), perchè la velocità non è univocamente determinata ed anche moti con *pareti fisse* non sono possibili.

Calcoliamo la pressione p nelle coordinate φ, χ. Abbiamo

$$d\left(\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2\right)=\frac{4}{a^2+b^2}e^{a\varphi-b\chi}\left(\Delta'\psi\cdot d\psi+\nu\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\varphi}d\chi-\right.$$
$$\left.-\nu\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\chi}d\varphi+\nu a\Delta'\psi\cdot d\chi+\nu\cdot b\Delta'\psi\cdot d\varphi\right). \tag{34}$$

Nel caso di Hamel è

$$d\left(\frac{p}{\varrho}+\frac{1}{2}q^2\right)=\frac{4}{a^2+b^2}e^{a\varphi-b\chi}[(F'+\nu b)F''d\varphi+\nu(F'''+aF'')d\chi]. \tag{35}$$

Ponendo $F'=u$ abbiamo, integrando una volta l'equazione di Hamel

$$u''+2au'+u(a^2+b^2)+\frac{b}{2\nu}u^2-C=0, \tag{36}$$

e ponendo con Hamel

$$-\frac{2b}{a^2+b^2}=1, \qquad b=-1\pm\sqrt{1-a^2}, \qquad a<1$$
$$\beta^2=a^2+b^2=-2b=2\mp\sqrt{1-a^2}$$

abbiamo

$$u''+2au'+\beta^2u-\frac{\beta^2}{4\nu}u^2-C=0, \tag{37}$$

colla condizione

$$u'+au=0 \tag{38}$$

lungo le linee libere.

Nel caso di movimenti *radiali*, $a=0$, $b=-2$ è dunque

$$u''+4u-\frac{u^2}{\nu}-C=0. \tag{39}$$

La pressione p si trova uguale a

$$\frac{p}{\varrho}=-\frac{1}{2}q^2+\frac{e^{2\chi}}{2}(u^2-4\nu u+C\nu).$$

Le componenti radiale e tangenziale della velocità sono

$$v_r=\frac{2b}{a^2+b^2}\cdot\frac{F'}{r},\qquad v_\theta=-\frac{2a}{a^2+b^2}\frac{F'}{r},\tag{40}$$

dunque è, essendo $\chi=-\log r$,

$$\frac{p}{\varrho}=\frac{\nu}{r^2}\left(-2u+\frac{C}{2}\right).\tag{41}$$

Sulle linee d'efflusso è $u<0$, sulle linee d'influsso è $u>0$. Sulle prime è $\frac{\partial\alpha}{\partial n}=\frac{1}{r}$, sulle seconde $\frac{\partial\alpha}{\partial n}=-\frac{1}{r}$. La formola (14) dà dunque

$$\Phi_{nn}=-\frac{C\mu}{2r^2}+\text{const.}\tag{42}$$

Otteniamo così il

TEOREMA 3°: « Sulle linee di flusso la pressione è *normale* se è

$$u'=0\tag{43}$$

ed è *costante* se è

$$C=0,\tag{44}$$

dunque se è

$$u''=-4u+\frac{u^2}{\nu}\text{ »}.\tag{45}$$

7. - L'integrazione dell'equazione (39) di movimenti radiali è stata compiuta dallo Hamel. Egli trova

$$u'^2=\frac{2}{3\nu}\left(u^3-6\nu u^2+\frac{3C\nu}{2}u+C'\right)=\frac{2}{3\nu}(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3).$$

È

$$e_1+e_2+e_3=6\nu\tag{46}$$

e nel nostro caso

$$e_1e_2+e_2e_3+e_3e_1=0.\tag{47}$$

Ponendo

$$u=v+2\nu$$

abbiamo

$$u^3-6\nu u^2+C'=v^3-12v\nu^2+C'',$$

è dunque

$$g_2=48\nu^2,\tag{48}$$

ed il discriminante $D=27g_3^2-g_2^3$ è dato dalla formola

$$D=27g_3^2-48^3\nu^6.\tag{49}$$

Le linee libere corrispondono ai valori di u

$$u_i=e_i\qquad(i=1,2,3).\tag{50}$$

Dunque *solamente nel caso* $D<0$ di tutte le e_i reali esistono moti limitati da *due linee libere.*

Supponiamo

$$e_1\geqq e_2\geqq e_3;$$

essendo $e_1 \geqq 0$, u è contenuto fra i valori e_2, e_3 di u

$$e_3 \leqq u \leqq e_2. \tag{51}$$

Dalle (46), (47) otteniamo le espressioni seguenti delle e_2, e_3

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{1}{2}\left[6\nu - e_1 + \sqrt{-3(e_1-6\nu)(e_1+2\nu)}\right], \\ e_3 &= \frac{1}{2}\left[6\nu - e_1 - \sqrt{-3(e_1-6\nu)(e_1+2\nu)}\right], \end{aligned} \tag{52}$$

ed è

$$4\nu \leqq e_1 \leqq 6\nu; \tag{53}$$

$$0 \leqq e_2 \leqq \nu, \qquad -\nu \leqq e_3 \leqq 0. \tag{54}$$

Possiamo supporre $u = e_3$ per $\theta = 0$. Abbiamo dunque

$$\theta = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_3}^{u} \frac{du}{\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)}}. \tag{55}$$

Poniamo

$$u - e_3 = (e_2 - e_3)\sin^2\psi, \tag{56}$$

otterremo

$$\theta = \frac{\sqrt{6\nu}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}, \tag{57}$$

al valore $\psi = \frac{\pi}{2}$ corrisponde $u = e_2$, k è dato dalla formola

$$k = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{2\sqrt{-3(e_1-6\nu)(e_1+2\nu)}}{\sqrt{-3(e_1-6\nu)(e_1+2\nu) + 3e_1 - 6\nu}} < 1. \tag{58}$$

Il periodo 2ω è

$$2\omega = \frac{2\sqrt{6\nu}}{\sqrt{e_1 - e_3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}} \tag{59}$$

ed il suo valore *minimo* per $e_1 = 6\nu$ è π.

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA 4°: « Esistono moti radiali con due linee libere di flusso. Essi sono dati dalle formole (55) o (56) il periodo essendo dato dalla formola (59). Lungo queste linee libere è $u' = 0$ ».

8. - *Movimenti generali spiraliformi di Hamel.*

Studiamo infine i moti generali *spiraliformi*.

Per la pressione p troviamo dalla formola (35) l'espressione

$$\frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}q^2 = -\frac{4\nu}{b(a^2+b^2)} e^{a\varphi - b\chi}(F''' + aF'') + \text{const.}, \tag{60}$$

dunque è

$$p = -\frac{2\varrho F'^2}{(a^2+b^2)r^2} - \frac{4\mu}{b(a^2+b^2)} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \left[-\frac{bF'^2}{2\nu} - aF''' - (a^2+b^2)F' + C\right].$$

Si ottiene facilmente

$$\frac{\partial a}{\partial n} = \frac{8bF'^3}{q^3r^4(a^2+b^2)^2}, \tag{61}$$

dunque è

$$\Phi_{nn} = -\frac{4\mu}{b(a^2+b^2)} \cdot \frac{1}{r}[aF''' + (a^2+b^2)F' - C] + \frac{4\mu b}{(a^2+b^2)} \cdot \frac{F'}{r}.$$

Considerando la condizione (38) otteniamo dunque la formola

$$\Phi_{nn} = \frac{4\mu C}{b(a^2+b^2)\cdot r^2} + \text{const.} \tag{62}$$

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA 5°: « Anche nel caso generale di moti spiraliformi, la condizione

$$C = 0 \tag{44}$$

è necessaria per l'esistenza di linee libere di flusso ».

Per dimostrare rigorosamente l'esistenza di moti siffatti pei *piccoli* valori di a si può servirsi del teorema di Picard-Poincaré sopra la dipendenza delle soluzioni delle equazioni differenziali dai parametri. Abbiamo l'equazione

$$u'' = -2au' - u(2+2\sqrt{1-a^2}) + \frac{u^2}{4\nu}(2+2\sqrt{1-a^2}). \tag{63}$$

Questa equazione per $a=0$ possiede la soluzione olomorfa u^0 di periodo $2\omega^0$.

Poniamo

$$u - u^0 = U, \tag{64}$$

otterremo l'equazione

$$U'' = -4U - 2aU' + \frac{U^2}{\nu} + \frac{2u^0U}{\nu} + a^2\varphi(u^0, a^2), \tag{65}$$

nella quale φ è funzione olomorfa di u^0, a^2 pei piccoli valori di a.

Le condizioni ai limiti sono:

Per u^0: $\theta=0$, $u'^0=0$, $u^0=e_3$,
$\theta=2\omega_0$, $u'^0=0$, $u^0=e_3$.

Per u: $\theta=0$, $u'+au=0$,
$\theta=2\omega$, $u'+au=0$, $u(2\omega)=u(0)$,

Abbiamo il *teorema di Picard-Poincaré*:

« La funzione U soluzione della (65) è sviluppabile in una serie di potenze di

$$a, \quad \alpha, \quad \alpha',$$

essendo

$$U(0)=\alpha, \qquad U'(0)=\alpha',$$

con coefficienti funzioni olomorfe di θ in un intervallo finito qualunque:

$$U = A_1a + A_2\alpha + A_3\alpha' + \ldots, \tag{66}$$

pei piccoli valori di a, α, α' ».

Poniamo

$$u=u^0+A_1\alpha+\ldots\ldots=\varphi(\theta;\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha'). \tag{67}$$

Cerchiamo soluzioni *periodiche* di (63) col periodo

$$2\omega=2\omega_0+2\Omega,$$

Ω essendo piccolo,

$$\begin{aligned}&\varphi(2\omega^0+2\Omega,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')-\varphi(0,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')=0,\\&\varphi'(2\omega^0+2\Omega,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')-\varphi'(0,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')=0,\end{aligned} \tag{68}$$

e la condizione

$$\varphi'(0,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')+\alpha\varphi(0,\ \alpha,\ \alpha,\ \alpha')=0. \tag{69}$$

La condizione (69) è

$$A_1'(0)\alpha+A_2'(0)\alpha+A_3'(0)\alpha'+\alpha e_3+f_2(\alpha,\ \alpha,\ \alpha')=0, \tag{70}$$

e le condizioni di periodicità sono

$$\begin{aligned}u'^0(2\omega^0)\cdot 2\Omega&+[A_1(2\omega^0)-A_1(0)]\alpha+[A_2(2\omega^0)-A_2(0)]\alpha+\\&+[A_3(2\omega^0)-A_3(0)]\alpha'+\varphi_2(\alpha,\ \alpha,\ \alpha',\ \Omega)=0,\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}\alpha''(2\omega^0)\cdot 2\Omega&+[A_1'(2\omega^0)-A_1'(0)]\alpha+[A_2'(2\omega^0)-A_2'(0)]\alpha+\\&+[A_3'(2\omega^0)-A_3'(0)]\alpha'+\psi_2(\alpha,\ \alpha,\ \alpha',\ \Omega)=0.\end{aligned} \tag{72}$$

Dalle equazioni (70)-(72) si calcola Ω, α, α' come funzioni di α per valori piccoli di α. Il determinante è

$$D=\begin{vmatrix}0, & A_2'(0), & A_3'(0)\\ 0, & A_2(2\omega^0)-A_2(0), & A_3(2\omega^0)-A_3(0)\\ u''(2\omega^0), & A_2'(2\omega^0)-A_2'(0), & A_3'(2\omega^0)-A_3'(0)\end{vmatrix}. \tag{73}$$

Dunque se è

$$\begin{vmatrix}A_2'(0), & A_3'(0)\\ A_2(2\omega^0)-A_2(0), & A_3(2\omega^0)-A_3(0)\end{vmatrix}\neq 0$$

e se è $u(0)\neq 0$, Ω, α, α' saranno funzioni *olomorfe* di α.

Possiamo dunque enunciare il

TEOREMA 6°: « In generale pei piccoli valori di α esistono moti spiraliformi periodici tra linee libere di flusso ».

D. RIABOUCHINSKY (Paris - Francia)

HYDRODYNAMIQUES NON LAGRANGIENNES

1. - Quand on pense à la grande influence que les principes, placés par GALILÉE, NEWTON et d'ALEMBERT à la base de la Mécanique, ont exercé sur l'orientation et le développement de l'Analyse et de la Physique matémathique, il est naturel de se demander si, en modifiant de telle ou telle autre façon les postulats de la Dynamique, mais en conservant la Géométrie euclidienne, on ne serait pas conduit à quelque généralisation intéressante.

Imaginons, par exemple, que GALILÉE eut trouvé qu'en appliquant une force à un corps donné on obtient des accélérations différentes selon que la force est longitudinale ou transversale, et essayons de nous représenter quelques conséquences de cette hypothèse.

EULER et LAGRANGE auraient écrit dans ce cas les équations du mouvement d'un liquide parfait dans un plan vertical sous la forme

$$\frac{\partial(U-p)}{\partial x}=\varrho_x\frac{du}{dt},\qquad \frac{\partial(U-p)}{\partial y}=\varepsilon\varrho_x\frac{dv}{dt},\qquad \varepsilon=\frac{\varrho_y}{\varrho_x}, \tag{1}$$

où ε est le rapport des masses transversales et longitudinales de l'une quelconque des particules fluides, tandis que la pression p, le potentiel des forces extérieures U et les composantes de l'accélération conservent leur signification usuelle. En éliminant par différentiation $(U-p)$ et en tenant compte de l'équation de continuité on trouve comme condition d'intégrabilité des équations (1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0. \tag{2}$$

Ce n'est donc plus le tourbillon de HELMHOLTZ qui est un invariant du mouvement plan considéré, mais le tourbillon

$$\zeta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}\right),\qquad \varepsilon=+1. \tag{3}$$

Si le fluide commence à se mouvoir en partant du repos, ce mouvement sera, en raison de (2), rotationnel dans le sens de CAUCHY et la théorie des fonctions de la variable complexe $x+\sqrt{-1}y$ ne pourra plus être appliquée.

Dans la décomposition du mouvement d'une particule il sera utile de mettre en évidence le tourbillon (3) et la discussion entre HELMHOLTZ et BERTRAND apparaît alors sous un jour nouveau.

2. - La notion de force appliquée à une masse matérielle positive a pour origine la sensation de l'effort musculaire qu'il faut dépenser pour soutenir un corps pesant ou pour communiquer à ce dernier un mouvement transversal.

Pour rattacher à une sensation l'idée d'une force appliquée à une masse négative, je mentionnerai quelques perceptions bien familières de la conscience pouvant servir d'exemples de durées vécues de BERGSON [1].

Lorsqu'on est absorbé par un travail et qu'on a un temps très limité pour le faire — le temps paraît s'écouler d'autant plus vite que le désir de le voir s'écouler moins rapidement est fort. D'autre part lorsqu'on attend avec impatience un événement quelconque et qu'on voudrait forcer le temps à s'écouler plus rapidement — c'est alors que chaque minute parait particulièrement longue.

Ces exemples suggèrent l'idée que l'effort du désir ou de la volonté peut déterminer une accélération positive ou négative $\frac{d^2\tau}{dt^2}$ sur l'axe du temps local τ d'un point conscient, en agissant comme une force appliquée à une masse négative — le coefficient dont est affectée cette accélération.

3. - Si l'on applique à une expression de la forme

$$\varphi + i_\varepsilon \psi = f(x + i_\varepsilon y), \qquad i_\varepsilon^2 = -\varepsilon, \tag{4}$$

où ε est un nombre réel quelconque, le raisonnement conduisant aux conditions de monogénité dans le cas particulier $i_1^2 = i^2 = -1$, et si l'on considère les fonctions $\psi(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ respectivement comme fonction de courant et potentiel de vitesse généralisé, on obtient en tenant compte de l'indétermination du signe de i_ε, les relations

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{5}$$

Les fonctions $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont, par conséquent, deux solutions d'une même équation,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Ces dernières expressions se confondent, dans le mouvement déterminé par les équations (1), avec l'équation de continuité et la condition que le tourbillon (3) est nul. La théorie des fonctions d'une variable complexe $x + i_\varepsilon y$ s'adapte donc complétement aux hydrodynamiques non lagrangiennes caractérisées par les équations (1) [2].

---

[1] É. PICARD: *La théorie de la relativité,* p. 3, Paris, 1922.

[2] Il est intéressant de remarquer que l'hydrodynamique non lagrangienne correspondant au cas particulier $\varepsilon = 0$, trouve une application dans la théorie approchée des ondes longues. En effet dans cette théorie la composante de la vitesse ne dépendant pas de y, le mouvement peut être caractérisé par les équations (5), si l'on pose dans ces dernières $\varepsilon = 0$, et par conséquent, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0$. On admet d'autre part que la pression, en tout point et à chaque instant,

4. - Nous ferons quelques remarques préliminaires sur les coordonnées polaires que nous devrons utiliser.

Les coordonnées d'un point P de la courbe

$$|x^2+\varepsilon y^2|=1 \tag{7}$$

qui, selon que ε est positif, nul ou négatif, est une ellipse, deux droites parallèles ou l'ensemble des deux hyperboles conjuguées, peuvent être exprimées par les formules

$$x=\varrho\cos_\varepsilon\theta, \qquad y=\varrho\sin_\varepsilon\theta \tag{8}$$

où

$$\cos_\varepsilon\theta=\frac{e^{i_\varepsilon\theta}+e^{-i_\varepsilon\theta}}{2}=\cos\sqrt{\varepsilon}\theta, \qquad \sin_\varepsilon\theta=\frac{e^{i_\varepsilon\theta}-e^{-i_\varepsilon\theta}}{2i_\varepsilon}=\frac{\sin\sqrt{\varepsilon}\theta}{\sqrt{\varepsilon}} \tag{9}$$

$$\varrho=\sqrt{x^2+\varepsilon y^2}=i\sqrt{-(x^2+\varepsilon y^2)}, \qquad i=i_1=\sqrt{-1}. \tag{10}$$

Nous adopterons cet algorithme pour donner plus de symétrie aux formules. On a évidemment

$$\cos_1\theta=\cos\theta, \qquad \cos_{-1}\theta=\operatorname{ch}\theta.$$

Nous appellerons ϱ le rayon vecteur ε, ou le module ε du point P ou la distance ε du point P au point O, et θ l'amplitude ε du point P. $\frac{\theta}{2}$ est l'aire du secteur elliptique, « parabolique » ou hyperbolique comptée depuis l'axe Ox (fig. 1).

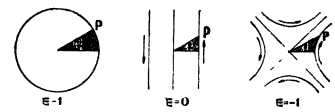


Fig. 1.

Dans le cas elliptique on obtient tous les points de la courbe (7) en faisant varier θ de O à $\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$; au contraire, dans le cas parabolique et hyperbolique, en faisant varier θ de $-\infty$ à $+\infty$, on obtient que les points de la courbe (7) disposés respectivement à droite de l'axe des y et dans le premier secteur.

Pour définir les autres points des courbes (7) par les équations (8) il faut donner à θ des valeurs transillimitées ou transfinies; de pareils nombres peuvent

---

est égale à la pression hydrostatique; cette hypothèse est équivalente, dans ce cas, à la condition $\varrho_y=0$.

La théorie des fonctions vérifiant les équations (5) trouve aussi des applications dans la théorie des mouvements et de la résistance d'un fluide visqueux (Comptes rendus, t, 179, 1924, p. 1133 et t. 186, 1928, p. 1278).

La théorie des fonctions des variables complexes à deux unités a fait l'objet de recherches de A. P. KOTELNIKOFF (*Calcul hélicoïdal,* Kazan, 1895, *Théorie projective des vecteurs,* Kazan, 1899), E. STUDY (*Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903) et d'autres savants (E. STUDY et E. CARTAN: *Nombres complexes.* Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, 1, 5), surtout en vue de son application à la théorie des biquarténions de CLIFFORT et du calcul hélicoïdal, mais le schema hydrodynamique, grâce aux analogies qu'il suggère, est particulièrement simple et instructif, et conduit à des résultats nouveaux.

être raisonnablement appliqués dans ce cas, car leur partie transfinie ne joue dans les calculs qu'un rôle purement symbolique (1).

5. - Admettons que, dans le cas hyperbolique, les directions positives dans les secteurs I, II, III, et IV (fig. 2) sont prises sur les courbes dans le sens de la flèche et désignons par $\frac{\theta_1}{2}$, $\frac{\theta_2}{2}$, $\frac{\theta_3}{2}$ et $\frac{\theta_4}{2}$ les aires des secteurs marqués de hachures.

En désignant les coordonnées réelles des points P, Q, R, S respectivement

$$(x_1, y_1), \qquad (x_2, y_2), \qquad (x_3, y_3), \qquad (x_4, y_4)$$

on peut écrire, en tenant compte des propriétés des diamètres conjugués,

$$\begin{aligned} x_1 &= \varrho \cos_\varepsilon \theta_1, & y_1 &= \varrho \sin_\varepsilon \theta_1 \\ x_2 &= i\varrho i_\varepsilon \sin_\varepsilon \theta_2, & y_2 &= -\frac{i\varrho}{i_\varepsilon} \cos_\varepsilon \theta_2 \\ x_3 &= -\varrho \cos_\varepsilon \theta_3, & y_3 &= -\varrho \sin_\varepsilon \theta_3 \\ x_4 &= i\varrho i_\varepsilon \sin_\varepsilon \theta_4, & y_4 &= \frac{i\varrho}{i_\varepsilon} \cos_\varepsilon \theta_4 \end{aligned} \tag{11}$$

où $i_\varepsilon^2 = -\varepsilon > 0$. En raison des formules (9), on a

$$\cos_\varepsilon \theta + i_\varepsilon \sin_\varepsilon \theta = e^{i_\varepsilon \theta} \tag{12}$$

et, en transformant les expressions (11) on trouve

$$x_1 + i_\varepsilon y_1 = \varrho e^{i_\varepsilon \theta_1}, \quad x_2 + i_\varepsilon y_2 = -i\varrho e^{i_\varepsilon \theta_2}, \quad x_3 + i_\varepsilon y_3 = -\varrho e^{i_\varepsilon \theta_3}, \quad x_4 + i_\varepsilon y_4 = i\varrho e^{i_\varepsilon \theta_4}. \tag{13}$$

On peut ramener les quatre expressions (13) à une seule formule

$$x + i_\varepsilon y = \varrho e^{i_\varepsilon \theta} \tag{14}$$

en raisonnant comme suit. Désignons par $2\varkappa$ la surface indéfinie limitée par les quatre branches de la courbe $|x^2 + \varepsilon y^2| = 1$, et par $\frac{\theta}{2}$ l'aire de la surface balayée par le rayon vecteur d'un point dont la position initiale était $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, et qui arriverait à la position x, y en décrivant, dans la direction positive, les branches de la courbe (7).

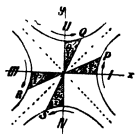


Fig. 2.

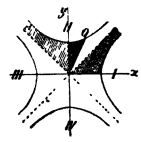


Fig. 3.

Si l'on compare les formules (13) et (14), on voit que dans le secteur I, $\theta = \theta_1$; la première des formules (13) coincide donc avec la formule (14). Il n'en est plus de même dans le secteur II. En considérant la fig. 3, il est naturel de poser, pour un point Q quelconque situé dans le second secteur,

$$\theta = \theta_2 + \frac{\varkappa}{2},$$

(1) *Calcul des valeurs absolues.* Copenhague, 1919, pp. 97-119.

mais pour pouvoir écrire

$$-i\varrho e^{i_\varepsilon\theta_2}=\varrho e^{i_\varepsilon\theta}$$

il faut admettre que, soit

$$e^{i_\varepsilon\frac{\varkappa}{2}}=-i$$

soit $\varrho=0$.

En raisonnant d'une façon analogue, lorsque le point que l'on considère est placé dans le troisième ou le quatrième secteur, et en excluant les points dont le modul est nul, on obtient les formules

$$(15)\qquad e^{i_\varepsilon\frac{\varkappa}{2}}=-i,\qquad e^{i_\varepsilon\varkappa}=-1,\qquad e^{i_\varepsilon\frac{3}{2}\varkappa}=i,\qquad e^{i_\varepsilon 2\varkappa}=1.$$

En comparant ces relations aux formules d'Euler, on a, pour $\varrho\neq 0$,

$$i_\varepsilon\varkappa=-i\pi$$

En appliquant un raisonnement analogue au cas parabolique, on aboutit à la relation

$$i_0\varkappa=\pm i\pi$$

où il faut prendre le signe + ou le signe − selon qu'on considère le cas parabolique comme limite du cas elliptique ou comme limite du cas hyperbolique.

Donc, dans tous les trois cas, on a

$$\varkappa=\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$$

pourvu que $\varrho\neq 0$.

On parvient ainsi à interpréter géométriquement les nombres transfinis comme périodes imaginaires de l'exponentielle et à définir par cela même certaines propriétés de ces nombres.

6. - La règle de multiplication des nombres complexes $z=x+i_\varepsilon y$ est donnée par la formule

$$(16)\qquad z_1\cdot z_2=(x_1+i_\varepsilon y_1)(x_2+i_\varepsilon y_2)=(x_1x_2-\varepsilon y_1y_2)+i_\varepsilon(x_1y_2+x_2y_1).$$

Les formules (8)-(15) permettent de vérifier que cette règle est équivalente à la suivante

$$(17)\qquad z_1\cdot z_2=(\varrho_1e^{i_\varepsilon\theta_1})(\varrho_2e^{i_\varepsilon\theta_2})=\varrho_1\varrho_2e^{i_\varepsilon(\theta_1+\theta_2)}$$

pourvu qu'aucun des deux modules ϱ_1 et ϱ_2 ne soit nul, c'est-à-dire pourvu qu'aucun des deux points P_1 ou P_2, dont les affixes sont z_1 et z_2, ne soit situé sur les asymptotes dans le cas hyperbolique ou sur l'axe imaginaire dans le cas parabolique; dans les cas exclus l'amplitude du produit prend une forme indéterminée, mais le module du produit est nécessairement nul, comme les équations (16) permettent de le démontrer.

En appliquant la formule (17) il est indispensable, pour interpréter le résultat dans le cas hyperbolique, de ramener le produit à la forme canonique

$$\varrho_1\varrho_2e^{i_\varepsilon(\theta_1+\theta_2)}=Re^{i_\varepsilon\Omega}$$

Par exemple, si les points P_1 et P_2 sont disposés tous les deux dans le second secteur, on aura

$$\varrho_1 = i\sqrt{-(x_1^2+\varepsilon y_1^2)}, \qquad \varrho_2 = i\sqrt{-(x_2^2+\varepsilon y_2^2)}$$
$$\theta_1 = \frac{\varkappa}{2}+\theta_1', \qquad \theta_2 = \frac{\varkappa}{2}+\theta_2'$$

et, par conséquent, en raison des formules (15),

$$\Omega = 2\varkappa+\theta_1'+\theta_2'.$$

L'affixe du produit déterminera un point situé dans le premier secteur. Il est facile de démontrer qu'il est toujours ainsi lorsque z_1 et z_2 appartiennent à un même secteur. Il en résulte que les carrés de tous les nombres $x+iy$, $(\varepsilon<0)$, appartiennent au premier secteur et que l'équation

$$\sqrt{z} = A+i_\varepsilon B$$

admet 4 racines ou n'en admet aucune (appartenant au champ des variables $x+i_\varepsilon y$; x, y et i_ε^2 étant des nombres réels), selon que le point $A+i_\varepsilon B$ est situé dans le premier ou dans l'un des trois autres secteurs.

7. - Si l'on pose

$$w = \varphi+i_\varepsilon\psi = u_0(z+c^2z^{-1}), \qquad z = x+i_\varepsilon y, \tag{18}$$

on a, en égalant les parties réelles et les coéfficients de i_ε,

$$\varphi = u_0\left(1+\frac{c^2}{x^2+\varepsilon y^2}\right)x, \qquad \psi = u_0\left(1-\frac{c^2}{x^2+\varepsilon y^2}\right)y, \tag{19}$$

et l'on obtient ainsi le potentiel des vitesses généralisé et la fonction de courant d'un mouvement rotationnel, dont la vitesse à l'infini est u_0, en présence d'un obstacle qui, selon que ε est positif, nul ou négatif, est une ellipse, deux droites parallèles ou une hyperbole.

Considérons la fonction

$$w = \varphi+i_\varepsilon\psi = \log z = \log\varrho+i_\varepsilon\theta. \tag{20}$$

Dans le cas hyperbolique, avant d'égaler les parties réelles et les coéfficents de i_ε dans l'expression (20), il faut, conformément à la remarque faite dans le numéro précédent, ramener l'expression (20) à la forme canonique. Si le point z est situé, par exemple, dans le second secteur on a

$$\log\varrho = \log\sqrt{x^2+\varepsilon y^2} = \log\sqrt{-(x^2+\varepsilon y^2)}+i\frac{\pi}{2}$$
$$\log e^{i_\varepsilon\theta} = \log e^{i_\varepsilon\theta_2}+i_\varepsilon\frac{\varkappa}{2} = i_\varepsilon\theta_2-i\frac{\pi}{2}$$

et, par conséquent,

$$\varphi = \log\sqrt{-(x^2+\varepsilon y^2)}, \qquad \psi = \theta_2.$$

En superposant au mouvement (18) le mouvement

$$w_1 = \varphi_1 + i_\varepsilon \psi_1 = i_\varepsilon K \log z,$$

où K est la constante cyclique, on obtient un mouvement ciclique rotationnel autour de l'obstacle.

8. - En généralisant la théorie des fonctions des variables complexes $x + i_\varepsilon y$, on peut obtenir, par un procédé analogue des mouvements rotationnels d'un fluide incompressible, de vitesse u_0 à l'infini, contournant un obstacle de forme quelconque. Je m'arrêterai très brièvement sur cette question et en ne considérant que son côté cinématique.

Supposons que le nombre complexe i_ε ne soit pas une constante mais une fonction de x et y

$$i_\varepsilon = \pm\sqrt{-\varepsilon(x, y)}.$$

En admettant que les puissances et les produits de i_ε et de ses dérivées sont réels ou imaginaire selon que la puissance n de $(\pm)^n$ est paire ou impaire on peut ramener le résultat de toute opération à la forme $A + i_\varepsilon B$. On trouve ainsi, en posant

$$\varphi + i_\varepsilon \psi = f(x + i_\varepsilon y),$$

et en appliquant le même raisonnement que dans le n.° 3, comme composantes u et v de la vitesse du fluide:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = p \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r\psi$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = p' \frac{\partial \varphi}{\partial x} + q' \frac{\partial \varphi}{\partial y} + r'\psi$$

où

$$p = 1 + \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \qquad q = -\frac{y}{2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \qquad r = -\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}$$

$$p' = -\frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}, \qquad q' = \frac{1 - \frac{y^2}{4\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}}{\varepsilon + \frac{y}{2}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}}, \qquad r' = \frac{1}{2\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}.$$

On constate que $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des solutions des équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{D(i_\varepsilon \psi, i_\varepsilon y)}{D(x, y)}, \qquad \frac{\partial i_\varepsilon \psi}{\partial y} = \frac{D(\varphi, i_\varepsilon y)}{D(x, y)},$$

où les fonctions conjuguées $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ peuvent être facilement séparées.

Les équations (19) deviennent dans ce cas

$$\varphi = u_0\left(1 + \frac{c^2}{x^2 + \varepsilon(x, y)y^2}\right)x, \qquad \psi = u_0\left(1 - \frac{c^2}{x^2 + \varepsilon(x, y)y^2}\right)y$$

et on peut choisir la fonction $\varepsilon(x, y)$ de façon à obtenir le profil voulu. Une généralisation ultérieure de cette théorie conduirait à considérer des nombres complexes de la forme

$$i_\varepsilon = \pm\sqrt{-\varepsilon(x, y)} + \varepsilon_1(x, y).$$

9. - Pour se faire une idée des réseaux formes par les courbes $\varphi = c$ et $\psi = c'$,

$$\varphi + i_\varepsilon \psi = f(x + i_\varepsilon y), \qquad i_\varepsilon^2 = -\varepsilon,$$

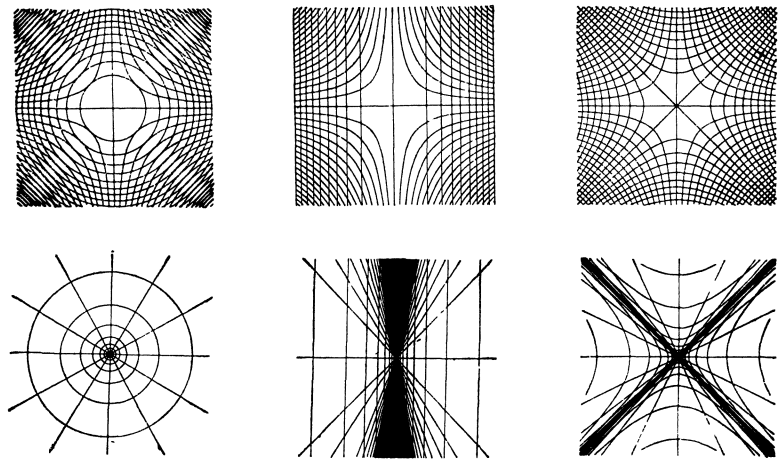


Fig. 4.

lorsque le paramètre ε est positif, nul ou négatif, on pourra comparer les courbes de la fig. 4 correspondant respectivement aux fonctions

$$\varphi + i_\varepsilon \psi = i_\varepsilon (x + i_\varepsilon y)^2$$

et

$$\varphi + i_\varepsilon \psi = \log (x + i_\varepsilon y).$$

Les trois réseaux de chaque série ont été tracés pour les valeurs 1, 0, -1, du paramètre ε.

Soient O (fig. 5) les points d'intersections des équipotentielles $\varphi = c$ avec les lignes de courant $\psi = c'$ correspondant respectivement à des mouvements fluides elliptiquement ($\varepsilon > 0$), paraboliquement ($\varepsilon = 0$) et hyperboliquement ($\varepsilon < 0$) irrotationnels et, en prenant les points O comme origines, traçons les trois courbes respectives $|x^2 + \varepsilon y^2| = 1$.

Les relations

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

montrent que les coefficients angulaires m et m' des tangentes $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ aux courbes c et c' sont liés par la relation

$$m \cdot m' = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

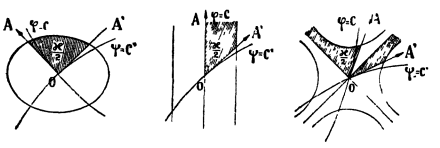


Fig. 5.

Ces tangentes se confondent donc avec les diamètres conjugués des coniques correspondantes. Il en résulte que les angles elliptiques, paraboliques ou hyperboliques, formés par les tangentes $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$ (fig. 5), sont toujours égaux à $\frac{\pi}{2}$ et l'on peut dire, par conséquent, que les deux familles de courbes $\varphi = c$ et $\psi = c'$ forment des réseaux elliptiquement, paraboliquement ou hyperboliquement orthogonaux.

Dans le cas parabolique l'angle circulaire formé par la tangente $\overline{OA}$ avec l'axe imaginaire est toujours infiniment petit, tandis que l'angle circulaire formé par la tangente $\overline{OA'}$ avec l'axe réel peut prende une valeur quelconque.

On peut vérifier ces propriétés des réseaux sur les figures 4.

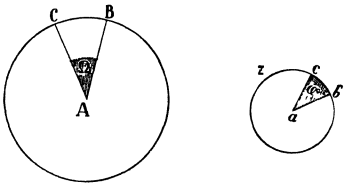


Fig. 6.

10. - En appliquant le raisonnement qu'on utilise dans la théorie des fonctions des nombres complexes $x + \sqrt{-1}y$, on démontre aisément que la transformation

$$Z = f(z), \qquad Z = X + i_\varepsilon Y, \qquad z = x + i_\varepsilon y,$$

conduit à la relation

$$dX^2 + \varepsilon dY^2 = \lambda(dx^2 + \varepsilon dy^2),$$

où λ ne dépend pas des différentielles, et que les angles (elliptiques, paraboliques ou hyperboliques) sont conservés. Donc, si l'on prend dans le plan de la variable z une conique de diamètre infiniment petit ayant le point a pour centre (fig. 6 et 7), la transformation (21) lui fait correspondre dans le plan de la variable Z une conique homothétique et les angles généralisés, formés par les rayons oa et ob dans le plan z et par les rayons correspondants OA et OB dans le plan Z, sont égaux.

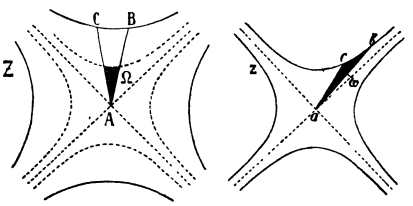


Fig. 7.

Cette transformation peut être évidemment considérée comme une représentation conforme généralisée d'un plan sur un plan.

En transformant ainsi la formule (18), qui détermine le mouvement fluide

autour d'un obstacle dont le profil est une conique, on peut obtenir d'autres profils, tout en conservant le caractère rotationnel propre à chaque mouvement (1).

---

(1) Les coordonnées polaires spéciales, dont nous avons établi les propriétés, peuvent être aussi appliquées à la géométrie dans l'espace, car on peut toujours tracer sur une quadrique $|x^2 + y^2 + \varepsilon z^2| = 1$ des triangles curvilignes correspondant aux triangles curvilignes sur la sphère formés par les arcs de deux grands cercles et par l'arc d'un cercle obtenu en coupant la sphère par un plan parallèle au diamètre commun des deux grands cercles. En tenant compte de cette remarqne on peut étudier la représentation conforme, elliptique, parabolique ou hyperbolique, d'un plan sur une surface ou de deux surfaces l'une sur l'autre, et l'on obtient des formules qui, dans le cas particulier $\varepsilon = 1$, se réduisent à celles de Beltrami. Dans le cas hyperbolique ces surfaces ne peuvent pas être quelconques car les angles γ de leurs normales avec l'axe OZ doivent satisfaire à l'inégalité $\cos^2 \lambda < \frac{|\varepsilon|}{1 + |\varepsilon|}$.

N. GUNTHER (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR LE MOUVEMENT D'UN LIQUIDE, ENFERMÉ DANS UN VASE QUI SE DEPLACE (1)

1. - Nous supposont, que la frontière (S_t) du domaine (R_t), qui renferme le liquide et qui se deplace, satisfait aux conditions:

a) la sphère d'un rayon déterminé d construite autour de chaque point M sur (S_t) jouit de la propriété: les droites, parallèles à la normale à (S_t) en M coupent la surface (S_t) dans l'intérieur de la sphère seulement en un point; on peut, en consequence, à l'équation de la surface (S_t) dans l'intérieur de la sphère donner la forme $\zeta = \mathcal{F}(\xi, \eta, t)$, ζ étant la direction de la normale à (S_t) en M;

b) la fonction $\mathcal{F}(\xi, \eta, t)$ a les dérivées de trois premiers ordres par rapport à ξ, η, t.

Pour déterminer le mouvement d'un liquide dans le domaine (R_t) nous donnons les valeurs initiales des composantes du tourbillon, $\omega_1^{(0)}$, $\omega_2^{(0)}$, $\omega_3^{(0)}$, en supposant qu'elles ont les dérivées par rapport aux coordonnées du point (q_1, q_2, q_3) dans (R_0) et que la divergence de cette valeur initiale du tourbillon est égale à zéro.

Le problème consiste dans la détermination de la vitesse, dont les composantes verifient le système

(*a*) $$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial x_i}, \qquad \pi = \frac{1}{\varrho} p + \psi, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

où ψ est le potentiel des forces, ϱ la densité, qui est constante, et p la pression, et satisfont à la condition

(*b*) $$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0.$$

Les u_1, u_2, u_3, p doivent être continues dans (R_t) et satisfaire à la condition limite

(*a*) $$u_1 \cos(Nx_1) + u_2 \cos(Nx_2) + u_3 \cos(Nx_3) = W_n,$$

qui dit, que la projection de la vitesse du liquide dans le point M sur (S_t) sur la normale en M est égale à la projection de la vitesse du point M de la surface (S_t) sur la même normale, et à la condition initiale

(β) $$(\omega_1)_{t=0} = \omega_1^{(0)}, \qquad (\omega_2)_{t=0} = \omega_2^{(0)}, \qquad (\omega_3)_{t=0} = \omega_3^{(0)},$$

(1) L'exposé d'un mémoire, qui paraît par parties en langue russe dans les Bulletins de l'Académie des Sciences de U. R. S. S. depuis l'an 1927.

qui dit que la valeur initiale du tourbillon coincide avec la valeur du vecteur $(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \omega_3^{(0)})$.

La condition de la continuité de la pression p est surtout essentielle, quand le domaine (R_t) est à connexion multiple; dans ce cas le potentiel ψ peut n'être pas continu dans (R_t). Dans ce cas le problème posé n'est pas déterminé, mais admet une infinité des solutions; pour le faire déterminé il faut, au lieu de la valeur initiale du tourbillon, donner la valeur initiale de la vitesse.

Pour la solution du problème on cherche la vitesse, dont les composantes verifient les conditions (b), (a) et (β) et les équations de Helmholz:

$$(a') \qquad \frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\omega_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2}\omega_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3}\omega_3, \qquad (i=1, 2, 3).$$

2. - La solution est fondé sur les formules, qui donnent les composantes de la vitesse au moyen des composantes du tourbillon dans le cas d'un domaine fermé [1]; la première de ces formules est:

$$(B) \quad u_1 = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{(R_t)}\frac{\omega_3 d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x_3}\int_{(R_t)}\frac{\omega_2 d\tau}{r} + \int_{(S_t)}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta_2}\cos(Nx_3) - \frac{\partial\vartheta}{\partial\zeta_3}\cos(Nx_2)\right)\frac{d\sigma}{r}\right\} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1};$$

dans cette formule ϑ est donné par la condition:

$$\int_{(S_t)}\vartheta\cos(rN)\frac{d\sigma}{r^2} = \int_{(S_t)}[\omega_1\cos(Nx_1) + \omega_2\cos(Nx_2) + \omega_3\cos(Nx_3)]\frac{d\sigma}{r}$$

et φ est une fonction, harmonique dans (R_t), qui est choisi de manière à vérifier la condition (a).

La formule (B) est valable même dans le cas, quand les composantes du tourbillon ω_1, ω_2, ω_3 n'ont pas des dérivées du premier ordre par rapport à x_1, x_2, x_3, en satisfaisant à la condition: pour chaque domaine, limité par la surface (σ):

$$\int_{(\sigma)}[\omega_1\cos(Nx_1) + \omega_2\cos(Nx_2) + \omega_3\cos(Nx_3)]d\sigma = 0.$$

La dernière circonstance à une grande importance pour la solution du problème, car elle permet de se passer avec les fonctions u_1, u_2, u_3 n'ayant pas les dérivées secondes.

Dans le cas d'un domaine à connexion multiple, la fonction φ n'est pas déterminée par la condition imposée. Si (Σ_1),.... (Σ_m) sont les coupures qui transforment le domaine (R_t) en un domaine simplement connexe, on peut à chaque fonction φ, répondant à la condition imposée, ajouter la somme $\theta^{(0)} - \theta$, où

$$\sum_{s=1}^{s=m} C(t_s)\int_{(\Sigma_s)}\cos(rN_s)\frac{d\sigma}{r^2} = \theta^{(0)}$$

---

[1] N. GUNTHER. C. R. de l'Académie de Sciences de U. R. S. S. Décembre, an 1925. — L. LICHTENSTEIN. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des lettres. Janvier, an 1926.

où N_s est la normale à (Σ_s) et θ est la fonction harmonique continue, choisie de manière qu'on aît sur (S_t): $\frac{d\theta}{dn} = \frac{d\theta^{(0)}}{dn}$.

Pour trouver φ dans le cas mentionné, il faut se profiter de la circonstance, que la continuité de la pression p n'est pas encore garantie par la continuité des u_1, u_2, u_3; pour l'assurer il faut convenablement choisir les coefficients $C_s(t)$ dans l'expression de φ.

3. - On trouve la solution du problème en appliquant la méthode des aproximations successives. Envisagons d'abord le cas d'un domaine simplement connexe.

Cherchons une fonction φ_0, harmonique dans (R_t) et répondant sur (S_t) à la condition $\frac{d\varphi_0}{dn} = W_n$ et formons les fonctions $u_i^{(0)} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_i}$. Ayant formé le système

$$\frac{dx_i^{(0)}}{dt} = u_i^{(0)}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, t), \qquad (i=1, 2, 3)$$

cherchons la solution $x_i^{(0)}(q_1, q_2, q_3, t)$, $(i=1, 2, 3)$, qui prend la valeur q_i, $(i=1, 2, 3)$ pour $t=0$, et, en résolvant le système

$$x_i = x_i^{(0)}(q_1, q_2, q_3, t), \qquad (i=1, 2, 3)$$

trouvons q_1, q_2, q_3 comme fonctions des x_1, x_2, x_3. Calculons, enfin,

$$\omega_i^{(1)} = \omega_1^{(0)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial q_1} + \omega_2^{(0)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial q_2} + \omega_3^{(0)} \frac{\partial x_i^{(0)}}{\partial q_3}$$

En usant les fonctions $\omega_1^{(1)}, \omega_2^{(1)}, \omega_3^{(1)}$ formons à l'aide des formules (B) les fonctions $u_i^{(1)}$, ayant en passant choisi convenablement la fonction φ_1, et recommençons le procédé en partant des fonctions $u_i^{(1)}$ $(i=1, 2, 3)$.

On peut, précisément, démontrer (1), que sous les conditions, à lesquels sont sommises les fonctions $u_i^{(n-1)}$, le système d'équations

$$\frac{dx_i^{(n-1)}}{dt} = u_i^{(n-1)}(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, x_3^{(n-1)}, t), \qquad (i=1, 2, 3) \tag{1}$$

admet une solution $x_i^{(n-1)}$, $(i=1, 2, 3)$, qui se réduit à q_i, $(i=1, 2, 3)$ pour $t=0$ et que à chaque point (q_1, q_2, q_3) dans (R_0) (sur (S_0)) correspond pour chaque t un point $(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, x_3^{(n-1)})$ dans (R_t) (sur (S_t)); d'ailleurs le système des équations

$$x_i = x_i^{(n-1)}(q_1, q_2, q_3, t) \tag{2}$$

a une seule solution par rapport à q_1, q_2, q_3.

Les fonctions cherchées u_i sont les limites des fonctions $u_i^{(n)}$. La démonstration

---

(1) N. GUNTHER: *Sur l'équation* $\frac{\partial V}{\partial t} + u\frac{\partial V}{\partial x} + v\frac{\partial V}{\partial y} + w\frac{\partial V}{\partial z} = f$. Recueil de Moscou, t. 32.

de la convergence du procédé est fondé sur l'étude des différences $u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}$, qui conduit à la conclusion: Si

$$|u_i^{(n+1)}-u_i^{(n)}|<G_{n+1}, \qquad \left|\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial x_j}-\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_j}\right|<G_{n+1}, \tag{3}$$
$$(j=1,2,3; \quad i=1,2,3)$$

$$\left|\left(\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial x_s}-\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_s}\right)_{M_1}-\left(\frac{\partial u_i^{(n+1)}}{\partial x_s}-\frac{\partial u_i^{(n)}}{\partial x_s}\right)_{M_0}\right|<G_{n+1}(\overline{M_1M_0})^\gamma \tag{3'}$$

on a

$$G_{n+1}\leqq p\int_0^t G_n dt. \tag{4}$$

4. - La démonstration de l'inégalité (4) est compliquée par la circonstance, que, quoique les fonctions $u_i^{(n+1)}$ aient les dérivées du second ordre par rapport à x_1, x_2, x_3 (ce qu'on ne peut pas affirmer en parlant de leurs limites), ces dérivées ne sont pas assujetties aux inégalités analogues aux (3), (3'); on peut seulement affirmer qu'elles sont bornées par un nombre indépendant de la valeur de n.

Pour éviter cette difficulté il faut, en démontrant les inégalités, analogues aux (3'), avoir recours à l'intégration suivant les chemins, situés à l'intérieur de (R_t) et ayant une longueur finie. On peut former de pareils chemins en se basant sur les considerations suivantes. La solution (x_1, x_2, x_3) du système

$$\frac{dx_i}{dt}=u_i^{(n-1)}(x_1,x_2,x_3,t)+l[u_i^{(n)}(x_1,x_2,x_3,t)-u_i^{(n-1)}(x_1,x_2,x_3,t)], \tag{5}$$
$$(i=1,2,3)$$

qui se réduit à (q_1, q_2, q_3) pour $t=0$, détermine pour chaque l et t un point à l'intérieur de (R_t) (sur (S_t)), si le point (q_1, q_2, q_3) est à l'intérieur de (R_0) (sur (S_0)).

Quand on change l de 0 à 1, ce point se deplace de $(x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}, x_3^{(n-1)})$ dans $(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})$ en restant à l'intérieur de (R_t) (sur (S_t)).

Ayant constaté que les fonctions, dépendantes de la solution mentionnée du système (5), ont les dérivées par rapport à l et remarqué que la borne supérieure de ces dérivées est définie par la borne supérieure du coefficient de l dans les équations (5), c'est-à-dire, par le nombre G_n, on peut remplacer l'étude de la différence dans les inégalités, analogues à (3'), par l'étude des intégrales des dérivées par rapport à l des fonctions correspondantes, prises entre les limites 0 et 1.

5. - Ayant trouvé une solution du système (a') et constaté qu'elle est unique, on doit, cependant, démontrer encore, que cette solution satisfait au système (a).

Il suffit pour cela de démontrer l'existence des dérivées

$$\frac{du_i}{dt}, \qquad \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{du_i}{dt}\right).$$

Cette démonstration est compliquée: 1°) par le manque des dérivées chez les fonctions ω_1, ω_2, ω_3 par rapport à x_1, x_2, x_3, à cause de quoi, quoique la dérivée $\frac{d\omega_i}{dt}$ existe, la dérivée $\frac{\partial\omega_i}{\partial t}$ n'existe peut être, pas et 2°) par la nécessité de démontrer l'existence d'une dérivée par rapport à t chez la fonction φ, qui est déterminée comme solution du problème de Neumann dans le cas d'une variable frontière (S_t).

6. - On démontre l'existence des dérivées mentionnées chez deux premiers termes des formules (B) en prenant pour variables indépendantes les coordonnées (q_1, q_2, q_3) d'un point en (R_0); pareillement on démontre aussi leurs existence chez les dérivées I_{x_i}, $(i=1, 2, 3)$, de l'intégrale

$$\int_{(S_t)} [\omega_1 \cos(Nx_1) + \omega_2 \cos(Nx_2) + \omega_3 \cos(Nx_3)] \frac{d\sigma}{r},$$

qui sont les composantes du tourbillon d'un vecteur, qui est défini par les troisièmes termes a_1, a_2, a_3 des formules (B).

En introduisant les fonctions

$$A_i = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial q_i} + a_2 \frac{\partial x_2}{\partial q_i} + a_3 \frac{\partial x_3}{\partial q_i}$$

et les fonctions I_1, I_2, I_3 dont la première est $\left| I_{x_1}, \frac{\partial x_2}{\partial q_2}, \frac{\partial x_3}{\partial q_3} \right|$, on peut, en utilisant les résultats de mon mémoire: *Sur les opérations avec les fonctions sans dérivées* (1) établir les égalités:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_2} \int_{(R_0)} \frac{I_3 d\tau_0}{r} - \frac{\partial}{\partial q_3} \int_{(R_0)} \frac{I_2 d\tau_0}{r} + \gamma_1 \right\}, \ldots,$$

dans lesquels les deux premiers termes ont les dérivées par rapport à t et le tourbillon du vecteur $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ est égal au gradient de la fonction

$$\int_{(S_0)} [I_1 \cos(Nq_1) + I_2 \cos(Nq_2) + I_3 \cos(Nq_3)] \frac{d\sigma_0}{r}. \tag{6}$$

L'application des formules (B) permet maintenant de transformer (6) en un potentiel du double couche avec une densité égale à θ et donner à γ_1 la forme

$$\int_{(S_0)} \left[\frac{\partial\theta}{\partial q_2} \cos(Nq_3) - \frac{\partial\theta}{\partial q_3} \cos(Nq_2) \right] \frac{d\sigma_0}{r} + \frac{\partial\lambda}{\partial q_1},$$

où la première intégrale a une dérivée par rapport à t. On peut démontrer que, comme fonctions des variables x_1, x_2, x_3, la fonction λ est égale à la somme $\bar{\lambda} + \chi$ de deux fonctions, dont la première possède les dérivées demandées et la seconde est harmonique dans (R_t).

---

(1) Bulletins de l'Académie de U. R. S. S., an 1924, n. 12-14; an 1925, n. 1-5.

Ainsi le problème est amené à l'étude de la fonction $\varphi+\chi$, qui jouit de toutes les propriétés fixées pour φ, et que nous désigneront par φ.

7. - En désignant par $\bar{L}_1$, $\bar{L}_2$, $\bar{L}_3$ la somme des trois premiers termes dans les formules (B) transformées et par $\bar{f}$ la différence

$$W_n-[\bar{L}_1\cos(Nx_1)+\bar{L}_2\cos(Nx_2)+\bar{L}_3\cos(Nx_3)]$$

on démontre aisement, que

$$\int_{(S_t)}\left(\frac{d\bar{f}}{dt}-\bar{fa}\right)d\sigma=0,$$

où $\bar{fa}=\left(\frac{d\varphi}{dn}\right)_i a$ est un terme qui depend de la dérivée par rapport à t de l'élément de la surface (S_t) et qu'on rejette également en étudiant la dérivée par rapport à t du vecteur $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$.

On peut, enfin, établir, que

$$\int_{(S_t)}[G_1\cos(Nx_1)+G_2\cos(Nx_2)+G_3\cos(Nx_3)]d\sigma=0 \tag{7}$$

où l'on a

$$G_i=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_i}u_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2\partial x_i}u_2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3\partial x_i}u_3-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial u_i}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{\partial u_i}{\partial x_3}\right);$$

on écarte les difficultés qu'on éprouve en établissant l'égalité (7) et qui sont causées par l'absence des secondes dérivées chez u_1, u_2, u_3, en employant la méthode des fonctions de Stekloff.

Les propositions démontrées permettent d'affirmer qu'il existe une fonction ψ, harmonique dans (R_t) et telle qu'on a sur (S_t)

$$\frac{d\psi}{dn}=\frac{d\bar{f}}{dt}-\bar{fa}-[G_1\cos(Nx_1)+G_2\cos(Nx_2)+G_3\cos(Nx_3)];$$

aprés cela on demontre, en formant la dérivée de φ, qu'on a $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\psi$.

8. - Dans le cas d'un domaine à connexion multiple, il faut se servir d'indétermination dans la définition de φ, qui reste encore dans notre disposition, pour faire la pression p, qu'on calcule à l'aide de la formule

$$p=\psi\cdot\varrho-\pi,$$

continue dans (R_t).

Désignons par $(f)_n$ le résultat de la substitution dans f des fonctions $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$ à la place des variables x_1, x_2, x_3 et par $\frac{d(f)_n}{dt}$ le résultat de la substitution dans la dérivée par rapport à t de $(f)_n$ des fonctions $q_1^{(n)}$, $q_2^{(n)}$, $q_3^{(n)}$ a la place de les variables q_1, q_2, q_3.

On démontre aisement que

$$\sum_{k=1}^{k=3}\left(\frac{d(u_k^{(n)})_{n-1}}{dt}+u_1^{(n)}\frac{\partial u_1^{(n-1)}}{\partial x_k}+u_2^{(n)}\frac{\partial u_2^{(n-1)}}{\partial x_k}+u_3^{(n)}\frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial x_k}\right)dx_k$$

est une différentielle exacte d'une certaine fonction T_n.

Si on fait subir chaque $u_k^{(n)}$ la transformation, mentionnée dans l'alinéa 6, et si on pose

$$u_k^{(n)}=\bar{L}_k^{(n)}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_k},\qquad \varphi_n=\psi_n-\theta_n+\theta_n^{(0)},\qquad \theta_n^{(0)}=\sum_{s=1}^{s=m}C_s^{(n)}(t)\int_{(\Sigma_s)}\frac{\cos(rN_s)}{r^2}\,d\sigma,$$

ψ_n étant continue, on trouve

$$d(T_n-\psi)=\sum_{k=1}^{k=3}\left(\frac{d(\bar{L}_k^{(n)})_{n-1}}{dt}+\bar{L}_1^{(n)}\frac{\partial u_1^{(n-1)}}{\partial x_k}+\bar{L}_2^{(n)}\frac{\partial u_2^{(n-1)}}{\partial x_k}+\bar{L}_3^{(n)}\frac{\partial u_3^{(n-1)}}{\partial x_k}\right)dx_k+$$
$$+d\left\{\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}u_1^{(n-1)}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}u_2^{(n-1)}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_3}u_3^{(n-1)}\right\}+d\frac{\partial\varphi_n}{\partial t}-d\psi.$$

d'où suit, la première somme étant la différentielle d'une fonction $\bar{T}_n$:

$$T_n-\psi=\bar{T}_n-\psi+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}u_1^{(n-1)}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_2}u_2^{(n-1)}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_3}u_3^{(n-1)}+\frac{\partial\psi_n}{\partial t}-\frac{\partial\theta_n}{\partial t}+\frac{\partial\theta_n^{(0)}}{\partial t}.$$

La fonction $\bar{T}_n-\psi$ peut être polydrome, prenant sur les bords opposées de la coupure (Σ_s) les valeurs, qui se différent par une fonction de t seul de la forme $c_s^{(n)}(t)$. Si on pose

$$C_s^{(n)}(t)=-\int_0^t c_s^{(n)}(t)dt+c_s,$$

où c_s sont constantes, on trouve que $T_n-\psi$ est continue dans (R_t).

Comme, à la limite, dT_n devient égale à $\frac{1}{\varrho}d\pi+\frac{1}{2}d(u_1^2+u_2^2+u_3^2)$, il suit de là qu'on obtient pour p une fonction continue.

On obtient la démonstration de la convergence du procédé en démonstrant l'existence des limites chez $C_s^{(n)}(t)$, $(s=1, 2,\ldots, m)$.

Les constantes c_s, $(s=1, 2,\ldots, m)$, sont déterminées, quand on donne les valeurs initiales des u_1, u_2, u_3 au lieu des valeurs initiales des composantes du tourbillon.

E. SCHOENBAUM (Praha - Cecoslovacchia)

CONTRIBUTION À LA THÉORIE DE L'AJUSTEMENT MÉCANIQUE

Sous le nom d'ajustement mécanique les actuaires ont créé un grand nombre de procès numériques consistant en ce qu'on déduit par simples opérations arithmétiques (par des sommations repétées) d'une série de valeurs fournies par l'expérience statistique une série d'autres valeurs. On considère cette nouvelle série comme une meilleure réprésentation de l'expérience statistique dont on veut atteindre la description ou l'analyse.

Par l'ajustement mécanique on poursuit des buts, qu'il est souvent difficile d'exprimer clairement. Par exemple il s'agit d'éliminer d'une série statistique des irrégularités provenants d'erreurs commises par hasard ou des erreurs systématiques ou des irrégularités dérangeant les idées qu'on se fait à priori par l'expérience, ou des irrégularités, qui se montreraient désagréables dans les tarifs des sociétés d'assurance.

Presque toutes les tables de mortalité, d'invalidité, etc. employées dans la pratique des actuaires ont été ajustées par l'une ou l'autre de ces méthodes, même souvent par plusieurs d'entre elles et la somme d'énergie, de temps et d'argent employée pour l'ajustement des tables statistiques est très grande. Il est surprenant que tout ce travail des actuaires se fasse presque exclusivement sans la collaboration et sans l'interêt de la mathématique pure, quoique la théorie de l'ajustement mécanique présente des nombreux problèmes touchant aux différents domaines de l'analyse.

En laissant de coté la critique des principes de l'ajustement mécanique, je veux seulement souligner dans cette communication que toutes les formules de l'ajustement mécanique ont la forme suivante:

$$v_n = \sum_{i=-k}^{k} a_k u_{n+k}$$

où

$$u_{n-k},\quad u_{n-k+1},\ldots,\quad u_n,\ldots,\quad u_{n+k-1},\quad u_{n+k}$$

sont des valeurs données par l'expérience et

$$v_{n-k},\quad v_{n-k+1},\ldots,\quad v_n,\ldots,\quad v_{n+k-1},\quad v_{n+k}$$

des valeurs ajustées.

Une formule très employée de Karup est par exemple

$$v_n=\frac{1}{625}[125u_n+114(u_{n+1}+u_{n-1})+87(u_{n+2}+u_{n-2})+53(u_{n+3}+u_{n-3})+$$
$$+21(u_{n+4}+u_{n-4})-8(u_{n+5}+u_{n-5})-9(u_{n+7}+u_{n-7})-6(u_{n+8}+u_{n-8})-$$
$$-2(u_{n+9}+u_{n-9})].$$

Pour traiter le problème d'ajustement par des moyens d'analyse, nous voulons supposer que la série des valeurs qu'on veut ajuster est donnée par une fonction continue $u(x)$; on peut donc exprimer le contenu des toutes les formules de l'ajustement mécanique par la relation:

$$v(x)=\int_{x-k}^{x+k} K(x,\xi)u(\xi)d\xi. \tag{1}$$

On doit supposer, que $K(x,\xi)\leqq 0$.

On peut appeler $K(x,\xi)$ le noyau ou la fonction de l'ajustement. On sait que WIRTINGER a appliqué la théorie des équations intégrales de Fredholm à deux questions de la théorie d'ajustement mécanique, en profitant du fait que

$$K(x,\xi)$$

est une fonction symétrique de x, ξ. Il a obtenu par la théorie de ces équations des résultats intéressants pour la répétition d'une formule d'ajustement et pour l'expression de « l'écart » de la fonction ajustée et de la fonction donnée.

Le travail de WIRTINGER n'avait pas eu de successeurs et est resté presque inconnu (chez les actuaires). Je crois qu'il en faut chercher la cause dans la suprême généralisation et dans l'abstraction superflue de ce beau travail.

Mais on obtient des résultats très importants pour les besoins d'un actuaire, ayant regard au fait que la fonction d'ajustement

$$K(x,\xi)$$

n'est pas seulement une fonction symétrique, mais dans toutes les formules d'ajustement une fonction de la différence $x-\xi$. Ce fait est très important, parce que le cas spécial du noyau d'une équation intégrale de cette forme

$$K(x-\xi)$$

conduit dans la théorie aux résultats relativement simples.

En effet toutes les formules d'ajustement envisagées jusqu'ici ont la forme

$$v_n=\sum_{i=-k}^{+k} a_i u_{n+i} \quad \text{où} \quad a_i=a_{-i}.$$

A cette forme correspond l'expression analytique suivante:

$$v(x)=\int_{-k}^{+k} K(y)u(x+y)dy, \tag{2}$$

ou, si l'on pose

$$x+y=t,$$

$$v(x)=\int_{x-k}^{x+k} K(x-t)u(t)dt. \tag{2'}$$

On sait que le problème de déterminer la fonction $u(x)$, si la fonction $v(x)$ est donnée, se présente dans la théorie de la mécanique héréditaire du cycle fermé et est résolue par la théorie des équations intégrales de VOLTERRA de première espèce avec les deux limites variables de l'intégrale et avec le noyau de la forme $K(x-t)$. Je n'ai qu'à renvoyer à son beau livre très connu: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.*

Mais je veux traiter ici deux autres questions très importantes pour la pratique:

1°) On doit déterminer pour une fonction donnée $u(x)$ toutes les fonctions d'ajustement $K(x-t)$ qui la laissent sans changement;

2°) On doit déterminer pour une fonction d'ajustement donnée $K(x-t)$ toutes les fonctions $u(x)$ qui restent sans changement par l'ajustement, c'est-à-dire, qui admettent l'ajustement par $K(x-t)$.

Il va sans dire que la résolution de ces deux questions sera pour le succès d'un procédé d'ajustement très importante. En effet: Il est inutile d'appliquer une formule d'ajustement représentée par une fonction donnée $K(x)$ à une fonction $u(x)$, si cette fonction l'admet. Par contre: Il est nécessaire d'employer pour l'ajustement d'une fonction donnée $u(x)$ un noyau $K(t)$ qui n'élimine pas sous le titre d'ajustement des traits essentiels pour cette fonction.

La solution des deux problèmes est fournie par l'équation intégrale

$$u(x)=\int_{-k}^{+k} K(t)u(x+t)dt. \tag{3}$$

On peut toujours parvenir, sans diminuer la généralité de la résolution, à ce que les limites d'intégrale soient ± 1 ou $\pm\infty$.

Il suffit pour cela de transformer la variable, soit de supposer que $K(t)$ s'annule pour des grandes valeurs de t, supposition qui est toujours justifiée par la forme spéciale du problème.

La résolution de l'équation (3) fournit déjà pour les cas les plus simples des résultats intéressants.

Je me borne à mentionner ici deux cas spéciaux.

Il suffit de faire des suppositions très simples sur la forme de $K(t)$ pour obtenir pour $u(x)$ l'équation différentielle de $n^{\text{ème}}$ ordre

$$a_n u^{(n)}(x) + a_{n-1} u^{(n-1)}(x) + \ldots + (a_0 - 1) u(x) = 0, \tag{4}$$

où

$$a_k = \frac{1}{k!} \int_{-1}^{+1} y^k K(y)\, dy$$

sont constantes.

Une fonction donnée par cette équation aura la forme

$$u(x) = b_0 + b_1 c_1^x + b_2 c_2^x + \ldots + b_k c_k^{(x)} + b_{k+1} c_{k+1}^x (1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots)$$

où

$$c_1, \quad c_2, \ldots, \quad c_k, \ldots$$

sont les racines de l'équation caractéristique:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + (a_0 - 1) = 0.$$

Si quelques-unes de ces racines sont complexes, la résolution contient, comme on sait, des termes de la forme

$$b_1 \varrho^x \cos(\varphi x) + b_1' \varrho^x \sin(\varphi x).$$

Si la fonction qu'on va ajuster présente des irrégularités aléatoires de la dernière forme, l'ajustement ne conduit pas au but, car les oscillations de cette forme peuvent être renforcées ou au moins reproduites par l'ajustement; cela dépend de la valeur de ϱ (c'est-à-dire si $\varrho \geqq 1$).

Par contre: Si les oscillations du type

$$\varrho^x \cos \varphi x, \quad \varrho^x \sin \varphi x$$

sont essentielles pour la fonction $u(x)$, il est nécessaire d'employer exactement l'ajustement par une fonction $K(x)$ correspondant à cette théorie. Autrement on n'atteindrait, par l'ajustement de ce type, que l'élimination de ces oscillations essentielles et par conséquent la déformation de la fonction donnée $u(x)$.

Ces résultats contiennent comme un cas spécial des résultats qu'a obtenu en 1911 GROSS en suivant un autre but et en partant des équations aux différences finies.

Le second cas que je veux mentionner dans cette communication touche à l'équation intégrale

$$u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-t) u(t)\, dt.$$

En supposant qu'on puisse développer $K(x-t)$ par une série infinie

$$K(x-t) = e^{-(x-t)^2} [a_0 + a_1 U_1(x-t) + a_2 U_2(x-t) + \ldots],$$

où $U_n(x-t)$ est le $n^{\text{ème}}$ polynome d'Hermite c'est-à-dire

$$e^{-x^2}U_n(x)=\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n};$$

on peut démontrer par de simples réflexions, en utilisant seulement la formule d'addition des polynomes d'Hermite, que la résolution d'une équation intégrale de cette forme est fournie par une série

$$u(x)=e^{-x^2}[b_0+b_1U_1(x)+b_2U_2(x)+....].$$

On obtient les constantes b_0, b_1, b_2,.... par le calcul facile d'une suite des relations recurrentes

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}=b_0,$$

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{\sqrt{\pi}}a_1=a_0b_1+a_1b_0,$$

$$\frac{(\sqrt{2})^3}{\sqrt{\pi}}a_2=a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0.$$

On voit aisément, qu'il suffit de diviser formellement deux séries des puissances pour trouver par une règle formelle les coefficients b.

Il faut remarquer qu'il n'est pas toujours facile de résoudre dans les problèmes de ce genre la question de convergence, ce que démontre un article de M. PÓLYA dans les Mathematische Annalen 1914. Mais dans la pratique, comme remarque justement M. RUNGE pour un cas analogue, la condition de convergence des séries de cette façon est toujours remplie, car on peut faire sur la fonction $K(x-\xi)$ des suppositions qui garantissent la convergence.

L. LABOCCETTA (Roma - Italia)

METODO OTTICO PER LA DETERMINAZIONE DI UNA UNITÀ ASSOLUTA DI LUNGHEZZA DI GRANDEZZA ARBITRARIA

1. - Quando della luce polarizzata attraversa uno strato di un corpo otticamente attivo, il piano di polarizzazione ruota di un angolo α' proporzionale allo spessore s' dello strato stesso, cosicchè chiamando $\varrho_{\lambda t}$ il *potere rotatorio* della sostanza considerata, alla temperatura t alla quale si effettua l'esperimento e per la luce adoperata di lunghezza d'onda λ, cioè l'angolo di cui ruota il piano di polarizzazione della luce di lunghezza d'onda λ nel traversare lo spessore unitario dello strato, alla temperatura t, si ha

$$\alpha' = \varrho'_{\lambda t} s'. \tag{1}$$

Nel caso di corpi solidi si adotta generalmente il millimetro come spessore unitario, e il decimetro nel caso dei liquidi. Ma per questi si suole piuttosto dare il *potere rotatorio specifico* $\varrho''_{\lambda t}$ determinato dalla relazione

$$\alpha'' = \varrho''_{\lambda t} \delta s'' \tag{2}$$

in cui α'' indica l'angolo di cui ruota il piano di polarizzazione quando il raggio attraversa uno spessore s'' della sostanza attiva di densità δ, e quindi $\varrho''_{\lambda t}$ indica l'angolo di cui ruota il piano di polarizzazione di un raggio luminoso di lunghezza d'onda λ quando abbia, alla temperatura t, attraversato uno strato di liquido il cui spessore sia, numericamente, eguale all'inverso della sua densità.

Infine se si tratta di soluzioni di sostanze attive in liquidi indifferenti di concentrazione $c = \frac{m}{100}$, tale che 100 grammi della soluzione ne contengano m di sostanza attiva, allora se è Δ la densità di tale soluzione, 100 grammi di essa occuperanno un volume $\frac{100}{\Delta}$, espresso in centimetri cubici, e la densità della sostanza attiva distribuita in questo volume sarà $\frac{m\Delta}{100}$, cosicchè portando questo valore nella (2) in luogo di δ essa diviene

$$\alpha''' = \varrho'''_{\lambda t} \frac{m\Delta}{100} s''' = \varrho'''_{\lambda t} c \Delta s'''. \tag{3}$$

Dalle tre relazioni (1), (2), (3) si ricava

$$\left.\begin{aligned} (4)\qquad & s' = \frac{\alpha'}{\varrho'_{\lambda t}} \\ (5)\qquad & s'' = \frac{\alpha''}{\varrho''_{\lambda t}\delta} \\ (6)\qquad & s''' = \frac{\alpha'''}{\varrho'''_{\lambda t}cA} \end{aligned}\right\} (A)$$

2. - In tutte queste espressioni dello spessore comparisce un angolo α, le densità δ e A e la concentrazione c, grandezze tutte di dimensioni nulle, perchè rapporti di quantità omogenee; apparisce pure una lunghezza d'onda λ la quale però sta ad indicare una *rifrangibilità*, cioè il rapporto di due angoli, anch'esso di dimensioni nulle, e una temperatura t, che può essere definita in modo da venire identicamente riprodotta indipendentemente dalla conoscenza di qualsiasi unità di misura; infine si ha un numero $\varrho_{\lambda t}$ il quale, per l'unità di lunghezza scelta a misurare lo spessore, indica un angolo di rotazione e, introdotto nelle (A), dà il valore dello spessore misurato con la stessa unità di lunghezza con la quale esso era stato ottenuto.

Una qualsiasi delle tre relazioni (A) consente perciò la misura dello spessore numericamente espresso con la stessa unità di lunghezza adoperata nella determinazione dei valori di $\varrho'_{\lambda t}$, $\varrho''_{\lambda t}$, $\varrho'''_{\lambda t}$.

E reciprocamente, se nelle (A) si pone $s=1$ e si ricava α, questo valore di α poi dà modo di ritrovare lo strato di spessore uno, dà modo cioè di determinare una unità *assoluta* di lunghezza di *grandezza arbitraria*, intendendosi qui con la qualifica di *assoluta* che si tratta di unità la quale può essere identicamente riprodotta in qualsiasi tempo e in qualsiasi luogo, senza che occorra perciò possedere campioni di altre unità fondamentali, o derivate, del sistema a cui appartiene.

3. - La determinazione dell'unità di lunghezza, sempre servendosi delle relazioni innanzi indicate fra lo spessore, il potere rotatorio e l'angolo di rotazione può anche esser presentata sotto forma alquanto differente e basandosi sulle seguenti considerazioni.

Sia la sostanza attiva, allo stato solido o liquido, conformata a guisa di cilindro circolare la cui sezione retta sia di raggio r.

Sulla base dalla quale entra il fascio luminoso si tracci il diametro contenuto nel piano di polarizzazione. Nelle successive sezioni questo diametro ruota, e precisamente di un angolo per un dato spessore s, qualunque sia poi la dimensione del raggio.

Si tracci sulla superficie del cilindro il luogo dei punti in cui essa è incontrata

da uno dei due estremi del diametro anzidetto. Questo luogo sarà un'elica che incontra le generatrici del cilindro sotto un angolo ε tale che

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{360^\circ s}{2\pi r a^\circ}$$

e ponendo per s/a in questa relazione uno dei valori dati dalle (A) si ottiene

$$\left.\begin{aligned} (7)\quad & \operatorname{tg}\varepsilon' = \frac{180^\circ}{\pi r \varrho'_{\lambda t}} \\ (8)\quad & \operatorname{tg}\varepsilon'' = \frac{180^\circ}{\pi r \delta \varrho''_{\lambda t}} \\ (9)\quad & \operatorname{tg}\varepsilon''' = \frac{180^\circ}{\pi r c \Delta \varrho'''_{\lambda t}} \end{aligned}\right\} (B)$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} (10)\quad & r = \frac{180^\circ}{\pi \varrho'_{\lambda t} \operatorname{tg}\varepsilon'} \\ (11)\quad & r = \frac{180^\circ}{\pi \delta \varrho''_{\lambda t} \operatorname{tg}\varepsilon''} \\ (12)\quad & r = \frac{180^\circ}{\pi c \Delta \varrho'''_{\lambda t} \operatorname{tg}\varepsilon'''} \end{aligned}\right\} (C)$$

relazioni le quali mostrano che il valore del raggio r misurato con l'unità di lunghezza che ha servito a determinare $\varrho_{\lambda t}$ è inversamente proporzionale a $\operatorname{tg}\varepsilon$.

L'elica in questo modo tracciata sul cilindro, e che con la sua inclinazione ne indica le dimensioni, si potrebbe appropriatamente chiamare elica o indicatrice *metrica*.

Trattandosi di soluzioni, per le quali si dispone della concentrazione c, e quindi del valore del prodotto $c\Delta\varrho_{\lambda t}$ i di cui due ultimi fattori Δ, $\varrho_{\lambda t}$ sono entrambi funzioni del primo c, si può fare in modo che la lunghezza l del raggio r, misurata con una unità arbitrariamente data, risulti proprio uguale al valore numerico di $\operatorname{tg}\varepsilon$, per il che basta dare a c, sempre che ciò sia fisicamente possibile, il valore che soddisfa alla relazione

$$(13)\qquad l^2 = \frac{180^\circ}{\pi c \Delta \varrho_{\lambda t}}$$

In particolare, se il raggio debba avere proprio l'unità di lunghezza questa relazione diventa

$$(14)\qquad 1 = \frac{180^\circ}{\pi c \Delta \varrho_{\lambda t}}$$

si dovrà scegliere cioè c in modo che risulti

$$(15)\qquad c\Delta\varrho_{\lambda t} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ, 295\,779.$$

4. - Ciò posto ecco, a titolo di esempio, due definizioni del decimetro, rispettivamente date a mezzo di un corpo solido, il quarzo, l'una e di un liquido, una soluzione di zucchero di canna, l'altra.

Per il quarzo si sa che uno spessore di un millimetro fa ruotare di 201°,824 la luce della riga Cd_{24} corrispondente alla lunghezza di onda

$$\lambda = 22.645 \times 10^{-6} \text{ cm}$$

e ciò alla temperatura $t = 20°$ C. Ora chiamando acqua «*normale*» l'acqua presa al massimo della sua densità, alla temperatura di 4° C, sotto la pressione del suo vapore saturo, di mm. 6,097, nelle quali condizioni (1) la sua densità è 0,999 995 9 e tenendo presente che sotto la pressione atmosferica a 20° C l'acqua ha la densità di 0,998 234 3 e quindi sotto la pressione del suo vapore saturo, che a quella temperatura ammonta a mm. 17,539, la sua densità si riduce a 0,998 187 8, cosicchè riferita a quella dell'acqua normale diventa 0,999 211 8 si può dire:

a) *Decimetro* è la lunghezza che deve avere un cilindro di quarzo alla temperatura alla quale l'acqua sotto la pressione del suo vapore saturo ha una densità che, riferita a quella dell'acqua normale assunta uguale ad uno, ha il valore 0,999 211 8, affinchè attraversato da una base all'altra da un fascio di luce polarizzata avente la rifrangibilità della riga Cd_{24}, produca una rotazione di 20 182°,4 del piano di polarizzazione.

Per la soluzione di zucchero di canna è noto che il potere rotatorio specifico varia al variare della concentrazione, e ad esprimere questa variabilità servono delle formole empiriche che danno $\varrho_{\lambda t}$ in funzione della concentrazione espressa in grammi della sostanza attiva in 100 grammi della soluzione (NASINI e VILLAVECCHIA) o in grammi della sostanza attiva per 100 cm³ della soluzione (LANDOLT). È quest'ultima relazione fra z e $\varrho_{\lambda t}$ per $t = 20°$

$$\varrho_{\lambda t} = 66{,}435 + 0{,}0087z - 0{,}000235z^2 \tag{16}$$

valevole per z da 0 a 65 e dove, con le notazioni adottate,

$$z = 100c\Delta$$

che qui ci serve.

Ricercando perciò, ad esempio, la concentrazione per la quale all'elica indicatrice su un cilindro di 10 cm. di raggio corrisponda $\operatorname{tg}\varepsilon = 10$, cosicchè il piano di polarizzazione abbia rotato di 57°,295 779 all'uscire dal cilindro se questo ha 1 m. di lunghezza, si può procedere nel modo seguente. Tenendo presente che nella (15) è supposto $\operatorname{tg}\varepsilon = r$, mentre ora $\operatorname{tg}\varepsilon = 10r$, e ponendo inoltre $\frac{z}{100}$ invece di $c\Delta$ si ha

$$10\varrho_{\lambda t}\frac{z}{100} = 57.295\,779$$

e quindi

$$z = \frac{100}{\varrho_{\lambda t}} 5{,}729\,578. \tag{17}$$

(1). Quando si ammetta che la temperatura di massima densità non varia al variare della pressione, almeno nei limiti di variazione qui indicati.

Si ha così una seconda equazione fra z e $\varrho_{\lambda t}$; eliminando $\varrho_{\lambda t}$ fra la (16) e la (17) si ha per determinare z

$$572{,}957795 = 66{,}435z + 0{,}0087z^2 - 0{,}000235z^3 \tag{18}$$

da cui viene

$$z = 8{,}616.$$

Conservando la stessa definizione data innanzi della temperatura di 20° C si può perciò dare questa seconda definizione del decimetro:

b) *Decimetro* è il raggio che deve avere un cilindro di soluzione di zucchero di canna in acqua contenente in un dato volume un peso di sostanza attiva uguale a 0,08616 del peso di un ugual volume di acqua normale, presa la soluzione alla temperatura alla quale l'acqua sotto la pressione del suo vapore saturo ha una densità che, riferita a quella dell'acqua normale assunta uguale ad uno, ha il valore 0,999 211 8, affinchè la sua intersezione con l'elicoide generato dal raggio che parte dall'asse del cilindro e giace nel piano di polarizzazione, dia un'elica per la quale $\operatorname{tg} \varepsilon = 10$.

Con la stessa soluzione la lunghezza di *un metro* è quella che produce la rotazione di *un radiante* (57°,295 779) del piano di polarizzazione.

5. - S'intende che i numeri menzionati nelle definizioni che precedono sono dati solo per render concreto l'esempio, la precisione effettivamente raggiungibile dipendendo insieme e da quella delle costanti fisiche che entrano nelle definizioni stesse e da quella delle misure consentita dagli strumenti che si adoperano.

Quanto a quest'ultima, è da osservare che con i polarimetri (1) dei quali adesso si dispone essa risulta già dello stesso ordine di grandezza di quella che si ottiene con i metodi interferometrici.

Però, a parte la bontà degli strumenti, che può anche essere migliorata, vi sono dei limiti intrinseci di precisione che non possono essere sorpassati. Ciò perchè nel mentre nelle (A) si è tacitamente supposto che δ, Δ, c, s, sono delle grandezze variabili in modo continuo, esse invece sono essenzialmente discontinue perchè dipendono dal numero di molecole presenti in un dato volume o dal numero di strati di molecole che formano un dato spessore di sostanza e sono quindi grandezze inesistenti per i valori non intieri di questo numero. Ne segue che anche l'angolo α che è funzione di queste grandezze, non può variare che discontinuamente.

Benchè queste discontinuità siano così piccole da non essere percettibili coi mezzi di osservazione dei quali ora disponiamo, tuttavia è opportuno tenere

---

(1) Si giunge a determinare l'angolo di rotazione a meno di 1/200 di grado (v. *Polarimètres de precision Jobin et Ivan*: Revue d'Optique théorique et instrumentale; n°. 6, Juin 1922, p. 266.

presente che, a rigore, le (A) dovrebbero essere messe sotto forma tale da rendere evidente la natura discontinua delle grandezze che in esse appariscono.

Così ad esempio invece della (1) dovrebbe scriversi

$$\alpha = \omega \operatorname{Int} \frac{s}{\sigma_t} \left(\operatorname{Int}^{-1} \frac{s}{\sigma_t} \right)^{Frc \frac{s}{\sigma_t}} \tag{19}$$

dove: con ω si è indicata la rotazione elementare corrispondente ad uno strato di molecole cristalline che alla temperatura t, occupa uno spessore σ_t, si è posto cioè $\omega = \varrho_{\lambda t} \sigma_t$; con $\operatorname{Int} \frac{s}{\sigma_t}$ si è indicato il numero di strati di molecole cristalline contenute nello spessore s e

$$\left(\operatorname{Int}^{-1} \frac{s}{\sigma_t} \right)^{Fr \frac{s}{\sigma_t}}$$

infine è una funzione che ha il valore uno per i valori intieri di $\frac{s}{\sigma_t}$ ed è invece *non esistente* per s/σ_t non intiero, indicando così che lo spessore s e l'angolo α sono quantificati ed esistono solo per multipli intieri di σ e ω (1).

Tuttavia, malgrado questa quantificazione delle lunghezze e degli angoli, dipendente dalle condizioni nelle quali si opera, è possibile assegnare ad S, e quindi ottenere anche, per valori variabili in modo continuo: basta perciò far variare la temperatura perchè si ha $\sigma_t = \sigma_0(1 + kt)$ essendo k il coefficiente di dilatazione lineare.

Questa relazione mette poi in evidenza una circostanza importante e cioè che mentre le grandezze intrinsecamente discontinue come la massa, non possono variare che per multipli intieri μM di una quantità elementare μ invariabile, le grandezze quantificate invece variano per quanti il cui valore dipende da quello di qualche altra grandezza alla quale sono connesse. Nel caso presente il valore $q = \sigma_0(1 + kt)$ dei quanti varia con la temperatura alla quale si opera.

La lunghezza del metro campione essendo stata già determinata di Michelson esprimendola col numero di lunghezze d'onda di tre radiazioni diverse, praticamente non è sentito il bisogno di una nuova determinazione assoluta della stessa lunghezza. Ciò non pertanto il procedimento qui esposto, che io comunico a titolo di saggio estraendolo da un lavoro più ampio al quale attendo da tempo: *Sulla costruzione di costanti fisiche di grandezza arbitraria*, mi sembra che presenti un certo interesse da un altro punto di vista che è il seguente.

Già Galileo in quei « *Discorsi e dimostrazioni intorno a due nuove scienze attinenti alla meccanica ed ai movimenti locali* » coi quali venivano posti i fondamenti della dinamica moderna, aveva esplicitamente rilevato che nè di una

---

(1) Intorno ai tipi di relazioni fra grandezze discontinue ed all'uso delle grandezze inesistenti invece di quelle immaginarie, si vegga una mia Nota R. C. Acc. Naz. dei Lincei, Vol. VII, Sed. 1, Aprile 1928: *Espressione analitica delle grandezze fisiche discontinue e diagrammi che ad esse corrispondono.*

macchina nè di un animale si possono ingrandire indefinitamente le dimensioni senza variarne contemporaneamente la forma.

Scriveva egli, riferendosi al diminuire della resistenza delle macchine col crescere delle loro dimensioni: « .... sicchè ultimamente non solo di tutte le macchine e fabbriche artificiali, ma delle naturali ancora sia un termine necessariamente ascritto, oltre al quale nè l'arte nè la natura possa trapassare; trapassar dico con osservar sempre l'istesse proporzioni coll'identità della materia ».

E relativamente agli animali: « .... la natura non potrebbe fare un cavallo grande per venti cavalli, nè un gigante dieci volte più alto di un uomo, se non o miracolosamente, o coll'alterar assai le proporzioni delle membra, ed in particolare delle ossa ingrossandole molto e molto sopra la simmetria delle ossa comuni ».

Queste osservazioni ci fanno intendere che mentre le figure dello spazio geometrico, ed anche di quello cinematico (del quadrimensionale crono-cosmo) possono variare indefinitamente di dimensione conservandosi sempre simili a se stesse, cosicchè, nello spazio euclideo per lo meno non vi è alcun carattere che ne riveli la grandezza, di un sistema materiale invece effettivamente esistente nello spazio fisico non si possono arbitrariamente variare le dimensioni senza alterarne le forme o cambiare la natura delle sostanze delle quali è composto.

Di questa variazione di forma imposta dal vincolo dell'osservanza di certe condizioni fisiche si può trar partito, come ho mostrato nel caso particolare qui esposto, per costruire delle superficie o delle curve le quali, con i valori di certi loro elementi geometrici, angoli o rapporti di grandezze omogenee, forniscono il valore della dimensione effettiva del sistema espresso in unità arbitrariamente date.

Si scorge che in tal modo accanto alle costanti fisiche naturalmente esistenti se ne possono aggiungere altre arbitrariamente costruite. In quest'ordine d'idee rientra ad esempio l'unità assoluta di tempo proposta da LIPPMANN (1) col nome di « *ora naturale* », e che costituisce una costante fisica artificialmente costruita in sostituzione della unità di tempo ora usata, che è una grandezza solo praticamente costante (2).

---

(1) C. R. des Séances de l'Ac. des Sciences, 8 V., 1899: *Sur la mesure absolue du temps déduite des lois de l'attraction universelle.*

(2) Si vegga su questo soggetto anche M. PETROVICH: *Durées physiques indépendantes des dimensions spatiales.* Zurich, 1924. Imprimerie Jean Frey S. A.

M. PICONE (Napoli - Italia)

SUL PROBLEMA DELLA PROPAGAZIONE DEL CALORE IN UN MEZZO PRIVO DI FRONTIERA, CONDUTTORE, ISOTROPO E OMOGENEO

Il problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera (che cioè riempie tutto lo spazio) conduttore, isotropo e omogeneo si pone al modo seguente: *Nota la temperatura* $U(x, y, z)$, *al tempo* $t=0$, *in ogni punto* $M(x, y, z)$ *del mezzo, calcolarne la temperatura* $u(x, y, z, t)$ *in ogni punto* $M(x, y, z)$ *e per ogni istante successivo* t.

Scelte opportune unità di misura si dimostra che la u è, per $t>0$, soluzione della seguente equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine del tipo parabolico:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=0; \tag{1}$$

e pertanto la funzione incognita u deve verificare tale equazione ed inoltre la condizione iniziale

$$u(x, y, z, 0)=U(x, y, z). \tag{2}$$

Posto, nell'ipotesi che $U(x, y, z)$ sia continua e limitata,

$$u(x, y, z, t)=\frac{1}{8(\pi t)^{\frac{3}{2}}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta, \zeta)e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4t}}d\xi d\eta d\zeta, \tag{3}$$

è notissimo ed è ben facile verificare che tale u soddisfa le equazioni (1) e (2).

Ora si può domandare: è lecito, dopo ciò, asserire senz'altro — come si fa d'ordinario in fisica-matematica [1] — che il posto problema della propagazione del calore è risoluto dalla formola (3)?

Affermativamente si potrebbe rispondere se si fosse stabilito che le equazioni (1) e (2) determinano univocamente ogni funzione u che le soddisfi. Ma, che io mi sappia, non si è mai pensato di stabilire ciò con l'appoggio di eventuali ulteriori circostanze fisiche che siano accettabili a priori. Ovviamente, tale non è, per esempio, quella dell'olomorfia della $u(x, y, z, t)$ in ogni punto $(x, y, z, 0)$. In tale circostanza, *di significato puramente analitico*, l'assegnata funzione

---

[1] Cfr., per esempio, il recentissimo articolo di R. FÜRTH: *Wärmeleitung und Diffusion* (pp. 200-203) nel libro di PH. FRANK: *Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, zweiter physikalischer Teil (Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1927).

$U(x, y, z)$ deve pur essa riuscire funzione olomorfa in ogni punto dello spazio, ed allora l'unica possibile soluzione delle (1) e (2), olomorfa in ogni punto $(x, y, z, 0)$, è fornita — com'è noto e subito visto — dalla serie

$$u = U + \frac{t}{1!}\Delta_2 U + \frac{t^2}{2!}\Delta_4 U + \ldots + \frac{t^n}{n!}\Delta_{2n} U + \ldots$$

Si potrebbe pensare che, restringendoci a considerare distribuzioni iniziali della temperatura rappresentate da funzioni $U(x, y, z)$ olomorfe in ogni punto dello spazio, le soluzioni $u(x, y, z, t)$ delle (1) e (2) debbano riuscire di conseguenza esse pure funzioni olomorfe delle x, y, z, t in ogni punto $(x, y, z, 0)$, ciò che porterebbe al teorema d'unicità in tale caso particolare importante. Ma non è così. Com'è noto, vi sono esempii di soluzioni della (1) che, per $t=0$, si riducono a funzioni olomorfe delle tre variabili x, y, z, e che, non ostante, non sono funzioni delle quattro variabili x, y, z, t olomorfe, in ogni punto $(x, y, z, 0)$.

Nel caso particolare che si possa ritenere la u dipendente soltanto da una sola coordinata del punto M, il GOURSAT, nel suo *Cours d'Analyse mathématique* (1), non ha mancato di esaminare con ogni cura la questione: Fatta l'ipotesi che la u dipenda dalla sola x, essa deve verificare le equazioni:

$$(4) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0, \\ u(x, 0) = U(x); \end{cases}$$

ebbene, GOURSAT dimostra che, supposta la funzione $U(x)$ continua e limitata, le (4) determinano univocamente la $u(x, t)$ se si impongono a questa le ulteriori condizioni seguenti:

A) la funzione $u(x, t)$ è limitata pur essa al variare di x e di t;

B) la derivata parziale $u_x(x, t)$ della u deve esser tale che, comunque si scelga la costante positiva k, il prodotto

$$u_x(x, t)e^{-kx^2},$$

riesca funzione di x e di t limitata al variare di x e di t.

Ora non mi sembra che tali ulteriori condizioni siano entrambe fisicamente assumibili a priori. La prima lo è certamente, anzi, sol che si rifletta un istante, apparirà fisicamente intuitivo da, detti l e L gli estremi inferiore e superiore di $U(x)$, i medesimi estremi dovrà ammettere la $u(x, t)$ al variare di x e di t. Ma non così può dirsi della seconda condizione: per esempio, non si capisce perchè, per ogni fissato valore $\bar{x}$ di x, la derivata parziale $u_x(\bar{x}, t)$ della temperatura, debba mantenersi limitata al crescere indefinito di t.

---

(1) GOURSAT E.: *Cours d'Analyse mathématique* (Paris, Gauthier-Villars, 1915), tome III, pp. 301 e 313.

In questa comunicazione mi propongo di indicare come si possa dimostrare che ulteriore unica condizione che occorre soltanto aggiungere, dipenda la u da quante si vogliano coordinate del punto M, per potere asserire che essa riesce univocamente determinata dalle equazioni (1) e (2), è precisamente la A); cioè, nel caso nostro più generale, la seguente:

A) Supposta la $U(x, y, z)$ funzione limitata, tale deve risultare anche la $u(x, y, z, t)$ al variare del punto (x, y, z) nello spazio e al crescere indefinito di t [1].

Il risultato è contenuto, come caso particolarissimo, in una mia recente memoria dal titolo: *Maggiorazione degli integrali delle equazioni totalmente paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, insignita del premio Tenore dall'Accademia Pontaniana di Napoli (nella seduta del 10 giugno 1928) [2]. Ma non è agevole estrarre detto risultato dalla massa dei teoremi di quella memoria e qui, restringendomi a considerare la particolare equazione seguente del tipo parabolico

$$E(u) \equiv \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} + cu = f, \tag{5}$$

nelle $n+1$ variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, nella quale rientra la (1), enuncerò quei teoremi che, con la più diretta coordinazione, conducono, come caso particolare, al teorema di unicità del quale sopra ho discorso [3].

1. - Proprietà fondamentali delle soluzioni. — Designeremo con $S_{(n+1)}$ lo spazio enclideo a $n+1$ dimensioni dal punto P di coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$, con D un qualunque dominio internamente connesso di $S_{(n+1)}$, con FD la frontiera di D. Della frontiera di D considereremo qui, in modo speciale, quella parte, che indicheremo con $F_{-t}D$, totalità dei punti verificanti le seguenti proprietà: 1ª) in ogni

---

[1] Che così sia stato conseguito un *atteso* progresso nella trattazione analitica della questione è autorevolmente provato dalle seguenti parole che PICARD pronunciava, or son venticinque anni, nel suo discorso: *Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres Sciences* [Paris, Gauthier-Villars, 1905] tenuto al Congresso delle Arti e Scienze di Saint-Louis (1904):

« Il est parfois délicat de démontrer que des conditions déterminent d'une manière unique une solution, quand on ne veut pas se contenter de vraisemblances; il faut alors préciser la manière dont se conduisent la fonction et certaines de ses dérivées. *Ainsi, dans le problème de Fourier relatif à un milieu indéfini, certaines hypothèses doivent être faites sur la fonction et ses dérivées premières à l'infini, si l'on veut établir que la solution est unique* ».

[2] Pubblicata negli Annali di Matematica pura ed applicata, tomo VII della Serie IV (pp. 145-192), 1929-30.

[3] Una redazione più estesa della presente comunicazione, insieme alle dimostrazioni dei teoremi enunciati, è comparsa, in grazia della gentile concessione del Prof. COURANT, nei Mathematische Annalen, Bd. 101 (pp. 701-712), 1929.

punto di $F_{-t}D$ esistono la normale alla FD e un intorno circolare, su FD, tutto costituito di punti di $F_{-t}D$; 2ª) la normale alla FD in ogni punto di $F_{-t}D$, volta verso l'interno di D, ha sempre la direzione dell'asse t e verso contrario (1).

Nel dominio D siano assegnate le funzioni reali finite e continue $a_{hk}(P)$, $b_h(P)$, $c(P)$, $f(P)$ $(h, k=1, 2, \ldots, n)$ del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, essendo $a_{hk} \equiv a_{kh}$ e la forma quadratica nelle λ

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}(P)\lambda_h\lambda_k,$$

conservandosi, in ogni punto di D, definita o semidefinita positiva. Una funzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ sarà detta *soluzione* in D dell'equazione (5) se: 1°) è continua in D, 2°) nei punti interni a D e su $F_{-t}D$ è dotata delle derivate parziali che compaiono in $E(u)$ finite e continue e verificanti, con la u, l'equazione (5).

Sussistono i seguenti teoremi:

I. *Il dominio D sia limitato. Se, ovunque in D, è $f(P) \leqq 0$, ogni soluzione della* (5) *sempre positiva o nulla su $FD - F_{-t}D$ tale si conserva in tutto D, se, ovunque in D, è $f(P) \geqq 0$, ogni soluzione della* (5) *sempre negativa o nulla su $FD - F_{-t}D$ tale si conserva in tutto D.*

II. *Comunque si assegni f in D, supposto limitato, una soluzione dell'equazione* (5) *è completamente determinata in D, quando se ne conoscono i valori su $FD - F_{-t}D$.*

III. *Il dominio D sia limitato ed inoltre in D sia sempre $c(P) \leqq 0$. Ogni soluzione dell'equazione omogenea $E(u) = 0$ consegue su $FD - F_{-t}D$ il massimo del suo modulo in D. Se poi $c(P)$ è identicamente nullo in D, se cioè l'equazione omogenea $E(u) = 0$ si riduce alla seguente*

$$\sum_{h,k=1}^{n} a_{hk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h=1}^{n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

ogni sua soluzione consegue su $FD - F_{-t}D$ tanto il minimo che il massimo suo valore in D.

2. - Caso dei dominii illimitati. — Di grande interesse, specialmente nei riguardi dell'applicazione ai problemi di propagazione e di diffusione, è la considerazione dei problemi al contorno per l'equazione (5) nel caso che il dominio D

---

(1) Per esempio: la frontiera di una sfera dello spazio (x, y, t) non è dotata della parte F_{-t}; la frontiera di un parallelepipedo rettangolare dello spazio (x, y, t), con gli spigoli paralleli agli assi coordinati, ha per parte F_{-t} la totalità dei punti interni alla faccia più alta; la frontiera del dominio limitato dalla superficie di due cubi concentrici di lato diverso ha per parte F_{-t} la totalità dei punti interni alla faccia più alta del cubo di lato maggiore e alla faccia più bassa del cubo di lato minore.

non sia limitato. Per ottenere enunciati brevi adotterò la notazione seguente. Se l'insieme illimitato A, di punti dello spazio $S_{(n+1)}$, si estende a distanza infinita nella direzione e nel verso dell'asse t, per ogni assegnata quantità T denoterò con $A^{(T)}$ quella parte di A luogo dei punti la cui t non è superiore a T. Sussistono i teoremi:

IV. *Il dominio D sia illimitato e si estenda all'infinito nella direzione e nel verso dell'asse t, ed inoltre in D sia sempre $c(P) \leqq 0$. Le funzioni reali e continue $\varphi(P)$ e $\Phi(P)$ siano assegnate e definite, la prima, su $FD - F_{-t}D$ e la seconda in D, e, quando $FD - F_{-t}D$ sia illimitata, si abbia, per ogni T,*

$$\lim_{P\to\infty} [\varphi(P) - \Phi(P)][\text{su } (FD - F_{-t}D)^{(T)}] = 0.$$

Allora, una soluzione u della (5) *risulta completamente determinata quando ad essa si prescriva di verificare per ogni T, le condizioni*

$$\begin{cases} u(P) \text{ su } FD - F_{-t}D = \varphi(P) \\ \lim\limits_{P\to\infty} [u(P) - \Phi(P)](\text{su } D^{(T)}) = 0. \end{cases}$$

V. *Il dominio D sia illimitato e si estenda all'infinito nella direzione e nel verso dell'asse t. Se, per ogni T, è sempre possibile costruire in $D^{(T)}$ una funzione $\omega(T, P)$, ivi sempre positiva, continua con le derivate*

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_h \partial x_k}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_h}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t}$$

e per la quale riesca

$$E[\omega(T, P)] \leqq 0, \text{ in } D^{(T)},$$

supposto che, quando $FD - F_{-t}D$ sia illimitata, si abbia, per ogni T,

$$\lim_{P\to\infty} \frac{\varphi(P) - \Phi(P)}{\omega(T, P)} [\text{su } (FD - F_{-t}D)^{(T)}] = 0,$$

una soluzione u della (5) *risulta completamente determinata quando ad essa si prescriva di verificare, per ogni T, le condizioni*

$$u(P) \text{ su } FD - F_{-t}D = \varphi(P),$$
$$\lim_{P\to\infty} \frac{u(P) - \Phi(P)}{\omega(T, P)} (\text{su } D^{(T)}) = 0.$$

3. - Applicazione al problema della propagazione del calore. — Consideriamo ora il caso particolare dell'equazione

$$E(u) \equiv \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial t} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{6}$$

la quale, per $n = 1, 2, 3$, si riduce all'equazione della propagazione del calore, la temperatura dipendendo, rispettivamente, da una, da due, da tutte le coordi-

nate del punto del mezzo a cui si riferisce. Corollario immediato del teorema V è il seguente:

VI. *Comunque si definisca nell'iperpiane $t=0$ di $S_{(n+1)}$ una funzione continua $U(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, se esiste una costante reale a per la quale il prodotto*

$$U(x_1, x_2, \ldots, x_n)e^{-a\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}} \tag{7}$$

riesce limitato nel detto iperpiano, nel dominio illimitato D in cui consiste il semispazio di $S_{(n+1)}$ luogo dei punti per cui $t \geqq 0$, non può esistere più di una soluzione $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ della (6) che soddisfi alla condizione iniziale

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, 0) = U(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{8}$$

e per la quale, per ogni quantità positiva T, al variare del punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nell'iperpiano $t=0$ e di t nell'intervallo $(0, T)$, il prodotto

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)e^{-a\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}} \tag{9}$$

risulti limitato.

Ed invero, posto $\varrho = (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ e detta $J_\mu(\varrho)$ la funzione di BESSEL d'ordine μ, la funzione

$$\omega = X_n(\beta\varrho)e^{\beta t},$$

ove

$$X_n(\beta\varrho) = (\beta\varrho)^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(i\beta\varrho) = (n-2)!! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta\varrho)^{2k}}{(2k)!!\ (n+2k-2)!!},$$

intendendo che, per ogni numero naturale N, il simbolo $N!!$ designi il prodotto di tutti i numeri naturali non superiori a N, aventi la stessa parità di N ed essendo β una qualsiasi costante positiva, è soluzione della (6), sempre positiva. Il teorema V ci consente dunque di dire che, risultando

$$\lim_{\varrho \to \infty} \frac{U(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{X_n(\beta\varrho)} = 0, \tag{10}$$

nel semispazio D non può esistere più di una soluzione della (6) verificante la condizione iniziale (8) e, per ogni T, l'ulteriore

$$\lim_{P \to \infty} \frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)}{X_n(\beta\varrho)e^{\beta t}} (\text{su } D^{(T)}) = 0. \tag{11}$$

Ma, in virtù delle ipotesi del teorema, esistono due quantità H e $K(T)$ per le quali riesce

$$\frac{|U(x_1, x_2, \ldots, x_n)|}{X_n(\beta\varrho)} < \frac{He^{a\varrho}}{X_n(\beta\varrho)} \text{ nell'iperpiano } t=0,$$

$$\frac{|u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)|}{X_n(\beta\varrho)e^{\beta t}} < \frac{K(T)e^{a\varrho}}{X_n(\beta\varrho)} \text{ [su } D^{(T)}],$$

e quindi, essendo la $X_n(\beta\varrho)$, per $\varrho \to \infty$, infinitamente grande d'ordine almeno eguale a quello di $e^{\beta\varrho}$, se fissiamo per β un qualsiasi valore positivo maggiore

della quantità a, possiamo dire che dal verificarsi delle ipotesi del teorema segue il verificarsi delle (10) e (11), per il detto valore di β, donde l'unicità della u.

Col teorema VI è dimostrato assai più di quanto occorra per poter dedurre il teorema d'unicità per il problema della propagazione del calore con l'ulteriore unica condizione A), poichè se nei prodotti (7) e (9) facciamo $a=0$, otteniamo per la $U(x_1, x_2,...., x_n)$ la condizione di conservarsi limitata nell'iperpiano $t=0$ e per la $u(x_1, x_2,...., x_n, t)$ l'ulteriore unica condizione — meno restrittiva della A) — di conservarsi, per ogni T, limitata in $D^{(T)}$, non venendo dunque escluso che l'estremo superiore di $|u|$ in $D^{(T)}$, supposto finito, possa comunque crescere al crescere di T.

Nelle ipotesi generali del teorema VI è facile poi verificare che la nota formola

$$u(x_1, x_2,...., x_n, t)=\frac{1}{2^n(\pi t)^{n/2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}....\int_{-\infty}^{+\infty}U(\xi_1, \xi_2,...., \xi_n)e^{-\frac{1}{4t}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\xi_k)^2}d\xi_1, d\xi_2,...., d\xi_n,$$

fornisce la richiesta soluzione della (6). Per esempio, per $n=3$, se

$$|U(x_1, x_2,...., x_n)e^{-a\varrho}|\leqq H,$$

si trova

$$|ue^{-a\varrho}|\leqq\frac{4}{\sqrt{\pi}}H\int_0^{+\infty}e^{2a\sqrt{T}s}e^{-s^2}s^2ds, \text{ in } D^{(T)}.$$

G. A. MAGGI (Milano - Italia)

SULLA PROPAGAZIONE DI ONDE DI FORMA QUALSIVOGLIA DA UN MEZZO ISOTROPO IN UN ALTRO

Il Prof. G. A. MAGGI richiama l'attenzione sul sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, del 2° ordine,

$$a\Delta_2 f_1 + 2\alpha\frac{\partial f_2}{\partial r} + \alpha\left(\frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r}\right) f_2 = 0,$$
$$a\Delta_2 f_2 - 2\alpha\frac{\partial f_1}{\partial r} - \alpha\left(\frac{1}{R+r} + \frac{1}{S+r}\right) f_1 = 0$$

da lui stabilito (*Sulla propagazione di onde di forma qualsivoglia nei mezzi isotropi*, Rendic della R. Acc. dei Lincei (5) Vol. XXIX) come condizione necessaria e sufficiente perchè la quantità, scalare o vettoriale,

$$\psi(P, t) = f_1(P)\cos\alpha\left(\frac{r}{a} - t\right) + f_2(P)\sin\alpha\left(\frac{r}{a} - t\right)$$

che si propaga per onde armoniche, parallele, di forma qualsivoglia, colla velocità di propagazione a, soddisfaccia all'equazione di d'Alembert

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = a^2\Delta_2\psi.$$

Le condizioni relative alla riflessione e rifrazione di onde come le suddette alla superficie di separazione di due mezzi isotropi, le quali nel caso di onde piane e di una superficie piana, valgono a determinare i valori dei noti elementi costanti, servono, nell'accennato caso generale, alla determinazione delle funzioni arbitrarie appartenenti alle soluzioni f_1 e f_2 delle equazioni differenziali (1).

Il problema apparisce già abbastanza complicato con le ipotesi più semplici, dopo quella delle onde e della superficie piana: poichè con superficie piana e onde incidenti sferiche, le onde riflesse sono parimenti onde sferiche, ma le rifratte sono superficie parallele ad un iperboloide o ad un ellissoide di rotazione.

B. M. SEN (Calcutta - India)

WAVES IN CANALS AND BASINS

The problem of wave-motion in canals and basins have been solved in only a few cases. These are horizontal canals with (*a*) rectangular section, (*b*) section [1] consisting of two straight lines inclined at 45° to the vertical, (*c*) section [2] consisting of two straight lines inclined at 60° to the vertical. For basins, the only known cases are basins [3] with a rectangular or circular boundary and a plane bottom.

Horizontal cylindrical canals.

Taking the upward vertical as the z-axis, the x-axis horizontal parallel to the generators of the cylinder, the y-axis horizontal perpendicular to the generators, and the origin at the undisturbed free surface, let the equation of the section be written as

(1) $$y=\chi(z).$$

If Φ be the velocity-potential, it satisfies the equation of continuity

(2) $$\nabla^2\Phi=0$$

within the mass of the liquid, the equation

(3) $$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0$$

at the boundary

$$y=\chi(z)$$

and

(4) $$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0$$

at the free surface,

$$z=0.$$

If we take

$$\Phi=P(y,z)\ \mathrm{Cos}\ kxe^{i\sigma t}$$

---

(1) RELLAND, Trans. Royal Soc. Edin., 14, (1839), 497-546.

(2) MACDONALD, Proc. London Math. Soc. (1), 25, (1894), 101-111.

(3) LAMB: *Hydrodynamics*, fifth edition, 416.

these reduce to

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=k^2 P. \tag{5}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial \chi}{\partial z}=0 \qquad \text{when} \quad y=\chi(z), \tag{6}$$

and

$$\sigma^2 P=g\frac{\partial P}{\partial z} \qquad \text{when} \quad z=0. \tag{7}$$

The problem is to find the function P for any prescribed section.

It is easily verified that

$$P=\left(1+\frac{\sigma^2}{g}z\right)f(y)+z^2F(y,z) \tag{8}$$

is a solution of (5), $f(y)$ and $F(y,z)$ being arbitrary holomorphic functions of their respective variables. We assume the expansion

$$F(y,z)=f_0(y)+zf_1(y)+z^2f_2(y)+.... \tag{9}$$

whose validity will have to be tested for each individual case.

Equation (5) then gives

$$P=\left\{\operatorname{Cosh} zD+\frac{\sigma^2}{gD}\operatorname{Sinh} zD\right\}f(y) \tag{10}$$

where $D^2=k^2-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$.

This is a functional equation for the determination of P. Since it is an even function of D, the question of its sign does not arise. The arbitrary function $f(y)$ for any given section will be determined by (6). Or, we may find the value of P corresponding to any chosen value of $f(y)$ and then proceed to find the appropriate boundary for which the solution holds.

Putting

$$f(y)=\exp kmy$$

we get $D^2=k^2n^2$, where $m^2+n^2=1$. We have, therefore,

$$P=\left\{\operatorname{Cosh} knz+\frac{\sigma^2}{gkn}\operatorname{Sinh} knz\right\}e^{kmy}, \tag{11}$$

which leads to the solutions of Kelland and MacDonald for rectilinear sections mentioned above.

Putting

$$f(y)=y$$

we get the corresponding value of P,

$$P=y\left\{\operatorname{Cosh} kz+\frac{\sigma^2}{gk}\operatorname{Sinh} kz\right\}. \tag{12}$$

Substituting in (6), we have

$$ky\frac{dy}{dz}=\frac{\operatorname{Cosh} kz+(\sigma^2/gk)\operatorname{Sinh} kz}{\operatorname{Sinh} kz+(\sigma^2/gk)\operatorname{Cosh} kz}, \tag{13}$$

as the equation of the section. We have

$$Ae^{\frac{1}{2}k^2y^2} = \text{Sinh } kz + \frac{\sigma^2}{gk}\text{Cosh } kz, \tag{14}$$

where A is an arbitrary constant.

If $y=0$ when $z=-h$, this becomes

$$e^{\frac{1}{2}k^2y^2} = \frac{\text{Sinh } kz + (\sigma^2/gk)\text{ Cosh } kz}{-\text{ Sinh } kh + (\sigma^2/gk)\text{ Cosh } kh}. \tag{15}$$

In particular, if $\sigma^2=gk$, the equation (15) takes the algebraic form

$$y^2=\frac{2}{k}(z+h),$$

and

$$P=ye^{kz}.$$

The wane form obtained from the real part of φ is given by

$$\zeta=-\frac{\sigma}{g}y\text{ Cos }kx\text{ Sin }\sigma t.$$

which is possible along a parabolic cylindrical canal.

Basins.

The origin of Co-ordinates being taken at the undisturbed surface and z-axis vertically upwards, the velocity-potential satisfies the three equations (2), (3), (4). A time-factor exp. $i\sigma t$ being understood, equation (4) may be written in the form

$$\sigma^2\Phi=g\frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

An expression for φ can be written in the form

$$\Phi=\left(1+\frac{\sigma^2}{g}z\right)f(x,y)+z^2F(x,y,z), \tag{16}$$

and this satisfies the equation (4). Assuming that the function F can be expanded in ascending powers of z, we may write

$$\Phi=\left(1+\frac{\sigma^2}{g}z\right)f(x,y)+z^2\{f_0(x,y)+zf_1(x,y)+z^2f_2(x,y)....\}. \tag{17}$$

Substituting in (2), we get

$$\Phi=\left(\text{Cos }+z\nabla_1\frac{\sigma^2}{g\nabla_1}\text{Sin }z\nabla_1\right)f(x,y) \tag{18}$$

where $f(x,y)$ is an arbitrary function and

$$\nabla_1^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

A solution in finite terms is obtained if we take $f(x, y)$ to satisfy

$$V_1^2 f = 0.$$

This gives

$$\Phi = \left\{1 + \frac{\sigma^2}{g} z\right\} f(x, y). \tag{19}$$

The corresponding boundary will be given by $z = \chi(x, y)$ where

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

or

$$\left(1 + \frac{\sigma^2}{g} z\right)\left\{f_x \frac{\partial z}{\partial x} + f_y \frac{\partial z}{\partial y}\right\} = \frac{\sigma^2}{g} f.$$

By Lagrange's method, the subsidiary equations are

$$\frac{dx}{(1+\sigma^2/gz)f_x} = \frac{dy}{(1+\sigma^2/gz)f_y} = \frac{dz}{\sigma^2/gf}.$$

If we take

$$f(x, y) = Ar^n \operatorname{Cos} n\theta + Br^n \operatorname{Sin} n\theta,$$

one solution of the subsidiary equations is

$$Br^n \operatorname{Cos} n\theta - Ar^n \operatorname{Sin} n\theta = C.$$

A second solution is given by

$$\frac{x dx + y dy}{n} = \left(\frac{g}{\sigma^2} + z\right) dz$$

or,

$$\frac{x^2 + y^2}{n} - \left(z + \frac{g}{\sigma^2}\right)^2 = D.$$

The boundary is given by

$$\frac{x^2 + y^2}{n} - \left(z + \frac{g}{\sigma^2}\right)^2 = F(Br^n \operatorname{Sin} n\theta - Ar^n \operatorname{Cos} n\theta),$$

where F is arbitrary.

Putting $n = 1$ or 2 and giving suitable forms to F, we get varions quadric surfaces.

Putting $f(x, y) = \operatorname{Cos}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{Cos}\frac{n\pi y}{b}$ in (19), we get

$$\Phi = \left(\operatorname{Cosh} kz + \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{Sinh} kz\right) \operatorname{Cos}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{Cos}\frac{n\pi y}{b}.$$

where $k^2 = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2$.

This gives the motion inside a rectangular basin of sides a and b and depth h, the speed being given by

$$\frac{\sigma^2}{gk} = \tanh kh.$$

For motion symmetrical about the z-axis, we have

$$\Phi = \left\{ \operatorname{Cos} z\nabla_1 + \frac{\sigma^2}{g\nabla_1} \operatorname{Sin} z\nabla_1 \right\} f(\tilde{\omega})$$

where $\nabla_1^2 = \dfrac{d^2}{d\tilde{\omega}^2} + \dfrac{1}{\tilde{\omega}} \dfrac{d}{d\tilde{\omega}}$.

If we put

$$\nabla_1^2 f(\tilde{\omega}) = -k^2 f(\tilde{\omega})$$
$$f(\tilde{\omega}) = J_0(k\tilde{\omega})$$

and

$$\Phi = \left(\operatorname{Cosh} kz + \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{Sinh} kz \right) J_0(k\tilde{\omega}).$$

The corresponding boundary is given by

$$\frac{\operatorname{Cosh} kz + (\sigma^2/gk) \operatorname{Sinh} kz}{\operatorname{Sinh} kz + (\sigma^2/gk) \operatorname{Cosh} kz} dz = \frac{J_0(k\tilde{\omega})}{J_0'(k\tilde{\omega})} d\tilde{\omega}.$$

Now

$$J_0(k\tilde{\omega}) = J_1'(k\tilde{\omega}) + \frac{1}{k\tilde{\omega}} J_1(k\tilde{\omega})$$
$$J_0'(k\tilde{\omega}) = -J_1(k\tilde{\omega}).$$

The boundary is, therefore,

$$k\tilde{\omega} J_1(k\tilde{\omega}) \left\{ \operatorname{Sinh} kz + \frac{\sigma^2}{gk} \operatorname{Cosh} kz \right\} = A.$$

As z cannot be finite when $\tilde{\omega}$ is zero, the basin is of infinite depth.

G. GIORGI (Roma - Italia)

SUL CALCOLO SPAZIALE PIÙ ESTESO

1. - Il calcolo vettoriale denota con un simbolo unico un ente che ha grandezza e orientazione. Preso nella sua forma minima, permette di rappresentare un punto senza ricorrere ai tre assi coordinati, ma non senza ricorrere all'origine. Aggiungendo alla notazione di vettore quella di punto, come hanno fatto HAMILTON, BURALI-FORTI e MARCOLONGO, quest'ultima limitazione è rimossa. Ma quando si vuole esprimere posizioni di rette, di piani, distanza fra punti e piani, rotazioni, angoli di piani, vettori localizzati, motori e altri operatori geometrici, il calcolo vettoriale non ha mezzo diretto, e deve ricorrere a enti di riferimento o enti ausiliari e altri mezzi indiretti i quali intervengono come un sistema di riferimento estraneo.

I sistemi più estesi (che BURALI-FORTI e MARCOLONGO chiamavano sistemi massimi), come il calcolo dei quaternioni, l'*Ausdehnungslehre* di GRASSMANN e di PEANO, il sistema proposto da MACFARLANE, il calcolo delle diadiche (od omografie vettoriali), e simili, hanno permesso estensioni soltanto parziali, e vengono in conflitto fra loro, e talora anche col sistema minimo. Lo sviluppo di alcuni di questi sistemi di calcolo è rimasto anche incompleto per l'indirizzo unilaterale con cui sono stati trattati, e per aver voluto o dovuto fondarli esclusivamente sul calcolo vettoriale, in mancanza di una base più estesa. Per esempio si vedrà che nelle definizioni inerenti alle omografie vettoriali, BURALI-FORTI e MARCOLONGO hanno dovuto frequentemente ricorrere a tre vettori ausiliari **u**, **v**, **w**, del tutto equivalenti alla terna cartesiana che si voleva evitare.

Ora, mi sono proposto il problema: È possibile trovare un metodo che dia il calcolo geometrico completo nello spazio, e da cui come semplice deduzione e senza convenzioni arbitrarie si ricavino le notazioni convenienti pei vari sistemi minimi e in particolare per quello vettoriale?

In quanto segue, mostro che la risposta è affermativa, e il calcolo che si costruisce permette di operare su formazioni analitiche qualunque coi simboli rappresentativi degli enti geometrici, con un'algebra associativa che forma sistema chiuso in sè e coerente, come era quella dei quaternioni.

* * *

2. - Consideriamo lo spazio formato di punti, e ad ogni punto per maggiore generalità possa venire associato uno scalare (numero puro o scalare fisico); cioè il punto generico sia caricato di una massa o *peso*, per usare il linguaggio di MÖBIUS: è un sistema ∞^4 di punti caricati o *centroidi* quello che si considera. Qual'è la trasformazione lineare più generale possibile in questo spazio? Ricorriamo a un sistema di coordinate baricentriche. Prendiamo un tetraedro $ABCD$ come sistema di riferimento. Se $\mathbf{M}$ è un centroide generico dello spazio, è sempre possibile, e in un modo solo, attribuire ai vertici del tetraedro quattro masse x_1, x_2, x_3, x_4, tali che il baricentro di questi punti A, B, C, D cada in $\mathbf{M}$, con una massa $x_1+x_2+x_3+x_4$ uguale alla massa del centroide (1). Allora x_1, x_2, x_3, x_4 sono le quattro coordinate di $\mathbf{M}$; generalizzazione ovvia delle coordinate baricentriche di MÖBIUS.

La trasformazione lineare più generale fra centroidi si avrà facendo corrispondere al centroide generico $\mathbf{M}=(x_1x_2x_3x_4)$ un altro centroide $\mathbf{M}'=(x_1'x_2'x_3'x_4')$, con formole di passaggio di questo tipo

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1' = \varphi_{11}x_1 + \varphi_{12}x_2 + \varphi_{13}x_3 + \varphi_{14}x_4 \\ x_2' = \varphi_{21}x_1 + \varphi_{22}x_2 + \varphi_{23}x_3 + \varphi_{24}x_4 \\ x_3' = \varphi_{31}x_1 + \varphi_{32}x_2 + \varphi_{33}x_3 + \varphi_{34}x_4 \\ x_4' = \varphi_{41}x_1 + \varphi_{42}x_2 + \varphi_{43}x_3 + \varphi_{44}x_4 . \end{cases}$$

Quest'operazione, considerata come trasformazione di punti, è un'omografia generale dello spazio. Considerandola come trasformazione lineare generale tra centroidi, abbiamo il vantaggio che tanto le x quanto le φ ricevono significato come parametri concreti, e non solamente come coordinate omogenee; cioè tutte le loro grandezze singole, anzichè i soli loro rapporti, vengono in conto. Noi possiamo indicare questa trasformazione con un simbolo Φ, in guisa da scrivere

$$(2)\qquad \mathbf{M}' = \Phi\mathbf{M}.$$

L'ente matematico Φ è un ente a 16 parametri, perchè rispetto al sistema di riferimento prescelto è individuato dall'insieme, cioè dalla matrice, dei suoi 16 coefficienti φ_{rs}. Sottintendendo quel determinato riferimento, possiamo uguagliarlo alla matrice medesima, così

$$(3)\qquad \Phi = \| \varphi_{rs} \| = \begin{Vmatrix} \varphi_{11}, & \varphi_{12} \cdots \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \varphi_{44} \end{Vmatrix}$$

(1) E si ha anche un vettore come caso limite del centroide, quando $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$, perchè un vettore, come è noto, equivale a un centroide infinitamente piccolo e lontano.

ma beninteso, alla stessa stregua con cui un vettore viene uguagliato all'insieme delle sue tre componenti. L'ente Φ ha carattere intrinseco, a differenza dei coefficienti che lo determinano; per definirlo come tale, teniamo presente che l'omografia definita da Φ possiede un tetraedro unito (tutto reale, o in parte composto di immaginari coniugati). Assumendo questo tetraedro (supposto per semplicità che non sia degenere, e non preoccupandosi dell'eventuale non realità dei suoi elementi) quale tetraedro di riferimento, e indicando con una lineetta sovrapposta le nuove coordinate, le equazioni di trasformazione assumono la forma

$$(4) \qquad \bar{x}_1' = \varrho_1 \bar{x}_1 ; \qquad \bar{x}_2' = \varrho_2 \bar{x}_2 ; \qquad \bar{x}_3' = \varrho_3 \bar{x}_3 ; \qquad \bar{x}_4' = \varrho_4 \bar{x}_4$$

il che, come è noto, corrisponde ad aver ridotto la matrice a forma canonica. Vediamo allora che la trasformazione Φ resta individuata intrinsecamente assegnando nello spazio il tetraedro unito e i quattro moltiplicatori ϱ associati ai suoi vertici. Il vantaggio della definizione intrinseca non deve però far dimenticare quelli che si ottengono ricorrendo, quando sia opportuno, alla rappresentazione mediante un tetraedro di riferimento generico.

Ora si può mostrare che gli enti Φ (eventualmente ampliati aggiungendo operazioni che trasformino centroidi in scalari) comprendono come caso particolare non solamente gli scalari, i vettori, i centroidi stessi, i rotori, i motori, le diadiche, gli operatori di omologie speciali, etc., ma anche quanto occorre per rappresentare posizioni di rette, piani, etc., e in generale tutte le operazioni e forme speciali (lineari) che interessa considerare nel calcolo geometrico-fisico; perchè ciascuno di questi enti si lascia associare biunivocamente a una trasformazione lineare dello spazio e dei suoi elementi, e quindi può essere sostituito dall'operatore corrispondente. E siccome le trasformazioni lineari (quali sono gli enti Φ), in quanto corrispondono a matrici, portano con sè il loro simbolismo e il loro algoritmo, direi quasi obbligato, che dipende da convenzioni generali di analisi, segue che da questo simbolismo si ricavano le notazioni adatte per qualunque calcolo geometrico minimo e massimo, con una regola unica senza pericolo di possibili conflitti. I prodotti di questo algoritmo essendo associativi, il calcolo geometrico non si ferma alle operazioni elementari di somma e prodotti di due soli fattori come avviene nel calcolo vettoriale di GIBBS, in quello di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, etc., ma le formazioni analitiche di qualunque ordine come esponenziali, logaritmi etc., si ottengono con le regole del calcolo delle matrici senza mai dare origine a enti matematici nuovi.

Preso nella sua generalità, questo sistema di calcolo, che potrebbe chiamarsi calcolo degli *operatori tetraedrali*, dà tutte le relazioni che occorrono per la geometria projettiva [1] e per quella metrica anche non euclidea. Qui è mio

---

[1] È da notare anzi che questo metodo, che parte dalla considerazione dei centroidi

intendimento, tenendo in vista le applicazioni alla Fisica Matematica, sviluppare particolarmente solo quanto interessa le relazioni metriche nello spazio euclideo. A questo scopo basta limitare lo studio al caso che una base del tetraedro sia all'infinito; cioè in luogo del tetraedro si abbia un triedro. Si ha allora una terna di rette uscenti da un punto dello spazio (tutte reali, o una reale e due immaginarie coniugate), ciascuna con un coefficiente numerico annesso, che misura la dilatazione lungo quella retta; e non si escludono i casi che il triedro possa eventualmente riuscire degenere o indeterminato o col vertice all'infinito; i quali casi possono trattarsi come limiti di quello regolare. Questa forma corrisponde a una trasformazione molto importante per la fisica, la deformazione lineare omogenea di un mezzo continuo. In altre parole, in luogo delle omografie di tipo generale, noi consideriamo affinità, cioè operazioni che trasformano punti all'infinito in punti all'infinito. Gli enti Φ così definiti, e associati con la opportuna trasformazione nei pesi dei centroidi dello spazio, saranno qui, in mancanza provvisoria di denominazione migliore, chiamati *operatori triedrali*, o semplicemente *triedrali*. Si osserverà che un tale ente non è la stessa cosa che una diadica od omografia vettoriale: quest'ultima è un'affinità a origine fissa, o affinità nella stella di vettori; l'operatore triedrale invece contiene anche i parametri che fissano il centro di affinità.

Pel calcolo geometrico più generale possibile destinato alle applicazioni metriche e fisiche, questi triedrali sono gli elementi fondamentali, allo stesso modo come nel calcolo vettoriale lo sono i vettori.

3. - Per sviluppare il calcolo dei triedrali, occorre cercare l'espressione analitica di un operatore triedrale generico, e ricavare la corrispondente matrice che deve servire come elemento algoritmico per tutte le operazioni. A questo scopo consideriamo anzitutto una trasformazione omografica generale riferita a coordinate cartesiane anzichè baricentriche. Per ogni centroide avremo le tre coordinate x, y, z del suo punto, e la sua massa o peso, m. Le « componenti » del centroide, che corrispondono a quelle del calcolo baricentrico considerate sopra, non sono però queste. Poichè il tetraedro ha ora tre vertici a distanza infinitamente grande, deve introdursi in calcolo un simbolo ε, che rappresenti un infinitesimo del primo ordine, cioè una quantità che si farà tendere a zero dopo eseguite le operazioni e riduzioni sulle matrici e sulle altre espressioni, dove ε figurerà; questo ε è analogo al simbolo ω che CLIFFORD introdusse nelle sue ricerche sui biquaternioni (1); le potenze ε^2, ε^3, etc., in tutto il corso dei calcoli,

---

anzichè dei punti, conduce a definire anche le somme delle omografie, mentre nella geometria projettiva usuale se ne definiscono solo i prodotti.

(1) Si riconosce facilmente che se consideriamo lo spazio euclideo come limile di uno spazio ellittico il cui raggio di curvatura R tende all'infinito, si ha $\varepsilon = \frac{1}{R}$. Fare uso del

devono essere considerate come nulle ad ogni effetto. Allora le quattro componenti del centroide, quali risultano dal decomporre baricentricamente il centroide secondo un tetraedro di cui un vertice sia O, tre spigoli siano Ox, Oy, Oz, e la base opposta ad O sia indefinitamente lontana, sono

$$\varepsilon mx, \qquad \varepsilon my, \qquad \varepsilon mz, \qquad m.$$

E come caso particolare, se il centroide va anch'esso all'infinito, con massa infinitamente piccola, cioè diviene un vettore X, Y, Z, le componenti divengono

$$\varepsilon X, \qquad \varepsilon Y, \qquad \varepsilon Z, \qquad 0.$$

Premesso questo, la trasformazione omografica più generale tra centroidi, in coordinate cartesiane, assume la forma

$$(5) \qquad \begin{cases} m'x' = \varphi_{11} mx + \varphi_{12} my + \varphi_{13} mz + \varphi_{14} \dfrac{m}{\varepsilon} \\ m'y' = \varphi_{21} mx + \varphi_{22} my + \varphi_{23} mz + \varphi_{24} \dfrac{m}{\varepsilon} \\ m'z' = \varphi_{31} mx + \varphi_{32} my + \varphi_{33} mz + \varphi_{34} \dfrac{m}{\varepsilon} \\ m' = \varepsilon\varphi_{41} mx + \varepsilon\varphi_{42} my + \varepsilon\varphi_{43} mz + \varphi_{44} m. \end{cases}$$

Affinchè la trasformazione converta punti all'infinito in punti all'infinito, devono essere nulli i coefficienti φ_{41}, φ_{42}, φ_{43}. Si ha allora

$$(6) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{\varphi_{11}x + \varphi_{12}y + \varphi_{13}z + \varphi_{14}/\varepsilon}{\varphi_{44}} \\ y' = \dfrac{\varphi_{21}x + \varphi_{22}y + \varphi_{23}z + \varphi_{24}/\varepsilon}{\varphi_{44}} \\ z' = \dfrac{\varphi_{31}x + \varphi_{32}y + \varphi_{33}z + \varphi_{34}/\varepsilon}{\varphi_{44}} \\ m' = \varphi_{44} m \end{cases}$$

e con nuove notazioni dei coefficienti, scriveremo

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = f_{11}x + f_{12}y + f_{13}z + g_1 \\ y' = f_{21}x + f_{22}y + f_{23}z + g_2 \\ z' = f_{31}x + f_{32}y + f_{33}z + g_3 \\ m' = gm. \end{cases}$$

La matrice corrispondente è

$$(8) \qquad \Phi = \begin{Vmatrix} \varphi_{11} = gf_{11}, & \varphi_{12} = gf_{12}, & \varphi_{13} = gf_{13}, & \varphi_{14} = gg_1\varepsilon \\ \varphi_{21} = gf_{21}, & \varphi_{22} = gf_{22}, & \varphi_{23} = gf_{23}, & \varphi_{24} = gg_2\varepsilon \\ \varphi_{31} = gf_{31}, & \varphi_{32} = gf_{32}, & \varphi_{33} = gf_{33}, & \varphi_{34} = gg_3\varepsilon \\ \varphi_{41} = 0, & \varphi_{42} = 0, & \varphi_{43} = 0 & \varphi_{44} = g \end{Vmatrix}$$

---

simbolo ε è dunque lo stesso che riguardare lo spazio come non esattamente euclideo, ma curvo con raggio grandissimo $R = \dfrac{1}{\varepsilon}$, e nei calcoli trascurare i termini con $1/R^2$; indi, a calcoli eseguiti, passare al limite.

e nello scrivere così intendiamo come prima, che Φ rappresenti l'operatore intrinseco nello spazio, e l'uguaglianza con una matrice vale rispetto a quel particolare sistema cartesiano che si suppone prescelto.

Tenendo presente che una matrice si moltiplica per uno scalare moltiplicando uno ad uno tutti gli elementi, si può anche scrivere:

$$\Phi = g \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & g_1 e \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & g_2 e \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & g_3 e \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{9}$$

ma non deve dimenticarsi, quando si opera su Φ col calcolo delle matrici, che gli elementi della matrice Φ sono gf_{11}, gf_{12}, etc.

In molti casi, e quando non si tratta di calcolare sulle matrici, basta considerare fra le (7) solamente le prime tre equazioni, che danno x', y', z', perchè la trasformazione di m in m', essendo una trasformazione uniforme in tutto lo spazio, non ha interesse diretto.

4. - Volendo mettere in evidenza il centro unito (che è sempre reale), supposto che non sia all'infinito (caso limite che pure dobbiamo talvolta considerare), le equazioni si scrivono così:

$$\begin{cases} x' = x_0 + f_{11}(x - x_0) + f_{12}(y - y_0) + f_{13}(z - z_0) \\ y' = y_0 + f_{21}(x - x_0) + f_{22}(y - y_0) + f_{23}(z - z_0) \\ z' = z_0 + f_{31}(x - x_0) + f_{32}(y - y_0) + f_{33}(z - z_0) \\ m' = gm, \end{cases} \tag{10}$$

dove

$$\begin{cases} (1 - f_{11})x_0 - f_{12}y_0 - f_{13}z_0 = g_1 \\ -f_{21}x_0 + (1 - f_{22})y_0 - f_{23}z_0 = g_2 \\ -f_{31}x_0 - f_{32}y_0 + (1 - f_{33})z_0 = g_3 \end{cases} \tag{11}$$

e sostituendo queste espressioni nell'ultima colonna della matrice, si ha la matrice espressa in funzione degli f_{rs} e di x_0, y_0, z_0.

Nella forma canonica, cioè prendendo come origine il centro unito e come assi di riferimento i raggi uniti (senza preoccuparsi che due di essi possano non riuscire reali), si ha più semplicemente:

$$\bar{x}' = \varrho_1 \bar{x}; \qquad \bar{y}' = \varrho_2 \bar{y}; \qquad \bar{z}' = \varrho_3 \bar{z}; \qquad m' = gm \tag{12}$$

cioè la matrice si scrive così

$$\Phi = \begin{Vmatrix} g\varrho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g\varrho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\varrho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Può avvenire che alcuno degli elementi uniti divenga indeterminato entro qualche molteplicità infinita (esempi semplici: nella trasformazione identica tutti

i punti dello spazio sono centri uniti, e tutte le rette sono raggi uniti; nella rotazione intorno a un asse, tutti i punti dell'asse sono centri uniti): anche in quel caso la trasformazione canonica è applicabile scegliendo arbitrariamente fra i molteplici centri uniti e raggi uniti. Invece la rappresentazione deve essere modificata nei modi noti dalla teoria delle omografie paraboliche se il centro va all'infinito, o se due o tre raggi uniti vanno a sovrapporsi in uno (esempio: la deformazione per scorrimento). In ogni caso essa esige assi cartesiani speciali per ogni Φ che si vuol considerare, oltre che non sempre reali; e quindi è utile quando un solo operatore triedrale deve intervenire nel calcolo, non quando si deve calcolare simultaneamente su diversi triedrali, che abbiano elementi uniti diversi. Questo inconveniente è uno di quelli che sono comuni a tutte le rappresentazioni intrinseche.

Nella via delle notazioni intrinseche, si può andare però a un simbolismo più compendioso. Sia F il centro unito $x_0 y_0 z_0$; indichiamo con $\overline{\Phi}$ la diadica (omografia vettoriale) che il triedrale Φ genera tra i vettori che partono da quel centro, cioè l'omografia che corrisponde alla matrice ridotta

$$\overline{\Phi} = \| f_{rs} \| = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & f_{33} \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Se M è un punto generico dello spazio ed M' è il punto trasformato, si ha che il vettore $M-F$ viene trasformato per mezzo dell'omografia $\overline{\Phi}$, e diventa il vettore $M'-F$. Quindi vale la formola, che è la traduzione delle prime tre fra le (10):

$$M' = F + \overline{\Phi}(M-F). \tag{15}$$

Qui è rappresentata la trasformazione tra punti, senza tener conto del coefficiente g che si applica ai centroidi. Volendo includere anche g, e rappresentare l'operatore Φ sotto forma monomia in funzione dei suoi elementi intrinseci, occorre introdurre un simbolo speciale, come $\{\overline{\Phi}, F\}$ per indicare l'affinità individuata dal centro F e dalla diadica $\overline{\Phi}$. Allora si scrive

$$\Phi = g\{\overline{\Phi}, F\} \tag{16}$$

e per questa via occorrerebbe proseguire fissando altre notazioni selettive per ricavare da Φ i suoi elementi intrinseci.

5. - Come caso particolare, ricerchiamo quale forma assume la matrice di un operatore triedrale (degenere) che converta punti propri dello spazio in vettori. Se a un punto proprio x, y, z, corrisponde un vettore X, Y, Z la corrispondenza per essere lineare deve avere la forma

$$\begin{cases} X = f_{11}x + f_{12}y + f_{13}z + g_1 = f_{11}(x-x_0) + f_{12}(y-y_0) + f_{13}(z-z_0) \\ Y = f_{21}x + f_{22}y + f_{23}z + g_2 = f_{21}(x-x_0) + f_{22}(y-y_0) + f_{23}(z-z_0) \\ Z = f_{31}x + f_{32}y + f_{33}z + g_3 = f_{31}(x-x_0) + f_{32}(y-y_0) + f_{33}(z-z_0) \end{cases} \tag{17}$$

dove con x_0, y_0, z_0 è indicato quel punto dello spazio (se esiste al finito) a cui corrisponde il vettore nullo; cioè

$$(18) \qquad x_0 = \frac{\begin{vmatrix} -g_1 & f_{12} & f_{13} \\ -g_2 & f_{22} & f_{23} \\ -g_3 & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}}; \qquad y_0 = \text{etc.}; \qquad z_0 = \text{etc.}$$

Poichè, secondo abbiamo detto, il vettore X, Y, Z vale come un centroide di componenti εX, εY, εZ, 0, mentre il punto x, y, z è un centroide di componenti εx, εy, εz, 1, si vede facilmente che l'operatore triedrale che cerchiamo è definito da

$$(19) \qquad \Phi = \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & g_1\varepsilon \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & g_2\varepsilon \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & g_3\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

cioè la sua matrice differisce da quella di un triedrale non degenere, solamente per l'annullarsi dell'ultimo elemento g. Si noterà che questa matrice è di determinante nullo perchè degenere (corrisponde a un'omografia che trasforma tutto lo spazio nel piano all'infinito) ma non è identicamente nulla perchè ha elementi non nulli. Fisicamente, questa Φ corrisponde al più generale atto di moto (distribuzione di velocità) di un movimento deformatorio lineare omogeneo. Tutti i moti rigidi vi rientrano come casi particolari.

Diremo « di tipo V » questi triedrali che trasformano punti in vettori. In ognuno di essi vale come centro unito, a tutti gli effetti del calcolo, quel punto dello spazio, a cui corrisponde un vettore nullo. Se il determinante $|f_{rs}|$ è nullo, senza che siano nulli i numeratori delle frazioni che dànno x_0, y_0, z_0, esso punto è all'infinito, e si ha un caso doppiamente singolare; questo si presenta per esempio negli atti di moto rigido. Se sono invece soddisfatte le condizioni affinchè $x_0y_0z_0$ sia al finito, determinato o indeterminato, è lecito assumerlo come origine, per fare la trasformazione canonica, come nel caso non degenere; e allora si ha la matrice con l'ultima colonna tutta nulla. Da quel punto partono tre raggi (di cui almeno uno reale) lungo ciascuno dei quali il vettore trasformato di ogni punto del raggio è parallelo al raggio stesso: se questi raggi, che equivalgono ai raggi uniti del caso non degenere, sono distinti (determinati o no), possiamo assumerli come assi di riferimento per ottenere questa forma canonica

$$(20) \qquad \Phi = \left\| \begin{matrix} \varrho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

I casi invece con punto centrale all'infinito o con raggi uniti sovrapposti

dànno luogo alle forme canoniche speciali delle omografie paraboliche degeneri, ben note ai geometri della scuola moderna, e che qui per brevità non riportiamo.

* * *

6. - Operazioni sui triedrali. — Le operazioni sui triedrali si definiscono per mezzo delle corrispondenti operazioni sulle matrici rappresentative, oppure geometricamente con le operazioni intrinseche corrispondenti.

Si avrà un triedrale identificato con uno scalare s, quando le φ_{rs} della diagonale principale sono $=s$, e le altre sono nulle; cioè quando $f_{11}=f_{22}=f_{33}=1$, $g=s$, e tutti gli altri elementi sono nulli.

Si avrà un triedrale degenere quando il determinante della sua matrice è nullo; doppiamente, triplamente, degenere quando sono nulli anche i determinanti minori di terzo ordine e di secondo ordine rispettivamente. Un triedrale che sia quattro volte degenere è identicamente nullo perchè ha gli elementi φ_{rs} tutti nulli.

L'algebra dei Φ è un'algebra associativa, ma con prodotti generalmente non commutativi. Come generalmente nelle algebre congeneri, la condizione per l'annullamento di un prodotto non è come nell'algebra ordinaria, ma si enuncia così: condizione necessaria e sufficiente per la degenerescenza del prodotto è la degenerescenza di almeno uno dei fattori; condizione sufficiente ma non necessaria per l'annullamento del prodotto è l'annullamento di uno dei fattori.

Il fatto della proprietà associativa, e la possibilità di definire l'operazione inversa alla moltiplicazione, conduce a definire non solamente i prodotti di tre o più fattori, ma anche le funzioni polinomiali, e quelle razionali comunque composte; ciò che non è possibile nel calcolo vettoriale ordinario. Aggiungendo l'operazione di passaggio al limite, che non esige osservazioni particolari, si perviene a dare un significato anche a espressioni analitiche qualunque ove intervengano triedrali in qualunque numero, e ad utilizzarle per la geometria e per la fisica matematica; sempre però con le regole dell'algebra non commutativa.

Vi è però un caso importante in cui l'algebra commutativa è valevole. Questo è quando intervengono espressioni analitiche $F(\Phi)$ in cui figuri un solo triedrale Φ insieme con scalari qualunque (beninteso, che non siano funzioni degli elementi di Φ); oppure più triedrali tutti commutabili l'uno con l'altro. A queste espressioni si applica la teoria che ho dato delle funzioni delle matrici [1], e la definizione di $F(\Phi)$ consegue allora in modo diretto. Tenendo presente la rappresentazione canonica, si ha che $F(\Phi)$ è un triedrale con gli stessi elementi uniti come Φ, ma coi moltiplicatori caratteristici $F(\varrho_1)$, $F(\varrho_2)$, $F(\varrho_3)$, $F(g)$ in luogo di ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, g. Nel caso di coincidenza di due o più elementi uniti vale la

---

[1] G. GIORGI: *Sulle funzioni delle matrici.* Rendiconti Lincei, vol. VII, serie 6ª (1° sem. 1928) pp. 178-184.

formola speciale per le funzioni delle matrici paraboliche ([1]), e il caso di centro unito all'infinito deve trattarsi come caso limite.

Fra le funzioni $F(\Phi)$, l'esponenziale e il logaritmo interessano singolarmente le applicazioni fisiche ([2]). Se Φ è un operatore di tipo V, rappresentativo di un atto di moto, l'esponenziale $e^{t\Phi}$ dà il fattore di trasformazione che bisogna applicare ai punti originari dello spazio per ottenere i punti trasformati per effetto di quel moto, supposto che sia continuato permanente per l'intervallo di tempo t. Così, per esempio, se Φ è un vettore (atto di moto traslatorio), e^{Φ} rappresenta un fattore di traslazione, che applicato a una figura qualunque dà la figura trasportata. Quando Φ ha il centro unito al finito, il significato geometrico di e^{Φ}, con riferimento alle notazioni della formola (16), porta a questa conseguenza

$$e^{\Phi} = e^{g} e^{\bar{\Phi}} \times F \tag{21}$$

cioè l'esponenziale dell'operatore triedrale si ottiene conservando il centro unito e prendendo in luogo del moltiplicatore g e della diadica caratteristica $\bar{\Phi}$, i loro esponenziali.

* * *

7. - Rappresentazione dei vari enti spaziali. — La generalità degli enti spaziali che interessano per la Meccanica o per la Fisica Matematica si lasciano associare biunivocamente sia ad atti di moto sia a fattori di moto lineare omogeneo, e quindi « identificare » ([3]) con operatori triedrali, di tipo V oppure normali.

In questo senso, abbiamo detto che un *vettore* si identifica con una Φ rappresentativa di atto di moto traslatorio di tutto lo spazio, e quindi corrisponde a una matrice così

$$(X, Y, Z) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & \varepsilon X \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon Y \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon Z \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

È ovvio che la matrice del corrispondente fattore di traslazione si ottiene sostituendo a X, Y, Z i loro esponenziali, e scrivendo 1 in luogo di 0 in tutti

---

([1]) G. GIORGI: *Nuove osservazioni sulle funzioni delle matrici.* Rendiconti Lincei, vol. VIII, serie 6ª (2° sem. 1928) pp. 3-8.

([2]) G. GIORGI: *Fattori e indici nei gruppi lineari e nei gruppi normali d'operazioni.* Rend. Lincei, vol. VII, serie 6ª (1° sem. 1928). — G. GIORGI ed E. PORCU-TORTRINI: *Sui moti di deformazione dello spazio rappresentati mediante il calcolo delle matrici.* Ibid., vol. IX, serie 6ª (1° sem. 1929) pp. 122-128.

([3]) L'uso che qui faccio del vocabolo « identificare » nel senso di « porre uguale per definizione « significa semplicemente che non intendo legarmi alla definizione leibniziana di eguaglianza, a cui i matematici della scuola logica usano conformarsi. Poichè appunto i logici matematici insegnano che le definizioni sono effetto di convenzioni arbitrarie, sia lecito ritornare al significato meno restrittivo di uguaglianza matematica, che si usava al di fuori di quella scuola, e che conduce a semplificazione di linguaggio tanto maggiore.

gli elementi diagonali principali; e così abbiamo la rappresentazione algoritmica anche del vettore.

Un *centroide* di centro $M=(x_0, y_0, z_0)$ e di massa m deve essere associato a un atto di moto di concentrazione radiale, e precisamente a un operatore di tipo V, che a un punto generico P faccia corrispondere il vettore $m(M-P)$, quindi una matrice

$$mP = \begin{Vmatrix} -m & 0 & 0 & +mx_0\varepsilon \\ 0 & -m & 0 & +my_0\varepsilon \\ 0 & 0 & -m & +mz_0\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{23}$$

e quando m si riduce all'unità si ha la rappresentazione di un punto. Si verifica che le combinazioni lineari di queste matrici corrispondono alla composizione baricentrica dei centroidi; in particolare facendo con la regola delle matrici la differenza di due punti si ha il vettore che li congiunge; in accordo con le convenzioni e notazioni usuali.

Un *motore*, sia che venga considerato come atto di moto roto-traslatorio, sia come sforzo elicoidale risultante da un sistema di forze, è da identificare con un un operatore triedrale di tipo V, che a un punto generico dello spazio fa corrispondere un vettore distribuito con la legge elicoidale; la sua matrice è dunque (in assi cartesiani ortogonali):

$$\begin{Vmatrix} 0 & -R & Q & \varepsilon L \\ +R & 0 & -P & \varepsilon M \\ -Q & P & 0 & \varepsilon N \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{24}$$

dove: nel caso dell'atto di moto, P, Q, R sono le componenti delle velocità di rotazione, L, M, N sono quelle della velocità dell'origine; nel caso del sistema di forze, P, Q, R sono le componenti della forza risultante trasportata all'origine, L, M, N sono quelle della coppia risultante. Questi elementi a loro volta si possono esprimere nel modo noto facendo intervenire le coordinate di un punto generico dell'asse, i coseni direttori dell'asse, e i valori della velocità di rotazione e di quella di traslazione lungo l'asse.

Come caso particolare del motore si ha il *rotore* (atto di moto rotatorio attorno a un asse) che matematicamente nell'S_3 euclideo equivale a un *cursore* (vettore localizzato sopra una retta), rappresentato dalla stessa matrice di un motore, ma con la condizione che il trinomio invariante $LP+MQ+NR$ sia nullo. Prendendo un rotore di grandezza unitaria, abbiamo la rappresentazione di una *retta* dello spazio dotata di verso.

Dal motore, prendendone l'esponenziale, si passa al *fattore di moto elicoidale*, detto *twist* da BALL [1], e come caso particolare al *rotoide* o fattore di rota-

---

[1] Nella nota citata: *Fattori e indici*, etc., ho detto di questo operatore e della sua relazione esponenziale col motore. Mi viene segnalato che questa relazione esponenziale era

zione (operatore che applicato a una figura generica la fa rotare di un angolo dato intorno a un asse dato). In base al significato che ha, si riconosce che il fattore di moto elicoidale è associato a una matrice di questa forma (in assi cartesiani ortogonali):

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \varepsilon a \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \varepsilon b \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \varepsilon c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{25}$$

con gli α, β, γ legati dalle sei condizioni di essere coseni direttori di un triedro ortogonale; e così veniamo ad apprendere che una matrice della forma (25) è l'esponenziale di una delle forma (24). Il rotoide ha una matrice della stessa forma (25) ma con una condizione ulteriore fra gli elementi.

Un altro ente importante di calcolo spaziale è quello che nelle mie lezioni ho chiamato un *planare*, cioè un piano associato a una grandezza scalare e dotato di verso; esso corrisponde essenzialmente al cosidetto *tripunto* del calcolo geometrico di GRASSMAN e PEANO, perchè il tripunto non è altro che un planare definito in modo particolare e avente le dimensioni fisiche di un'area. Il planare individuato da un piano Π e dalla grandezza scalare s si può associare all'operatore che a un punto generico P faccia corrispondere uno scalare uguale al prodotto di s per la distanza di P del piano, dotata di segno. Questo è un operatore che non rientra direttamente come caso particolare nei triedrali del tipo (8), ma può trattarsi con la stessa teoria e gli stessi metodi, ampliando il gruppo delle trasformazioni (6) in modo da includere quelle che trasformano centroidi in scalari.

Per contro rientra nel gruppo dei triedrali l'*areale*, cioè l'ente che si ottiene associando uno scalare e un verso a una giacitura anzichè a un piano fissato in posizione; infatti nell'S_3 euclideo ogni areale corrisponde biunivocamente a un vettore-linea, e quindi secondo la definizione di MAXWELL è un vettore, e viene rappresentato da una matrice del tipo (22).

Vi rientra similmente il *piano non dotato di verso*, perchè può associarsi a un operatore che trasformi un punto generico P nel vettore PP_0 che va dal punto alla sua proiezione sul piano; e similmente il *piano dotato di grandezza s* e non di verso, perchè si associa a un operatore come sopra moltiplicato per s.

Nella stessa guisa si rappresenta la *retta non dotata di verso*, associata o no a una grandezza scalare.

---

stata già additata dal PEANO; e sono lieto di prenderne atto: osservo però che solamente secondo la teoria dei « Fattori e indici » questa relazione assume forma generale e rigorosa. Nel sistema del PEANO, la definizione di esponenziale di un operatore avveniva mediante lo sviluppo in serie, che si presta a obbiezioni e limitazioni evidenti. Vedi a questo riguardo anche una recente nota del DE FINETTI.

In modo diretto si ha poi la rappresentazione di tutti quegli enti lineari che si presentano di per sè come operatori, per esempio quelli che corrispondono a: un'inversione rispetto a un piano (perversione), rispetto a una retta, rispetto a un punto, una dilatazione isotropa a partire da un centro dato, una distorsione di scorrimento, e così via.

8. - In conclusione, tutti gli enti geometrici di primo grado nello spazio metrico euclideo ricevono rappresentazione nello schema qui esposto; e le operazioni su di esse restano definite per mezzo delle operazioni sulle matrici. Così ricevono significato non solamente le somme di vettori, di areali, di motori, ma anche quelle dei rotoidi, dei piani dotati e non dotati di verso, delle rette dotate e non dotate di verso, e si opera con prodotti associativi aventi qualunque numero e specie di questi enti come fattori, e similmente con quozienti, e con tutte le formazioni algoritmiche secondo le regole dell'algebra generale non commutativa, e nei casi particolari già accennati, anche secondo quelle dell'algebra commutativa.

È bene rilevare che anche la *Ausdehnungslehre* di GRASSMANN, per quanto sia uno degli schemi più ampi finora proposti, è inclusa in questo calcolo generale, ma ha una portata più ristretta, perchè di alcuni enti dà solo una rappresentazione indiretta (per esempio: il motore, solo come somma di bipunti) e di altri che rientrano nel nostro schema (come i fattori di rotazione, le omografie vettoriali, le affinità a centro qualunque, i piani e le rette non dotati di verso) non dà rappresentazione alcuna. Le matrici sono state usate anche da WHITEHEAD e da altri seguaci della scuola di GRASSMANN, ma non hanno che vedere con le matrici qui introdotte in corrispondenza agli enti spaziali e non raggiungono lo stesso scopo.

Per completare ora il nostro schema di calcolo spaziale e avviarlo alle applicazioni, occorre sviluppare lo studio delle operazioni proprie all'algebra delle matrici e degli enti spaziali (operazioni non aritmetiche, come quelle che HAMILTON ha rappresentato coi simboli S, V e quelle altre che BURALI-FORTI e MARCOLONGO hanno rappresentato con I_1, I_2, I_3, K, etc.), in modo da ricavare simboli selettivi o di altra natura per esprimere gli invarianti e i covarianti propri di un triedrale e quelli simultanei di più triedrali. In tal modo dal calcolo triedrale si avrà il modo per rappresentare l'intersezione di due piani, di una retta e un piano, la parte vettoriale e rotoriale di un motore, etc. Anche i così detti prodotti progressivi e regressivi e le altre combinazioni speciali del calcolo di GRASSMANN devono rientrare fra questi algoritmi.

† T. J. BROMWICH (Cambridge - Inghilterra)

AN EXTENSION OF HEAVISIDE'S SOLUTION FOR THE ELECTROMAGNETIC FIELD ACCOMPANYING A CHARGED SPHERE, SUDDENLY JERKED INTO MOTION AT THE SPEED OF LIGHT

The problem solved by HEAVISIDE (*Electromagnetic Theory*, vol. I, pp. 54-57) refers to the ideal point-charge; the extension contemplated in the present communication is obtained by replacing the point-charge by a rigidly charged spherical surface. Similar results are not difficult to obtain for a rigid distribution through the volume of a sphere; but there is more difficulty in bringing these into formulae which can be used for actual calculation and curve-tracing.

The actual analysis is too lengthy for these *Proceedings*; it is hoped to publish the details in the *Philosophical Magazine*. Here we give 8 diagrams (drawn to scale by Prof. W. B. MORTON of *Queen's University, Belfast*) from the formulae obtained by the extension of Heaviside's results.

These diagrams give the lines of electric force (within and outside the charged sphere) at times corresponding to

$$ct/a = 0, \quad \frac{1}{2}, \quad 1, \quad \frac{3}{2}, \quad 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8.$$

Probably the reader will find it best to look first at the last pair of diagrams; here the electromagnetic field is confined almost entirely to a (comparatively) thin shell ($r=ct-a$ to $r=ct+a$); behind this shell is left a zero field, and in front the original (radial) electrostatic field remains (as yet undisturbed).

If the reader will next retrace the sequence of figures (in the order N°. 8, 7, 6, 5, 4, 3) the gradual dis-appearance of the region of zero force will be noticed; and at the same time the shell has become more closely assimilated to the charged sphere.

We now return to Nos 1, 2, 3, 4; the first is the familiar diagram of Electrostatics (as found for instance, in MAXWELL'S: *Treatise*) In the second, the region of zero force has shrunk, but remains spherical, touching the charged sphere at its hindmost point; between this sphere and the charge, the lines of force are nearly straight, (but are quasi-parabolas, in fact); and the shell has begun to appear. In N°. 3, the region of zero force shrinks to the hindmost point; and in N°. 4, it reappears again (but is now on the other side of the charged sphere).

The reader should now have no difficulty in following the complete sequence in its proper order.

It may be well to add a remark in anticipation of the natural criticism that the Lorentz-mass-formula suggests that a charged sphere cannot be made to move with the speed of light (that is, that $v=c$ is physically impossible). For the general question, reference may be made to apaper published earlier this year (*Philosophical Magazine* March, 1928, p. 636), where a formula is given for the actual energy of the electromagnetic field in a problem (1) closely related to the present problem. Here the formula is rather more complicated; but the leading term is of the same general character, namely

$$\frac{Q^2}{2a}\log\left(\frac{ct}{a}\right)$$

and there is no trace of the kind of difficulty which would arise, if the formula $m=m_0/V(1-v^2/c^2)$ were adopted.

(1) The charged sphere is moving similarly in front of a conductor with a plane face.

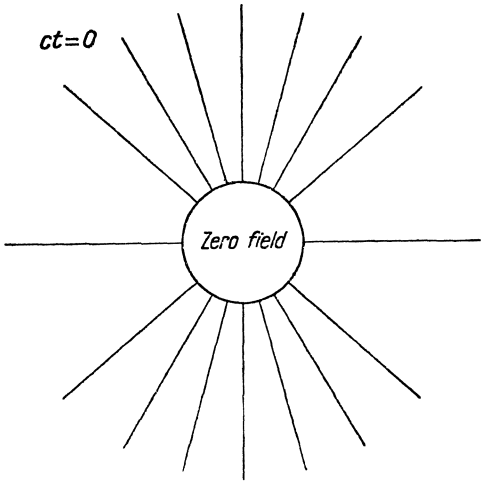


Fig. 1.

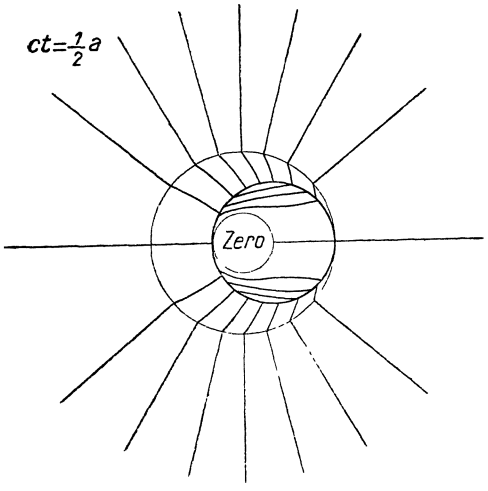


Fig. 2.

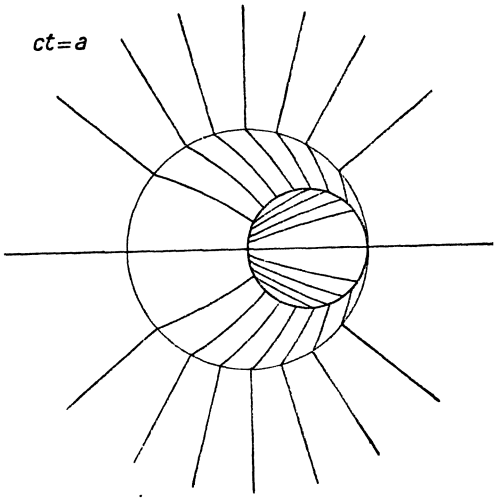


Fig. 3.

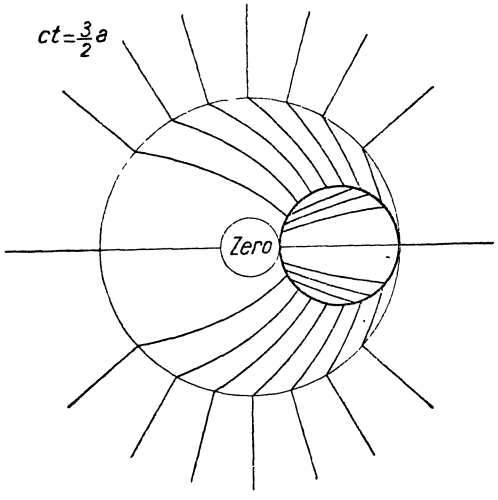


Fig. 4.

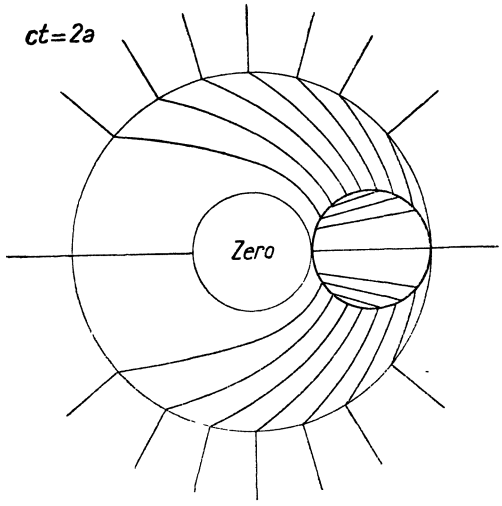


Fig. 5.

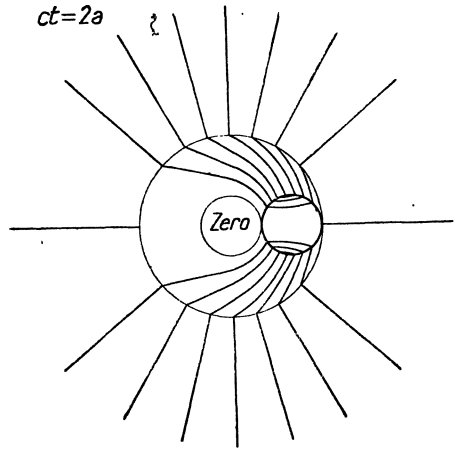


Fig. 5 bis

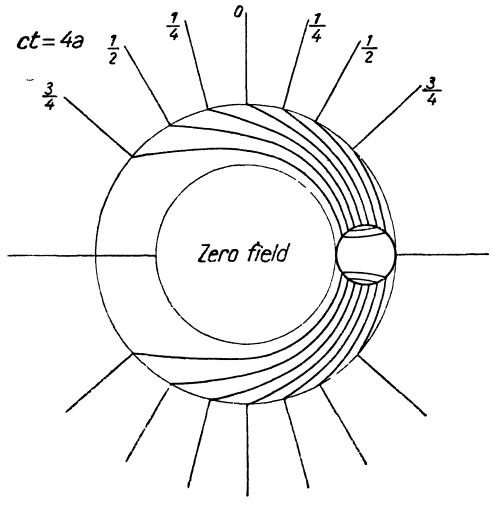


Fig. 6.

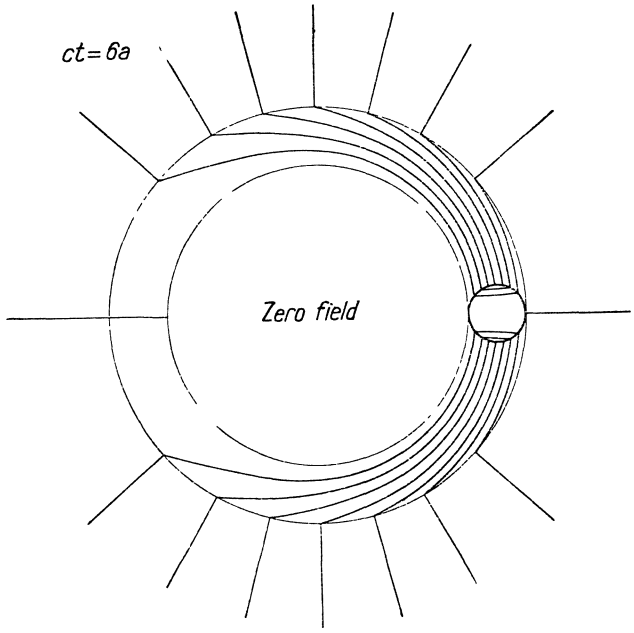


Fig. 7.

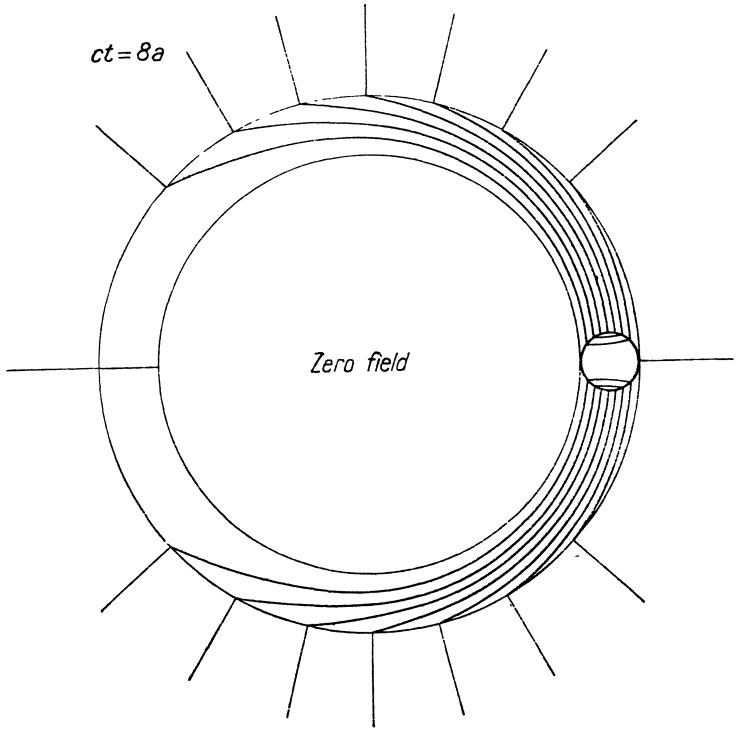


Fig. 8.

† T. J. BROMWICH (Cambridge - Inghilterra)

AN APPLICATION OF SOLUTIONS OF CABLE-PROBLEMS TO THE NUMERICAL EVALUATION OF THE PROBLEM OF A SPHERE FALLING IN A VISCOUS LIQUID

From the work of STOKES, BOGGIO, BASSET, RAYLEIGH and other writers, it is known that the equation of motion, giving the velocity v of the sphere in terms of t (the time), can be expressed in the form

$$\left(m+\tfrac{1}{2}m\right)\frac{dv}{dt}+\varphi(v)=(m-m_1)g,$$

where m, m_1 are the masses of the sphere, and of the liquid displaced, while $\varphi(v)$ is a function of v, which former writers have expressed usually by means of an integral-equation. The well-known analysis of STOKES (Collected Papers, Vol. 3) gives the limiting value of $\varphi(v)$ (as t tends to ∞) in the form kv, where k is a constant (proportional to the coefficient of viscosity); this result enables us to determine the terminal velocity, in the form used by many recent experimenters (such as C. T. R. WILSON and MILLIKAN).

By means of Heaviside's operational methods, it appears that the function $\varphi(v)$ can be expressed also in the symbolic form

$$(k+lq)v$$

where $q^2=\frac{d}{dt}$, symbolically and l is another constant.

Thus v is given by

$$\left\{\left(m+\tfrac{1}{2}m_1\right)q^2+lq+k\right\}v=(m-m_1)g$$

which is the same as

$$v=\frac{1}{(q-\alpha)(q-\beta)}\,\frac{(m-m_1)g}{m+\frac{1}{2}m_1}$$

α, β being roots of the equation in r

$$\left(m+\tfrac{1}{2}m_1\right)r^2+lr+k=0.$$

Thus

$$v=\left(\frac{1}{q-\alpha}-\frac{1}{q-\beta}\right)\frac{(m-m_1)g}{\left(m+\frac{1}{2}m_1\right)(\alpha-\beta)}.$$

Now expressions of the type

$$\frac{1}{q-\alpha}A=\left(\frac{q}{q-\alpha}-1\right)\frac{A}{\alpha}$$

occur frequently in cable-problems, and some convenient tables have been made by Mr. W. GAYE (1).

By means of these tables it has proved possible to construct other tables, (by simple subtraction) which give some striking results as to the mode of approach (of v) to the value found by STOKES. It is hoped that a more complete account of the method will be published by the *Cambridge Philosophical Society.*

---

(1) W. GAYE: *Electrician*, vol. 53, (pp. 905, 954, 994 and 1009). Heaviside's treatment of the cable-problem will be found in his *Electromagnetic Theory* (vol. 2, pp. 30-66; vol. 3 pp. 194-211)

L. SILLA (Roma - Italia)

APPLICAZIONE DEI METODI DI POINCARÉ E LEVI-CIVITA ALLA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA ASTEROIDICO (DI HILL)

1. - È ben noto che, nel problema ristretto dei tre corpi, si tratta il moto di un punto di massa trascurabile attratto, secondo la legge di Newton, da due masse finite che ruotano uniformemente attorno al comune baricentro e nell'ipotesi che il punto (asteroide) si sposti nel piano che contiene le orbite circolari delle due masse; si tratta, allora, di un problema a due gradi di libertà.

Particolarmente interessante è il caso del moto dell'asteroide nelle adiacenze di una delle due masse, per l'applicazione che si può farne al moto della Luna attorno alla Terra. Questo caso fu trattato in modo classico da HILL, che volle rappresentare il moto dell'asteroide con le ordinarie equazioni differenziali, in cui le variabili, funzioni del tempo, sono le coordinate cartesiane del punto rispetto ad assi ruotanti uniformemente attorno al centro delle masse, di cui l'asse x è la congiungente delle masse.

Le equazioni differenziali del moto dell'asteroide, che costituiscono il cosidetto *sistema canonico di Hill*, sono però equazioni *approssimate*, giacchè, in vista dell'applicazione al problema astronomico, Hill ammette che una delle due masse sia molto grande rispetto all'altra, e quindi riesce possibile di trascurare alcuni termini nelle equazioni del moto.

Il procedimento di integrazione, adottato da Hill pel suo sistema canonico, è invece matematicamente *rigoroso*, ed è sviluppato dall'autore con magistrale perizia e con grande arditezza, sperimentando elementi analitici nuovi, (i determinanti di ordine infinito), senza tuttavia accertarsi dell'esattezza teorica del metodo seguito, che fu messa più tardi fuori discussione dal POINCARÉ.

In alcune ricerche, da me iniziate recentemente ([1]), ho ripreso in esame il sistema canonico di Hill, affrontandone la integrazione con il metodo classico di Hamilton-Jacobi e con procedimenti semplici di *approssimazione*, che appaiono meglio appropriati alle equazioni approssimate di Hill. Si trattava, però, di supe-

([1]) L. SILLA: *Sul problema ristretto dei tre corpi*, Atti della Società ligustica di Scienze e Lettere, Vol. III.

rare la grave difficoltà della regolarizzazione delle equazioni del moto dell'asteroide in vicinanza delle masse attrattive. All'uopo mi sono giovato di una trasformazione puntuale che il Prof. LEVI-CIVITA ha escogitato per trattare la questione degli urti nel problema generale dei tre corpi ed in quello ristretto.

Ottenuta la regolarizzazione delle equazioni e ricercate le soluzioni periodiche in prima approssimazione, occorre tener conto dei termini ulteriori della funzione perturbatrice, considerando, a norma del metodo di Hamilton-Jacobi, come quantità variabili le costanti ottenute nell'integrazione già effettuata, e costruire il sistema canonico nelle nuove variabili. Ma la funzione perturbatrice non è più regolare in queste variabili, ed allora si applicano efficacemente i metodi del Poincaré, che permettono non soltanto di regolarizzare le equazioni, ma di stabilire l'algoritmo di tutte le approssimazioni successive.

Il vantaggio del procedimento che ho adottato, per la soluzione del problema di Hill, è duplice, in quanto non richiede strumenti analitici nuovi, oltre quelli classici di Hamilton e Jacobi, ed inoltre consente di procedere indefinitamente nell'approssimazione della soluzione.

2. - Indichiamo rispettivamente con T, S ed L la Terra, il Sole e la Luna (asteroide); facciamo l'ipotesi che i moti di T ed S non siano perturbati da L, e che le rispettive orbite, come si è detto nel numero precedente, siano circolari attorno al comune baricentro, supposto fisso.

Dette m ed M le masse di T ed S, assumiamo come unità di massa la somma $M+m$, come unità di lunghezza la distanza TS e come unità di tempo quella per cui risulti eguale ad 1 la velocità angolare (costante) con cui la retta TS ruota attorno al centro delle masse. Si riconosce che, con tale scelta di unità, la costante dell'attrazione risulta eguale ad 1.

Ora, nel piano dei tre punti, scegliamo una coppia di assi ortogonali con l'origine in T, l'asse x coincidente con la retta TS e diretto positivamente da T verso S, e l'asse y diretto positivamente in guisa che la rotazione del raggio vettore TS, attorno a T, apparisca diretta.

Posto, adunque, $LT=r$, $LS=\Delta$, e indicate con x ed y le coordinate di L, le equazioni del moto della Luna, rispetto agli assi ruotanti specificati, si scrivono:

$$(1)\qquad \begin{cases} \ddot{x}-2\dot{y}-x=\dfrac{\partial U}{\partial x}, \\ \ddot{y}+2\dot{x}-y=\dfrac{\partial U}{\partial y}, \end{cases} \qquad \left(\dot{x}=\frac{dx}{dt},\ \ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2},\ldots\right)$$

dove:

$$(1')\qquad U=\frac{m}{r}+MV, \qquad V=\frac{1}{\Delta}-x.$$

La funzione U ha il carattere di un potenziale delle forze agenti sull'unità di massa di L.

Al sistema differenziale (1), del secondo ordine, il Prof. LEVI-CIVITA sostituisce il sistema canonico:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dot{x}=\dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dot{y}=\dfrac{\partial F}{\partial q}, \\ \dot{p}=-\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dot{q}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}, \end{cases}$$

nella quaterna di variabili canoniche $\binom{x,\ y}{p,\ q}$, mediante la sostituzione di variabili:

$$\dot{x}=p+y, \qquad \dot{y}=q-x.$$

La funzione caratteristica è definita dalla formola:

$$F=\frac{1}{2}\{(p+y)^2+(q-x)^2\}-\left(U+\frac{1}{2}r^2\right).$$

Le variabili p e q hanno un significato cinematico notevole: esse rappresentano le proiezioni della *velocità assoluta* del mobile sopra una coppia di assi, con l'origine nel baricentro del sistema Sole-Terra, e di orientazione fissa.

Le equazioni (2) ammettono il ben noto *integrale di Jacobi*:

$$F=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)-\Omega=-C,$$

dove $\Omega=U+\frac{1}{2}r^2$ e C rappresenta la *costante di Jacobi* (sempre *positiva* e superiore a 3, qualunque siano le condizioni iniziali). L'equazione $F=-C$ è l'integrale della forza viva nel moto relativo della Luna rispetto agli astri ruotanti.

3. - Il sistema (2) presenta una singolarità nell'origine, (a causa del termine $\frac{m}{r}$ che figura in U), ed un'altra nel punto S, (a causa dell'analogo termine $\frac{M}{\Delta}$); ma noi non dobbiamo occuparci che della prima, poichè facciamo lo studio del moto di L nelle adiacenze di T.

Per trovare un sistema differenziale che non presenti più alcuna singolarità nell'origine T, basterà sostituire alla quaterna di variabili canoniche $\binom{x,\ y}{p,\ q}$, l'altra $\binom{\xi,\ \eta}{\tilde{\omega}_1,\ \chi_1}$, mediante la trasformazione del Prof. LEVI-CIVITA:

$$x+iy=(\xi+i\eta)^2,$$

$$p-iq=\frac{\tilde{\omega}_1-i\chi_1}{2(\xi+i\eta)}, \qquad (i=\sqrt{-1})$$

e, inoltre,

$$dt=\varrho^2 d\tau,$$

essendo $\varrho^2=\sqrt{x^2+y^2}=\xi^2+\eta^2=r$.

Si ha allora il nuovo sistema canonico:

$$(2')\qquad \begin{cases} \dot{\xi}=\dfrac{\partial H_1}{\partial \tilde{\omega}_1}, & \dot{\eta}=\dfrac{\partial H_1}{\partial \chi_1}, \\ \dot{\tilde{\omega}}_1=-\dfrac{\partial H_1}{\partial \xi}, & \dot{\chi}_1=-\dfrac{\partial H_1}{\partial \eta}, \end{cases} \qquad \left(\dot{\xi}=\frac{d\xi}{d\tau},\ldots\right)$$

che è regolare nell'origine ($\xi=\eta=0$), ed è costruito con la funzione caratteristica:

$$H_1(\xi,\eta;\ \tilde{\omega}_1,\chi_1)=\varrho^2(F+C)=\frac{1}{8}\{(\tilde{\omega}_1+2\varrho^2\eta)^2+(\chi_1-2\varrho^2\xi)^2\}-$$
$$-\left(m-C\varrho^2+\frac{1}{2}\varrho^6+M\varrho^2V\right).$$

Ogni soluzione del sistema (2), per cui sussista l'integrale di Jacobi $F=-C$, ossia $F+C=0$, dà luogo ad una soluzione del sistema canonico regolarizzato (2'), per cui sussista l'integrale $H_1=0$, e reciprocamente.

Si può opportunamente modificare la funzione caratteristica, ponendo:

$$C-M=\frac{1}{2}\omega^2,$$

(ciò che è sempre lecito, a causa dei valori possibili di C, e della posizione fatta $M+m=1$), ed altresì, per brevità:

$$H_0=\frac{1}{8}(\tilde{\omega}_1^2+\chi_1^2)+\frac{1}{2}\omega^2\varrho^2.$$

Infine, alle variabili $\tilde{\omega}_1$ e χ_1 sostituiamo le seguenti:

$$\tilde{\omega}=\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega},\qquad \chi=\frac{\chi_1}{\omega};$$

otterremo così il nuovo sistema canonico:

$$(2'')\qquad \begin{cases} \dot{\xi}=\dfrac{\partial H}{\partial\tilde{\omega}}, & \dot{\eta}=\dfrac{\partial H}{\partial\chi},\\ \dot{\tilde{\omega}}=-\dfrac{\partial H}{\partial\xi}, & \dot{\chi}=-\dfrac{\partial H}{\partial\eta}, \end{cases}$$

con la funzione caratteristica:

$$(*)\qquad H\begin{pmatrix}\xi,\ \eta\\ \tilde{\omega},\ \chi\end{pmatrix}=\frac{H_0}{\omega}-\frac{m}{\omega}-\frac{1}{2}r(\xi\chi-\eta\tilde{\omega})-\frac{M}{\omega}r(V-1),$$

e

$$\frac{H_0}{\omega}=\frac{1}{8}\omega(\tilde{\omega}^2+\chi^2)+\frac{1}{2}\omega\varrho^2.$$

Alle equazioni cartesiane (1) noi abbiamo così sostituite le equazioni canoniche pel moto del punto sul piano ausiliario $T\xi\eta$, e i due sistemi di coordinate sono legati dalle formole:

$$(**)\qquad \begin{cases} x=\xi^2-\eta^2,\\ y=2\xi\eta. \end{cases}$$

Una volta determinate le ξ, η in funzione di τ, avremo le x, y in funzione di t, mediante le formole precedenti e la $dt=\varrho^2 d\tau$. Si noti, altresì, che le soluzioni del sistema (2'') sono quelle per cui si ha $H=0$.

4. - Le equazioni (2'') sono perfettamente rigorose nell'ambito delle ipotesi geometriche fatte; cioè orbite della Terra e del Sole circolari e inclinazione nulla

del piano dell'orbita lunare sul piano del moto degli altri due astri. Esse, adunque, si prestano allo studio del problema asteroidico in genere.

Però, in vista dell'applicazione che intendiamo fare delle (2″) al moto dell'asteroide nella immediata vicinanza di T, ed alla ricerca delle soluzioni periodiche, occorre dare al problema un'impostazione ed una soluzione in via approssimata. E precisamente ci proponiamo di *caratterizzare tutte le soluzioni del sistema* (2″), *nell'intervallo di tempo in cui esse si mantengono nella regione adiacente al punto* $T(\xi=0, \eta=0)$, *in guisa che, posto*:

$$\varrho = \sqrt{\xi^2+\eta^2} \leq \varepsilon,$$

si possano trascurare, nelle equazioni (2″), *quei termini in* ϱ^2 *che non siano affetti da grandi coefficienti numerici.*

In altri termini, noi intendiamo di trascurare il quadrato del rapporto della distanza Luna-Terra e della distanza (unitaria) Sole-Terra.

Ora, poichè nel sistema (2″) i termini in ϱ figurano pel tramite delle derivate parziali di H, occorrerà, nell'ordine di approssimazione da noi stabilito, riferirsi alla espressione della funzione caratteristica H, ritenendovi soltanto i termini in ξ ed η, fino a quelli *dell'ordine due inclusi*, per esempio i termini in ϱ^2. Si ha quindi:

$$H = \frac{H_0}{\omega} - \frac{m}{\omega} = \frac{1}{8}\omega(\tilde{\omega}^2+\chi^2) + \frac{1}{2}\omega\varrho^2 - \frac{m}{\omega}. \tag{3}$$

Osserviamo che, col trascurare in H i termini di ordine superiore a quelio di ϱ^2, si verrà, in sostanza, a fare lo studio del moto di L come se gli assi x ed y fossero *fissi*, in quanto si prescinde sia dall'influenza della rotazione degli assi, che si rivela nell'espressione $-\frac{1}{2}r(\xi\chi-\eta\tilde{\omega})$, sia dalla massa del Sole, giacchè se ne trascura il potenziale, che figura nel termine $-Mr(V-1)$. È ovvio che, in tali condizioni, il moto di L, soggetto all'azione della sola massa m, sarebbe *kepleriano*, rispetto al fuoco T, e gl'integrali del sistema canonico si avrebbero trasformando le classiche formole del moto ellittico nelle attuali variabili ξ, η.

Tuttavia è importante fare il calcolo diretto, perchè questo costituisce un comodo avviamento alle approssimazioni successive.

5. - Per trattare il caso kepleriano, che possiamo dire *approssimazione di ordine zero*, col metodo di integrazione di Hamilton-Jacobi, basterà eguagliare ad una costante la funzione caratteristica H, definita dalla (3), e nell'equazione così ottenuta porre $\tilde{\omega} = \frac{\partial W}{\partial \xi}$, $\chi = \frac{\partial W}{\partial \eta}$, dove $W(\xi, \eta)$ è una funzione incognita da determinare.

Ma poichè, per ogni soluzione del sistema canonico (2″) si deve avere $H=0$, è chiaro che la costante, cui deve porsi eguale H, è nulla; onde da (3) si ha:

$$\frac{H_0}{\omega} - \frac{m}{\omega} = 0.$$

Pertanto il sistema (2'') diventa:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dot{\xi} = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{\omega}}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right), & \dot{\eta} = \dfrac{\partial}{\partial \chi}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right), \\ \dot{\tilde{\omega}} = -\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right), & \dot{\chi} = -\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right). \end{cases}$$

E poichè la quantità $\frac{m}{\omega}$ è positiva, è lecito porre:

$$(5)\qquad \frac{H_0}{\omega} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)\omega,$$

con a_1 ed a_2 entrambe *positive*; talchè risulterà:

$$(5')\qquad \frac{1}{2}(a_1 + a_2) = \frac{m}{\omega^2}.$$

In definitiva si ha l'equazione di Hamilton-Jacobi, a causa di (3):

$$\frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2\right\} + \frac{1}{2}(\xi^2 + \eta^2) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2).$$

Un integrale completo di questa equazione (nella forma simmetrica di Poincaré), ci è dato dalla formola:

$$(6)\qquad W(\xi, \eta;\ a_1, a_2) = 2\int_{\cdot}^{\sqrt{a_1}} \sqrt{a_1 - \xi^2}\, d\xi + 2\int_{\cdot}^{\sqrt{a_2}} \sqrt{a_2 - \eta^2}\, d\eta.$$
$$\eta$$

Di conseguenza si ottengono gl'integrali del sistema (4):

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial a_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial W}{\partial \xi} = \tilde{\omega}, \\ \dfrac{\partial W}{\partial a_2} = \beta_2; & \dfrac{\partial W}{\partial \eta} = \chi. \end{cases}$$

La determinazione esplicita di ξ, η, $\tilde{\omega}$ e χ non presenta più alcuna difficoltà, ormai; ma è preferibile procedere, a questo punto, ad una trasformazione di variabili, che ci è suggerita dalle ultime formole.

6. - Noi possiamo interpretare le formole integrali (7) come quelle che definiscono una trasformazione della quaterna delle variabili *canoniche* $\binom{\xi,\ \eta}{\tilde{\omega},\ \chi}$, nell'altra quaterna di variabili $\binom{\beta_1,\ \beta_2}{a_1,\ a_2}$. Si può dimostrare che anche questa è una quaterna di variabili canoniche, e allora è ovvia la conclusione che è canonico il sistema differenziale trasformato di (4), e con la *stessa* funzione caratteristica $\frac{H_0}{\omega}$, che si intenderà, beninteso, trasformata con le nuove variabili; cioè, dunque:

$$(8)\qquad \begin{cases} \dot{\beta}_1 = \dfrac{\partial}{\partial a_1}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right), & \dot{\beta}_2 = \dfrac{\partial}{\partial a_2}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right), \\ \dot{a}_1 = -\dfrac{\partial}{\partial \beta_1}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right); & \dot{a}_2 = -\dfrac{\partial}{\partial \beta_2}\left(\dfrac{H_0}{\omega}\right). \end{cases}$$

Effettuando le derivazioni indicate questo sistema diventa:

$$\dot{\beta}_1=\frac{1}{2}\omega, \qquad \dot{\beta}_2=\frac{1}{2}\omega,$$
$$\dot{a}_1=0; \qquad \dot{a}_2=0;$$

donde si trae, posto $\omega\tau=u$ (anomalia eccentrica dell'ellisse kepleriana):

$$(9) \qquad \begin{cases} \beta_1=\frac{1}{2}u+a_1, \\ \beta_2=\frac{1}{2}u+a_2. \end{cases}$$

Dunque *nell'approssimazione d'ordine zero le variabili canoniche* β_1 *e* β_2 *sono funzioni lineari del tempo ausiliario* τ, *mentre le* a_1 *ed* a_2 *sono costanti.*

Riesce ora agevole ottenere le espressioni esplicite di ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ nelle nuove variabili canoniche β_1, β_2, a_1, a_2, tenendo presenti la (6) e le (7); abbiamo:

$$(10) \qquad \begin{cases} \xi=\sqrt{a_1}\cos\beta_1, \\ \eta=\sqrt{a_2}\cos\beta_2; \end{cases} \qquad (11) \qquad \begin{cases} \tilde{\omega}=-2\sqrt{a_1}\operatorname{sen}\beta_1, \\ \chi=-2\sqrt{a_2}\operatorname{sen}\beta_2. \end{cases}$$

A queste formole conviene aggiungere l'altra:

$$\varrho^2=\xi^2+\eta^2=a_1\cos^2\beta_1+a_2\cos^2\beta_2.$$

Questa ultima può essere utilmente trasformata se si tien conto della (9); giacchè, essendo $r=\varrho^2$, posto $2a=a_1+a_2$, si ha:

$$r=a\{1-e\cos(u-u_0)\}.$$

E poichè, (n.° 3), $d\tau=\frac{du}{\omega}$, giungiamo all'*equazione di Keplero*:

$$\frac{\omega}{a}(t-t_0)=u-u_0-e\operatorname{sen}(u-u_0),$$

che ci dà il tempo t espresso per u, ossia per τ. La quantità a rappresenta, notoriamente, il semiasse dell'ellisse kepleriano.

7. - Per passare dall'approssimazione d'ordine zero, o kepleriana, alle successive approssimazioni della soluzione, conviene adattare una trasformazione delle variabili canoniche, e procedere ad una nuova regolarizzazione della funzione perturbatrice, sfruttando i classici metodi del Poincaré.

A tal fine, ricorderemo, innanzi tutto, che l'originaria funzione caratteristica H, definita dalla formola (*), e relativa alle equazioni *esatte* (2'') del moto dell'asteroide, è *regolare* nella quaterna di variabili canoniche $\binom{\xi,\ \eta}{\tilde{\omega},\ \chi}$. Ora $H\binom{\xi,\ \eta}{\tilde{\omega},\ \chi}$ è ovviamente esprimibile mediante le nuove variabili β_1, β_2, a_1, a_2; basterà, all'uopo, servirsi delle (10) ed (11). E, poichè, a causa della (5), il primo termine $\frac{H_0}{\omega}$ deve ridursi ad $\frac{1}{2}\omega(a_1+a_2)$, sarà lecito porre:

$$(12) \qquad H=\frac{1}{2}\omega(a_1+a_2)-\frac{m}{\omega}-\psi,$$

dove ψ, originariamente *regolare* nelle variabili ξ, η, $\tilde{\omega}$, χ, è definita dalla formola:

$$\psi=\frac{1}{2}r(\xi\chi-\eta\tilde{\omega})+\frac{M}{\omega}r(V-1). \tag{13}$$

Ma a noi interessa di esprimere la funzione perturbatrice mediante le variabili a_1, a_2, α_1, α_2. Poniamo, pertanto:

$$\begin{cases} a_1=\beta_1-\frac{1}{2}\omega\tau, \\ a_2=\beta_2-\frac{1}{2}\omega\tau, \end{cases} \tag{14}$$

e supponiamo di aver costruita la funzione H, e quindi la ψ, con gli argomenti β_1, β_2, a_1, a_2. Se ci costruiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_i&=\frac{\partial H}{\partial a_i}, \\ \dot{a}_i&=-\frac{\partial H}{\partial \beta_i}, \end{aligned} \qquad (i=1,2)$$

e teniamo conto di (12), (13) e (14), troviamo che questo sistema equivale all'altro:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i=-\frac{\partial\psi}{\partial\beta_i}, \\ \dot{a}_i=\frac{\partial\psi}{\partial\beta_i}. \end{cases} \tag{15}$$

Ma, per le (14):

$$\psi(\beta_1,\beta_2;\ a_1,a_2)=\psi\left(a_1+\frac{1}{2}\omega\tau,\ a_2+\frac{1}{2}\omega\tau;\ a_1,a_2\right),$$

dunque $\frac{\partial\psi}{\partial\beta_i}=\frac{\partial\psi}{\partial a_i}$; cosicchè le (15) potranno scriversi:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_1=\frac{\partial(-\psi)}{\partial a_1}, & \dot{\alpha}_2=\frac{\partial(-\psi)}{\partial a_2}, \\ \dot{a}_1=-\frac{\partial(-\psi)}{\partial a_1}, & \dot{a}_2=-\frac{\partial(-\psi)}{\partial a_2}. \end{cases} \tag{16}$$

Il nuovo sistema (16) è ancora canonico nelle variabili α_1, α_2, a_1, a_2 e con la funzione caratteristica $\psi\binom{\alpha_1,\ \alpha_2}{a_1,\ a_2}$, la quale contiene esplicitamente il tempo τ.

Si ha però l'inconveniente che la *quaterna* $\binom{\alpha_1,\ \alpha_2}{a_1,\ a_2}$ *non conserva la regolarità della funzione* ψ, come si verifica subito osservando che, per le (10) e (11), si ha:

$$\xi\chi-\eta\tilde{\omega}=2\sqrt{a_1a_2}\,\operatorname{sen}(\alpha_1-\alpha_2),$$

espressione che *non è regolare* nelle nuove variabili.

Eseguiamo allora una nuova sostituzione di variabili, introducendo la quaterna $\binom{y_1,\ y_2}{x_1,\ x_2}$, a norma delle formule:

$$x_i=\sqrt{2a_i}\cos\alpha_i, \qquad y_i=\sqrt{2a_i}\operatorname{sen}\alpha_i. \qquad (i=1,2) \tag{17}$$

Si ottiene il nuovo sistema differenziale *canonico*:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dot{y}_1 = \dfrac{\partial(-\psi)}{\partial x_1}, & \dot{y}_2 = \dfrac{\partial(-\psi)}{\partial x_2}, \\ \dot{x}_1 = -\dfrac{\partial(-\psi)}{\partial y_1}, & \dot{x}_2 = -\dfrac{\partial(-\psi)}{\partial y_2}, \end{cases} \qquad \left(\dot{y}_1 = \frac{dy_1}{d\tau}, \ldots\right)$$

che è *equivalente* al sistema (17) e che è costruito con la funzione $\psi\binom{y_1, y_2}{x_1, x_2}$ *regolare rispetto agli argomenti* x_i, y_i $(i=1,2)$.

8. - Per stabilire *l'algoritmo delle approssimazioni successive* a quelle di ordine zero, (in cui, ripetiamolo, si trascurano, nell'espressione della funzione perturbatrice, certi termini che dipendono dalla rotazione degli assi $T(x, y)$ e della massa M del Sole), conviene premettere un'osservazione circa l'ordine di grandezza delle quantità che figurano nella espressione di ψ, in (13).

Le coordinate x, y dell'asteroide, sul piano del moto, le assumiamo come quantità del 1° ordine, e così pure r ed a (semiasse dell'elisse kepleriana).

Sono pure del 1° ordine le quantità a_1, a_2, e l'espressione $\xi\chi - \eta\tilde{\omega}$, a causa delle (10) e (11). Invece le x_i, y_i sono dell'ordine $\frac{1}{2}$, per le (17).

Passando all'espressione di ψ, avuto riguardo ad (1'), e poichè

$$\Delta = \{(x-1)^2 + y^2\}^{\frac{1}{2}},$$

troviamo:

$$(18')\qquad V - 1 = -\frac{1}{2}r^2 + \frac{3}{2}x^2 + \text{termini del } 3^{\text{o}} \text{ ordine.}$$

Di seguito risultano:

$$x = \xi^2 - \eta^2 = \frac{1}{2}\left(x_1 \cos\frac{1}{2}u - y_1 \operatorname{sen}\frac{1}{2}u\right)^2 - \frac{1}{2}\left(x_2 \cos\frac{1}{2}u - y_2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}u\right)^2;$$

$$r = \xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)(1 + \cos u) + \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2)(1 - \cos u) - \frac{1}{2}(x_2 y_2 + x_1 y_1) \operatorname{sen} u;$$

$$(18'')\qquad \xi\chi - \eta\tilde{\omega} = -(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Abbiamo così tutti gli elementi per esprimere ψ in funzione delle nuove variabili x_i, y_i $(i=1,2)$. La (13) allora ci mostra che ψ *è almeno del secondo ordine*, e che le sue derivate, $\frac{\partial\psi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y_i}$, sono almeno di ordine $\frac{3}{2}$.

9. - Poniamo $\Phi = \frac{1}{\omega}\psi$; ossia, per la (13),

$$(19)\qquad \Phi = \frac{1}{2\omega} r(\xi\chi - \eta\tilde{\omega}) + \frac{M}{\omega^2} r(V-1),$$

ed $u = \omega\tau$; avremo il nuovo sistema differenziale canonico, equivalente a (18):

$$(20)\qquad \begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial\Phi}{\partial y_i}, \\ \dot{y}_i = -\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_i}, \end{cases} \qquad \left(\dot{x}_i = \frac{dx_i}{du}, \ldots\right), \quad (i=1,2)$$

e con la nuova funzione caratteristica Φ.

Conveniamo di rappresentare con x_{i0}, y_{i0} gli integrali delle (20), allorchè si assume Φ=costante (approssimazione d'*ordine zero*); allora le x_{i0}, y_{i0} risultano *costanti*.

Diremo *prima approssimazione* della soluzione, e la rappresenteremo con x_{i1}, y_{i1} $(i=1, 2)$, quella che si ha dalle (20) sostituendo, nella espressione di Φ, alle x_i, y_i i valori costanti x_{i0}, y_{i0} precedentemente trovati.

Analogamente si definisce la *seconda approssimazione* x_{i2}, y_{i2}, che si ottiene dalle (20) sostituendo in Φ, alle x_i, y_i le x_{i1}, y_{i1} già determinate.

Così continuando, si potranno determinare le quantità:

$$x_{i0},\ x_{i1},\ x_{i2},\ldots,\ x_{in},$$
$$y_{i0},\ y_{i1},\ y_{i2},\ldots,\ y_{in}.$$

che costituiranno le *successive approssimazioni* delle x_i, y_i.

Ora se noi indichiamo con

$$\xi_{i0}=x_{i0};\qquad \xi_{i1}=x_{i1}-x_{i0};\ldots;\qquad \xi_{in}=x_{in}-x_{i,\,n-1},$$
$$\eta_{i0}=y_{i0};\qquad \eta_{i1}=y_{i1}-y_{i0};\ldots;\qquad \eta_{in}=y_{in}-y_{i,\,n-1},$$

le successive *correzioni* delle x_{is}, y_{is} $(s=0, 1, 2,\ldots, n)$, sussiste il

TEOREMA: *ogni correzione successiva è di un ordine di grandezza superiore di un'unità almeno alla precedente.*

La dimostrazione si fa adottando il metodo d'induzione completa, ed osservando che ξ_{i0}, η_{i0} sono di ordine almeno eguale ad $\frac{1}{2}$, ξ_{i1}, η_{i1} sono di ordine almeno eguale a $\frac{3}{2}$,....

Ora, se ξ_{in}, η_{in} sono di ordine almeno eguale ad $n+\frac{1}{2}$, le x_{in}, y_{in} *risulteranno esatte fino ai termini di ordine* $n+\frac{1}{2}$ *inclusi*, in quanto la correzione è almeno di quell'ordine di grandezza.

Segue, in base a questo teorema, e per ciò che riguarda il sistema (20) che, ove si richieda che le quantità x_{in}, y_{in} siano esatte fino ai termini di ordine $n+\frac{1}{2}$ *inclusi*, occorrerà calcolare la funzione perturbatrice esatta fino ai termini di ordine $n+1$ inclusi.

In particolare, per la prima approssimazione, le x_{i1}, y_{i1} sono esatte fino ai termini di ordine $1+\frac{1}{2}$ inclusi; quindi bisognerà calcolare Φ fino ai termini dell'ordine 2 inclusi, sostituendovi poi, in luogo di x_i, y_i le approssimazioni x_{i0}, y_{i0}.

10. - L'algoritmo svolto nel numero precedente mostra adunque che il problema asteroidico di Hill si può far dipendere dalla integrazione di un sistema differenziale del tipo canonico, *che è sempre lo stesso*, qualunque sia il grado di approssimazione che si voglia raggiungere; inoltre la determinazione successiva delle approssimazioni di vario ordine richiede soltanto *quadrature*, giacchè

i secondi membri delle equazioni canoniche (20), risultano funzioni *note* della variabile indipendente u.

Per l'applicazione concreta del nostro metodo al moto della Luna, basterà tener conto di alcuni elementi numerici di fatto. Innanzi tutto le quantità a, m (massa della Luna) ed ω sono legate dalla relazione (5'), cioè:

$$a\omega^2 = m.$$

E poichè, avendo fatto $M+m=1$, si ha $m=\sim\frac{1}{300000}$, ed inoltre $a=\frac{1}{400}$, risulterà

$$\frac{1}{\omega}=\sim 30.$$

Per l'approssimazione di ordine zero, che è esatta fino ai termini di ordine $\frac{1}{2}$, che è l'ordine di grandezza di $\sqrt{a}$, cioè $\frac{1}{20}$, si conclude che l'errore relativo presumibile è dell'ordine di $\frac{1}{400}$.

Quanto all'errore presumibile dell'approssimazione di ordine n, sappiamo che la funzione caratteristica Φ è esatta fino ai termini dell'ordine $n+1$; quindi si devono trascurare i termini dell'ordine $n+2$, e perciò il resto sarà di questo ordine di grandezza. Nelle derivate di Φ, rispetto alle x_i, y_i, l'analogo resto sarà dell'ordine $n+\frac{3}{2}$, cioè del tipo:

$$\varepsilon^{n+\frac{3}{2}}(\alpha+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon^2+....)$$

dove si può assumere $\varepsilon=a=\frac{1}{400}$.

Ora, nella funzione Φ, definita da (19), (e dove può farsi $M=1$), e supposto che sia espressa per le variabili x_i, y_i ed u, la quantità ω apparisce solo pel tramite dei fattori $\frac{1}{\omega}$ ed $\frac{1}{\omega^2}$, rispettivamente nel primo e nel secondo termine. Questi due termini saranno, adunque, affetti dai coefficienti 30 e 900. Un limite superiore del resto sarà, in definitiva, espresso da

$$900D\left(\frac{1}{400}\right)^{n+\frac{3}{2}},$$

dove D è un numero discreto che non altera gli ordini di grandezza.

Per $n=1$ (prima approssimazione), l'errore presumibile è dell'ordine di

$$900\left(\frac{1}{400}\right)^{\frac{5}{2}}=\sim 3.10^{-4}.$$

11. - Supponiamo di volere determinare il moto della Luna in prima approssimazione. Bisogna tenere l'espressione di Φ fino ai termini del secondo ordine inclusivo; quindi, avuto riguardo alle (18') e (18''), e poichè $a=\frac{1}{400}$ è grandezza del 1° ordine, $\frac{1}{\omega}=30$ è dell'ordine di $\frac{1}{\sqrt{a}}$, cioè $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\omega^2}$ di ordine -1, si avrà:

$$\Phi=\frac{1}{2\omega}r(\xi\chi-\eta\tilde{\omega})+\frac{r}{\omega^2}\left(-\frac{1}{2}r^2+\frac{3}{2}x^2\right).$$

Il corrispondente sistema differenziale canonico è:

$$(21)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_{i,1}}{du} = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y_i}\right)_0, \\ \dfrac{dy_{i,1}}{du} = -\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}\right)_0, \end{cases} \qquad (i=1,2),\ (u=\omega\tau)$$

dove l'indice zero sta ad indicare che, nelle espressioni delle derivate parziali della funzione Φ, in luogo delle variabili x_i, y_i $(i=1,2)$, bisognerà introdurre i valori corrispondenti dell'approssimazione kepleriana, cioè x_{i0} ed y_{i0} che, come sappiamo, sono quantità costanti.

Quando si sia integrato il sistema (21), le formole (10), tenuto conto di (9) e (17), ci daranno le coordinate della Luna sul piano ausiliario $\xi\eta$, e di seguito le (**) quelle dell'astro sul piano xy del moto.

N. KRYLOFF (Kieff - Ucraina - U. S. S. R.)

SUR QUELQUES RECHERCHES RÉCENTES DANS LE DOMAINE DE LA SOLUTION APPROCHÉE DES PROBLÈMES DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

I.

Méthode de l'algorithme variationnel.

Le problème de l'intégration approchée des équations différentielles a été posé dès le début même du Calcul Infinitésimal.

C'est en effet encore le grand Euler, qui pour le calcul approché de l'intégrale de l'équation différentielle a introduit la notion de la ligne polygonale, d'où le génie du Cauchy a su tirer le théorème d'existence de l'intégrale, si largement développé et generalisé ensuite.

Dans le domaine des équations de la Physique mathématique on peut aussi constater que souvent bien des démonstrations de l'existence de la solution peuvent être converties pour l'intégration approchée, et vice versa certains procédés de l'approximation peuvent être érigés en théorèmes d'existence, quoique bien entendu au point de vue de la brièveté et de l'élegance de la démonstration certains raisonnements, basés par ex. sur l'emploi du célebre théorème d'Arzelà, sont à préferer pour établir ces théorèmes d'existence.

Les observations précédentes sont sujettes cependant à certaines restrictions. Ainsi dans la méthode fondamentale de la Physique mathématique, crée par les travaux classiques de STURM, LIOUVILLE, SCHWARZ, É. PICARD, H. POINCARÉ, S. ZAREMBA, I. FREDHOLM et développée ensuite par les travaux récents des géomètres contemporains, le développement de l'intégrale de l'équation différentielle non homogène procède suivant les fonctions « singulières », qui ne sont pas en général connues numériquement. Il en résulte pour le problème de l'intégration approchée des difficultés assez notables sans parler des autres incovénients de la méthode des équations intégrales (méthode de Fredholm), qui justifient les paroles scéptiques de H. POINCARÉ à ce propos [1]: « Ainsi la méthode de Fredholm, excellente pour démontrer rigoureusement la possibilité du problème, n'a pas encore été employée pour le calcul numérique et ne parait pas devoir l'être sous la forme actuelle ».

[1] V. la Préface aux: *Oeuvres de W. Ritz*, Paris, G. Villars, 1911.

Tout récemment des recherches très intéressantes ont été faites par M. le Prof. VAN DEN DUNGEN pour appliquer la méthode fondamentale de la Physique mathématique au problème du calcul approché; en ce qui concerne le calcul des coefficients de la transcendante de Fredholm l'auteur s'exprime pourtant en ces termes (1): « il n'en est pas moins vrai que ces coefficients sont d'un calcul de plus en plus malaisé à mesure que leur indice croit: chose très regrettable puisque de l'exacte connaissance de ces coefficients découle la connaissance presque immédiate des pulsations de torsion ». Les récentes recherches (2) ouvrent, ce semble, une voie nouvelle dans cette direction, d'autant plus que bien de procédés du calcul approché (par ex. la méthode de Ritz) reviennent en somme à considérer l'équation intégrale, dont le noyau n'est que l'expression approchée du noyau de l'équation intégrale donnée. Dans cette méthode de Ritz (3) le problème de l'intégration approchée est basé sur la considération des séries terminées construites d'après un procédé assurant à la limite leur convergence vers l'intégrale cherchée et procédant suivant les fonctions *aisément* calculables, comme par ex. les fonctions trigonométriques, les polynomes etc.

Cette méthode d'intégration approchée (4) (qui porte aujourd'hui le nom de Ritz et qui, a quelques points du contact avec le procédé de calcul utilisé (5) antérieurement par Lord RAYLEIGH) est basée essentiellement sur l'emploi raisonné de l'algorithme variationnel.

L'intégrale à varier $I(y)$ dans la méthode de Rayleigh-Ritz, remarquons ceci en passant, peut être formée quelquefois directement d'après les données du problème comme il est bien connu dans la mécanique appliquée. On pose ensuite le problème de minimum à propos de cette intégrale et on démontre que les fonctions formant une suite minimante tendent vers une certaine fonction limite, continue, dérivable et vérifiant le système différentiel correspondant au problème envisagé.

Les séries terminées (combinaisons linéaires) de la forme

$$\sum_{1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i(x)$$

---

(1) VAN DEN DUNGEN: *La technique des vibrations.* Cours fait en 1925-1926 à l'École Polytechnique de Bruxelles, pp. 30-31, chap. I.

(2) F. TRICOMI: *Sulla risoluzione numerica delle equazioni integrali di Fredholm.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. 33, serie 5. Les suggestives considerations de M. TRICOMI donnent les appréciations de l'erreur commise à la n-me approximation; il serait à souhaiter cependant au point de vue des applications pratiques que les appréciations susdites apparaissent sous la forme moins majorée. Voir aussi les travaux de N. KRYLOFF, cités plus loin.

(3) Comme du reste dans bien d'autres méthodes, dont on parlera dans la suite.

(4) W. RITZ: *Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathem. Physik.* Crelle Journal, Bd. 135, 1908.

(5) Philos. Mag., vol. 22, série 6.

donnent les approximations de la solution obtenues par l'application de cette méthode; pour $\varphi_i(x)$ dans les recherches de Ritz et de ses successeurs a été pris le système « complet » des fonctions vérifiant les conditions frontières du problème; or il est bien clair qu'à l'aide (1) d'un petit artifice du raisonnement on peut se débarasser des conditions frontières imposées à $\varphi_i(x)$.

Les coefficients inconnus $a_i^{(n)}$ se déterminent par les régles usuelles du calcul différentiel d'après les conditions à rendre stationnaire l'intégrale

$$I\left(\sum_1^n a_i \varphi_i(x)\right).$$

Ainsi pour les équations différentielles linéaires on aboutit au système des équations linéaires toujours résolubles par rapport aux coefficients cherchés dans les cas particuliers considerés par W. RITZ lui même. La possibilité du passage rigoureux à la limite pour $n \to \infty$ dans les cas susdits peut être établi à présent en peu des mots à la lumière des méthodes directes (2) de la théorie moderne du Calcul de Variations et même par la simple application du théorème d'Arzelà; or le vrai mérite du célebre auteur consiste, ce nous semble, dans la découverte du *procédé du calcul numérique*, qui présente les avantages incon-

(1) Prenons à titre d'ex. $\varphi_i(x) = x^i$, $i = 0, 1, \ldots$ et posons

$$y_n = \sum_{i=0}^{n+1} a_i^{(n)} x^i,$$

où $a_i^{(n)}$ sont les nombres qui rendent stationnaires l'intégrale

$$I\left(\sum_{i=0}^{n+1} a_i x_i\right)$$

dans le champ des a_i vérifiant les conditions $y_n(0) = 0$, $y_n(1) = 0$, c'est-à-dire $a_0 = 0$,

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i = 0.$$

Il est évident que $y_n \to y$ pour $n \to \infty$ et qu'on peut calculer l'erreur qu'on commet à la n-me approximation, c'est-à-dire $|y - y_n|$, car y_n n'est autre chose que

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} b_i^{(n)} x^i (1 - x)$$

où $b_0^{(n)}$ se déterminent d'après la condition à rendre stationnaire l'intégrale

$$I\left(\sum_{i=1}^{n} b_i x^i (1 - x)\right)$$

et $|y - u_n|$ peut être facilement apprecié.

(2) V. L. TONELLI: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. Vol. II, Bologna.

testables au point de vue du calcul effectif de la solution d'après l'avis unanime des nombreux savants qui l'ont appliqué (1) ce dernier temps aux diverses questions de la Physique mathématique, de la Science d'Ingénieur et de la Mécanique Céleste.

Pour estimer la méthode de Ritz à sa juste valeur il n'y a qu'à se rappeler les paroles de H. POINCARÉ (2): « La méthode de W. Ritz se prête mieux au calcul numérique. C'est une méthode d'ingénieur.... Les mêmes procédés de démonstrations seraient-ils applicables à tous les problèmes analogues, par ex. aux problèmes de Fourier? Ritz le croyait, je le crois aussi, mais le temps lui a manqué pour le vérifier ».

Cette opinion émise par l'un des plus grands géomètres contemporains prouve suffisamment toute l'importance du procédé de Ritz et met en rélief certains problèmes à investiguer qui en découlent. Les recherches s'y rapportant étaient d'autant plus nécessaires, ce nous semble, que dans certains travaux parus en ce dernier temps, et visant surtout les buts pratiques, le procédé de l'algorithme variationnel a été appliqué directement au calcul sans étude théorique préalable au cas important où la forme quadratique sous le signe de l'intégrale à varier n'est pas définie positive, c'est-à-dire où ne se trouve pas réalisée la condition qui était essentielle dans les raisonnements de W. RITZ.

Les problèmes qui en surgirent méritaient donc une attention toute particulières, car de plus ils ont été liés à la question du calcul effectif des valeurs « singulières » du paramètre (ainsi que des fonctions « singulières ») en Physique Mathématique et les paroles ci-dessus mentionnées de Poincaré contenaient déjà une allusion à ce sujet.

Ces derniers problèmes exigent des méthodes de démonstration bien différentes de celles qui ont été utilisées par W. RITZ lui même. Dans quelques travaux (3) s'y rapportant, N. KRYLOFF et J. TAMARKINE en se basant sur les recherches récentes de HELGE VON KOCH (concernant la théorie des déterminants infinis absolument convergents) ont élaboré la démonstration de la convergence de l'algorithme variationnel par une méthode qui aurait pu être nommée « la méthode des déterminants infinis ».

Le problème *de la convergence* de l'algorithme variationnel a été traité aussi dans les cas très généraux à la lumière des autres méthodes par M.M. PLANCHEREL, L. LICHTENSTEIN, L. TONELLI; les recherches modernes dans le domaine du

---

(1) V. par ex. les nombreux et importants travaux de M.M. TIMOSHENKO, KARMAN, PÖSCHL, LOVE.

(2) V. la préface aux *Oeuvres complètes de W. Ritz.*

(3) N. KRYLOFF: *Sur les généralisations de la méthode de W. Ritz.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 164, p. 853. — N. KRYLOFF et J. TAMARKIN: *Sur la méthode de W. Ritz pour la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.* Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie, 1918, t. XII.

Calcul de Variations, l'application du célèbre théorème d'Arzelà et de la théorie des formes quadratiques à une ∞ de variables jouent, ce semble, un rôle du premier plan dans ces invéstigations.

Cela étant, faisons à présent quelques remarques préliminaires qui ont guidé nos propres recherches ce dernier temps.

Quand on se pose le problème de l'intégration approchée il ne faut pas, ce nous semble, perdre de vue qu'il existe là dessus deux manières de concevoir les choses, dont le désaccord se fait notablement sentir quand on passe aux applications pratiques, c'est-à-dire dans le domaine propre du calcul numérique approché.

Pour le mathématicien pur les théorèmes d'existence incontestablement ont une importance toute particulière. Il n'en est pas peut être de même pour le physicien, pour l'ingénieur, pour lesquels le problèmes de l'existence souvent même ne se pose pas, car l'existence de l'intégrale pour eux quelquefois est assurée suffisamment d'après les considérations d'ordre physique.

Il est légitime donc de poser le problème de la solution approchée comme il suit: *l'existence de l'intégrale unique du système différentiel est assurée et on demande à la calculer avec une erreur donnée d'avance en cherchant l'expression majorée de cette erreur sous la forme utilisable pratiquement.*

Ce point de vue à la rigeur peut contenter même le mathématicien pur, car souvent il suffit de légers changements dans les démonstrations, comme nous nous avons dejà dit auparavant, pour convertir en démonstration de l'existence de la solution certains raisonnements élaborés pour l'appréciation de l'erreur. Or pour le praticien la manière susdite de poser le problème de l'intégration approchée présente, ce nous semble, de réels avantages, car pour les applications souvent il importe peu de savoir que le procédé est convergent ou *même* que l'ordre de l'approximation est ‹ bon ›. Pratiquement *la ‹ bonne › approximation dépend essentiellement des coefficients numériques*, intervenant dans l'expression majorée de l'erreur, qui influent sensiblement *pour les petites valeurs de n qui intéressent surtout le praticien.* En tranchant la question de toute première importance: quelle valeur de n il faut prendre afin que l'erreur soit plus petite qu'un nombre donné d'avance, on ne doit jamais oublier que les grandes valeurs de n pratiquement sont inutilisables pour le calcul effectif.

Ainsi la difficulté la plus grande pour obtenir l'erreur, le moins majorée possible, commise à la n-me approximation réside, ce nous semble, dans l'appréciation, utile pour le praticien, de l'erreur susdite sous la forme explicite non pour les *grandes*, mais pour les *petites* valeurs de n.

Dans ce genre des questions il faut distinguer nettement l'erreur réelle provenant de la méthode employé du calcul numérique, laquelle théoriquement reste inconnue, et l'erreur majorée qui donne quelquefois une idée assez nette de l'erreur réelle, comme on peut le constater par ex. sur certaines expressions

assymptotiques de l'erreur, détaillées dans la suite. Il faut remarquer pourtant qu'avec cette erreur majorée, on doit agir avec une extrême prudence, surtout quand on entreprend la tentative de comparaison de différentes méthodes d'approximation au point de vue de leur utilité pratique, car souvent l'expression moins majorée et nouvellement obtenue de l'erreur peut donner lieu à la conclusion juste le contraire de celle qui a été précedemment faite.

Les recherches systématiques dans le domaine de la solution approchée des équations de la Physique mathématique ont été l'objet d'une série de travaux (1) entrepris par moi au cours de ces dernières années et résumés partiellement sous la forme condensée dans le fascicule du « Mémorial de Sciences Mathématiques » (2). Dans les formules citées plus loin a été pris à titre d'exemple le système différentiel (3) du second ordre:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\left[p\dfrac{dy}{dx}\right]}{dx}+\lambda qy=f; \\ y(0)=y(1)=0; \end{cases}$$

or il est bien clair que les mêmes procédés du raisonnement convenablement amenagés sont applicables pour d'autres types des systèmes différentiels de beaucoup plus généraux. Pour faire une étude systèmatique réellement utile pour les praticiens il faut, ce nous semble, établir les expressions les moins majorées possibles de l'erreur pour différentes types des systèmes différentiels se rencontrant le plus souvent dans les applications et dans cette étude il est nécessaire, d'aprés ce qui a été dit plus haut, d'utiliser largement les particularités de la question, car une formule générale de majoration valable dans tous les cas est par cela même souvent trop majorée et par conséquent peut donner lieu dans les applications à bien des malentendus (sur les exemples pratiques on peut se convaincre facilement que les particularités de la question se réflètent d'une façon appréciable sur le caractère même de la majoration surtout pour les petites valeurs de n, les plus importantes pour le praticien).

Les méthodes de démonstrations utilisées dans une des nos notes (4) récentes donnent les appréciations suivantes de l'erreur commise à la n-me approximation,

---

(1) V. par ex. N. KRYLOFF: *Sur différents procédés d'intégration approchée en Physique mathématique.* Chap. I, II. (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1926-1927), où se trouvent aussi la bibliographie de quelques travaux à ce sujet. V. aussi mes notes à Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris à partir de 1927.

(2) N. KRYLOFF: *Les méthodes de solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.* Mémorial des Sciences mathématiques, Paris, G. Villars, 1931.

(3) Où d'après la supposition faite $q(x)$ peut même s'annuller ne changeant pas le signe.

(4) N. KRYLOFF: *Sur l'algorithme variationnel et le problème fondamental de la Physique Mathématique.* Comptes rendus, t. 186, p. 298.

quand on calcule par le procédé de l'algorithme variationnel les valeurs « singulières » du paramètre rélatives au système différentiel (I): par ex. pour $p(x)=1$:

$$(1)\qquad \left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k^{(n)}|\max|q|}{(n+1)^2\pi^2}$$

$$(2)\qquad \left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k^{(n)}|}{\pi^4\cdot(n+1)^4}\left[|\lambda_k^{(n)}|\max q^2+\max\left|\frac{q'^2}{q}\right|\right]$$

$$(3)\qquad \left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{\lambda_k^{(n)2}}{(n+1)^4\pi^4}\left\{\max q^2+\frac{\max|q''|}{|\lambda_k^{(n)}|}+\frac{1}{4}\frac{\max|\lambda_k^{(n)}q^2|}{(n+1)^2\pi^2}\right\}$$

$$(4)\qquad \left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k^{(n)}|^3}{(n+1)^6\pi^6}\left\{\max|q|^{\frac{3}{2}}+\frac{2\max|q'|}{\sqrt{\lambda_k^{(n)}}}\left(1+\frac{\max|q|\,|\lambda_k^{(n)}|}{8(n+1)^2\pi^2}\right)+\frac{1}{\lambda_k^{(n)}}\max\left|\frac{q''}{\sqrt{q}}\right|\right\}^2$$

$$(5)\qquad \left|\frac{\lambda_k^{(n)}-\lambda_k}{\lambda_k}\right| < \frac{|\lambda_k|A}{\pi^2(n+1)^2-B|\lambda_k|}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} A=(\max|q|-\min|q|)\sqrt{\dfrac{\max|q|}{\min|q|}} \\ B=2\max|q|;\ \lambda_k<\dfrac{k^2\pi^2}{\min|q|} \end{cases}$$

où λ_k et $\lambda_k^{(n)}$ sont respectivement la k-me valeur singulière du paramètre et sa n-me approximation obtenue par le procédé de l'algorithme variationnel (on démontre aussi aisement que $\lambda_k^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} \lambda_k$ d'une manière monotone). Les formules (1-5) donnent les appréciations des valeurs des erreurs relatives en correspondance avec les différentes restrictions imposées à la fonction $q(x)$. En particulier la formule (3) est valable, quand $q(x)$ peut s'annuler et la formule (5) montre que l'erreur est égale à zéro, quand $q(x)=\text{const}$.

Pour le calcul des fonctions « singulières » se rapportant au même système différentiel (I) on obtient les majorations de l'erreur sous la forme que voici:

$$(6)\qquad \int_0^1 q[\varphi_k-\varphi_k^{(n)}]^2dx < \frac{\max|q|\,\lambda_k^{(n)2}\cdot M^2\cdot\eta_n}{(n+1)^4\pi^4};$$

$$(7)\qquad |\varphi_k(x)-\varphi_k^{(n)}| < \frac{|\lambda_k^{(n)}|\sqrt{\frac{2}{3}\eta_n}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}\pi^2}\left(1+M\sqrt{\frac{3\max|q|}{\min|q|}}\right);$$

où pour η_n on peut prendre par ex. l'une des limitations suivantes:

$$(8)\qquad \begin{cases} \eta_n<\max|q|; \quad \eta_n<\dfrac{|\lambda_k^{(n)}|}{(n+1)^2\pi^2}\left(\max q^2+\dfrac{\max q''}{|\lambda_k^{(n)}|}+\dfrac{1}{4}\dfrac{|\lambda_k^{(n)}|\max|q^2|}{(n+1)^2\pi^2}\right); \\ \eta_n<\dfrac{|\lambda_k^{(n)}|}{(n+1)^2\pi^2}\left(\max q^2+\max\left|\dfrac{q'^2}{q}\right|\dfrac{1}{|\lambda_k^{(n)}|}\right); \\ \eta_n<\dfrac{|\lambda_k^{(n)}|}{(n+1)^4\pi^4}\left(\max q^{\frac{3}{2}}+\dfrac{2\max}{\sqrt{|\lambda_k^{(n)}|}}|q'|(1+\delta_n)+\dfrac{1}{|\lambda_k^{(n)}|}\max\left|\dfrac{q''}{\sqrt{q}}\right|\right)^2; \\ M<\dfrac{|\lambda_{k\pm1}^{(n)}|}{|\lambda_{k\pm1}^{(n)}-\lambda_k^{(n)}|-\varepsilon_{k+\left(\frac{1\pm1}{2}\right)}^{(n)}}; \quad \delta_n=\dfrac{\max|q|\,|\lambda_k^{(n)}|}{8(n+1)^2\pi^2}; \quad |\lambda_l^{(n)}-\lambda_l|=\varepsilon_l^{(n)}. \end{cases}$$

Pour l'équation non homogène (I) et pour la valeur du paramètre $\lambda \neq \lambda_i$, distincte des valeurs « singulières », c'est-à-dire quand on ne se trouve pas dans le cas de résonnance, on peut obtenir par un calcul assez laborieux les formules portant le caractère assymptotique et qui donnent la possibilitè assez nette de comparer l'approximation Y_n fournie pour l'intégrale de (I) par le développement de Fourier avec celui que donne le procédé de l'algorithme variationnel:

$$|y-y_n| = |y-Y_n| + \frac{\theta\lambda\nu M}{(n+1)\pi} \cdot \frac{\sqrt{\int_0^1 (y-Y_n)^2 dx}}{1-\frac{\lambda M \max|q|}{(n+1)^2\pi^2}}; \tag{9}$$

où

$$|\theta|<1; \quad Y_n=[y]_n; \quad M=\max\left|\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}\right| \qquad (i=1,2,3,\ldots.)$$

$$\nu=\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^1 q^2 dt}+\max|q|+\sqrt{\int_0^1\int_0^1 K_{x'}^{\prime 2} q'^2 dt dx},$$

et $K(x, t)$ est la fonction de Green correspondante.

En explicitant les appréciations de $y-Y_n$ d'après les recherches modernes concernant la série de Fourier, on tire immédiatement de (9) les majorations suivantes de l'erreur à la n-me approximation

$$|y-y_n| < \frac{A}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\left[1+\frac{B(n)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}\right]; \tag{10}$$

où

$$A=\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{\pi^2}\left(\sqrt{\int_0^1 f^2 dx}+\lambda \max|q| M \sqrt{\int_0^1 \bar{f}^2 dx}\right); \quad B(n)=\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{\pi^2}\cdot\frac{\lambda\nu M}{\left(1-\frac{\lambda M \max|q|}{(n+1)^2\pi^2}\right)};$$

$$\bar{f}=\int_0^1 K(x, t) f(t) dt.$$

Si au lieu de la détermination des valeurs approchées des coefficients de Fourier de l'intégrale cherchée on veut avoir directement les valeurs approchées de $y(x)$, il n'y a qu'à faire un léger changement dans les raisonnements en utilisant les formules d'interpolation correspondantes. Cette manière de poser la question peut donner lieu à certains rapprochements entre le procédé de l'algorithme variationnel et celui des différences finies.

Pour la brièvété de l'exposition nous omettons ici bien des formules donnant les majorations de l'erreur dans quelques cas des équations différentielles non linéaires; ces formules s'obtiennent à l'aide des considérations qui ont servi aussi à l'établissement des formules précedemment citées.

II.

Méthode des moindres carrés et ses différentes généralisations.

Outre le procédé de l'algorithme variationnel, les problèmes fondamentaux de la Physique mathématique peuvent être aussi traités à l'aide des autres procédés donnant la solution approchée, de manière que l'erreur commise à la n-me approximation peut être calculée d'avance.

Citons par ex. les formules approchées pour le calcul des valeurs singulières du paramètre, obtenues par l'application de la méthode des « tronçons » dans ma note récente, écrite en collaboration avec mon élève M. N. BOGOLIOUBOFF (1).

La méthode des différences finies a été aussi investiguée au point de vue de l'évaluation de l'erreur dans nos recherches relatives à ce sujet (2).

En laissant ici de côté l'exposition des résultats ci-dessus mentionnés, bornons nous à détailler quelques formules se rapportant à une méthode, basée sur la minimisation du carré moyen de l'erreur.

Cette méthode des moindres carrés pour l'intégration approchée des équations différentielles a été indiquée comme procédé du calcul par M. BOUSSINESQ et c'est dans la thèse de doctorat de son élève M. PASCHOUD, que se trouve la première application numérique de ce procédé pour le cas du problème de la plaque élastique encastrée.

Dans un cas, bien particulier, il est vrai la démonstration de la convergence du procédé du BOUSSINESQ a été donnée dans une note de N. KRYLOFF encore en 1915 (3).

Dans la suite N. KRYLOFF et M. PICONE ont élaboré, chacun de son côté (4), la théorie de la méthode de moindres carrés dans son application aux équations différentielles, intégro-differentielles et intégrales de la Physique mathématique.

C'est M. BOUSSINESQ qui doit être considéré par conséquent comme le vrai créateur de cette méthode de l'intégration approchée, car dans cet ordre d'idées, comme partout d'ailleurs dans le domaine du calcul approché, — l'essentiel c'est

(1) N. BOGOLIOUBOFF e N. KRYLOFF: *Sopra il metodo dei coefficienti costanti* (metodo dei tronconi) *per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica.* Bollettino della Unione Matematica Italiana, anno 7, n.° 2.

(2) N. BOGOLIOUBOFF and N. KRYLOFF: *On Rayleigh's Principle in the Theory of Differential Equations of Mathematical Physics and on Euler's Method in Calculus of Variations.* Annals of Mathematics, 1928.

N. BOGOLICUBOFF et N. KRYLOFF: *Sur les méthodes des différences finies pour la résolution approchée des problèmes fondamentaux de la Physique mathématique.* Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 186.

(3) V. ibidem, t. 161.

(4) V. les travaux de M. KRAWTCHOUK (dans les éditions de l'Académie des Sciences d'Ucraïne) qui ont contribué aussi à l'élaboration de la théorie de cette méthode.

de proposer un bon procédé pour le calcul — les démonstrations de la convergence et les différentes appréciations de l'erreur viennent fatalement après. La seule difficulté réside, ce nous semble, dans l'obtention des appréciations les moins majorées possible de l'erreur commise à la n-me approximation dans l'application de cette méthode, qui prendra sa place légitime parmi les méthodes de la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.

En appliquant au système différentiel (1) où l'intervalle de l'intégration est $(0, \pi)$ la méthode de M. BOUSSINESQ, qui est *convergente, bien entendu, chaque fois que* $\lambda \neq \lambda_i$ (où λ_i sont des valeurs singulières), on obtient, après quelques calculs, l'appréciation suivante de l'erreur de la n-me approximation, qui est à comparer avec celle obtenue ailleurs. Dans le cas $p(x)=1$, on a:

$$|y-y_n| < \frac{QC}{(n+1)^2}; \tag{11}$$

où

$$Q < \frac{4}{\pi}[2 \max y'' + \pi \max y''']; \quad C < \frac{1}{2\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\Delta B D}{\min q^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1+\frac{\max |q_i|}{(n+1)^2}}{1-\frac{D}{(n+1)^2}}\right];$$

$$\Delta = \max_{i=1,2,\ldots} \left|\frac{\lambda_i}{\lambda_i - 1}\right|;$$

$$B = \left\{\max \frac{1}{q^{\frac{1}{2}}} + \max q^{\frac{1}{2}} \left[I_1 \sqrt{\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} (q^{-1})'^2 dx} + I_2 \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (q^{-1})''^2 dx}\right]\right\};$$

$$I_1 = \sqrt{\sum_1^{\infty} \frac{1}{i^2}}; \quad I_2 = \sqrt{\sum_1^{\infty} \frac{1}{i^4}};$$

$$D = \Delta \sqrt{\frac{\max |q|}{\min |q|}} \left\{\max q + I_1 \sqrt{\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi} q'^2 dx} + I_2 \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} q''^2 dx}\right\}.$$

Les fonctions intervenant dans les combinaisons linéaires (servant à approximer l'intégrale cherchée) dans cette méthode peuvent ne pas vérifier les conditions imposées à la frontière. Ceci découle immédiatement d'une ingénieuse remarque due à M. COURANT et concernant la notion des conditions, dites « naturelles » (l'intégrale à minimiser sera alors « chargée » au sens de M. COURANT).

Cette dernière remarque à propos des conditions frontières est valable comme nous l'avons vu précedemment aussi pour la méthode de l'algorithme variationnel, contrairement à ce que pensent certains auteurs. De même on s'assure par les considérations bien simples que dans la méthode de l'algorithme variationnel, aussi bien que dans la méthode de M. BOUSSINESQ, on peut affirmer que l'ordre infinitésimal de l'erreur est infiniment grand par rapport à n, si les coefficients du système (I) sont infiniment dérivables. La portée pratique de cette observation est pourtant plutôt restreinte, comme nous avons eu déjà l'occasion de remarquer ailleurs.

En laissant ici provisoirement de côte la question épineuse de la comparaison au point de vue de l'utilité pratique entre le procédé de Ritz et celui de Boussinesq,

remarquons seulement que la méthode de moindres carrés, au moins sous sa forme actuelle, ne donne pas, ce semble, aucun moyen de calculer approximativement les valeurs singulières du paramètre et les fonctions singulières correspondantes.

La méthode de moindres carrés a été généralisée récemment dans une note de N. KRYLOFF (1) dans la direction ouverte par les recherches de M. POLYA et de M. JAKSON concernant l'approximation des fonctions.

La méthode de moindres degrés qu'on obtient ainsi pour l'intégration approchée des équations de la Physique mathématique a été investiguée depuis dans les recherches récentes (2), où ont été traités les systèmes plus compliqués de la Physique mathématique.

En revenant de nouveau aux méthodes de Ritz et de Boussinesq, qui seules peuvent présenter un intêret au point de vue du calcul effectif (les systèmes des équations à résoudre en ces cas là sont linéaires) remarquons qu'on peut les étudier directement comme les « méthodes de réduites » appliquées respectivement aux systèmes

$$\int_0^1 [L(y)-f]\psi_i dx=0\,; \quad \int_0^1 [L(y)-f]L(\psi_i)dx=0\,; \qquad (i=1,2,....)$$

sans avoir recours à aucun problème de minimum. Cela étant, on peut concevoir une méthode comprenant comme cas particuliers la méthode de Ritz et celle de Boussinesq et qui revient à déterminer les expressions approchées des coefficients de Fourier d'après le système d'équations

$$\int_0^1 [L(y_n)-f]M(\psi_i)dx=0\,; \qquad (i=1,2,3,...., n)$$

sûrement resolubles pour les expressions appropriées de l'opérateur différentiel $M(\psi_i)$. L'application de cette méthode étudiée aussi par moi donne les appreciations suivantes (3) de l'erreur

$$|y-y_n|<\varepsilon_n \frac{k}{a}\begin{cases} k=\dfrac{\sqrt{2c^2+2\max q^2}}{\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{\pi^2}}}, & c^2 \text{ est le plus grand des nombres } 2p^2,\ 2p'^2 \\ \varepsilon_n=\sqrt{\displaystyle\int_0^1 [M(y-Y_n)]^2 dx} \end{cases}$$

(1) N. KRYLOFF: *Sopra il metodo delle minime potenze, etc.* Rend. della R. Accad. di Napoli, t. 33, serie 3ª.

(2) V. les nombreux travaux de M. PICONE qui ont élargi cet important domaine de l'analyse.

(3) Cela resulte immédiatement des formules de mon mémoire des « Annales de Toulouse » déjà cité.

si l'on applique au système

$$L(y)\equiv(py')'-qy$$
$$M(y)\equiv(p_1y')'-q_1y,$$

où p, p_1, q, q_1 vérifient les conditions

$$qq_1-\tfrac{1}{2}(pq_1'+p_1q')'\geqslant 0$$
$$pp_1\varepsilon^2+(pp_1)'\varepsilon\eta+(pq_1+2p'p_1'+p_1q)\eta^2\geqslant a[\varepsilon^2+\eta^2],\quad a>0$$

Il va sans dire, que la majoration peut être abaissée, si on procède avec plus de précaution à l'aide des raisonnements plus délicats, ce que nous laissons au soin du lecteur.

Les coefficients arbitraires qui entrent dans les opérateurs peuvent être, bien entendu, utilisés dans les buts différents; remarquons en passant que si on a par ex. le problème de l'intégration approchée de deux équations

(12) $$L(u)-f=0$$

(13) $$M(y)-F=0,$$

telles que la condition

$$I(u)=\int_0^1 L(u)M(u)dx>0$$

est satisfaite, alors après quelques calculs on s'assure que si u_n est la n-me approximation (obtenue par l'application de la méthode en question) de l'intégrale de (12), la n-me approximation y_n fournie par la même méthode de l'intégrale de l'autre équation (13) sera:

$$y_n=\sum_1^n (u_i-u_{i-1})\frac{\int_0^1 FL(u_i-u_{i-1})dx}{\int_0^1 L(u_i-u_{i-1})M(u_i-u_{i-1})dx},$$

ce qui permet d'éviter la résolution d'un autre système d'équations linéaires pour le calcul de y_n.

La méthode ci-dessus exposée se prête aux différentes généralisations et sa position mixte entre la méthode de l'algorithme variationnel ($M(y)=y$) et celle de moindres carrés ($M(y)=L(y)$) la rendra peut être pas dénuée d'intérêt même au point de vue théorique.

Quand l'équation à intégrer ne provient pas d'un problème du Calcul des Variations, la méthode ci-dessus exposée et qui aurait pu être nommée la *méthode des réduites* donne dans bien des cas le moyen d'apprécier l'erreur commise à la n-me approximation (même quand on l'applique pour ($M(y)=y$) et il va de soi que le choix approprié de l'opérateur $M(y)$ peut être d'une certaine utilité pour la solution approchée des problèmes de la Physique mathématique.

Prenons à titre d'ex. l'équation différentielle du second ordre (non adjointe à elle même dans le cas général) aux coefficients périodiques (de période T)

$$\frac{d\left(A\frac{dy}{dt}\right)}{dt}+B\frac{dy}{dt}+Cy=f(t); \tag{14}$$

$$A(t+T)=A(t);\quad B(t+T)=B(t);\quad C(t+T)=C(t)$$

et dont l'intégration approchée intervient dans bien des problèmes d'Electrotechnique. Si on applique à (14) la méthode des réduites, on s'assure aisément en utilisant le mode du raisonnement précédemment exposé que la majoration de l'erreur peut être obtenue par ex. sous la forme suivante

$$y-y_n<\left(A+\frac{BT}{2\pi(n-1)}+\frac{CT^2}{4\pi^2(n+1)}\right)\sqrt{\frac{T}{a^2}\int_0^T(Y_n'-y')^2dt}$$

si

$$A-\frac{(C-B)4\pi^2}{T^2}\geqslant a>0$$

(moyennant cette dernière condition on s'assure aussi de l'existence de l'intégrale périodique de (14)). Pour apprécier

$$\int_0^T(Y_n'-y')^2dt$$

on utilise les résultats classiques de la théorie des séries trigonométriques en remarquant que les différentes majorations de y, y', y'',...., peuvent être aisément obtenues d'après l'équation différentielle elle même (14).

Dans les notes récentes (1) de N. KRYLOFF la méthode des réduites a été appliquée à la solution approchée des systèmes différentiels du premier ordre aux coefficients périodiques (de période T)

$$\frac{dx_i}{dt}-\sum_{j=1}^{l}A_{ij}(t)x_j=F_i(t); \qquad (i=1,2,3,....,l) \tag{15}$$

à la condition réstrictive près

$$\left|\sum_{ij}^{l}A_{ij}(t)x_ix_j\right|\geqslant a\sum_{i=1}^{l}x_i^2;\quad a>0.$$

Dans la note susdite ont été obtenues les appréciations suivantes

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(x_i-x_i^{(n)})^2}<\frac{R}{(n-1)^{\frac{3}{2}}}\left(1+\frac{\delta}{\sqrt{n-1}}\right), \tag{16}$$

(1) V. par ex. Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 187.

où

$$R=\frac{M}{\sqrt{5\pi}}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{\frac{5}{2}};\quad \delta=\sqrt{\frac{5T}{2}};\quad M=\frac{D}{a}\sqrt{\sum_{i=1}^{l}\int_0^T F_i^2\,dt}+\sqrt{\sum_{i=1}^{l}\int_0^T g_i^{(1)2}\,dt};\quad D=\sqrt{\sum_{ij} e_{ij}^{(1)2}}$$

$$g_i^{(1)}=g_i'+\sum_{j=1}^{l} l_{ij}F_j,\quad l_{ij}^{(1)}=\sum_{k=1}^{l} l_{ik}A_{kj}+l_{ij}$$

$$l_{ij}=\sum_{k=1}^{l} A_{ik}A_{kj}+A_{ij};\quad g_i=F_i'+\sum_{j=1}^{l} A_{ij}F_j,$$

et

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(x_i-x_i^{(n)})^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{l}(x_i-[x_i]_n)^2}\left(1+\frac{\theta_1\sqrt{e}}{\frac{2\pi}{T}(n+1)}\right)+ \tag{17}$$

$$+\frac{\theta_2\beta}{\frac{2\pi}{T}(n+1)}\sqrt{\sum_{i=1}^{l}\int_0^T(x_i-[x_i]_n)^2\,dt}$$

où

$$|\theta_1|<1;\quad |\theta_2|<1;\quad e=\max\left(\sum_{ij}A_{ij}^2\right);\quad \beta=\frac{\mu}{\sqrt{T}}+\sqrt{eT}+\lambda;$$

$$\lambda=\sum_{ij}\int_0^T A_{ij}'^2\,dt;\quad \mu=\frac{1}{a}(\sqrt{e_1}+e\sqrt{e}+e\sqrt{e_1}).$$

Les formules (16) et (17) possèdent chacune ses propres avantages (en correspondance avec les propriétés des coefficients du système (14)) au point de vue des applications.

Or, le procédé est valable et les différentes appréciations de l'erreur peuvent être obtenues dans tous les cas où le système homogène relatif à (15) n'admet pas des solutions périodiques différentes de zéro.

Faisons à présent quelques remarques à propos de la méthode d'orthogonalisation spéciale.

M. E. HECKE dans un article (1) a exposé le contenu mathématique d'un procédé dû à M. D. ENSKOG (2), qui l'a appliqué à la résolution numérique des équations intégrales. Dans son application aux équations différentielles de la Physique Mathématique, ce procédé a été aussi l'objet des recherches de N. KRYLOFF (3) au point de vue de la convergence de l'algorithme utilisé et de l'appréciation de l'erreur obtenu à la n^{me} approximation.

Par l'application de cette méthode le problème de l'intégration revient à la

---

(1) V. Mathematische Zeitschrift, 1922.

(2) V. ibidem, Bd. 24, 25.

(3) V. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, anno VI, n.° 1.

construction d'un certain système de fonctions $\psi_i(x)$ en partant des fonctions données $\varphi_i(x)$ linéairement indépendantes et pouvant servir, comme par exemple les sinus, à la représentation approchée des fonctions, dites « arbitraires ».

Cette construction s'opère de manière que les fonctions $\varphi_i(x)$ peuvent être inversement exprimées en $\psi_i(x)$, lesquelles à leur tour peuvent servir par conséquent à la représentation approchée des fonctions dérivables.

En se bornant au cas simple, facile à généraliser, prenons le système différentiel:

$$L(y)-f(x)=0\,;\quad y(0)=y(1)=0\,;\quad p(x)\geqslant p>0\,;\quad q(x)\geqslant 0. \tag{18}$$

et remarquons que si on veut représenter l'intégrale $y(x)$ sous la forme

$$\sum_1^\infty \psi_n(x)\int_0^1 f(x)\psi_n(x)dx$$

[où tout est connu si le système $\psi_i(x)$ est construit], le système $\psi_i(x)$ doit être orthogonalisé et normé d'une manière spéciale, appropriée au problème considéré:

$$\int_0^1 \psi_n(x)L[\psi_i(x)]dx=\begin{cases}0, & \text{si } i\neq n\,;\\ 1, & \text{si } i=n.\end{cases} \tag{19}$$

et cette opération sûrement est possible, vu l'hypothèse admise à propos des signes de $p(x)$ et $q(x)$.

On s'assure aisément que le système $\psi_i(x)$ est fermé, si le système $\varphi_i(x)$ l'est; on constate aussi que l'expression générale des $\psi_i(x)$ en fonction des $\varphi_i(x)$ est la suivante:

$$\psi_\nu(x)=\frac{\left[\varphi_\nu-\sum_{i=1}^{\nu-1}\psi_i\int_0^1\varphi_\nu L(\psi_i)dx\right]}{a_\nu};\qquad a_\nu^2=\int_0^1\varphi_\nu L(\varphi_\nu)dx-\sum_{i=1}^{\nu-1}\left[\int_0^1 L(\varphi_\nu)\psi_i dx\right]^2.$$

La démonstration de la convergence des approximations obtenues par ce procédé peut se faire de bien des manières.

Les fonctions $\psi_i(x)$ s'expriment linéairement en $\varphi_i(x)$ et inversement; on voit d'ici entre autre que l'approximation y_n donnée par la méthode de W. Ritz peut revêtir les deux formes suivantes:

$$y_n=\sum_1^n a_i^{(n)}\varphi_i(x)\,;\quad y_n=\sum_1^n b_i^{(n)}\psi_i(x)$$

or les conditions de minimum dans la méthode de Ritz peuvent être aisement transformées ainsi:

$$\int_0^1[L(y_n)-f]\psi_i dx=0\,;$$

donc

$$b_i^{(\nu)} = \int_0^1 f\psi_i dx$$

et ceci prouve que l'*approximation fournie par la méthode de l'orthogonalisation spéciale est identique à celle obtenue par l'application de la méthode de Ritz.* D'ici découle, en vertu des résultats déjà acquis dans le Chap. I, l'appréciation de l'erreur commise à la n^{me} approximation dans l'application de la méthode en question.

La liaison entre cette méthode et celle de Ritz permet de déterminer la n^{me} approximation d'après les précedentes au moyen de la formule que voici:

$$y_\nu = y_{\nu-1} + c_\nu(x) \int_0^1 f(x) c_\nu(x) dx; \quad c_\nu(x) = \frac{1}{\alpha_\nu} \left\{ \varphi_\nu - \sum_{i=1}^{\nu-1} (y_i - y_{i-1}) \int_0^1 L(\varphi_\nu)(y_i - y_{i-1}) dx \Big/ \int_0^1 f(y_i - y_{i-1}) dx \right\}$$

$$\alpha_\nu^2 = \int_0^1 \varphi_\nu L(\varphi_\nu) dx - \sum_{i=1}^{\nu-1} \left[\int_0^1 L(\varphi_\nu)(y_i - y_{i-1}) dx \right]^2 \Big/ \int_0^1 f(y_i - y_{i-1}) dx,$$

et de cette manière peut être levée dans une certaine mesure l'objection formulée contre la commodité du calcul dans la méthode de Ritz (nécessité de résoudre chaque fois un nouveau système d'équations linéaires pour obtenir l'approximation suivante).

D'après ce qui précède il est clair que les différences $y_{m+1} - y_m$ (où y_m sont les approximations de Ritz) sont proportionnelles aux fonctions orthogonalisées au sens de M. ENSKOG. D'autre part on peut établir que l'algorithme variationnel est applicable quand les valeurs du paramètre sont distinctes des valeurs singulières, c'est-à-dire même quand ne sont pas réalisées les conditions restrictives (18) imposées aux coefficients du système différentiel donné. Cela étant, il est à présumer que la méthode d'orthogonalisation spéciale (19) est valable aussi dans ce cas général et cette affirmation sûrement a lieu quand il s'agit de l'orthogonalisation que voici

$$\int_0^1 L[\psi_n(x)] L[\psi_i(x)] dx = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq n; \\ 1, & \text{si } i = n; \end{cases}$$

et qui se trouve en même relation avec la méthode des moindre carrés que la méthode de l'orthogonalisation (19) avec la méthode de Ritz.

On peut entrevoir d'ici bien d'autres méthodes d'orthogonalisation spéciale qui se trouvent connexes avec la méthode précédemment étudiée et généralisant la méthode de Ritz, ainsi que celle de moindres carrés. Il va sans dire que ces

méthodes d'orthogonalisation seront convergentes quand certaines restrictions sont imposées aux coefficients du système différentiel donné.

Dans tout ce qui précède on a seulement considéré les problèmes à une dimension; or il est évident que les méthodes des démonstrations précédemment détaillées, s'étendent aussi dans une certaine mesure par exemple au cas des problèmes de deux dimensions (en particulier à certaines équations aux dérivées partielles) et ceci présente incontestablement un vaste et fécond champ de recherches.

G. TIERCY (Genève - Svizzera)

NOTE SUR QUELQUES CÉPHÉIDES

1. - Cette note relative à 5 Céphéides a pour but d'indiquer les formes des courbes de lumière trouvées par l'auteur, en utilisant principalement des séries de photographies spectrales des dites étoiles. Les résultats de telles mesures sont liés à la théorie de l'ionisation.

En principe, la méthode appliquée dans ces recherches consiste à « mesurer » les changements spectraux qui accompagnent la variation lumineuse d'une étoile variable. La difficulté est de trouver une correspondance approchée entre la variation du type spectral et la variation de lumière. La méthode a été exposée dans les « Pubblicazioni del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri » fascicole 44 (1927) et dans le fascicule 2 de la nouvelle série des « Publications de l'Observatoire de Genève » (1) ; elle nécessite essentiellement les opérations de base suivantes :

a) Mesure des largeurs des raies des spectres, et tout spécialement des raies H_β, H_γ, H_δ, H et K ;

b) Mesure des longueurs des spectres.

Les résultats de ces mesures ne doivent être employés qu'avec des précautions que nous rappelons plus loin ; on base sur eux les calculs suivants :

1°) Appelant L la longueur du spectre le plus long, tout autre spectre donne une longueur $(L-d)$; ce déficit d est traité par la suite comme une raie large ; en tenant compte de d, on peut dire que tous les spectres ont la longueur L ;

2°) Pour chaque plaque, on fait le total (y) des largeurs des raies et de (d) ; puis on calcule la différence $x=L-y$, et le quotient $q=\frac{y}{x}$;

La valeur du quotient (q) varie comme la magnitude (m).

3°) On calcule les valeurs de m correspondant respectivement aux différentes phases des clichés, grâce à la connaissance de deux d'entre elles seulement, par exemple celles du maximum et du minimum de lumière.

(1) Voir aussi : Archives des Sciences physiques et naturelles (5), 10, p. 108.

2. - Réduction des mesures. — Les mesures des largeurs des raies et des longueur des spectres ne peuvent être utilisées qu'après les avoir ramenées à ce qu'elles seraient:

1°) Si les spectres avaient tous la même largeur (nous avons choisi 100 μ).

2°) Si la durée de pose avait été la même, θ, pour tous ces spectres de même largeur. (Nous avons choisi $\theta=12$ min.).

Nous avons, en définitive, utilisé les formules suivantes:

$$l'=l+(\mathfrak{L}-l)\cdot(0{,}105)\frac{t'-t}{t}, \qquad (t'>t);$$

$$l'=l-(\mathfrak{L}-l)\cdot(0{,}105)\frac{t-t'}{t'}, \qquad (t'<t);$$

où l est la valeur mesurée effectivement, et l' la valeur réduite; ces formules sont valables, soit pour la réduction des largeurs des raies, soit pour la réduction des longueurs des spectres; elles ont été appliquées successivement:

1°) à la partie du spectre précédant la raie H_β du côté du rouge, avec un maximum $\mathfrak{L}=3000$;

2°) à la partie du spectre suivant la raie K du côté de l'ultra-violet, avec un maximum $\mathfrak{L}=6000$;

3°) aux largeurs des raies, avec $\mathfrak{L}=0$.

Il faut en effet remarquer que, si la durée de pose augmente, la longueur du spectre augmente, tandis que la largeur des raies diminue.

Ces formules, tout empiriques qu'elles soient, nous ont donné de bons résultats.

3. - Courbes de lumière. — L'application des principes précédents nous ont conduit aux courbes de lumière suivantes:

SU Cassiopeiae (période $=1^j,95$) phase du minimum de lumière $=1^j,05$.

Le dessin de la courbe a été donné dans le fascicule 44 des « Pubblicazioni del R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri ». Elle est identique aux courbes précédemment indiquées pour *SU* Cassiopeiae.

T Vulpeculae (période $4^j,44$).

La courbe a été publiée dans le fascicule 2 des « Publications de l'Observatoire de Genève ». Elle présente une branche descendante « creusée » dès le maximum de lumière, comme l'ont indiquée LUIZET et NIJLANT, et non la forme boursoufflée donnée par PICKERING. D'ailleurs la phase que nous trouvons pour le minimum de lumière ($3^j,1$ environ) correspond bien à celle donnée par R. PRAGER dans le Catalogue des Étoiles variables ($3^j,075$).

X Sagittarii (période $=7^j,01$).

La courbe obtenue a été publiée dans les « Archives des Sciences physiques

et Naturelles » (5), 10, 1928 (fascicule 4 des « Publications de l'Observatoire de Genève »).

Nous y avons trouvé, sur la branche descendante, deux ondulations secondaires ; le fait était déjà connu. Par contre, nous avons trouvé, pour le minimum de lumière, une phase très différente de celle généralement admise ; le Catalogue de R. Prager donne $M-m=2^j,896$; Pickering donnait $3^j,24$; nous avons trouvé:

$$M-m=2^j,1.$$

Nous nous hâtons d'ajouter que ce résultat est en complet accord avec les mesures photométriques de M. J. VOUTE (« Annalen von der Bosscha Sterrenwacht », Lembang, Java, 1927) ; cet auteur donne aussi :

$$M-m=2^j,1.$$

Ce détail nous semble essentiel. Cette nouvelle valeur $M-m=2^j,1$ s'accorde en effet, beaucoup mieux que les précédentes, avec les indications se rapportant à la courbe des vitesses radiales.

W Sagittarii (période $=7^j,59$).

Les résultats relatifs à *W* Sagittarii n'ont pas encore été publiés ; ils le seront dans un des prochains fascicules des « Publications de l'Observatoire de Genève ». Nous donnons ci-dessous la courbe obtenue (fig. 1) :

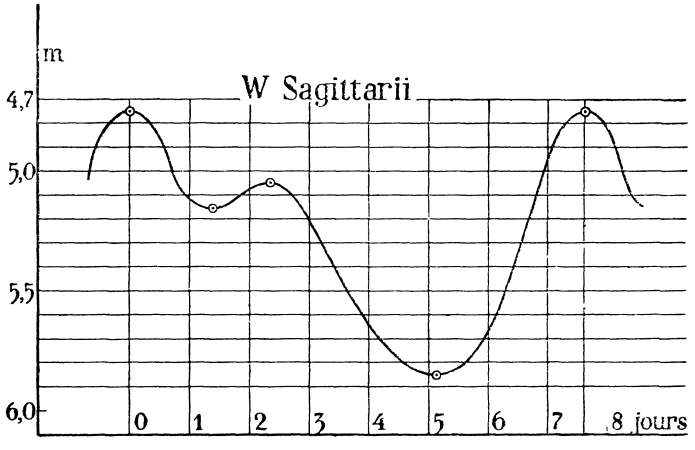


Fig. 1.

La courbe ressemble beaucoup à celle donnée par M. J. VOUTE (« Annalen von der Bosscha Sterrenwacht », Lembang, Java, 1927) ; la courbe de J. Voûte est photographique, et, de ce fait, le minimum secondaire est moins accentué que dans la courbe ci-dessus. Nous avons trouvé, comme phase de minimum

de lumière, $5^j,1$ à $5^j,2$; ce qui est en plein accord avec les mesures de J. Voûte ($5^j,1$) et celles de Pickering ($5^j,2$) ; par contre, le catalogue de R. Prager indique $4^j,6$.

Il semble, d'ailleurs, que la valeur $5^j,1$, qui correspond à $M-m=2^j,5$, s'accorde bien avec les indications données par la courbe des vitesses radiales.

S Sagittae (période $=8^j,38$).

Les résultats que nous avons obtenus pour *S* Sagittae n'ont pas encore été publiés ; ils le seront prochainement. La courbe trouvée est la suivante (fig. 2) :

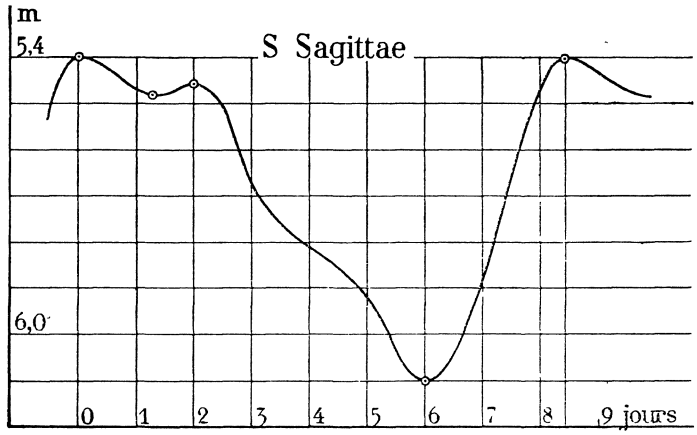


Fig. 2.

Elle concorde avec les courbes précédemment données. Nous avons trouvé, par exemple, les phases suivantes :

Min. de lumière : $5^j,96$
Min. sec. de lum. : 1,23
Max. sec. de lum. : 2,00

alors que NIJLAND indique :

Min. de lumière : 5,8
Min. sec. de lum. : 1,3
Max. sec. de lum. : 2,0

et R. PRAGER :

Min. de lumière : $5^j,95$.

Les valeurs extrêmes de m_v sont $5^m,4$ et 6,1 ; elles s'accordent avec celles de LUIZET, de LACCHINI et de NIJLAND.

4. - L'*avantage* de la méthode utilisée dans les recherches précédentes pour trouver la forme de la courbe de lumière réside en ce fait que, du même coup, on enregistre la succession des types spectraux.

On a ainsi trouvé que le spectre varie entre les types extrêmes suivants :

SU Cassiopeiae :	A_9 à F_6
T Vulpeculae :	A_9 à G_4
X Sagittarii :	F_1 à G_5
W Sagittarii :	A_9 et G_2
S Sagittae :	F_{4-5} et G_5.

Le *désavantage* provient de l'introduction de l'équation personnelle dans l'appréciation de la longueur d'un spectre ; mais nous ne pensons pas que cette équation personnelle joue, dans ce cas, un rôle plus grand que celui qu'elle joue dans toute méthode photométrique.

G. TIERCY (Genève - Svizzera)

SUR L'ERREUR DE COMPENSATION DES CHRONOMÈTRES DE POCHE

1. - Parmi les critères qui servent à apprécier la valeur d'un chronomètre de poche, trois jouent un rôle prépondérant. Ce sont:

1°) L'écart moyen de la marche diurne;

2°) L'écart moyen correspondant à un changement de position;

3°) L'erreur de compensation.

Le premier critère a été introduit en 1879 par EMILE PLANTAMOUR, alors Directeur de l'Observatoire de Genève; il a été adopté, par la suite, par tous les Observatoires chronométriques. Le second critère lui est intimément lié.

Quant au 3ème critère, l'erreur dite de compensation est appréciée différemment suivant les Observatoires. PLANTAMOUR a, dès 1879, introduit pour les chronomètres de poches de longues périodes thermiques de 5 jours, séparées les unes des autres par un jour dit intermédiaire; ce mode de faire a été adopté partout par la suite. En même temps, Plantamour a proposé un procédé simple pour apprécier, dans le cas de 3 périodes thermiques, l'erreur de compensation pour un degré centigrade; ce procédé a été adopté par l'Observatoire de Kew (Angleterre) en 1883, celui de Yale College (New-Haven, E. U.) en 1884, et celui de Besançon (Doubs, France) en 1885. Nous l'appellerons le *procédé Plantamour*; il pourrait d'ailleurs être appliqué en cas de x périodes.

Un autre procédé, plus commode peut-être dans le cas d'un grand nombre de périodes, le « Procédé Plantamour-Cellérier », a été appliqué lors des concours spéciaux de compensation des chronomètres, en 1883 et 1885.

Le service chronométrique de l'Observatoire de Yale College a été supprimé en 1887; il a été remplacé, dès 1914, par le « Service chronométrique pour montres de poche du Bureau of Standard », de Washington. Ce nouveau service est régi par un règlement qui diffère notablement, sur plusieurs points, des règlements des anciens observatoires chronométriques. En particulier, le mode d'appréciation de l'erreur de compensation semble, du moins à première vue, être très distinct des anciens procédés.

Nous nous proposons de montrer qu'il n'en est rien. Le procédé de Washington est rigoureusement équivalent à celui de Plantamour-Cellérier de 1883, appliqué au cas de 3 périodes thermiques. D'autre part, le procédé Plantamour, plus

simple, est sensible, tout aussi bien que celui de Washington, aux deux conditions fondamentales dont il sera question au n.° 2.

2. - Des conditions requises d'un bon chronomètre. — On sait que les organes essentiels d'un chronomètre subissent l'influence d'une variation de température; il en découle une variation de la marche du chronomètre. Un chronomètre non compensé peut toujours être réglé pour une température déterminée; il ne le sera plus si la température change.

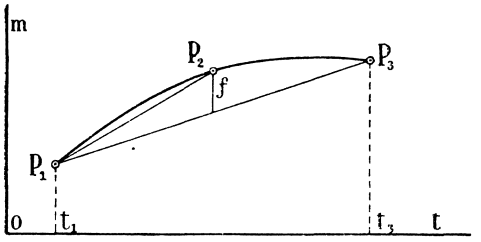


Fig. 1.

Si le chronomètre est muni d'un balancier à compensation, il est possible de le régler pour deux températures données; ce réglage n'est plus valable pour les autres températures.

Les erreurs de marche obéissent alors, dans l'ensemble, aux règles de DENT; et la courbe, qui représente la marche du chronomètre en fonction de la température, est voisine d'une parabole (fig. 1).

Si l'on appelle t_1 et t_3 les deux températures pour lesquelles on a réglé le chronomètre, il est visible que les conditions à réaliser sont les suivantes:

1°) l'inclinaison de la droite P_1P_3 doit être minimum;

2°) la flèche f parallèle à l'axe des m doit être minimum. Cette flèche f, représente ce que les horlogers appellent l'*erreur secondaire de compensation.*

3. - Procédé de Washington. — Désignant par (m_t) la marche à la température t, le bulletin d'un chronomètre indique:

1°) le changement de marche par degré centigrade entre 5° et 35° (températures extrêmes): $\dfrac{(m_{35})-(m_5)}{30}$;

2°) la différence entre ce changement et celui qui se produit par degré centigrade entre 5° et 20°: $\dfrac{(m_{20})-(m_5)}{15} - \dfrac{(m_{35})-(m_5)}{30}$.

La première indication donne visiblement l'inclinaison de la droite P_1P_3 de la figure 1; nous l'appellerons *coefficient d'erreur moyenne.* La seconde indication tend évidemment à fournir le renseignement demandé sur la flèche f du segment P_1P_3.

Le calcul de Washington (1) est basé sur l'emploi de la parabole de Dent.

---

(1) » Publ. de l'Observatoire de Genève » Fasc. 3, 1928; « Journal Suisse d'Horlogerie »' Juillet 1928.

4. - Le procédé genèvois de Plantamour (1879). — On fait les observations pour des températures voisines respectivement de 3°, 18° et 33°. Désignons par t_1, t_2 et t_3 les températures moyennes respectives des trois périodes thermiques, et par m_1, m_2, m_3 les marches moyennes correspondantes.

On calcule les deux moyennes:

$$\mu=\frac{m_1+m_2+m_3}{3} \quad \text{et} \quad \tau=\frac{t_1+t_2+t_3}{3};$$

puis les écarts respectifs de chacun des m_i avec μ, et de chacun des t_i avec τ.

Enfin on divise la somme des trois valeurs absolues $|m_i-\mu|$ par celle des trois valeurs absolue $|t_i-\tau|$; on obtient le coefficient de Plantamour, ou erreur de compensation par degré centigrade:

$$\varepsilon=\frac{\sum|m_i-\mu|}{\sum|t_i-\tau|}. \tag{1}$$

Si on porte les t_i en abscisses et les m_i en ordonnées, chaque couple de valeurs (t_i, m_i) détermine un point P_i; les valeurs τ et μ déterminent un point G (fig. 2).

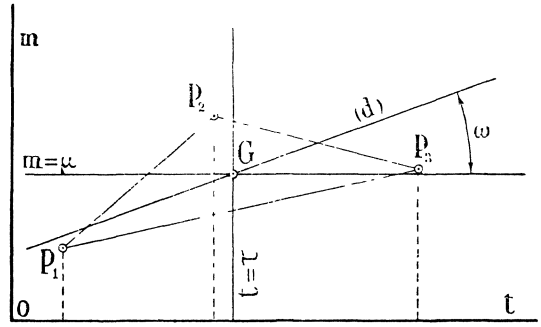


Fig. 2.

Les expressions de τ et μ montrent que G est le centre de gravité du triangle $P_1P_2P_3$. Soit alors $\varepsilon=\operatorname{tg}\omega$ le coefficient de Plantamour et soit π le quotient:

$$\pi=\frac{|m_3-m_1|}{|t_3-t_1|},$$

correspondant au premier quotient de Washington. π est toujours inférieur à ε; de sorte que la différence $\varepsilon'=\varepsilon-\pi$, qui se calcule immédiatement, peut représenter l'erreur secondaire de compensation.

Remarquons qu'en réalité on mesure la somme des deux erreurs de compensation, moyenne et secondaire; et c'est ce que représente ε.

Quant à dire quelle est la part qui, sur ces mesures, représente exactement l'erreur moyenne ou l'erreur secondaire, la chose n'est pas possible; tout procédé tendant à séparer ces deux indications sera plus ou moins entaché d'arbitraire.

On voit ainsi que le procédé Plantamour, plus simple que l'autre comme calcul, donne des indications équivalentes sur le réglage de la compensation du chronomètre.

Il est d'ailleurs facile de voir [1] comment le coefficient est sensible aux deux conditions générales du n.° 2.

---

[1] Loc. cit.

Les Observatoires chronométriques de Kew, Besançon et Genève ont donc raison d'accorder une grande importance pratique à ce coeffient ε. Ajoutons qu'on pourrait parfaitement appliquer le procédé au cas d'un nombre plus grand de périodes.

5. - Le procédé Plantamour-Cellérier de 1883. — Ce procédé a été établi à l'occasion du *concours national de compensation des chronomètres pour les températures* (Genève 1883); les bases en ont été jetées par Plantamour, et le procédé a été mis au point par G. CELLÉRIER, alors astronome-adjoint à l'Observatoire de Genève.

Le concours imposait la considération, non pas de 3 périodes thermiques seulement, mais de 14 périodes thermiques; plus exactement, 7 périodes avec température ascendante et 7 périodes avec température descendante; les températures d'observations étaient 5°, 10°, 15°, 20°, 25°, 30°, 35°.

La première chose à faire consiste à obtenir une indication sur l'*erreur moyenne de compensation* d'un chronomètre; c'est-à-dire que l'on recherche la marche qu'aurait le chronomètre si son erreur secondaire disparaissait, entre 5° et 35°.

G. CELLÉRIER a pris soin d'établir une théorie complète de la *compensation moyenne*; cette théorie est basée sur l'emploi de la méthode des moindres carrés; on la trouve exposée dans les travaux de M. G. CELLÉRIER relatifs aux deux concours de 1883 et 1885 (1).

Mais, trouvant cet appareil trop compliqué pour l'application pratique, G. CELLÉRIER a établi une méthode plus rapide et qui donne très sensiblement les mêmes résultats.

6. - Considérons la courbe de la marche du chronomètre. Entre 5° et 35°, cette courbe est coupée en deux parties par l'ordonnée du milieu, correspondant à $t=20°$. Pour chaque demi-courbe, on peut calculer l'ordonnée moyenne et l'élever sur l'abscisse moyenne ($12°\,1/2$ et $27°\,1/2$ respectivement). Les deux points ainsi déterminés G_1 et G_2 (fig. 3) sont des espèces de centres de gravité de chacune de ces demi-courbes; leur jonction par une ligne droite donne la *ligne de compensation moyenne.* Cette droite représente sensiblement la marche qu'aurait le chronomètre si son erreur secondaire disparaissait.

La définition sous-entendue de la ligne de compensation moyenne est la suivante: c'est une droite telle que la somme algébrique des différences d'ordonnées entre celle-ci et la courbe effective de la marche soit nulle, et que la somme numérique de ces différences soit un minimum.

---

(1) C'est la méthode même qu'emploie actuellement l'Observatoire de Neuchâtel, mais en l'appliquant à 3 périodes seulement.

L'inclinaison de cette ligne représente l'erreur de compensation qui subsisterait pour un tel chronomètre idéal; son coefficient angulaire sera le *coefficient de l'erreur moyenne de compensation.*

Ayant ainsi la courbe de la marche d'un chronomètre *idéal* dépourvu d'erreur secondaire, cette dernière quantité sera représentée, pour chaque abscisse, par la différence entre l'ordonnée de la courbe vraie et l'ordonnée de la ligne de compensation moyenne. Soient d_5, d_{10}, d_{15}, d_{20}, d_{25}, d_{30}, d_{35} ces différences.

La moyenne arithmétique des longueurs de ces segments d_i est ce que G. CELLÉRIER a appelé l'*écart moyen de la compensation moyenne*; ce

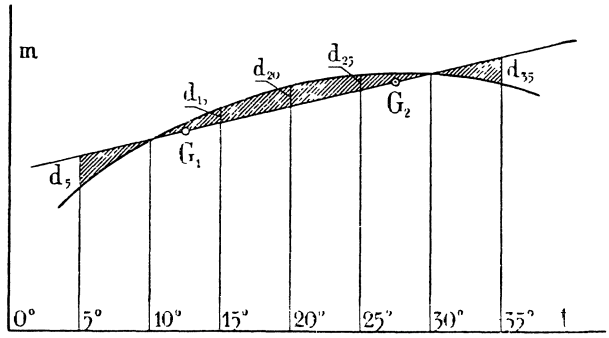


Fig. 3.

nouvel élément représente évidemment l'influence de l'*erreur secondaire de compensation.*

Telle est la méthode pratique de Cellérier. Rappelons qu'elle était appliquée à 2 séries de 7 périodes chacune.

7. - Equivalence des méthodes de Washington (1914) et Plantamour-Cellérier (1883). — Appliquons le procédé Plantamour-Cellérier au cas de trois périodes thermiques seulement (calcul du n.° 6). Les coordonnées des points G_1 et G_2 sont alors:

$$G_1\left[\frac{(2t_1+t_2}{3}\ ;\ \frac{2m_1+m_2}{3}\right];$$

$$G_2\left[\frac{(t_2+2t_3}{3}\ ;\ \frac{m_2+2m_3}{3}\right];$$

et la droite $\overline{G_1G_2}$ a pour équation:

$$(\delta) \qquad m=\frac{2m_1+m_2}{3}+\frac{m_3-m_1}{t_3-t_1}\left(t-\frac{2t_1+t_2}{3}\right).$$

On voit immédiatement que le *coefficient angulaire a n'est pas autre chose que le premier quotient du procédé de Washington*; c'est pourquoi nous avons dit au n.° 3 qu'on pouvait appeler ce dernier *coefficient d'erreur moyenne.*

La ligne (δ) du procédé Cellérier à 3 périodes thermiques est donc parallèle à la corde P_1P_3 du segment de Washington (fig. 1).

L'équation de la corde P_1P_3 est:

$$m = m_1 + \frac{m_3 - m_1}{t_3 - t_1}(t - t_1).$$

Donnons alors à t la valeur t_2; elle correspond à la valeur m_2 de la marche du chronomètre, donc au point P_2 de la figure 1.

On tire de (δ) une valeur m' telle que:

$$m_2 - m' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(m_2 - m_1)(t_3 - t_1) - (m_3 - m_1)(t_2 - t_1)}{t_3 - t_1} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\text{triangle } P_1P_2P_3}{t_3 - t_1}\right);$$

et de l'équation P_1P_3 une valeur m'' telle que:

$$m_2 - m'' = \frac{(m_2 - m_1)(t_3 - t_1) - (m_3 - m_1)(t_2 - t_1)}{t_3 - t_1} = \frac{\text{triangle } P_1P_2P_3}{t_3 - t_1};$$

cette dernière valeur donne la longueur de la flèche f du segment de Washington (fig. 1); tandis que $(m_2 - m')$ mesure la flèche d_{20} du segment intermédiaire de la figure 3 du procédé Plantamour-Cellérier.

Et l'on voit bien que la flèche f de Washington est égale à celle de Plantamour-Cellérier multipliée par le facteur constant $\frac{3}{2}$. On peut d'ailleurs le voir autrement étant donnée la définition de la ligne de compensation moyenne (voir n.° 6); on doit avoir en effet:

$$(d_{20}) = (d_5) + (d_{35});$$

et comme $\overline{G_1G_2}$ est parallèle à $\overline{P_1P_3}$, on a:

$$d_5 = d_{35};$$
$$f = (d_{20}) + (d_5);$$

donc

$$f = \frac{3}{2}(d_{20}).$$

La conclusion est celle-ci: dans le cas de 3 périodes thermiques, le procédé de Washington 1914 est parfaitement équivalent au procédé Plantamour-Cellérier 1883.

On peut donc dire que tous les Observatoires chronométriques (du moins en ce qui concerne les chronomètres de poche) suivent la voie tracée par Plantamour et Plantamour-Cellérier.

G. KOLOSSOFF (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR LE CENTRE DES FORCES NON PARALLÈLES

Soit $F_1, F_2, \ldots, F_n$ un système de forces, appliquées aux points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ d'un solide et $F=\sum_{k=1}^{k=n} F_k$ leurs somme géométrique.

Appelons centre de ces forces le point C, défini par deux conditions:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k \times F_k = 0 \tag{1}$$

$$\text{projec.} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k \wedge F_k \right\}_{\text{sur } P} = 0 \tag{2}$$

où $\varrho_k = CM_k$, P un plan perpendiculaire à λ.

Si tous les F_k sont parallèles, un vecteur unitaire parallèle aux forces, F_k le nombres mesurant les forces (>0 ou <0 suivant leurs sens par rapport à λ) nous pouvons écrire nos conditions (1) et (2) sous la forme:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k F_k \times \lambda = 0, \qquad \text{projec.} \left[\left\{ \sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k F_k \right\} \wedge \lambda \right]_{\text{sur } P} = 0$$

d'où: $\sum_{k=1}^{k=n} \varrho_k F_k = 0$ et si $r_k = OM_k$, $r_c = OC$ (O un point fixe, origine d'un système des coordonnées rectangulaires x, y, z)

$$\bar{\varrho}_k = \bar{r}_k - \bar{r}_c \tag{3}$$

et nous arrivons à la définition bien connue du centre des forces parallèles:

$$r_c F = \sum_{k=1}^{k=n} r_k F_k$$

(F est içi la somme algébrique des F_k).

Dans le cas général on obtient de (1), (2) au moyen de (3):

$$r_c \times F = \sum_{k=1}^{k=n} r_k \times F_k, \qquad r_c \Lambda F = \text{projec.} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} r_k \wedge F_k \right\}_{\text{sur } P}.$$

La première de ces équations définit un plan à la distance $\frac{1}{F}\sum_{k=1}^{k=n} r_k \times F_k$ de O dans la direction de F, la deuxième une droite parallèle à F à la distance $\frac{1}{F^2} \cdot F \Lambda \sum_{k=1}^{k=n} r_k \Lambda F_k$; C est le point d'intersection de ce plan et de cette droite et

$$r_c = \frac{F \sum_{k=1}^{k=n} r_k \times F_k + F \wedge \sum_{k=1}^{k=n} r_k \wedge F_k}{F^2}. \tag{4}$$

Ce centre C est introduit (d'une manière plus compliquée) par M. R. W. HAMILTON ([1]); il possède d'importantes propriétés astatiques qui lui font mériter

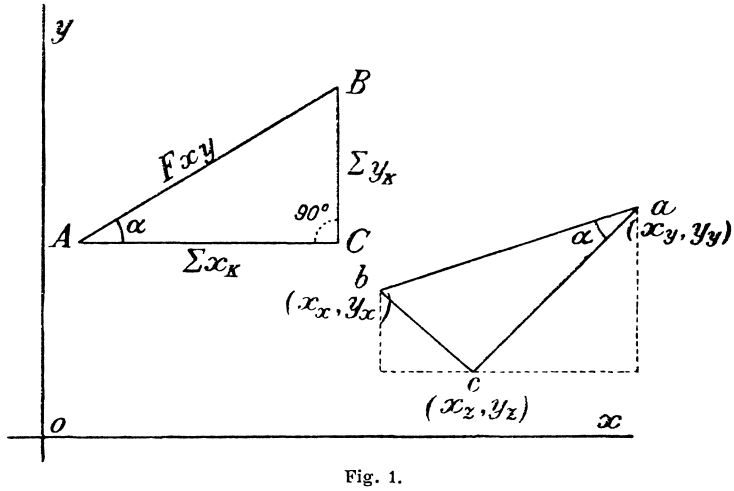


Fig. 1.

le nom de « centre » a un degré supérieur aux centres de MINDING-DARBOUX et de MÖBIUS; pour un système plan il coïncide avec le centre bien connu des systèmes plans.

Il est évident que par C passera toujours l'axe central des forces et dans le cas $I = O(F > 0)$ la résultante du système de forces où

$$I = \Sigma X_k \Sigma y_k Z_k - z_k Y_k + \Sigma Y_k \Sigma z_k X_k - x_k Z_k + \Sigma Z_k \Sigma x_k Y_k - y_k X_k$$

(x_k, y_k, z_k les coordonnées de M_k; X_k, Y_k, Z_k les projections de F_k sur les axes).

Il s'ensuit de (4):

$$\begin{cases} F^2(x_c + iy_c) = \Sigma(X_k + iY_k)\{\Sigma(X_k - iY_k)(x_k + iy_k) + \Sigma z_k Z_k\} + \\ \qquad + \Sigma Z_k\{\Sigma Z_k z_k - \Sigma(X_k + iY_k) z_k\} \\ F^2 z_c + iI = \Sigma(X_k + iY_k)\{\Sigma(X_k - iY_k) z_k - \Sigma Z_k(x_k - iy_k)\} + \\ \qquad + \Sigma Z_k\{\Sigma Z_k z_k + \Sigma(X_k + iY_k)(x_k - iy_k)\}. \end{cases} \tag{5}$$

([1]) *Elements of Quaternions*, 2e édition. Londres (1901) p. 708-709.

Déplaçons le solide en le tornant avec les axes Ox, Oy autour de l'axe Oz en supposant les forces F_k constantes en grandeur et en direction.

Soient φ l'angle de l'axe Ox avec une droite fixe du plan xy et $X_k^{(0)}$, $Y_k^{(0)}$ les valeurs de X_k, Y_k quand $\varphi=0$. $X_k+iY_k=e^{i\varphi}(X_k^{(0)}+iY_k^{(0)})$ et on obtient de la première équation (5) que x_c+iy_c est invariable quand

$$\sum_{k=1}^{k=n}(X_k+iY_k)\sum_{k=1}^{k=n}Z_kz_k=\sum_{k=1}^{k=n}Z_k\sum_{k=1}^{k=n}(X_k+iY_k)z_k$$

et de la deuxième que F^2z_c+tI est invariable quand

$$\Sigma Z_k\Sigma(X_k+iY_k)(x_k-iy_k)=\Sigma(X_k+iY_k)\Sigma Z_k(x_k-iy_k).$$

En introduisant les coordonnées des centres des 3 groupes de RICHE DE PRONY (coordonnées astatiques du système):

$$x_x=\frac{\Sigma x_kX_k}{\Sigma X_k},\quad y_x=\frac{\Sigma y_kX_k}{\Sigma X_k},\quad z_x=\frac{\Sigma z_kX_k}{\Sigma X_k},\quad x_y=\frac{\Sigma x_kY_k}{\Sigma Y_k},\quad y_y=\frac{\Sigma y_kY_k}{\Sigma Y_k},\quad z_y=\frac{\Sigma z_kY_k}{\Sigma Y_k},\ldots,$$

nous obtiendrons que x_c+iy_c est invariable quand $z_x=z_y=z_z$ (le plan des centre est parallèle au plan Oxy) et z_c et I restent invariables quand

$$(6)\qquad \frac{y_x-y_z}{x_x-x_z}\cdot\frac{y_y-y_z}{x_y-x_z}=-1\quad\text{et}\quad(x_x-x_z)\Sigma X_k+(y_y-y_z)\Sigma Y_k=0.$$

Ces deux conditions on une interprétation géométrique fort simple. Prenons le plan des centres comme plan xOy, ainsi que $z_x=z_y=z_z=0$ et abc le triangle des centres. Projetons sur ce plan la somme géométrique et $F_{xy}(AB)$ cette projection. F_{xy}, ΣX_k, ΣY_k forment un triangle rectangle ABC. Les conditions (6) expriment que $\Delta abc\sim\Delta ABC$, car la première de ces conditions exprime la perpendicularité de ac et bc et la deuxième la proportionalité des cathètes:

$$\frac{AC}{ac}=\frac{BC}{bc},\quad\text{car}\quad AC=\Sigma X_k,\quad BC=\Sigma Y_k,\quad \frac{AC}{ac}=\frac{y_y-y_z}{x_z-x_x}.$$

Ces conditions ne dépendent pas de la position des axes des coordonnées xy comme il est facile de demontrer analytiquement.

G. KOLOSSOFF (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR LA TORSION D'UN PRISME AYANT POUR BASE UN CONTOUR FORMÉ DE DEUX DROITES RECTANGULAIRES ET UNE LIGNE ONDULEUSE

Le problème se réduit à intégrer l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

avec la condition que l'on ait autour des sections

$$\psi=\frac{1}{2}(x^2+y^2). \tag{2}$$

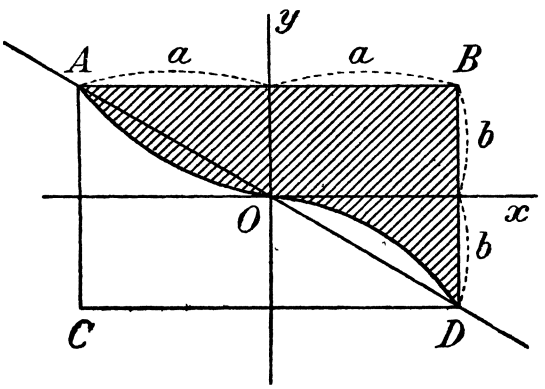


Fig. 1.

Pour le rectangle $ABCD$ (de dimensions $AB=2a$, $BD=2b$) l'origine O étant au centre et les axes bx, by parallèles aux côtés nous avons, suivant les formules classiques de BARRÉ DE SAINT VENANT, deux formes équivalentes de la fonction ψ:

$$\psi=a^2+\frac{1}{2}(y^2-x^2)-4a^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,\frac{Ch\dfrac{(2n+1)\pi y}{2a}}{Ch\dfrac{(2n+1)\pi b}{2a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

$$\psi=b^2+\frac{1}{2}(x^2-y^2)-4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,\frac{Ch\dfrac{(2n+1)\pi x}{2b}}{Ch\dfrac{(2n+1)\pi a}{2b}}\cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

Modifions ces expressions en ajoutant des termes qui s'annulent sur les côtés $BD(x=a)$ et $AB(y=b)$ et en changeant Ch en Sh et formons deux expressions:

$$\psi_1=a^2+\frac{1}{2}(y^2-x^2)-\frac{a}{b}(x-a)(y-b)-$$
$$-4a^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3\sum_0^\infty\frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}\,\frac{Sh\dfrac{(2n+1)\pi y}{2a}}{Sh\dfrac{(2n+1)\pi b}{2a}}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}$$

$$\psi_2 = b^2 + \frac{1}{2}(x^2 - y^2) - \frac{b}{a}(x-a)(y-b) -$$

$$-4b^2\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{Sh\,\frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{Sh\,\frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b}$$

Soient λ, μ deux constantes arbitraires; posons

$$\psi_{\lambda\mu} = \frac{\lambda\psi_1 + \mu\psi_2}{\lambda+\mu} = \frac{a^2\lambda + b^2\mu}{\lambda+\mu} + \frac{1}{2}\frac{\lambda-\mu}{\lambda+\mu}(y^2 - x^2) - \frac{a^2\lambda + b^2\mu}{ab(\lambda+\mu)}(x-a)(y-b) - \frac{T}{\lambda+\mu}$$

où

$$T = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ \lambda a^2 \frac{Sh\,\frac{(2n+1)\pi y}{2a}}{Sh\,\frac{(2n+1)\pi b}{2a}} \cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a} + \right.$$

$$\left. + \mu b^2 \frac{Sh\,\frac{(2n+1)\pi x}{2b}}{Sh\,\frac{(2n+1)\pi a}{2b}} \cos\frac{(2n+1)\pi y}{2b} \right\}$$

(3) $$\psi_{\lambda\mu} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

est l'équation du contour pour lequel $\psi_{\lambda\mu}$ donne la solution du problème de torsion. L'équation (3) appartient à une courbe qui passe par A, D, O et présente une ligne onduleuse. En particulier elle peut être confondu d'une manière plus ou moins compète avec la ligne droite AD (cas d'un triangle rectangle). Beaucoup d'exemples serons donnés dans un mémoire plus étendu.

G. KOLOSSOFF (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR UNE APPLICATION DE LA TRANSFORMATION COMPLEXE DES ÉQUATIONS D'ÉLASTICITÉ À LA RECHERCHE DES SOLUTIONS GÉNÉRALES DE CES ÉQUATIONS

Les équations d'équilibre des forces élastiques dans un corps isotrope s'obtiennent en substituant dans les équations:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+\varrho X=0,.... \tag{1}$$

les expressions

$$X_x=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\qquad X_y=Y_x=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),.... \tag{2}$$

X_x, X_y,.... sont les projections sur les axes Ox, Oy, Oz des tensions sur les éléments $\perp$-aires à ces axes, ϱ la densité, X, Y, Z les projections des forces exterieures, u, v, w les déplacements d'un point suivant les axes, λ, μ les coefficients de Lamé, $\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ la dilatation cubique.

Introduisons au lieu de x, y comme variables indépendantes

$$\zeta=x+iy,\qquad \zeta_1=x_1-iy_1,\qquad (i=\sqrt{-1})$$

et posons:

$$\varphi=X_z+iY_z,\quad \psi=X+iY,\quad \chi=X_x-Y_y+2iX_y,\quad \Omega=X_x+Y_y.$$

Nous obtiendrons au lieu de (1) les équations [1]

$$\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}+\frac{\partial\Omega}{\partial\zeta_1}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\varrho\psi=0 \tag{1a}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\zeta_1}=-\frac{\partial Z_z}{\partial z}+\varrho Z \tag{1b}$$

et au lieu de (2) les équations:

$$\chi=2\frac{\partial f}{\partial\bar{\zeta}_i}\quad \text{où}\quad f=u+iv \tag{2a}$$

$$\Omega=\varepsilon\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right)+2\sigma\varepsilon\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2b}$$

$$\varphi=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial\zeta_1}, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}(1-\sigma)=Z_z(1-2\sigma)-\sigma\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right) \tag{2d}$$

où $f_1=u-iv$, $\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ (module de Poisson), $\varepsilon=\frac{\lambda+\mu}{\mu}$ (M. ALMANSI le désigne par $\varkappa$) ainsi que $\frac{\lambda}{\mu}=\varepsilon-1$, $\sigma=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$, $\varepsilon=\frac{1}{1-2\sigma}$. Il s'ensuit de (2$b$) et (2$d$):

$$\Omega=\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right)+2Z_z\frac{\sigma}{1-\sigma}. \tag{2bd}$$

Les équations (1a), (1b), (2a), (2b), (2c), (2d) sont très utile pour la recherche des solutions des équations (1), (2). Nous avons indiqué [1] le moyen d'obtenir d'une manière très simple la solution de Saint Venant et de Clebsch.

Posons

$$\varphi=\frac{\partial\omega_1}{\partial\zeta_1} \tag{3}$$

ou $\omega_1=F_1(\zeta_1,\zeta,z)$, $(\omega=F(\zeta,\zeta_1,z))$ est une fonction de ζ, ζ_1, z que nous supposons donnée. En l'introduisant en (1a) nous obtiendrons au moyen de (2a) en intégrant par rapport à ζ_1:

$$2\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\Omega+\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+\varrho\int\psi d\zeta_1=0. \tag{4}$$

La fonction arbitraire de ζ et de z introduite par cette intégration nous la supposons enfermée dans ω_1.

En mettant au lieu de Ω (2bd) nous trouverons de (4)

$$\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}+\frac{\partial\omega_1}{\partial z}+\varrho\int\psi d\zeta_1+2\frac{\sigma}{1-\sigma}Z_z=0. \tag{5}$$

En substituant dans (5) $-i$ au lieu de i et en sommant avec (5):

$$\frac{4}{1-\sigma}\left(\frac{\partial f}{\partial\zeta}+\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}\right)+\frac{\partial(\omega+\omega_1)}{\partial z}+\varrho\int\psi d\zeta_1+\varrho\int\psi_1 d\zeta+4\frac{\sigma}{1-\sigma}Z_z=0. \tag{6}$$

Il s'ensuit de (5) et de (6):

$$\frac{\partial f}{\partial\zeta}=\frac{3-\sigma}{8}\left(-\varrho\int\psi d\zeta_1-\frac{\partial\omega_1}{\partial z}\right)+\frac{1+\sigma}{8}\left(-\varrho\int\psi_1 d\zeta-\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)-\frac{\sigma}{2}Z_z \tag{7}$$

et on obtient f en connaissant ω et Z_z par une simple quadrature avec une fonction arbitraire en z et ζ_1.

Pour simplifier le calcul posons dans le suivant $\psi=\psi_1=Z=0$ (absence des forces extérieures). De (2c), (2d), (6), (7) nous trouvons

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial z}=Z_z(1-\sigma)+\dfrac{\sigma}{4}\dfrac{\partial(\omega+\omega_1)}{\partial z}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial\zeta\partial\zeta_1}+\dfrac{1}{4}\dfrac{\partial^2\omega_1}{\partial z^2}-\dfrac{1+\sigma}{16}\dfrac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}+\dfrac{\sigma}{4}\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}\end{cases} \tag{8}$$

ou

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial z}=Z_z(1-\sigma)+\dfrac{\sigma}{4}\dfrac{\partial(\omega+\omega_1)}{\partial z}\\[2ex]\dfrac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\dfrac{1}{4}\nabla_2\omega_1-\dfrac{1+\sigma}{16}\dfrac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}+\dfrac{\sigma}{4}\dfrac{\partial Z_z}{\partial z}\end{cases} \tag{9}$$

---

[1] Voir notre Note: Comptes Rendus, t. 184, 1927, p. 512.

où

$$\nabla_2\omega=\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}=4\frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta\partial\zeta_1}+\frac{\partial^2\omega}{\partial z^2}.$$

En remarquant que $\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$ doit être réelle, nous trouvons la condition nécessaire et suffisante de cette réalité: $\nabla_2\omega_1$ doit être réelle ou

$$\nabla_2\omega=\nabla_2\omega_1. \tag{10}$$

Au moyen de (10) et de (1*b*), qui prend la forme

$$\frac{\partial Z_z}{\partial z}=-\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1} \tag{11}$$

nous trouverons au lieu de (9) les équations

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial z}=Z_z(1-\sigma)+\dfrac{\sigma}{4}\dfrac{\partial(\omega+\omega_1)}{\partial z}\\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\dfrac{2-\sigma}{4}\dfrac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1}+\dfrac{1-\sigma}{16}\dfrac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}\end{cases} \tag{12}$$

La condition d'intégrabilité de (12) exige:

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\frac{1}{16}\frac{\partial^3(\omega+\omega_1)}{\partial z^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3(\omega+\omega_1)}{\partial z\partial\zeta\partial\zeta_1}; \tag{13}$$

nous obtiendrons Z_z de (11) et de (13) et leur condition d'intégrabilité exige:

$$\frac{\partial^4(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta^2\partial\zeta_1^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^4(\omega+\omega_1)}{\partial z^2\partial\zeta\partial\zeta_1}+\frac{1}{16}\frac{\partial^4(\omega+\omega_1)}{\partial z^4}=0$$

ou

$$\nabla_2\nabla_2(\omega+\omega_1)=0 \tag{14}$$

et il s'ensuit de (10):

$$\nabla_2\nabla_2\omega=\nabla_2\nabla_2\omega_1=0.$$

Nous avons de (11):

$$Z_z=-\int\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1}dz+Z_{0z},$$

où Z_{0z} est une fonction de ζ et ζ_1 et de (13):

$$\frac{\partial^2 Z_{0z}}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\frac{1}{16}\frac{\partial^3(\omega+\omega_1)}{\partial z^3}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3(\omega+\omega_1)}{\partial z\partial\zeta\partial\zeta_1}+\int\frac{\partial^4(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta^2\partial\zeta_1^2}dz$$

(la dérivée de la seconde partie par rapport à z est $=0$), et Z_{0z} est déterminée jusqu'à une quantité Z_0 qui est une fonction harmonique $=f(\zeta)+f_1(\zeta_1)$.

Il s'ensuit des équations (9):

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-(1-\sigma)\int\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1}dz+(1-\sigma)Z_{0z}+\frac{\sigma}{4}\frac{\partial(\omega+\omega_1)}{\partial z}$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\frac{2-\sigma}{4}\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1}+\frac{1-\sigma}{16}\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{2-\sigma}{4}\frac{\partial}{\partial z}(\omega+\omega_1)+\frac{1-\sigma}{16}\iint\frac{\partial^3(\omega+\omega_1)}{\partial z^3}d\zeta d\zeta_1+Z_0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=\frac{2-\sigma}{4}\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial\zeta\partial\zeta_1}+\frac{1-\sigma}{16}\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}$$

et

$$w=\frac{2-\sigma}{4}(\omega+\omega_1)+\frac{1-\sigma}{16}\iint\frac{\partial^2(\omega+\omega_1)}{\partial z^2}\,d\zeta d\zeta_1+Z_0z+w_0$$

où $\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=0.$

EXEMPLES: 1°) $\omega=\omega(z,\zeta)$ $\frac{\partial^2\omega}{\partial\zeta\partial\zeta_1}=0$ et de (14) $\frac{\partial^4\omega}{\partial z^4}=0.$

$\omega=\omega_0+\omega_1 z+\omega_2 z^2+\omega_3 z^3$ et ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 sont les fonctions de ζ.

Ce cas est développé dans notre mémoire: Comptes Rendus, 1927, t. 184. Il contient comme cas particuliers les solutions de Clebsch et de Maurice Lévy.

2°) Le problème de Saint-Vénant et ses généralisations.

3°) Les problèmes de MM. ALMANSI, PEARSON, MICHELL. Ces cas seront discutés dans une mémoire qui paraîtra vers la fin de 1928.

J. LENNERTZ (Aachen - Germania)

GEGENSEITIGER EINFLUSS VON TRAGFLÄCHE UND RUMPF

Rumpf und Tragfläche eines Flugzeuges beeinflussen sich gegenseitig in Bezug auf die Luftkräfte, die an ihnen auftreten. Die exakte theoretische Behandlung dieses gegenseitigen Einflusses ist ausserordentlich schwierig, und die numerische Rechnung wird nur durch eine Reihe von vereinfachenden Annahmen ermöglicht. Wir beschränken uns auf den Fall stationärer Strömung und gehen aus von der Prandtl'schen Tragflügeltheorie.

Bekanntlich ergeben sich bei stationärer Bewegung einer Tragfläche in einer idealen Flüssigkeit Auftrieb und Widerstand, wenn man eine Zirkulationsbewegung um die Tragfläche sowie eine Ablösung von Wirbeln an der Hinterkante der Tragfläche annimmt. Die Prandtl'sche Theorie setzt nun eine Grundströmung voraus, gegen deren Geschwindigkeit sämtliche Zusatzgeschwindigkeiten klein sind. Daher machen wir die Annahme, dass die an der Hinterkante der Tragfläche abgehenden freien Wirbel von der Grundströmung geradlinig mitgeführt werden. Es ergibt sich demnach hinter der Tragfläche ein Wirbelband, das eben angenommen wird. Ausserdem wird vorausgesetzt, dass die Tiefe der Tragfläche im Verhältnis zur Breite klein ist, sodass wir die Tragfläche durch eine tragende Linie ersetzen können. Diese tragende Linie ist der Träger der gebundenen Wirbel, welche die Zirkulationsbewegung der Strömung um die Tragfläche erzeugen. Die Flüssigkeitsbewegung ist dann ausserhalb der Tragfläche und des freien Wirbelbandes eine Potentialströmung. Das freie Wirbelband bildet eine Unstetigkeitsfläche für das Potential, und zwar ist der Potentialsprung längs einer Wirbellinie gleich der Zirkulation um das Tragflächenelement, von dem diese Wirbellinie ausgeht.

Die von der Tragfläche herrührende Wirbelbewegung ruft am Rumpf eine Geschwindigkeit hervor, deren Komponente normal zur Rumpfoberfläche im allgemeinen nicht verschwindet. Es ist also noch die Ueberlagerung einer Zusatzströmung erforderlich, welche die Normalkomponente der Geschwindigkeit am Rumpf aufhebt, in unendlicher Entfernung vom Rumpf jedoch keinen Einfluss ausübt. Diese Zusatzströmung besitzt ausserhalb des Rumpfes ein Geschwindigkeitspotential. Die Ermittlung ist jedoch für die gebräuchlichen Rumpfformen recht kompliziert. Meinen Untersuchungen ist daher eine stark idealisierte Rumpf-

form zugrunde gelegt, nämlich ein Zylinder, der sich beiderseits ins Unendliche erstreckt und dessen Längsachse in die Bewegungsrichtung des Flugzeuges fällt. Die auf den Rumpf wirkende Luftkraft ergibt sich durch Benutzung der Bernoulli'schen Beziehung. Mit unserer Annahme eines zylindrischen Rumpfes erhalten wir am Rumpf lediglich einen Auftrieb. Der Einfluss des Rumpfes auf die Tragfläche ergibt sich dadurch, dass die durch den Rumpf bedingte Zusatzströmung im allgemeinen eine Abwärtsgeschwindigkeit an der Tragfläche hervorruft. Dadurch wird der Rumpf eine Aenderung des effektiven Anstellwinkels sowie einen zusätzlichen Widerstand an der Tragfläche hervorbringen.

Im folgenden legen wir ein kartesisches Koordinatensystem derart fest: Die x-Achse falle in die Längsachse des Rumpfes und zwar positiv in die Bewegungsrichtung des Flugzeuges. Die y-Achse verlaufe in die Richtung der Breite und die z-Achse gehe senkrecht zu beiden nach oben, also in Richtung des Auftriebes.

In einfacher Weise ergibt sich nun die Verteilung des Auftriebes über die Flugzeugbreite sowie der Gesamtauftrieb durch Anwendung des Impuls-und Energiesatzes. In einer Ebene, die hinreichend weit hinter der Tragfläche liegt, erzeugen die freien Wirbel eine Flüssigkeitsbewegung um den Rumpfquerschnitt. Der sekundliche Impuls dieser Strömung ist entgegengesetzt gleich dem Auftrieb und die sekundliche Energie dieser Strömung ist gleich der Leistung der Luftkräfte. Wir erhalten also den Aufrieb:

$$A = -\varrho V \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dydz \tag{1a}$$

und den Widerstand:

$$W = -\frac{\varrho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] dydz, \tag{1b}$$

Hierin ist ϱ die Dichte, V die Geschwindigkeit der Grundströmung und φ die Potentialfunktion in einer unendlich weit hinter der Tragfläche liegenden Ebene. Die Integration ist über die ganze Ebene ausserhalb des Rumpfquerschnittes und des Wirbelbandschnittes zu erstrecken.

Für den Fall einer gleichmässigen Auftriebsverteilung über die Tragfläche lösen sich nur an den Enden der Tragfläche freie Wirbelfäden ab. Die Strömung um den Zylinderrumpf in unendlicher Entfernung hinter der Tragfläche lässt sich dann erzeugen durch Spiegelung der freien Wirbel an der Rumpfoberfläche. Der Auftrieb am gesamten Flugzeug ist:

$$A = \varrho V \Gamma \cdot 2B\left(1 - \frac{R^2}{B^2 + e^2}\right). \tag{2}$$

Hierin ist Γ die Zirkulation um die Tragfläche, B die halbe Spannweite und e der Abstand der tragenden Linie von der Rumpfachse. Die Auftriebsverteilung über die Rumpfbreite zeigt eine Abnahme zur Rumpfmitte hin. Bei den praktisch

vorkommenden Abmessungen eines Flugzeuges ist der Einfluss der Höhenlage der Tragfläche auf den Auftrieb gering. Ersetzt man den Rumpf durch Tragflächenstücke, die den Auftrieb des Rumpfes hervorbringen, so ergibt sich die wirksame Breite für den gesamten Auftrieb dadurch, dass die Spannweite um die Breite zwischen den Spiegelpunkten der am Rumpf gespiegelten Tragflächenenden vermindert wird.

Die Frage nach dem gesamten Widerstand erhält bei gleichmässiger Zirkulationsverteilung keine befriedigende Lösung. Nach dem Energiesatz müsste nämlich der Widerstand unendlich gross werden, da die Geschwindigkeit am konzentrierten Wirbelfaden unendlich gross wird. Es lässt sich jedoch wohl die Aenderung des Tragflächenwiderstands sowie die Aenderung des Anstellwinkels infolge des Rumpfes errechnen. Die zur Längsachse parallelen Wirbeläste im Rumpfinnern erzeugen nämlich eine Strömung, die an der Tragfläche eine vertikale Geschwindigkeitskomponente besitzt. Diese Vertikalgeschwindigkeit ergibt sich nach dem Biot-Savart'schen Gesetz zu:

$$(3)\quad w_z = -\frac{\Gamma}{2\pi} B \frac{B^2+e^2}{R^2} \frac{\frac{(B^2+e^2)^2}{R^4}(y^2-e^2) + 2\frac{B^2+e^2}{R^2}e^2 - (B^2+e^2)}{\left[\frac{(B^2+e^2)^2}{R^4}(y^2+e^2) - 2\frac{B^2+e^2}{R^2}e^2 + B^2 + e^2\right]^2 - 4\frac{(B^2+e^2)^2}{R^4}y^2B^2}$$

Der effektive Anstellwinkel der Tragfläche wird infolge des Rumpfes verringert um $\varepsilon = -\frac{w_z}{V}$. Da nun an einem Element der Tragfläche $dW = \varepsilon dA$ ist, folgt der Tragflächenwiderstand infolge des Rumpfes durch Integration über die Tragflächenbreite. Wenn die Tragfläche oberhalb bezw. unterhalb des Rumpfes angebracht ist, so bewirkt der Rumpf eine geringe Verminderung des Tragflächenwiderstandes; in diesem Falle wird nämlich eine Aufwärtsgeschwindigkeit in der Mitte der Tragfläche durch die Wirbel im Rumpfinnern und mithin eine Vergrösserung des Anstellwinkels in der Mitte der Tragfläche bewirkt. Der grösste Widerstand infolge des Rumpfes ist vorhanden, wenn die Tragfläche in der Mitte des Rumpfes befestigt ist, also für $e=0$. Dieser Widerstand hat den Betrag:

$$(4)\quad W = \frac{\varrho\Gamma^2}{4\pi} \ln \frac{(B+R)^4}{(B^2+R^2)^2}.$$

Nun stellen wir für den Fall, dass Tragflächenachse und Rumpfachse sich schneiden, die Frage nach der Zirkulationsverteilung über die Tragfläche, die bei gegebenem Auftrieb den geringsten Widerstand ergibt. Wandelt man mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes die Flächenintegrale (1a) und (1b) in Randintegrale um, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (2) der Auftrieb zu:

$$(5a)\quad A = 2\varrho V \int_{\frac{R^2}{B}}^{B} \Gamma(y)dy = 2\varrho V \int_{R}^{B} \Gamma(y)\left(1+\frac{R^2}{y^2}\right)dy$$

und der Widerstand zu:

(5b) $$W = -\varrho \int_R^B \Gamma(y) \frac{\partial \varphi}{\partial n} dy .$$

Hierin ist φ die Potentialfunktion und n die nach oben weisende Normale zum Wirbelband, und es ist $\Gamma\left(\frac{R^2}{y}\right) = \Gamma(y)$.

Der kleinste Widerstand für beliebigen Auftrieb ergibt sich dann, wenn bei Variation der Zirkulation $\delta W - \lambda \delta A = 0$ wird, also für

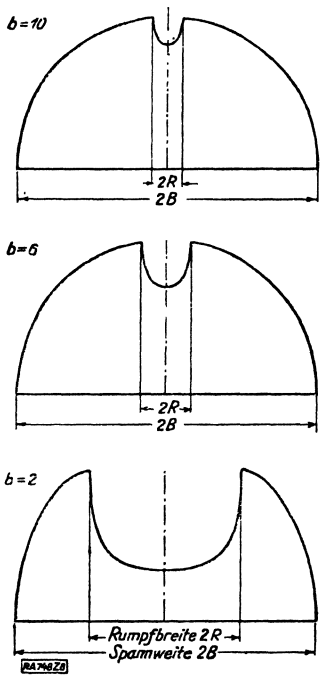


Fig. 1.

(6) $$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = -c\left(1 + \frac{R^2}{y^2}\right).$$

Die Strömung, die dieser Bedingung entspricht, können wir in folgender Weise erzeugen: Wir bestimmen eine Bewegung, die das Wirbelband und den Rumpf umströmt und im Unendlichen eine konstante Geschwindigkeit c nach oben hat. Sodann überlagern wir eine Strömung um den Rumpf, die im Unendlichen die Geschwindigkeit c nach unten besitzt. Eine derartige Bewegung ergibt bei beliebigen Rumpfquerschnitten den kleinsten Widerstand. Die Zirkulationsverteilung über die Tragfläche, die sich bei zylindrischem Rumpf mit der Bedingung (6) ergibt, ist in Abbildung 1 aufgetragen. Es ergibt sich noch der induzierte Widerstand in Abhängigkeit vom Auftrieb:

(7) $$W = \frac{1}{2} \frac{A^2}{\varrho V^2 \pi} \frac{B^2}{(B^2 - R^2)^2}.$$

Das Verhältnis des auf den Rumpf entfallenden Auftriebes zum gesamten Auftrieb ist in folgender Zusammenstellung für verschiedene Werte $b = \frac{B}{R}$ angegeben. Die eingeklammerten Zahlen geben dasselbe Verhältnis bei gleichmässiger Zirkulationsverteilung an

$b =$	2	4	6	8	10
$\frac{A_r}{A} =$	0,371	0,228	0,168	0,133	0,110
	(0,333)	(0,200)	(0,143)	(0,111)	(0,091).

Neben den gesamten Luftkräften und ihrer Verteilung über die Spannweite ist noch die Auftriebsverteilung über die Längsrichtung des Rumpfes von Bedeutung. Zur Ermittlung dieser Auftriebsverteilung ist eine Betrachtung der Strömungsvorgänge in der Nähe der Tragfläche erforderlich.

Das Wirbelsystem, bestehend aus des gebundenen Wirbeln, den von der Tragfläche abgehenden freien Wirbeln sowie den im Rumpfinnern befindlichen

gespiegelten Wirbeln, ruft normal zur Oberfläche des Rumpfes eine Geschwindigkeitskomponente hervor. Setzt man $y=r\cos\vartheta$ und $z=r\sin\vartheta$, so lässt sich diese Geschwindigkeitskomponente ausdrücken in der Form:

$$w_n=\frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\sin k\vartheta. \tag{8}$$

Die f_k sind ungerade Funktionen von x. Wir bestimmen nun ein Geschwindigkeitsfeld u so, dass in unendlicher Entfernung vom Rumpfe $u=0$ und an der Oberfläche des Rumpfes die Randbedingung

$$u_n+w_n=0$$

erfüllt wird. Die Potentialfunktion φ_1 für das Geschwindigkeitsfeld u ergibt sich in der Form:

$$\varphi_1=\frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} g_k(r,x)\sin k\vartheta.$$

Die Auftriebsverteilung in der Längsrichtung des Rumpfes folgt nun aus der Bernoulli'schen Beziehung zu:

$$A'=\varrho V\frac{\Gamma}{2\pi}[\bar{f}_1(x)-h_1(x)], \tag{9}$$

wenn $h_1=\left.\frac{\partial g_1}{\partial x}\right|_{r=k}$ und $w_x=\frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\bar{f}_k(x)\sin k\vartheta$ die Geschwindigkeitskomponente der gebundenen Wirbel in der x-Richtung an der Rumpfoberfläche ist. Mit Hilfe der exakten Potentialtheorie gelingt es uns nicht, den vom Geschwindigkeitsfeld u herrührenden Anteil an der Auftriebsverteilung numerisch zu errechnen. Es zeigt sich jedoch, dass nur das erste Glied in der Reihe für φ_1 einen Beitrag liefert. Von dieser Tatsache machen wir Gebrauch und nehmen an Stelle des Geschwindigkeitsfeldes u einen Doppelquellfaden längs der Rumpfachse an. Dieser Doppelquellfaden gestattet es nämlich, an der Rumpfoberfläche die Randbedingung $u_n+w_n=0$ für das erste harmonische Glied zu erfüllen. Wir erhalten dadurch für die Intensität $q(x)$ des Doppelquellfadens die Bedingungsgleichung:

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\frac{2-(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+1]^{\frac{5}{2}}}d\xi. \tag{10}$$

Hierin ist der Radius des Zylinderrumpfes $R=1$ gesetzt. Die Potentialfunktion des Doppelquellfadens lautet:

$$\varphi_1'=\frac{\Gamma}{\pi}r\sin\vartheta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{q(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2+r^2]^{\frac{3}{2}}}. \tag{11}$$

Ist also $q(\xi)$ bekannt, so folgt die Auftriebsverteilung längs des Rumpfes aus (9) zu:

$$A'=\varrho V\frac{\Gamma}{2}\left[\bar{f}_1(x)-6\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi)\frac{(x-\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2+1]^{\frac{5}{2}}}\right]. \tag{12}$$

Die Errechnung von $q(\xi)$ aus der Integralgleichung (10) geschieht dadurch, dass wir in kleinen Intervallen q konstant annehmen. An Stelle der Integralgleichung erhalten wir dann ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
&\ldots + a_2 q_{k-3} + a_1 q_{k-2} + a_0 q_{k-1} + a_{-1} q_k + a_{-2} q_{k+1} + \ldots = b_{k-1} \\
&\ldots + a_2 q_{k-2} + a_1 q_{k-1} + a_0 q_k + a_{-1} q_{k+1} + a_{-2} q_{k+2} + \ldots = b_k \\
&\ldots + a_2 q_{k-1} + a_1 q_k + a_0 q_{k+1} + a_{-1} q_{k+2} + a_{-2} q_{k+3} + \ldots = b_{k+1}.
\end{aligned}$$

Mit einer komplexen Variabeln ζ lässt sich dieses Gleichungssystem darstellen in der Form:

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \zeta^k\right)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k \zeta^k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k \zeta^k.$$

Es ergeben sich demnach die Unbekannten q_k aus der Division zweier Laurent'scher Reihen.

Auf diese Weise wurde die Auftriebsverteilung längs des Rumpfes errechnet für unendlich breite Tragfläche sowie für das Breitenverhältnis $b=10$ mit kons-

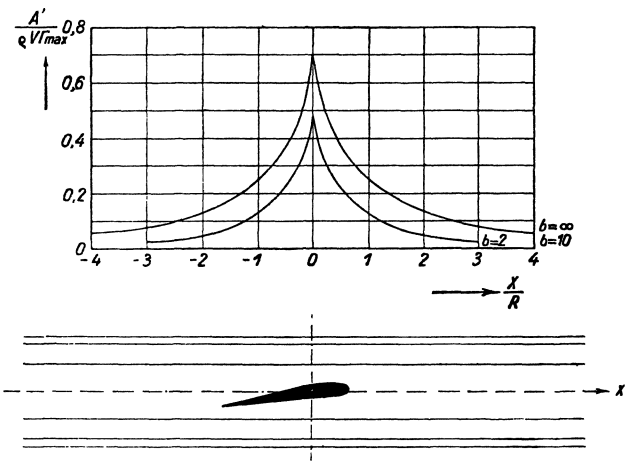


Fig. 2.

tanter Zirkulationsverteilung über die Tragfläche, ferner für $b=2$ mit der Zirkulationsverteilung, die sich aus der Bedingung kleinsten Widerstandes ergibt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2 dargestellt. Für $b=\infty$ und $b=10$ ergibt sich kein nennenswerter Unterschied.

Die ausführliche Herleitung dieser Ergebnisse ist veröffentlicht in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 7 (1927) Seite 249, sowie in den Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut in Aachen, Heft 8.

R. WAVRE (Genève - Svizzera)

SUR LES FIGURES D'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE HÉTÉROGÈNE

Envisageons une masse fluide hétérogène dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton et supposons que cette masse soit en équilibre relatif dans sa rotation autour d'un axe oz.

Si ω représente la vitesse angulaire, $\mathcal{V}$ le potentiel newtonien, Φ le potentiel du champ de la pesanteur, ϱ la densitè, ε la constante de la gravitation universelle et, enfin ∇ le symbole de Laplace, on aura en tout point de la masse

$$\Phi = \mathcal{V} + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \tag{1}$$

$$\nabla\Phi = -4\pi\varepsilon\varrho + 2\omega^2. \tag{2}$$

D'autre part, Φ ne dépend que de ϱ et les surfaces à Φ constant sont des surfaces d'égale densité. Considérons maintenant les lignes de forces du champ de la pesanteur, ce sont les trajectoires orthogonales des surfaces précédentes. Prenons un segment d'un tube de force élémentaire limité à deux sections normales $D\sigma$ et $D\sigma + dD\sigma$ distante de dn. Appliquons à ce petit volume le théorème de Green du flux et de la divergence, et invoquons la formule où C désigne le double de la courbure moyenne de la surface à Φ constant sur laquelle se trouve $D\sigma$

$$cdn = -\frac{dD\sigma}{D\sigma}. \tag{3}$$

Nous obtiendrons la relation suivante où figurent les dérivées normales première et seconde de Φ

$$\nabla\Phi = \frac{d^2\Phi}{dn^2} - c\frac{d\Phi}{dn}. \tag{4}$$

Cette formule n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de celle qui lie le ∇ au symbole du second ordre de Beltrami. Dans C les rayons de courbure principaux doivent être comptés positivement dans le même sens que dn.

La dérivée normale de Φ n'est autre que l'intensité g de la pesanteur et l'équation (2) devient:

$$\frac{dg}{dn} - cg = -4\pi\varepsilon\varrho + 2\omega^2. \tag{5}$$

Cette formule due à Bruns (1) *montre qu'en tout point de la planète, une mesure de l'accroissement de g avec la profondeur équivaut à une mesure de la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant au point considéré.* Nous allons en déduire d'importantes conséquences.

Appelons *stratification* la répartition, au point de vue strictement géométrique des surfaces d'égale densité et supposons ces dernières représentées par la valeur d'un certain paramètre t. Appelons *densité transformée* l'expression

$$f(t) = -4\pi\varepsilon\varrho(t) + 2\omega^2. \tag{6}$$

Soient, encore, P et P' deux points quelconques de la surface t. De la relation

$$\frac{d\Phi}{dt} = \left(g\,\frac{dn}{dt}\right)_P = \left(g\,\frac{dn}{dt}\right)_{P'} \tag{7}$$

on déduit par dérivation en t, c'est-à-dire en se déplaçant suivant les lignes de forces passant par P et P'

$$\left(\frac{dg}{dt}\,\frac{dn}{dt} + g\,\frac{d^2n}{dt^2}\right)_P = \left(\frac{dg}{dt}\,\frac{dn}{dt} + g\,\frac{d^2n}{dt^2}\right)_{P'}. \tag{8}$$

La relation (5) donne en chaque point

$$\frac{dg}{dt} = (cg + f)\,\frac{dn}{dt}. \tag{9}$$

Portons cette valeur (9) dans l'équation (8). Il est possible d'isoler deux termes qui ne dépendent que de t et l'on trouvera après quelques calculs élémentaires la relation suivante:

$$\frac{f(t)}{\frac{d\Phi}{dt}} = -\frac{\left(c\,\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}L\frac{dn}{dt}\right)_P - \left(c\,\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}L\frac{dn}{dt}\right)_{P'}}{\left(\frac{dn}{dt}\right)^2_P - \left(\frac{dn}{dt}\right)^2_{P'}} \tag{10}$$

où L représente le logarithme népérien. *Cette relation est riche de conséquences*; en effet, le premier membre ne dépend que de t, tandis que le second ne dépend que de la stratification. En représentant par $\Psi(t)$ le premier membre et en posant encore

$$a = \left(\frac{dn}{dt}\right)^2 \qquad b = c\,\frac{dn}{dt} + \frac{d}{dt}L\,\frac{dn}{dt} \tag{11}$$

la relation (10) s'écrit sur la forme équivalente

$$\Psi(t) = -\frac{b_P - b_{P'}}{a_P - a_{P'}}. \tag{10'}$$

---

(1) *Die Figur der Erde*, Publ. des Königl. Preussis. Geodätischen Institutes, 1878. Voir aussi: PIZZETTI: *Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti*, 1913, p. 24.

Si P, P', P'' représentent trois points quelconques de la surface t, on aura évidemment

$$\frac{b_{P'}-b_P}{a_{P'}-a_P}=\frac{b_{P''}-b_P}{a_{P''}-a_P}. \tag{12}$$

Cette relation est d'ordre purement géométrique, elle ne dépend ni de ϱ, ni de g, ni même de ω. On peut choisir le paramètre t et l'unitè de longeur de manière à avoir $dn=dt$ sur une ligne de force particulière θ, et cela de manière que $t=0$ représente la surface libre et $t=1$ le centre de l'astre; sur cette ligne, la dérivée de Φ par rapport à t devient $g(t)$ et l'on a

$$f(t)=g(t)\,\Psi(t).$$

En portant cette valeur de $f(t)$ dans l'équation (9) qui s'écrit le long de la ligne θ

$$\frac{dg}{dt}=g(t)[c(t)+\Psi(t)] \tag{13}$$

et en intégrant, on obtient la relation suivante (14), puis en multipliant par $\Psi(t)$ la relation (15)

$$g(t)=g(0)e^{\int_0^t (c+\Psi)dt} \tag{14}$$

$$f(t)=g(0)\,\Psi(t)e^{\int_0^t (c+\Psi)dt}. \tag{15}$$

Le facteur $g(0)$ représente la pesanteur au point où la ligne θ perce la surface extérieure. La stratification détermine c, $\frac{dn}{dt}$, puis $\Psi(t)$ par (10′) de sorte que les seconds membres des formules (14) et (15) sont donnés par la stratification, à part le facteur $g(0)$. La pesanteur $g(t)$, qui est donnée par (14) sur la ligne θ, détermine g en chaque autre point de la planète par la relation

$$g=g(t)\frac{dt}{dn}. \tag{16}$$

Les relations (14), (15) *et* (16) *déterminent entièrement la pesanteur et la densité dans la masse entière au moyen de la stratification et de la pesanteur en un seul point de la surface libre.*

On peut donner à la condition purement géométrique une forme élégante moyennant les précisions suivantes:

Le symbole d représentera toujours une différentielle relative à un passage effectué le long d'une ligne de force du potentiel Φ, d'une surface t à une surface $t+dt$; le symbole δ représentera, au contraire, une différentielle relative à un déplacement sur une surface à t constant. Le symbole $D\sigma$ représentera, comme

au début, une aire élémentaire de la surface t. En utilisant la formule (3) le terme b (formule 11) peut s'écrire

$$b = -\frac{d}{dt} L \frac{D\sigma}{dn}$$

et l'équation géométrique (12) s'écrit, δ_1 et δ_2 étant deux déplacements δ quelconques:

$$\frac{\delta_1 dL \dfrac{D\sigma}{dn}}{\delta_1 \left(\dfrac{dn}{dt}\right)^2} = \frac{\delta_2 dL \dfrac{D\sigma}{dn}}{\delta_2 \left(\dfrac{dn}{dt}\right)^2}.$$

En plus, le rapport de la densité transformée et de la pesanteur est donné en chaque point par l'expression suivante:

$$\frac{f}{g} = \frac{\delta dL \dfrac{D\sigma}{dn}}{2\delta dn}.$$

Ce rapport ne dépend que de la stratification au voisinage du point considéré.

Ces résultats permettent de généraliser très aisément un théorème de M. VOLTERRA. Supposons, en effet que les surfaces d'égale densité soient des surfaces homothétiques quelconques. Comme elles doivent avoir un même plan de symétrie droite en vertu d'un important théorème de M. LICHTENSTEIN, elles devraient admettre dans ce plan une trajectoire orthogonale rectiligne. On le vérifie aisément. En prenant cette trajectoire comme ligne θ, l'équation des surfaces t pourra s'écrire:

$$R = (1-t)\varphi(Q)$$

R désignant le rayon vecteur et φ une fonction d'un point Q de la surface libre.

Dés lors, on s'aperçoit aisément par quelques considérations géométriques que la fonction $\Psi(t)$ déterminée par (10′) devient infinie comme $\frac{1}{1-t}$ sur θ et il en est de même de c sur cette ligne. En fait, on aurait:

$$\Psi(t) = \frac{\Psi(0)}{1-t} \qquad c(t) = \frac{c(0)}{1-t}.$$

La formule (15) donne, A et B désignant deux constantes

$$f(t) = A(1-t)^B.$$

Tout ceci est très facile à vérifier. Trois cas se présentent alors:

1°) Si $B>0$, $f(t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers un, ce qui est impossible en vertu de l'inégalité de POINCARÉ, celle qui a été resserrée par M. CRUDELI;

2°) Si $B=0$, la masse est homogène, elle n'est pas stratifiée;

3°) Si $B<0$, ϱ augmente au delà de toute limite lorsque t tend vers un, ce qui est physiquement impossible.

Il faut en conclure: *La stratification des figures d'équilibre ne peut pas être formée de surfaces homothétiques.*

En 1903, M. VOLTERRA (1) avait démontré, par une méthode d'un grand intérêt analytique, fondée sur l'inversion d'une intégrale définie, que la stratification ne pouvait par être composée d'*ellipsoides homothétiques.*

M. VÉRONNET et M. PIZZETTI (2) ont démontré que la statification ne peut être *ellipsoïdale.*

Je remercie M. le prof. R. MARCOLONGO et M. M. BOSSOLASCO pour les renseignements bibliographiques qu'ils m'ont fournis.

---

(1) Acta Mat., 1903.

(2) Ibid., pp. 189-193.

J. J. SMITH (Schenectady - U. S. A.)

HEAVISIDE'S OPERATORS AND CONTOUR INTEGRALS

In recent years the Operational Methods of Heaviside have been given a considerable amount of attention. At least two books (1) and several papers have appeared which have for their purpose the development of the subject. A bibliography is given in each of the books referred to, and hence need not be given here.

The term « operational methods » as applied to Heaviside's theory may be divided into two distinct classes:

1°) Operations involving only whole integrations or differentations;

2°) Operations involving fractional integrations and integrations.

Of the latter little will be said in the present paper. It is probably the most obscure and least understood part of Heaviside. It is curious to note, however, that Heaviside himself plunges the reader directly into this part of the subject at the beginning of the second volume in which he takes up the discussion of operational methods. Carson lays more stress on the application to fractional differentiation and his discussion of the Expansion Theorem seems to show that he regards it as an interesting result rather than as something of practical value. Jeffreys also largely applies his discussion to fractional operators.

There is, of course, a reason for the greater interest in fractional operators from the practical point of view.

Consider a transmission line of length l initially in a state of rest. Let one one end be suddenly raised to a potential E while the other end is kept at zero potential. The flow of electricity in such a line can be developed as a series of normal functions, and in the operational method no implicit operations of fractional differentiation arise. If, however, the length of the line is assumed to become infinite the series of normal functions can be written as a Fourier integral, and on performing the integration the variable of integration disappears. It also happens in such cases that the operational method of solving the problem involves operations of fractional differentiation. In other words, fractional differentiation

(1) CARSON: *Electric Circuit Theory and Operational Calculus*, McGraw Hill, 1926. — JEFFREYS: *Operational Methods in Mathematical Physics*, Camb. Univ. Press, 1927.

arises in such problems in operational methods, as far as experience has shown to date, when and only when a boundary or the boundaries are at an infinite distance.

For the purpose of actual numerical computation for, let us say, the flow of electricity in a finite line, it is often found that the simplest procedure is to obtain the solution for an infinite line. This solution which is generally called the wave solution, to distinguish it from the solution in terms of normal functions, may be used up to the time the first wave reaches the end of the cable. From the terminal conditions the value of the reflected wave can be computed, and this togethen with the original wave can be used up to the time at which the reflected wave reached the other end of the cable, and so on. The use of the solution for the infinite cable in this manner is, however, purely a question of a high order of convergence and facility in numerical work. It has no advantage, however, from a formal point of view since both this solution and the solution in terms of normal functions are made up of infinite series.

It has always seemed to the author that practically all that is known at present about the subject of fractional operators may be written in the Heaviside form

$$p^n x^m / \underline{n} = x^{m-n} / \underline{m-n}$$

$m-n$ where n mai have any value positive or negative. When operations of the type

$$f(\sqrt{p^n+\alpha^n}) \quad \text{or} \quad f(\sqrt{p^n+\Delta^n}),$$

where p denotes differentiation with respect to one variable, Δ differentiation with respect to another variable and α denotes a constant, are involved, the operational methods become so cumbersome that they are in many cases impracticable to use. In such cases it will generally be found that solutions can be fairly readily obtained in terms of normal functions when the boundaries are assumed first to be at a finite distance. The limit of such a series may then be taken as the boundaries approach infinity when the series of normal functions will be transformed into an infinite integral. The evaluation of such an integral will generally be found to be at least as simple a matter, if not in many cases more simple than the evaluation of the fractional operator obtained by assuming at the outset that the boundaries are at an infinite distance. When a solution is thus obtained for infinite boundaries it may be applied for numerical computation, as described above, in the case where the boundaries are at a finite distance.

Having pointed out how it is possible, though perhaps not always desirable from the point of view of brevity, to avoid the introduction of fractional operators they will not be discussed further in this paper. They are very interesting from many points of view and deserving of much more attention than is given them at present. Some of the more fundamental aspects of the operational methods

which occur in Heaviside arise, however, in connection with whole differentiations and can, therefore, be discussed more readily in this region.

The mere technique of handling linear symbolic operators is not a matter of great concern, except insofar as the use of these operators may be shown to have significance. It is a mathematical common-place that the differential operation $\frac{d}{dx}$ may be treated as a constant with respect to certain rational operations and in connection with certain types of functions of x. The use of symbolic operators in the solution of linear differential equations with constant coefficients is given in most textbooks. Several different applications are usually made, such as the breaking up into partial fractions of a given inverse operator and the expansion into infinite series of expressions involving the differential operator in the denominator. These symbolic methods are sometimes called into question by critics of mathematical rigor and most textbooks do not attempt to establish definitely the conditions under which some of these expansions can be assured to give a convergent result.

The utility of operational methods to discover a possible final form for a proposed answer cannot be questioned. The final form secured by their use may be tested by direct substitution and in all of the usual cases, where fractional differentiation is not involved, is found to provide an actual solution of the problem. If by sentable, ingenious guesses the same solution should be arrived at by some other method it would still be necessary to substitute the proposed expression into the given equation.

Many mathematical writers who criticise operational methods adopt the even less justifiable process of asking the reader to consider a given expression. This given expression is written down without any hint as to its source. By various unmotivated steps, the reader is finally in the position to verify that an expression obtained by following the steps laid out by the author satisfies a differential equation, but the relation between the original expression and the differential equation is never cleared up.

In Heaviside's method certain further steps are taken. These are for the purpose of leading in a simple and direct manner to the possible expression which as in the simpler cases is actually found to satisfy a given equation. The importance of these methods can best be appreciated perhaps by considering the character of the boundary conditions as related to a given differential equation. In the earlier stages of the historic study of mathematical analysis the boundary conditions were regarded as relatively trivial incidentals in the study of a differential equation. What was desired was a so-called general solution. The problem of inserting suitable boundary conditions was left as an obvious exercise for the reader. The study of these differential equations was supposed to be immediately applicable to physical problems, for it was pointed out that the functions required in given physical problems may be shown to satisfy differential equa-

tions of the type studied. This method has its limitations even in the case of one dimension.

In the case of partial differential equations of physics involving two or more dimensions the older point of view was soon discovered to be out of harmony with the physical problems. In the most important physical problems the partial differential equation is a very simple type. The solution involves infinitely many parameters. The so-called general solution has no physical interest. The entire difficulty of the mathematical problem in connection with given physical phenomena consists in incorporating the given boundary conditions into the problem in such a way as to identify the unique solution desired. The theory of Fourier's series in its application to the problem of the flow of heat shows a marked departure from the traditional methods of study of differential equations of the old school. It is to Heaviside's credit that in connection with the problems arising from electrical trasmission lines he realized the importance and the possibility of a further step, which was to incorporate the boundary conditions in the practical construction of a solution. Suppose we face the problem of determining the actual character of the electric current at a given time in a given circuit. There are two parts to the problem. We may suppose that the condition is a permanent one and so-called transient effects have been damped out. In this case a solution may be obtained valid from $t=-\infty$ to $t=+\infty$. For many purposes, however, it is much more important to determine the transient effects which are ultimately damped out and which arise when the current is started in the circuit. What might be called the general solution involves both parts. It is convenient, therefore, to assume that previous to a given instant of time, say $t=0$, the voltage applied to the circuit is zero. As a result of the given configuration it is desired to determine the current at some subsequent time.

The conventional procedure of establishing a single differential equation of simple analytical form and seeking its continuous solution is of only partial value because it will give us merely a steady state and will give us the transient only when we use proper boundary conditions. The flow of current is completely determined by the physical data and it seems natural to seek a direct method which will take into consideration the voltage which is not applied until the instant $t=0$. Heaviside's method provides the means. Consider the simple function which is zero from $t=-\infty$ to $t=0$ and which is equal numerically to t for t positive. The function will be supposed to be continuous at $t=0$ and taking on there the value 0. It has a derivative at every point except $t=0$ and its second derivative, where it exists, is zero. One might be inclined to say that this function satisfies the equation $f''(t)=0$. The function, however, does not satisfy a single equation of the form $f(t)=a+bt$. The difficulty occurs on account of the ambiguity arising at the point $t=0$. In this case and in all of the analogous cases here discussed the desired solution is 0 for $t<0$ and behaves in an assigned

fashion for $t>0$. The problem consists in identifying its behavior for $t>0$ in a simple manner.

The expansion of functions in terms of given assigned elementary functions is standard practice throughout mathematical analysis. In the classical theory the elementary functions are themselves analytic while the function which is expanded may or may not have numerous discontinuities. For the present discussion the elementary functions will be taken as having discontinuity for a derivative of some assigned order. If we take the simple function which is 1 for t positive, but 0 for t negative and whose behavior at $t=0$ may be discussed later, this function when multiplied by successive powers of t affords the convenient sequence of elementary functions for certain simple problems. Any function expanded in terms of this sequence will vanish identically for t negative, and may take on the character of an assigned analytical function for t positive. In applying differential methods to these functions it is desirable to introduce other functions which may be at first regarded as purely symbolic in the sense that, although they are identified at all points other than $t=0$ by definite values, at $t=0$ the representation becomes symbolic in the sense that reference may be made to the genesis of the function. This will become clear when we take up the discussion in detail. We may briefly summarize the present aspect of Heaviside's theory by saying that linear differential equations with constant coefficients are used. The solutions of these are expanded in terms of a sequence of elementary functions, certain of which may be regarded from some points of view as symbolic rather than actual. The boundary conditions can be incorporated into the problem in such a way that although the solution will be known beforehand to vanish identically for t negative (in the simple cases) yet the behavior for t positive will be completely determined in the direct process of the work and without appeal to auxiliary conditions to be imposed by the reader as best he may at the conclusion of the discussion.

It may be pointed out that although the books of Carson and Jeffreys, referred to above, have been called by their authors works on operational calculus, they are, strictly speaking, works on how to avoid the operational calculus. Carson bases his work on the development of a solution of a certain integral equation. Jeffreys' work is the application of a contour integral to the solution of problems in mathematical physics. It is very difficult to consider either of these methods as being the same as the operational method used by Heaviside. That Jeffreys seems to hold the same view with regard to the contour integral method may be seen from the following quotations from the introduction to his book:

« It is often said that it (the operational method) will solve no problem that cannot be solved otherwise. Whether this is true it would be difficult to say; but it is certain that in a large class of cases the operational method will give

the answer in a page when ordinary methods take five pages, and also that it gives the correct answer when the ordinary methods, through human fallibility, are liable to give the wrong one ».

And further on we read:

« After all, the use of contour integrals in this connection was introduced by Bromwich who has repeatedly declared that the direct operational metod of solution is the better of the two ».

A distinct limitation encountered in using either of these substitutes for the operational method is that, as far as the author is aware, they only lend themselves to the solution of problems involving Laplace's equation where but one space coordinate in addition to the time is involved, or possibly where two space coordinates and no time coordinate are involved. This is on account of the complexity of the integrals which occur when more coordinates are present. The operational method, on the other hand, has proved itself adaptable to cases in which one, two, three or any number of space coordinates are present in addition to the time. It can also be applied with equal facility to problems in potential theory or other branches of mathematical physics in which the time coordinate does not enter.

In order to get a better conception of the problems of the Heaviside operational calculus in its relation to the Heaviside unit function, it seems desirable to compare the operational results obtained by the method of contour integrals which are stated clearly by Jeffreys (loc. cit.). Certain problems will arise in this discussion on the contour integral method which do not appear to have been given sufficient serious consideration. While, from a practical standpoint, a criticism on the score of inconsistency in singular cases may not be very important, and should in no sense be considered as a rejection of the results obtained in cases which do not involve these singularities, past history has shown that an examination of such inconsistencies has, in general, led to improvement in methods and generalization of results.

On page 19 of Jeffreys' book the following results are given with slight changes in notation:

(1) $$\text{« } p^{-n}H(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{e^{Kx}}{K^{n+1}}\,dx$$

(where the contour is along a line parallel to and on the positive side of the y axis, the contour being completed by a circle of infinite radius which encloses the negative half of the plane). The only pole of the integrand is at the origin where the residue is $\frac{x^n}{n!}$ Hence when n is a positive integer

(2) $$p^{-n}H(x) = \frac{x^n}{n!}$$

also we see that

(3) $$p^n H(x) = 0$$

since the integrand has no singularity in the finite part of the plane; and

$$p^0 H(x) = 1 \text{ ».} \tag{4}$$

A little later on page 25, Jeffreys shows: « when m is fractional

$$p^{-m} H(x) = \frac{x^m}{\Gamma(m+1)} \tag{5}$$

and since when m is a positive integer $\Gamma(m+1) = m!$ and when m is a negative integer $\Gamma(m+1)$ is infinite, the interpretation already adopted (given above) for integral powers of p are special cases of these ».

When m is a negative integer it is undoubtedly true that $\frac{x^n}{\Gamma(n+1)}$ is zero provided $x \neq 0$; when $x=0$, however, the result is by no means obvious. Let us see what Heaviside has to say about it.

On referring to Proc. Roy. Soc. Vol. LII, p. 520, the following is found (replacing V in Heaviside by p in order to make the notations similar):

« 18. - It should be noted that when we say that

$$p^n \frac{x^n}{n!} = 1 \tag{6}$$

for all values of n, the right-hand member is really $\frac{x^0}{0!}$ and means 0 on the left and 1 on the right side of the origin of x. That is, it is the limiting form of the function $\frac{x^n}{n!}$ when n is infinitely small *positive*. It is convenient in the treatment of the form $F = Yf$ to have the function f zero up to a certain point, and then begin to act. Similarly the expression $p\frac{x^0}{0!}$ or $p1$ or $\frac{x^{-1}}{\underline{|-1}}$, although it has the value zero for all positive values of x is infinite at the origin. But its total amount is finite viz. 1. Imagine the unit amount of a quantity spread along an infinitely long line to become all massed at the origin. Its linear density will, in the limit, be represented by

$$p1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\, mx dm. \tag{7}$$

It is zero except at $x=0$. But its integral is still finite, being $p^0 1$ or 1. If we draw the curve $y = \frac{x^n}{n!}$ with n infinitely small, consisting of two straight lines, with a rounded corner, the curve derived from it by one differentiation will nearly represent the function $p1$, being nearly all heaped up close to the origin, and of integral amount 1. Similarly $p^2 1$ means a double infinite point, $p^3 1$ a triple infinite point, and so on. But it is the function $p1$ that is most useful in connection with differentiating operations, while the others are less prominent ».

Allowing for the doubtful validity of his assumption that $\frac{x^n}{n!}$ is zero when $x<0$,

it should be evident from the above that Heaviside's view of $p1$ is a very different conception from that of Jeffreys'. Heaviside's conception, if I understand it correctly, is that $H(x)$ or 1, which is called the Heaviside unit function, can be represented by the curve shown in Fig. 1, or

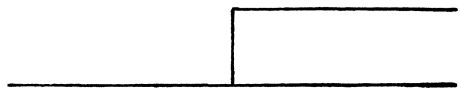


Fig. 1.

$$(8)\qquad \begin{cases} H(x)=0 & x<0 \\ H(x)=1 & x>0 \\ 0\leqslant H(x)\leqslant 1 & x=0 \end{cases}$$

Jeffreys' conception seems to be as shown in Fig. 2, or

$$(9)\qquad \begin{cases} H(x)=0 & x<0 \\ H(x)=1 & x>0 \end{cases}$$

and the value of $H(x)$ is either undefined or defined as an arbitrary value at $x=0$.

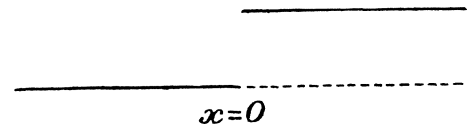


Fig. 2.

Heaviside's conception of $p1$ can be represented by the curve shown in Fig. 3, or

$$(10)\qquad \begin{cases} pH(x)=0 & x<0 \\ pH(x)=0 & x>0 \\ 0\leqslant pH(x)\leqslant \infty & x=0 \end{cases}$$

in such a way that

$$(11)\qquad \int_{0-e}^{0+e} pH(x)\,dx=1$$

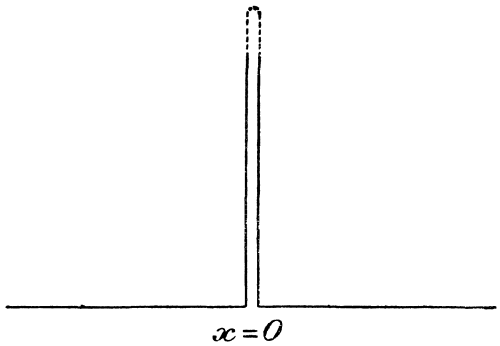


Fig. 3.

Jeffreys' conception of $p1$, as I interpret it from his words, can be represented by the horizontal axis. Not only do we have

$$(12)\qquad \begin{cases} pH(x)=0 & x<0 \\ pH(x)=0 & x>0 \end{cases}$$

but the value of $pH(x)$ is given the explicit value at $x=0$.

Of the two conceptions I believe that Heaviside's is the only one which can serve for the purpose intended. In a series of papers on the Theory of H-Functions in the Journal of the Franklin Institute Oct., Nov., Dec. 1925 ([1]), I have discussed Heaviside's con-

([1]) These papers will hereafter be referred to as $H-F$.

ception from a slightly different viewpoint, using a modified definition for a derivative given in those articles. I have been told since that Fréchet has given a similar definition for a derivative although I have not seen his work. In the $H-F$ papers it has been shown that by using $p1$ as a definite function having the properties given in (10) and (11) above, the derivation of the Green's Functions in an expansion of normal functions in Mathematical Physics for almost any type of space becomes an extremely simple operation, and resolves itself into a slight extension of the Heaviside Expansion Theorem. It is also shown there that to correctly write the Equation of Heat for the instantaneous Green's Function in Heat problems or for a similar case in electrical problems, the function $p1$, or $\frac{dH(t)}{dt}$ should appear in this equation. It is impossible to go into this latter point here, but for fuller details the original papers referred to above should be consulted.

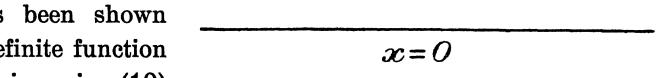


Fig. 4.

Fig. 5.

In Figs. 1 and 3 the curves representing Heaviside's unit function and its derivative have been drawn as continuous unbroken curves (in Fig. 3 the two lines which approach infinity along the Y axis are shown connected together in the upper portion by dotted lines). The curve representing the Heaviside unit function considered by Jeffreys is discontinuous at the point $x=0$, and the value of $H(x)$ at this point has to be arbitrarily defined. Its first derivative, as defined by him, has the value $pH(x)=0$ and is continuous at $x=0$. Let us consider the consequence of such assumptions in connection with the problem of integration.

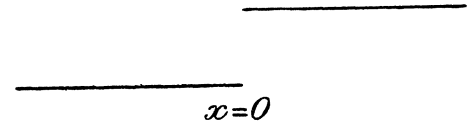


Fig. 6.

Consider the function $f(x)$ as shown in Fig. 4

$$\text{(13)} \qquad \begin{cases} f(x)=0 & x\leqslant 0 \\ f(x)=0 & x\geqslant 0 \end{cases}$$

The first derivative of $f(x)$ is shown in Fig. 5 and is given by

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} f'(x)=0 & x<0 \\ f'(x)=1 & x>0. \end{cases}$$

The value of $f'(x)$ when $x=0$ cannot be obtained from the usual definition of a derivative and hence $f'(0)$ must be arbitrarily defined.

The value of $f'(x)$ is by definition the limit as $\delta \to 0$, where it exists, of $\frac{[f(x+\delta)-f(x)]}{\delta}$, for all real values of δ different from zero. In this case at $x=0$, there is no unique limit and hence the limit is said not to exist. The differential quotients obtained from $\frac{[f(x+\delta_1)-f(x-\delta_2)]}{(\delta_1+\delta_2)}$, $\delta_1 \geqslant 0$, $\delta_2 \geqslant 0$, but δ_1 and δ_2 not both zero simultaneously, and the ratio $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ arbitrary, do not however approach all possible values, but approach all the values from 0 to 1 inclusive and these only. If we extend the method of defining $f'(x)$ as above to include all possible limits approached by the latter differential quotient, we get the function defined by equations (8) and shown graphically in Fig. 1.

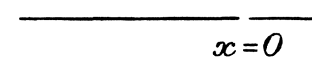


Fig. 7.

The second derivative of $f(x)$ is shown in Fig. 7 and is given by

$$(15) \qquad \begin{cases} f''(x)=0 & x<0 \\ f''(x)=0 & x>0. \end{cases}$$

The value of $f''(x)$ when $x=0$ cannot be obtained from the usual definition of a derivative and $f''(0)$ must be arbitrarily defined, or an extended definition of derivative adopted.

Let us assume that it is desired to apply the process of integration to the function $f'(x)$ given by (14) and represented in Fig. 6, starting from some negative value of x which may be called x_1, and let the constant of integration be determined by the relation

$$(16) \qquad \left[\int f'(x)dx\right]_{x=x_1}=0 \qquad x_1<0$$

The function $f(x)$ given by (13) and shown in Fig. 5 can be reproduced up to the point $x=0$. As the point $x=0$ is approached we find ourselves in somewhat of a dilemma. The function $f'(x)$ is either undefined or arbitrarily defined and there is an opening in the curve at this point. Are we to add a constant of integration at this point, or not? If a constant of integration is not added, $f(x)$ is reproduced for values of x greater than zero. If a constant of integration C is added a function $f_1(x)$ shown in Fig. 8 is obtained which is given by

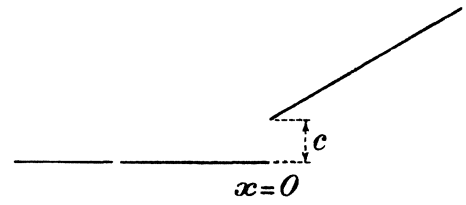


Fig. 8.

$$(17) \qquad \begin{cases} f_1(x)=0 & x<0 \\ f_1(x)=C+x & x>0 \end{cases}$$

and $f_1(x)$ is either undefined or arbitrarily defined at $x=0$.

While in this particular example it might seem inviting to say that no arbitrary constant should be added; such a procedure would lead into difficulties in connection with $f''(x)$ defined in (15) and shown in Fig. 7.

If $f''(x)$ shown in Fig. 7 is integrated from a negative value of x which may be called x_1, and if the constant of integration is determined by the relation

$$\left[\int f''(x)dx\right]_{x=x_1}=0 \qquad x_1<0 \tag{18}$$

the function $f'(x)$ defined in (14) and shown in Fig. 6 is reproduced up to the point $x=0$. In order to reproduce $f'(x)$ when x is greater than zero it is necessary to add an integration constant at the point $x=0$ to the integral.

It cannot, however, be admitted in general that integration constants can be added to an integral at any point in the range of integration, for that would reduce the whole theory of integration to chaos. The singularity which appears in these functions at $x=0$ is that they are either discontinuous so that there is a break in the curve or that they hahe been arbitrarily defined at this point. It would therefore appear that a good supposition to make is that an integration constant can be introduced in the range of integration at any point at which the function is not defined, or is discontinuous or is arbitrarily defined.

We are accustomed to speak in mathematics of a definite integral of a one valued function as completely defined, at least in such cases as this, where the function has only a single discontinuity and where the integrand is assumed to be completely defined. However, consider the functions defined by (13) and (17) and shown in Figs. 5 and 8 respectively. The second function in (17) may or may not be defined for $x=0$, save that if defined its value or values are at most restricted to the interval $0\leqslant y\leqslant 1$. The conventional derivative of each of these functions is given in (16) and shown graphically in Fig. 6 with at most ambiguity at the origin.

If differentiation is to be a reversible process with the resulting integral function completely defined, two methods of attack are open. We may carefully define the character of the integrand at $x=0$ and so with suitable conventions identify the integral, or we may adopt the older method of admitting that, where a break occurs, an opportunity arises for the introduction of an arbitrary constant of integration.

When the function as defined in (8) and shown in Fig. 1 is considered as the derivative of the function defined in (13) and shown in Fig. 5, it is evident that there is no possibility of the introduction of an arbitrary constant at $x=0$, whether the problem is considered from the viewpoint of theories of integration, or from the viewpoint of checking it by means of the definition of derivitive given in $H-F$. The integration of the H-Function as defined in (10) and shown in Fig. 3 to give the function as defined in (8) and shown in Fig. 1 is also

discussed in that paper. It is there shown that the definition of the function at $x=0$

(19) $$0 \leqslant pH(x) \leqslant \infty \qquad x=0$$

is not a complete definition of its properties and the suggestion is made that it should at least be written

(20) $$0 \leqslant pH(x) \leqslant 1\infty^{1} \qquad x=0$$

which is another notation for equation (11). Further on in that paper it is suggested that perhaps the most accurate way to define it is to say that it is obtained from $H(x)$ by a certain process and to regard (20) as an approximate definition.

The definition of a function by its past history, so to speak, runs counter to the mathematical notion that a function should be defined as a one to one correspondence over a certain range, and that no questions as to its relation to other functions should enter into the definition. While this may be a desirable object to strive for, it is by no means certain that, in the practical problem of discovering the finite form of a solution, symbolic methods requiring a reference to the derivation of a function should be discarded on the basis of stylistic demands alone.

As an example of the different results which may be obtained by proceeding from the historical or non-historical viewpoint, the discussion on the sum of an infinite series given in $H-F$ may be referred to. It is shown there that if the functions $u_n(x)$ are continuous and if the series denoted by

(21) $$S(x)=\sum_{n=0}^{n=\infty} u_n(x)$$

has a discontinuity at $x=x_1$, the sum being taken in the ordinary sense, when the sum is taken under the rules laid down in the theory of H-Functions all the values between $S(x_1+0)$ and $S_1(x_1-0)$ and perhaps additional values are obtained. In the ordinary theory of the sum of the infinite series, the value of $x=x_1$ is first inserted in the series, and the resulting series is summed as a series of pure numbers, the fact that it came from the series $\sum_{0}^{\infty} u_n(x)$ which is its history, being completely ignored. In the theory of H-Functions x and n are made to approach their limits simultaneously and thus the fact that the sum has a history is preserved.

A further comment on the definition of $pH(x)$ at $x=0$ by means of deriving it by a certain process from $H(x)$ is that regarding functions from a general viewpoint, the functions which do not require that they be defined at a point at which they increase without limit are the exceptions rather than the rule, since a function which has no singularities in any part of the plane reduces

to a constant. If, therefore, we are in the position of not having precise notions about infinity, it would seem justifiable to use the relation of any function at its infinite points to other functions which do not become infinite at these points, to define the function at the point at which it becomes infinite.

The notion of infinity as symbolized by ∞ is undoubtedly a multivalued concept. For instance, we write

(22) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{a-x}=\infty$$

but we also write

(23) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}=\infty.$$

Similarly the notion of an infinitesimal is also a multivalued concept and we write

(24) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x-a)=0$$

and also

(25) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x=a)^2=0.$$

From these we obtain

(26) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{a-x}\times\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x-a)=\infty\times 0$$ which is indeterminate

(27) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}\times\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x-a)=\infty\times 0$$ which is indeterminate

(28) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}\times\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x-a)^2=\infty\times 0$$ which is indeterminate

and

(29) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{x-a}\times\operatorname*{Lim}_{x\to a}(x-a)^2=\infty\times 0$$ which is indeterminate.

On the other hand we have

(30) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{x-a}\times(x-a)=1$$

(31) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}\times(x-a)=\infty$$

(32) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{(x-a)^2}\times(x-a)^2=1$$

(33) $$\operatorname*{Lim}_{x\to a}\frac{1}{x-a}\times(x-a)^2=0.$$

Thus if we were to attempt to *define* the value of $\infty\times 0$ by agreeing to *assume* that the reversal of limits was a justifiable process, from the above examples we should be obliged to admit that it was a multivalued concept. In the past, however, the problem has been regarded from the opposite point of view, namely that the reversal of the limits was not a justifiable process.

In the so-called operational mathematics it seems far more profitable to assume that limiting processes are always reversible, but to note at the same time that

the concepts we are dealing with are not always necessarily single-valued but may be multivalued. As an example, we may consider a series which represents a function $f(x)$ and which we shall denote by $S(x)$. Let $S'(x)$ be the derivative with respect to x. At points at which $S'(x)$ is uniformly convergent it represents the derivative of $f(x)$, and at points where it is non-uniformly convergent it may or may not represent $f'(x)$. Let us assume that x_1 is a point at which $S(x)$ is non-uniformly convergent and that its value at that point is not equal to $f'(x)$. We cannot then say

Fig. 9.

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b S'(x)dx \tag{34}$$

where $a<x_1<b$ so that the range of integration includes the point x_1. If, however, we regard $S'(x)$ as a multivalued function of x at the point x_0, and take all of these values when obtaining the integral, and in a similar manner if we take all of the values of $f'(x)$ in cases where it becomes multivalued at x_1, a definition of a derivative being taken which permits it to do so, then it would appear that we could definitely state that

$$\int_a^b f'(x)dx = \int_a^b S'(x)dx \tag{35}$$

since we have taken all possible values for both of the integrands.

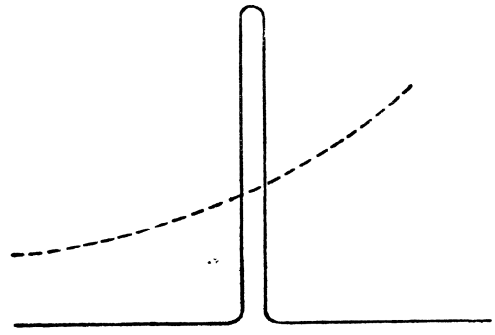


Fig. 10.

It may be profitable to discuss the possibility of evading some of the difficulties which arise in connection with differentiation of the Heaviside unit function by replacing it with a limiting curve. Assume

$$H(x) = \operatorname*{Lim}_{n\to\infty} f(x, n) \tag{36}$$

to be as shown by a limiting curve in Fig. 9 for a finite n.

$$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \frac{df(x, n)}{dx} \tag{37}$$

is shown in Fig. 10 in full lines for finite n.

Now let us multiply this by $\Phi(x)$ where $\Phi(x)$ is shown dotted on Fig. 10, obtaining

(38) $$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \Phi(x)\frac{df(x,n)}{dx}$$

shown in Fig. 11 for finite n.

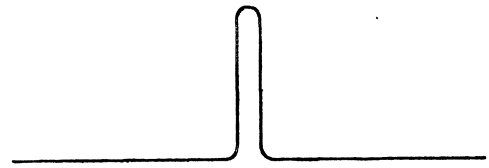


Fig. 11.

Integrating, we get

(39) $$\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} \int \Phi(x)\frac{df(x,n)}{dx}\,dx$$

as shown in Fig. 12 for finite n.

The actual quantity we desire to obtain is, however,

(40) $$\int \Phi(x)\frac{dH(x)}{dx}\,dx$$

as shown in Fig. 13. In the ordinary theory the reversal of limits used in connection with $\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} f(x,n)$ would be un justifiable since $H(x)$ and its derivatives are all non-uniformly convergent at $x=0$.

If, however, we agree to assume the limiting process is reversible but that the functions involved may be multivalued then

(41) $$\int \Phi(x)\frac{dH(x)}{dx}\,dx=\int \Phi(x)\frac{d}{dx}\left[\operatorname*{Lim}_{n\to\infty} f(x,n)\right]dx$$

and Fig. 13 follows immediately from Fig 12.

While it might be objected that uniform convergence is a sufficient condition but possibly not a necessary condition for the reversal of limits above, it must be remembered that it is the only criterion we have at present and hence we have little choice in the matter of using it. Furthermore, the possibility of the necessary conditions being established seems rather necessary remote.

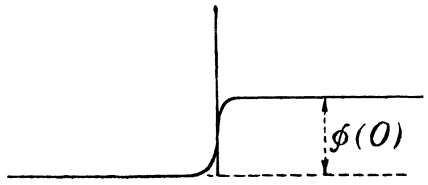


Fig. 12.

In order to see the value of a careful interpretation of the unit function and its derivatives we may consider a few applications to a simple linear differential equation of the first order with constant coefficients, while at the same time linking it with a physical problem.

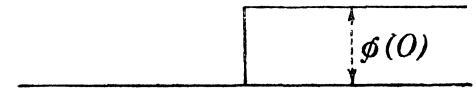


Fig. 13.

In a circuit consisting of inductance L and resistance r, let the E. M. F. be zero when $t<0$, and E when $t>0$. We shall assume that at the instant $t=0$, $0\leqslant E\leqslant 1$, so that the E. M. F. can be denoted by $E1$ where 1 denotes the Heaviside unit function. We can then write

(42) $$L\frac{di}{dt}+ri=E1 \qquad (-\infty<t<\infty)$$

and this equation is equivalent, save at the point $t=0$ to the equations we should write in the ordinary theory

$$L\frac{di}{dt}+ri=0 \qquad (-\infty<t<0) \tag{43}$$

$$L\frac{di}{dt}+ri=E \qquad (0<t<\infty). \tag{44}$$

Let us seek a solution of (42) in the form

$$i=C_1 1+C_2 e^{-\frac{r}{L}t}1. \tag{45}$$

Then

$$\frac{di}{dt}=C_1\frac{d1}{dt}+C_2 e^{-\frac{r}{L}t}\frac{d1}{dt}-\frac{rC_2}{L}e^{-\frac{r}{L}t}1. \tag{46}$$

Substituting in (42) we get

$$LC_1\frac{d1}{dt}+LC_2 e^{-\frac{r}{L}t}\frac{d1}{dt}-rC_2 e^{-\frac{r}{L}t}1+rC_1 1+rC_2 e^{-\frac{r}{L}t}1=E1. \tag{47}$$

Equating the terms containing 1 together and also those containing $\frac{d1}{dt}$ we get

$$rC_1 1=E1 \tag{48}$$

giving

$$C_1=\frac{E}{r} \tag{49}$$

and also

$$LC_1\frac{d1}{dt}+LC_2 e^{-\frac{r}{L}t}\frac{d1}{dt}=0. \tag{50}$$

But $\frac{d1}{dt}$ is zero everywhere except at $t=0$ where it has any value between 0 and ∞ but such that its integral fom $0-e$ to $0+e$ is equal to 1. At $t=0$ however $e^{-\frac{r}{L}t}$ is uniformly convergent and has the value unity, hence we may write

$$e^{-\frac{r}{L}t}\frac{d1}{dt}=\frac{d1}{dt} \tag{51}$$

(45) thus becomes

$$i=\frac{E}{r}\left(1-e^{-\frac{r}{L}t}\right)1. \tag{52}$$

We have thus apparently obtained a definite result out of equation (42) without evaluating any arbitrary constants. Let us examine more closely what this means. A term $C_3 e^{-\frac{r}{L}t}$ could be added to equation (45). The left-hand side of equation (47) would then contain the terms

$$-rC_3 e^{-\frac{r}{L}t}+rC_3 e^{-\frac{r}{L}t}$$

which would cancel out and would not allow us to determine the value of the constant C_3. Equation (52) should then be written

$$i = C_3 e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right)1 \tag{53}$$

or as it might be written in the usual manner

$$\begin{cases} i = C_3 e^{-\frac{r}{L}t} & (-\infty < t \leqslant 0) \\ i = C_3 e^{-\frac{r}{L}t} + \frac{E}{r}\left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) & (0 \leqslant t < \infty) \end{cases} \tag{54}$$

It will be noted in (53) that the term involving C_3 does not have a 1 sign attacched to it, and thus the part involving C_3 must be valid when $t<0$. Since, however, the voltage E was applied to $t=0$ it can hardly be consireded to have anything to do with this part of the current, if we are to hold to notions of cause and effect. Thus if it is desired to find the current produced by $E1$, the term $C_3 e^{-\frac{r}{L}t}$ must be rejected on the grounds that it is due to some other cause entirely independent of $E1$.

The procedure in interpreting the result is somewhat analogous to that used in functions of the complex variable when an equation such as

$$u + iv = f(x, y) + ig(x, y) \tag{55}$$

is broken up into two equations

$$\begin{cases} u = f(x, y) \\ v = g(x, y) \end{cases} \tag{56}$$

u, v, f and g being real.

We interpret the solution of

$$\frac{di}{dt} + \alpha y = E \tag{57}$$

to be

$$i = f(t) + g(t)1 \tag{58}$$

where $f(t)$ denotes that part of the current which corresponds to what was in the circuit before $t=0$ when $E1$ commenced to act, and $g(t)$ denotes the part of the current due to $E1$. As in general we are interested in the effects produced by $E1$ we may neglect the term $f(t)$ and write

$$i = g(t)1. \tag{59}$$

As a second example we may consider that the voltage E acting on the same circuit for an infinitely long time is suddenly short-circuited at the instant $t=0$. The equations then become

$$L\frac{di}{dt} + ri = E - E1. \tag{60}$$

A solution may be taken of the form

$$i = C_1 1 + C_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1 + C_3. \tag{61}$$

This is similar to (45) except for the addition of the constant C_3 which is not multiplied by 1, and is required to take care of the term E in the right-hand side of (60). Then

$$LC_1 \frac{d1}{dt} + LC_2 e^{-\frac{r}{L}t} \frac{d1}{dt} - rC_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1 + rC_1 1 + rC_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1 + rC_3 = E - E1. \tag{62}$$

Equating as before the coefficients of 1, $\frac{d1}{dt}$, and also the terms which do not contain the 1 symbol we get

$$rC_3 = E \tag{63}$$

$$rC_1 1 = -E1 \tag{64}$$

and

$$LC_1 \frac{d1}{dt} + LC_2 e^{-\frac{r}{L}t} \frac{d1}{dt} = 0. \tag{65}$$

Hence we find

$$C_3 = -C_1 = \frac{E}{r} \tag{66}$$

and

$$C_2 = -C_1. \tag{67}$$

Thus

$$i = \frac{E}{r}(I-1) + \frac{E}{r} e^{-\frac{r}{L}t} 1 \tag{68}$$

which might be written in the ordinary form

$$\begin{cases} i = \frac{E}{r} & t<0 \\ t = \frac{E}{r} e^{-\frac{rt}{L}} & t>0 \end{cases} \tag{69}$$

the first term in (68) being zero when $t>0$ and the second term being zero when $t<0$. Again a term $C_4 e^{-\frac{rt}{L}}$ might be added to (68) but could be rejected if we are only interested in the effects produced by E.

As a third example, consider the equation

$$L\frac{di}{dt} + ri = K\frac{d1}{dt}. \tag{70}$$

Let us assume a solution

$$i = C_1 1 + C_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1. \tag{71}$$

Then on substituting in (70) we get

$$LC_1 \frac{d1}{dt} + LC_2 e^{-\frac{r}{L}t} \frac{d1}{dt} - rC_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1 + rC_1 1 + rC_2 e^{-\frac{r}{L}t} 1 = K\frac{d1}{dt} \tag{72}$$

$$rC_1 1 = 0 \tag{73}$$

and

$$LC_1\frac{d1}{dt}+LC_2e^{-\frac{rt}{L}}\frac{d1}{dt}=K\frac{d1}{dt}. \tag{74}$$

From these

$$C_1=0 \tag{75}$$

$$C_2=\frac{K}{L} \tag{76}$$

and thus

$$i=\frac{K}{L}e^{-\frac{r}{L}t}1. \tag{77}$$

In this last equation when $t=0+e$, $i_0=\frac{K}{L}$, which affords us a method of solving such equations subject to an arbitrary initial condition. Therefore in order to solve the equation

$$L\frac{di}{dt}+ri=E \tag{78}$$

subject to the terminal condition $i_0=\frac{K}{L}$ it might be replaced by the equation

$$L\frac{di}{dt}+ri=E1+\frac{K}{L}\frac{d1}{dt} \tag{79}$$

and the latter solved operationally as above would give the correct solution. Jeffreys (loc. cit.) gives a method very similar to this for solving equations for arbitrary initial conditions, and seems much perturbed when his work leads him to the point where it seems that all the results required can be obtained directly in this manner from the differential equation and there seems to be no room for the introduction of arbitrary constants of integration.

For instance, he says on page 16:

« Then has p any meaning of its ows? Since it replaces $\frac{d}{dx}$ when we form the subsidiary equation we may naturally suppose that p means $\frac{d}{dx}$, and this is the meaning sometimes actually attributed to it; but care is needed. We recal[1] that when the subsidiary equation is formed a term like py_0 appears on the right; but $\frac{dy_0}{dx}$ is zero, so that if we pushed this interpretation too far we should be faced with the alarming result that the solution of the equations do not depend on their initial values. The fact is that though the operators $\frac{d}{dx}$ and Q both satisfy the laws of algebra and are freely commutative with constants, they are not as a rule commutative with each other ».

It will be shown later that with proper use of the Heaviside unit function the operators $\frac{d}{dx}$ and Q can be made commutative with each other, and hence another explanation for the above must be found. A possible alternative seems to be in the denial of the fact that $\frac{dy_0}{dx}$, or as it should be written in the notation of the present paper $\frac{y_0d1}{dx}$, is zero for all values of x.

It should be clear from the preceding that if we are only interested in effects produced by $E1$ and $\frac{K}{L}\frac{d1}{dt}$ then the sum of equations (52) and (77) is the complete solution. A term $Ce^{-\frac{r}{L}t}$ may be added to the equation for i if it is desired to do so, but since this part of the current existed before the time $t=0$ it cannot be supposed to have been caused by any of the terms on the right-hand side of (79) since these were equal to zero when $t<0$.

Although we have used the linear differential equation of the first order in the above for the purpose of illustrating the points involved in the use of Heaviside unit function, the place where its usefulness is most apparent is in applications to equations of higher orders.

For instance, consider an equation of the *nth* degree:

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}}+\ldots.+a_{n-1}\frac{dy}{dt}+a_n=E1. \tag{80}$$

This can be written

$$y=\frac{E}{\frac{d^n}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots.+a_{n-1}\frac{d}{dt}+a_n} \tag{81}$$

and on factoring the donominator in the form

$$f\left(\frac{d}{dt}\right)=\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)\left(\frac{d}{dt}+\beta\right)\ldots.\left(\frac{d}{dt}+\mu\right) \tag{82}$$

and splitting up the operand in the expression (81) into partial fractions we obtain

$$y=\sum_{\alpha,\beta\ldots.\mu}\frac{E}{\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)f'(-\alpha)}1. \tag{83}$$

Now any one of these terms in the sum can be evaluated from our previous work. Let it be required to determine the value of

$$\frac{E}{\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)f'(-\alpha)}1. \tag{84}$$

Assume it equal to u, then we have

$$\left(\frac{d}{dt}+\alpha\right)u=\frac{E}{f'(-\alpha)}1 \tag{85}$$

and on comparing this equation with (42) and its solution it is evident that

$$u=\frac{E}{\alpha f'(-\alpha)}(1-e^{-\alpha t})1 \tag{86}$$

and hence from (83)

$$y=\sum_{\alpha,\beta\ldots.\mu}\frac{E}{\alpha f'(-\alpha)}(1-e^{-\alpha t})1 \tag{87}$$

which by rearrangement can easily be shown to be the same result as the Heaviside Expansion Theorem. In this case the economy obtained by the use of the unit function is very apparent. Normally, with an equation of the *nth* order, it would be necessary to determine the value of n constants of integration. If, however, we are only interested in the results produced by $E1$, they can be obtained directly by the above method without the evaluation of any such constants.

As an even more extended example consider the application to a linear equation with constant coefficients of an infinite order.

Consider an electrical cable of length l, with resistance r and capacity C per unit length initially at zero potential. Let one end be maintained at zero potential while the other end is raised to a potential E at the time $t=0$. Thus we have

(88) $$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = Cr\frac{\partial v}{\partial t} = pKe$$

where $p=\frac{d}{dt}$ and $K=Cr$.

The general solution of this problem is

(89) $$v=\sinh\sqrt{pK}x\cdot A_1+\cosh\sqrt{pK}x\cdot A_2$$

where A_1 and A_2 are functions of t but not of x.

Since when

(90) $$x=0, \qquad v=0, \qquad \text{hence} \qquad A_2=0.$$

Also when

(91) $$x=l, \qquad v=E1,$$

hence

(92) $$A_1=-\frac{E1}{\sinh\sqrt{pK}\cdot l}$$

and

(93) $$v=\frac{\sinh\sqrt{pK}\cdot x}{\sinh\sqrt{pK}\cdot l}E1$$

now

(94) $$\sinh\Theta=\Theta\left(1+\frac{\Theta^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{\Theta^2}{2^2\pi^2}\right)\ldots\left(1+\frac{\Theta^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

and thus

(95) $$\sinh\sqrt{pK}\cdot l=\sqrt{pK}\cdot l\left(1+\frac{pKl^2}{\pi^2}\right)\ldots\left(1+\frac{pKl^2}{n^2\pi^2}\right)\ldots$$

If the series expressions for the sine is inserted in the denominator of (93) and the latter expanded in partial fractions, we get

(96) $$v=\sum_{n=0}^{n=\infty'}(-1)^{n-1}\frac{2n\pi\sin\frac{n\pi x}{l}E1}{pKl^2+n^2\pi^2}$$

the $'$ signo on the summation denoting that one-half the value is taken for $x=0$. Each of these fractions may be evaluated in a manner similar to that used in preceding work.

Let

$$u_n = \frac{E1}{pKl^2 + n^2\pi^2} \cdot \tag{97}$$

The inserting the value of $p = \frac{d}{dt}$ we get

$$\frac{du_n}{dt} + \frac{n^2\pi^2}{Kl^2} u_n = \frac{1}{Kl^2} E1 \tag{98}$$

and hence

$$u_n = \frac{E}{n^2\pi^2}\left(1 - e^{-\frac{n^2\pi^2}{Kl^2}t}\right) 1. \tag{99}$$

Using this in (96) the usual result is readily obtained on rearranging the terms.

It should be noted that if (93) were written

$$\sinh \sqrt{pKl} \cdot v = \sinh \sqrt{pKx} \cdot E1 \tag{100}$$

and the series expressions for the sine inserted on the left-hand side, this becomes a differential equation of infinite order for v, and would thus require the evaluation of an infinite number of arbitrary constants to solve the problem in the ordinary manner. It is in problems such as this that the careful use of the Heaviside unit function will be found to have the greatest advantage. The application to other types of problems such as potential problems will be found in $H-F$ and need not be gone into in further detail here.

In connection with the presence of the $\sqrt{p}$ in (100) it might be thought that fractional operators appear in this equation. On writing out the expanded expression for the operators on both sides of this equation, it will be found that there is a common factor $\sqrt{p}$ on each side which therefore cancels out and hence only whole integrations are involved.

It may be worth while to discuss the use of the unit function in making differentiation and integration reversible processes in connection with the ordinary functions used in analysis. On page 17 Jeffreys points out that while

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x) \tag{101}$$

$$\int_0^x \frac{d}{dx} f(x)dx = f(x) - f(0) \tag{102}$$

and hence unless $f(0)=0$, the two processes are not reversible.

The same operations may now be considered with respect to $f(x)$ multiplied by the unit function. Since $H(x)$ is multivalued at $x=0$ being $0 \leqslant H(x) \leqslant 1$ the lower limit of integration will be taken to be $0-\varepsilon$ instead of 0, and thus

ambiguity in the result will be avoided. (ε is used to denote a small quantity which may be diminished indefinitely). Then

$$\frac{d}{dx}\int_{0-\varepsilon}^{x} f(x)H(x)dx = f(x)H(x) \qquad (x>0-\varepsilon) \tag{103}$$

$$\int_{0-\varepsilon}^{x} \frac{d}{dx} f(x)H(x)dx = \int_{0-\varepsilon}^{x} [f'(x)H(x)+f(x)H'(x)]dx \qquad (x>0-\varepsilon) \tag{104}$$

where $H'(x)$ denotes the first derivative of $H(x)$ with respect to x. But since $H(x)=0$ when $x<0$ the integral of the first term becomes zero if $x<0$, and becomes

$$\int_{0}^{x} f'(x)dx \quad \text{if} \quad x>0.$$

Hence

$$\int_{0-\varepsilon}^{x} \frac{d}{dx} f(x)H(x) = \begin{cases} f(x)-f(0)+\int_{0-\varepsilon}^{x} f(x)H'(x)dx & \text{when } x>0 \\ 0 & \text{when } x<0. \end{cases} \tag{104a}$$

But as has been pointed out before, $f(x)H'(x)$ is zero everywhere except at $x=0$ where its value is $f(0)$ multiplied by a quantity whese integral from $0-\varepsilon$ to $0+\varepsilon$ is 1. Hence

$$\int_{0-\varepsilon}^{x} f(x)H'(x) = \begin{cases} f(0) & \text{when } x>0 \\ 0 & \text{when } x<0 \end{cases} \tag{105}$$

and thus we get

$$\int_{0-\varepsilon}^{x} \frac{d}{dx} f(x)H(x)dx = \begin{cases} f(x)-f(0)+f(0)=f(x) & \text{when } x>0 \\ 0 & \text{when } x<0. \end{cases} \tag{106}$$

It is not difficult to show that if $x=0$

$$0 \leqslant \int_{0-\varepsilon}^{x} \frac{d}{dx} f(x)H(x)dx \leqslant f(x). \tag{106a}$$

But (106) and (106*a*) mean that

$$\int_{0-\varepsilon}^{x} \frac{d}{dx} f(x)H(x)dx = f(x)H(x). \tag{106b}$$

Thus for functions which are multiplied by $H(x)$ or 1 the operators

$$\frac{d}{dx}\int_{0-\varepsilon}^{x} dx \qquad \text{and} \qquad \int_{0-\varepsilon}^{x} dx \frac{d}{dx}$$

are reversible. It is evident that these operators might also have been written

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} dx \qquad \text{and} \qquad \int_{-\infty}^{x} dx \frac{d}{dx}$$

which are useful in dealing with functions multiplied by $H(x+u)$ which is zero when $x<-u$ and equal to 1 when $x>-u$ its value at $x=-u$ being given by $0 \leqslant H(x+u) \leqslant 1$.

It is evident that if in writing (1) Jeffreys had considered

$$e^{Kx} = ... + \frac{x^{-2}K^{-2}}{\underline{|-2}} + \frac{x^{-1}K^{-1}}{\underline{|-1}} + \frac{x^0K^0}{\underline{|0}} + \frac{xK}{\underline{|1}} + \frac{x^2K^2}{\underline{|2}} + ... \tag{107}$$

the series being continued both ways, he would obtain

$$p^n H(x) = \frac{x^{-n}}{\underline{|-n}} \tag{108}$$

on page 19 which would have been consistent with his result on page 25.

The objection which might be raised to writing (107) for use in the contour integral is, of course, that it introduces singularities into e^{Kx} at $x=0$. It would seem, however, that the consistency obtained by following this procedure, more than counter-balances the objections which might be raised. By doing so we have

$$\frac{1}{p^n} p^n H(x) = p^{-n} \frac{x^{-n}}{\underline{|-n}} H(x) = H(x). \tag{109}$$

Where as if

$$p^n H(x) = 0 \tag{110}$$

$$\frac{1}{p^n} p^n H(x) = \frac{1}{p^n} 0 \tag{111}$$

and we can proceed no further without additional data. Of course, it might be argued that the latter is nothing but a case where the operations are irreversible. This may be so, but it can easily be shown that the other cases of irreversibility of operators given by Jeffreys could be made reversible without any serious difficulty.

In addition, the above series for e^{Kx} would make it fit in a formal manner with the generalized series for e^{Kx} used by Heaviside and discussed also by Jeffreys loc. cit. page 91,

$$e^{Kx} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \frac{x^{n+r}}{(n+r)!} \tag{112}$$

where n is a proper fraction. The part of the series corresponding to negative values of r is always divergent but can be shown to possess an asymptotic property (see Jeffreys, page 91). To discuss fully the difference between the usual series for e^{Kx} and the generalized series for e^{Kx} would require quite a lengthy discussion.

The results to be obtained from the use of multivalued functions such as that given for $H(x)$ in Fig. 1 would have a very far-reaching effect in mathematical theory. It may be well to give a few examples.

Perhaps one of the most interesting results is that it destroys the validity of the reasoning by which it is considered that if it is shown that

$$A>B \quad \text{and} \quad A<B \tag{113}$$

at the same time, we have arrived at an inconsistency. An examination of Fig. 1 will show that when $x=0$, $H(x)$ is greater than, equal to and less than 1/2, and that there is no inconsistency in the statement. In other words, before we can assume we have arrived at an inconsistency because $A>B$ and $A<B$ simultaneously we must show that both A and B are single valued concepts.

It is clear that the law of the excluded middle does not hold at points at which functions become multivalued, and the method of proof by reductio ad absurdum becomes in itself absurd if applied at such points. In this connection the work of Brouwer (1) is interesting in that he declares the use of the excluded middle is legitimate only for finite sets. It would seem from the above that unless we could show first that an infinite set was a single-valued concept that the law of the excluded middle could not be applied to it. We shall not discuss whether the law of the excluded middle could be applied to an infinite set, if it were shown to be a single-valued concept, as we know no way of showing the latter statement to be true.

A lack of realization of the necessity for considering this aspect of the problem seems to lie at the root of many of the mathematical paradoxes. For instance, to refer to one paradox, the set of all things. There is no inherent contradiction in such a set containing itself, if such a set is a multivalued conception. There is possibly a contradiction if such a set is a single-valued conception. In order, therefore, to show that a paradox has arisen it would be necessary to prove first that the conception of such a set is a single-valued conception, and I am not aware that anyone has demonstrated this. It may have been defined to be such, but that is an entirely different matter.

We may consider the effect upon another region of mathematics by referring to Carslaw Mathematical Theory of Heat, 1921, page 14, where he treats of boundary conditions in Heat problems as follows:

« In the mathematical treatment of the question these surface and initial conditions are not regarded as conditions which v must satisfy on the surface itself or at the instant $t=0$. They are taken as limiting conditions and it is required in the one case that one solution shall converge to the given surface

---

(1) *See for instance a discussion by Pierpont*, Mathematical Rigor, Bulletin Amer. Math. Soc., XXXIV, 1, Jan.-Feb. 1928, p. 51.

or initial value, and in the other case that the differential coefficients in the limit as we approach the surface shall satisfy the corresponding conditions ».

Yet in the next paragraph Carslaw asks us to consider the problem

(114) $$\frac{\partial v}{\partial t} = k\nabla^2 v$$

in the solid

(115) $$v = f(x, y, z)$$

for $t=0$ in the solid

(116) $$v = \Phi(x, y, z, t)$$

at the surface.

The best we can say for the statement of the problem is that it is very carelessly written if we interpret it according to the quotation in the preceding paragraph. If we do not interpret it according to the preceding paragraph it involves a contradiction provided that the solution to be derived is to be single-valued, unless

(117) $$\Phi(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

at the surface.

If, however, the solution is allowed to be multivalued there is no contradiction.

In the solutions of such problems which arise in connection with initial conditions as given above, it will be found that the solution can be interpreted as a multi-valued function which does actually satisfy the conditions laid down. Such an interpretation, however, involves the rejection of the assumption made in pure mathematics that if we insert the value of x at any point in an infinite series, and obtain a definite value for the sum of the series at that point, then the series has only one value at that point. In the paper on H-Functions referred to above the opposite viewpoint is taken, namely that the sum of a series at any point may be multivalued until it is definitely shown to be single-valued. If it is multivalued then all possible values which can be found from the series are taken as the sum. For details, the paper referred to must be consulted. It is interesting to note some of the most important series which occur in connection with Green's Functions, such as $\sum_{x=\infty}^{x=1} \cos n(x-x_1)$ are not functions in the ordinary mathematical sense. Considered as multivalued functions they are multivalued at every point, but this does not prevent some very useful results being derived from them.

In general, the impression seems to be that the introduction of multivalued functions would lead to confusion and serve no useful purpose. Actual experience with such functions seems to show that they have a large sphere of usefulness and lead to many interesting results much more directly than ordinary mathematical methods. It is only natural that they should, because the theory of multivalued functions is naturally very much broader that that of single-valued functions

and includes the latter as a subdivision. It also makes what Hobson calls the morbid pathology of the Theory of Functions the most interesting part, for it will generally be found where functions exhibit singular behavior and give rise to difficulties in the ordinary theory that at such points they become multivalued when the opportunity to do so is presented to them.

Note: It might appear from the comments in the above paper that the Heaviside Unit function was synonymous with $\frac{x^0}{\lfloor 0}$. This is, however, not the case since $\frac{x^0}{\lfloor 0}$ is not zero when $x<0$. The reason that $\frac{x^{-1}}{\lfloor -1}$ which is the derivative of $\frac{x^0}{\lfloor 0}$ can be considered, from one point of view at least, to have an infinity of values at $x=0$ is only seen when both the real and imaginary values of it as a function of x and n (n being the exponent) are considered.

J. P. DEL PULGAR (Madrid - Spagna)

LES FONCTIONS ANALYTIQUES DE TÉTRAVECTEUR EN PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Soit la variable

$$\sigma = a\bar{r} + \sqrt{-1}bct; \qquad (\bar{r} = ix + jy + kz), \tag{1}$$

où $\bar{r}$ est un vecteur ordinaire, rapporté à trois vecteurs rectangulaires i, j, k, avec les conventions de Hamilton

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1; \qquad ij = -ji = k....$$

De son coté $\sqrt{-1}$ obéit aux lois ordinaires du calcul, non seulement dans ses rapports avec les quantités réelles, mais aussi avec i, j, k, de sorte que

$$\sqrt{-1}j\sqrt{-1} = -j; \qquad \sqrt{-1}ji = -ij\sqrt{-1} = ji\sqrt{-1} = -k\sqrt{-1} = -\sqrt{-1}k.$$

La quantité c est une vitesse absolument constante; a et b sont deux paramètres indépendants. Le module

$$ds^2 = a^2(-dx^2 - dy^2 - dz^2) + b^2c^2dt^2 \tag{2}$$

de l'élément infinitésimal de σ est l'intervalle, en coordonnées naturelles (espace-temps) au sens relativiste du mot.

Soit W une fonction uniforme de $\bar{r}$ et de t, et par conséquent de σ, telle qu'on a

$$W = f(\sigma) = mU + \sqrt{-1}nV \tag{3}$$

m, n étant des paramètres; U, V, pouvant être scalaires ou vectorielles, sans divergence ou sans tourbillon.

Dans un travail publié dans « Anales del Instituto C. A. I. » (Madrid, 1926), j'ai démontré que, si l'on désigne par $\bar{r}\bar{r}'$ le *produit total* de deux vecteurs dans le sens de SCHOUTEN (V.: *Grundlagen der Vector-und Affinoranalysis*, pag. 34), par $\frac{1}{\bar{r}}$ (*inverse*) la quantité par laquelle il faut multiplier totalment $\bar{r}$ pour obtenir l'unité, et par $\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}$ (*quotient*) le produit total de $\bar{r}$ par $\frac{1}{\bar{r}'}$, la quantité

$$\left(\lim \cdot \frac{\Delta W}{\Delta \bar{r}}\right)_{\Delta \bar{r}=0} \equiv \frac{\partial W}{\partial \bar{r}}$$

qui est un vrai quotient, et qui peut sans confusion être appelée *la dérivée*

partielle de W par rapport à $\bar{r}$ (lorsque $\Delta\bar{r}$ s'annulle) a (si elle n'est pas nulle ou infinie) une infinité de valeurs, une pour chaque verseur $\lim \frac{\Delta\bar{r}}{|\Delta r|}$. Or, parmi toute cette infinité de valeurs, il y a en général une maximum, qui peut s'écrire

(4) $$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{r}}\right)_{\max} = -\operatorname{grad}\cdot\varphi; \qquad \left(\frac{\partial\bar{a}}{\partial\bar{r}}\right)_{\max} = \operatorname{div}\cdot\bar{a} + \operatorname{rot}\cdot\bar{a}$$

φ et $\bar{a}$ étant respectivement des valeurs scalaires ou vectorielles de W. Ce maximum correspond à la direction de la normale à une des surfaces $\varphi = \text{const.}$; $|\bar{a}| = \text{const.}$ Le même opérateur employé une seconde fois donne

(5) $$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\bar{r}}\right)_{\max} = -\Delta W = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right)$$

lorsque W est un scalaire ou un vecteur sans divergence, et

(6) $$\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\bar{r}^2}\right)_{\max} = -\operatorname{grad}\cdot\operatorname{div}\cdot W,$$

si W est un vecteur irrotationnel.

Dans le même travail, j'ai démontré que

(7) $$\frac{\partial W}{\partial\bar{r}} = \frac{\partial W}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial\bar{r}}; \qquad dW = \frac{\partial W}{\partial\bar{r}}\,d\bar{r} + \frac{\partial W}{\partial t}\,dt.$$

Si l'on cherche la condition nécessaire pour que $\frac{\partial W}{\partial\sigma}$ ait une valeur unique pour chaque point (x, y, z, t) indépendante du module et du verseur de $\frac{\partial\bar{r}}{\partial t}$, on trouve immédiatement, par la méthode classique de Riemann,

(8) $$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial\bar{r}}; \qquad \frac{\mu}{c}\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial\bar{r}}$$

(9) $$\varepsilon = \frac{na}{mb}; \qquad \mu = \frac{ma}{nb}$$

conditions très remarquables et analogues a celles d'une transformation conforme. Si l'on soumet les deux grandeurs associées U et V au principe de la *moindre action* (dit de Hamilton), cela revient à dire que les seconds membres de (8) *doivent être maximum*, ce qui d'après (4) détermine son module et son verseur. De (8) on tire

(10) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\bar{r}^2} = 0; \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\bar{r}^2} = 0; \qquad \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial\bar{r}^2} = 0;$$

on constate sans peine que cette équation admet toujours la solution

$$W = f(a\bar{r} + \sqrt{-1}bct),$$

f étant une fonction arbitraire; c'est-à-dire que (10) est la condition nécessaire et suffisante pour que W soit fonction de σ. Si U et V sont soumises au principe *de la moindre action*, et ne contiennent acun vecteur irrotationnel, de (10) et (4) on tire

(11) $$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \Delta U = 0 \ldots\ldots \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \Delta W = 0.$$

Si U est un vecteur irrotationnel, θ désignant sa divergence,

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-\Delta\theta=0. \tag{12}$$

Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que W soit fonction de tétravecteur soumise au principe de la moindre action, est qu'elle soit solution d'une dalembertienne de la forme (11) ou (12). La grandeur W doit être considérée comme l'ensemble de deux phénomènes associés ; les variations de l'un deux par rapport au temps, *produisent* les variations de l'autre par rapport à l'espace.

Pour interpréter les équation (8), (11) et (12), posons $\sigma=a_1\bar{r}+\sqrt{-1}b_1ct$ e soit

$$W=p_0\varphi+p_1U_1+p_2U_2+\sqrt{-1}(q_0\psi+q_1V_1+q_2V_2) \tag{13}$$

φ, ψ étant deux scalaires ; U_1, V_1 deux vecteurs sans tourbillon, U_2, V_2 deux vecteurs sans divergence, (un ou plusieurs d'entre eux pouvant être nuls).

A) Supposons en premier lieu $U_1=U_2=0$. D'après (8), ψ, V_2 sont des constantes par rapport à t. Grad $\psi=$rot $\cdot\, V_2=0$; enfin

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\Delta\varphi=0\,;\qquad \left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2V_1}{\partial t^2}-\text{grad}\cdot\text{div}\,V_1=0. \tag{14}$$

V_1 est une perturbation irrotationnelle (par exemple une élongation mécanique) dont la divergence se propage d'après (12) avec une vitesse constante, dans un milieu caractérisé par les deux constantes de σ, a_1 et b_1. On voit que cette vitesse correspond dans (2) à $ds=0$. Donc σ *définit le milieu, W le phénomène ou perturbation physique.* Si l'on pose

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^2\frac{1}{c^2}=\frac{\varrho}{\mu(\xi+1)} \tag{15}$$

ou ϱ est une densité, μ le module de glissement de Lamé, ξ le paramètre de Cosserat, on trouve tout de suite les *équations des vibrations longitudinales*

$$\theta=\text{div}\,V_1\,;\qquad [\xi+1]\Delta\varphi=\frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,;\qquad \frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-(\xi+1)\Delta\theta=0. \tag{14a}$$

B) Soit en second lieu $\varphi=U_1=0$. Pour $\sigma=a_2\bar{r}+\sqrt{-1}b_2ct$, les équations (8) donnent immédiatement

$$\frac{q_2a_2}{p_2b_2}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial V_2}{\partial t}=\text{rot}\cdot U_2\,;\qquad \frac{p_2a_2}{q_2b_2}\cdot\frac{1}{c}\frac{\partial U_2}{\partial t}=-\text{rot}\cdot V_2 \tag{16}$$

V_2 étant le champ électrique E, U_2 le champ magnétique H, les équations précédentes deviennent, (9)

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}=\text{rot}\cdot H\,;\qquad \frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}=-\text{rot}\cdot E \tag{16a}$$

$$\text{div}\cdot H=0\qquad \text{div}\,E=0$$

ce sont les deux *équations fondamentales de l'Électromagnétisme ou équations de Maxwell.* Cela prouve que les vecteurs, ainsi que les potentiels électrique et magnétique sont des *phénomènes associés d'une fonction de tétravecteur.*

On voit immédiatement que les équations (16) conduisent à une dalembertienne de la forme (11). Mais dans ce cas, on pourrait interpréter U comme étant un mouvement sans divergence (par exemple d'un liquide incompressible); si l'on désigne par τ_1, τ_2, τ_3, les composantes de sa rotation (c'est-à-dire la moitié de son tourbillon) dérivant deux fois (16) par rapport à $\overline{r}$, et posant

$$\frac{b_2 c}{a_2} = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}} \tag{17}$$

on trouve

$$\Delta\tau_i = \frac{\varrho}{\mu}\frac{\partial^2\tau_i}{\partial t^2} \qquad (i=1,2,3) \tag{18}$$

équations bien connues *des ondes transversales.*

C) Supposons en troisième lieu que U soit un vecteur quelconque; c'est-à-dire, d'après Vaschy, $U=U_1+U_2$. On pourrait aussi bien poser $V=V_1+V_2$. De (14) et (16) on déduit sans peine

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^2 c^2 \operatorname{grad}\cdot\operatorname{div} V - \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^2 c^2 \operatorname{rot}\cdot\operatorname{rot} V \tag{20}$$

avec (15) et (17), u, v, w étant les composantes de V, et θ sa divergence on tire

$$\begin{cases} \dfrac{\varrho}{\mu}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\xi+1)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + 2\left(\dfrac{\partial\tau_2}{\partial z} - \dfrac{\partial\tau_3}{\partial y}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{21}$$

ou d'après l'identité

$$\Delta u = \frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\left(\frac{\partial\tau_2}{\partial z} - \frac{\partial\tau_3}{\partial y}\right),$$

enfin

$$\begin{cases} \dfrac{\varrho}{\mu}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \xi\dfrac{\partial\theta}{\partial x} + \Delta u \\ \cdots\cdots\cdots\cdots; \end{cases} \tag{22}$$

on voit que les équations (22) se vérifient si la divergence et le tourbillon du vecteur u, v, w, obéissent aux équations (14*a*) et (18) respectivement. Ce sont *les équations du mouvement d'un milieu isotrope qui n'est sollicité par aucune force extérieure.* On voit par là que la théorie des fonctions de tétravecteur nous conduit directement au *problème de Clebsch* avec toutes ses importantes dérivations.

N. B. - L'auteur de cette note prépare un travail sur l'introduction dans cette théorie des termes de friction ou absortion qui a lieu lorsque, par une certaine modification des (13), des termes de premier ordre sont introduits dans la dalembertienne (11).

D) Supposons enfin que $V=E$ représente le champ électrique. Les (8) donnent tout de suite

$$\begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{c}\dfrac{\partial E}{\partial t} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{r}} + \dfrac{\partial H}{\partial\overline{r}} = -\operatorname{grad}\cdot\varphi + \operatorname{rot} H; \qquad \operatorname{div} H = 0 \\ \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} = -\operatorname{div} E; \qquad \dfrac{\mu}{c}\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\operatorname{rot} E. \end{cases} \tag{23}$$

C'est le groupe préquantique de M. FERRIER (C. R. Ac. des Sc. Paris, 31 Mai-19 Av. 1926), que M. DONDER a démontré être invariant pour la transformation de Lorentz. Il est facile d'ailleurs de démontrer que *cette invariance est une propriété générale de toutes les fonctions de tétravecteur.* Le scalaire φ est, au signe près, *l'ampérien* de M. FERRIER, qui explique l'émission d'énergie par l'oscilateur de Planck.

Si a et b varient d'un point à un autre de l'espace-temps, la vitesse de propagation de W change en module et en verseur. Posons dans (11)

$$W=\Phi(\bar{r})e^{2\pi\nu t\sqrt{-1}};\qquad J=h\nu;\qquad g=\frac{J}{v}=\frac{Ja}{bc} \tag{24}$$

on obtient

$$\Delta\Phi+\frac{g}{h\nu}\Phi=0 \tag{25}$$

g=quantité de mouvement; J=énergie du système; h=constante de Planck; ν=fréquence; v=vitesse de propagation. L'équation (25) est la fondamentale dans la théorie ondulatoire de M.M. BROGLIE-SCHRÖDINGER, avec toutes ses conséquences (V. M. L. DE BROGLIE: « *Les principes de la nouvelle Mécanique ondulatoire* », Journal de Physique, Nov. 1926, p. 321). Le milieu est supposé dispersif, puisque l'indice de réfraction est une fonction de la fréquence.

La perturbation W se propage dans le milieu déterminé par $\sigma=a\bar{r}+\sqrt{-1}bct$, en suivant entre deux points A et B la ligne pour laquelle (*principe de Fermat*)

$$\delta\int_A^B\frac{d\bar{r}}{v}=0, \tag{26}$$

ce qui d'après (24) est équivalent (pour J=constante) à

$$\delta\int_A^B g\,d\bar{r}=0, \tag{27}$$

équation qui, d'après le *principe de Maupertuis*, définit la forme de la trajectoire suivie par un corps de quantité de mouvement g. Il est très important de remarquer que (26) et (27) sont des cas particuliers d'une autre équation très employée en Relativité,

$$\delta\int_A^B ds=0, \tag{28}$$

de laquelle on déduit (26) pour le cas $ds=0$, c'est-à-dire $dt=\left(\frac{a}{bc}\right)dr$.

M. DE BROGLIE n'envisage dans sa mécanique que (26) et (27). Il associe à chaque mouvement, une onde dont la trajectoire (26) soit exactement celle du mobile, ce qui exige une certaine distribution de l'indice de réfraction $n=\frac{a}{b}$. La mécanique relativiste definit un champs de potentiels par une distribution appropriée des a et b. Cela détermine les géodésiques parcourues par un agent

fondamental (qu'elle appelle *lumière*) et par son moyen elle étudie les mouvements des corps dans ce champ, suivant les géodésiques de forme (28).

Comme exemple, prenons le champ symétrique produit par une masse ponctuelle. On a, en introduisant dans (2) des coordonnées polaires

$$(29) \qquad ds^2 = -a(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\Phi^2) + b^2 c^2 dt^2 = g_{\eta\nu}(dx_\mu)(dx_\nu).$$

On sait que dans ce cas a et b sont des fonctions de la seule distance r à cette masse. Einstein détermine leur valeur par sa loi gravitatoire bien connue

$$G_{\mu\nu} = 0$$

obtenue en égalant à 0 le tenseur réduit de Riemann-Christoffel. On tire pour la géodésique (28) l'équation

$$(30) \qquad \begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\Phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 2mu^2; \\ &u = \frac{1}{r} \\ &h = r^2 \frac{d\Phi}{ds} = \text{constante des aires,} \end{aligned}$$

qui permet le calcul de la précession du périhélie. Il est très important de remarquer que si, dans (30) on fait $ds = 0$, et par consequent $h = \infty$, on obtient une géodésique qui, d'après ce qui a été dit, peut recevoir deux interprétations physiques différentes :

a) la ligne de propagation de l'agent ondulatoire fondamental dans un milieu d'indice $n = \frac{a}{b}$, étant donné que ce même agent, dans un milieu d'indice unité, se propagerait dans toutes les directions en ligne droite et avec une vitesse égale à c;

b) la trajectoire que décrirait, dans un champ à potentiels distribués comme l'exigent a et b, un corps doué d'une vitesse initiale égale à c.

Dans le langage de M. DE BROGLIE l'onde de la première interprétation est *associée* au mobile de la seconde. Mais de l'identité géométrique de ces deux trajectoires, il n'est pas permis de tirer l'identité physique des deux phénomènes ou *l'inflexion de l'agent ondulatoire fondamental lorsqu'il trasverse un champ quelconque de potentiels.*

Il semble donc que la mécanique ondulatoire étudie les mouvements des corps (matière ou électrons) au moyen d'une géodésique appropriée de la forme (26). La relativité, par contre, étudie les mouvements des corps par des géodésiques de la forme (28) au moyen d'un agent ondulatoire qui se propage dans toutes les directions suivant des géodésiques de la forme (26).

Les deux théories sont entièrement comprises dans celle des fonctions de tétravecteur.

Quant aux intégrales de la forme $\int W d\bar{r}$, $d\bar{r}$ pouvant être non seulement $idx+jdy+kdz$, mais aussi $idydz+jdxdz+kdxdy$, elles contiennent ***l'énergie, les masses, les fluxs,*** etc. Si on considère que

$$\int W d\bar{r} = \int [maUd\bar{r} - nbcVdt] + \sqrt{-1} \int [naVd\bar{r} + mbcUdt],$$

ayant compte des équations (8), par analogie avec les intégrales des fonctions de variable complexe ordinaires, on voit qu'un champ très étendu de synthèse et, peut être, de nouvelles applications, s'ouvre à la Physique mathématique par l'étude des fonctions de tétravecteur. Une généralisation de la théorie des résidus de Cauchy permettrait l'étude des singularités.

G. WATAGHIN (Torino - Italia)

TEORIA CORPUSCOLARE DELL'INTERFERENZA E DELLA DIFFRAZIONE

1. - La spiegazione dell'interferenza nella teoria ondulatoria si basa sulla rappresentazione della luce mediante campi vettoriali. Ad esempio l'elisione della luce corrisponde in questa teoria all'annullarsi del vettore luminoso, risultante dalla sovrapposizione di onde, che interferiscono.

In una teoria corpuscolare la spiegazione deve seguire uno schema diverso. Una spiegazione semplice può essere data in base all'ipotesi seguente: il movimento delle particelle luminose nei campi di interferenza è tale da produrre in corrispondenza alle frangie chiare e scure degli *addensamenti* e delle *rarefazioni* locali dei corpuscoli. Nei punti, in cui si formano frangie scure, i quanti di luce non arrivano o arrivano in numero esiguo. Essi invece si addensano nei punti, che corrispondono a frangie chiare.

La possibilità di un tale movimento deve essere naturalmente dimostrata. Noi diamo questa dimostrazione facendo vedere, come si possa definire il movimento dei quanti di luce in modo da rispettare la continuità del moto e da avere, nei riguardi della propagazione, interferenza e diffrazione della luce, un'equivalenza completa fra la teoria corpuscolare e la teoria ondulatoria elettromagnetica. Va notato inoltre, che la teoria proposta spiega con facilità anche i fenomeni di diffrazione degli elettroni (esperienze di DAVISSON e GERMER e di G. P. THOMSON e RUPP), spiega cioè proprio un gruppo di fenomeni, per cui è difficile dubitare della natura corpuscolare della « radiazione ».

2. - Supponiamo che la luce sia costituita di corpuscoli o quanti di luce, di energia hV (ove V è la frequenza e h è la costante di Planck). Possiamo paragonare il movimento di insieme di queste particelle al moto di un fluido compressibile. Per definire tale movimento occorre prefissare il valore della densità ϱ e della velocità $\mathbf{v}$ in modo che risultino verificate le condizioni di continuità del movimento e rispettate le condizioni al contorno.

Fissiamo la nostra attenzione sopra un caso qualunque di interferenza in luce monocromatica. Per descrivere analiticamente il fenomeno interferenziale ci serviamo del campo elettromagnetico, il quale costituisce questo fenomeno secondo la teoria ondulatoria. Siano $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ i vettori elettrico e magnetico di questo campo,

Definiamo ora il movimento dei nostri quanti di luce nel modo seguente:

1°) la densità ϱ dei quanti sia data dalla relazione:

$$h\nu \cdot \varrho = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = W \tag{1}$$

ove W è la densità di energia del campo elettromagnetico considerato;

2°) la velocità $\mathbf{v}$ di questi corpuscoli sia definita dalla equazione:

$$h\nu \cdot \varrho \cdot \mathbf{v} = c\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}. \tag{2}$$

In questa seconda relazione, al primo membro compare l'espressione del *flusso di energia* portato dai quanti di luce. Noi la uguagliamo al vettore di Pointing del nostro campo elettromagnetico, il quale notoriamente rappresenta anche il flusso di energia.

Dimostriamo che per il movimento definito dalle due equazioni (1) e (2) vale l'*equazione di continuità*. Quest'ultima nel caso nostro esprime il fatto, che durante il moto il numero di particelle si conserva. I quanti nè si distruggono nè si creano.

La dimostrazione discende immediatamente dall'equazione che esprime la legge della conservazione dell'energia per il campo elettromagnetico:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = 0. \tag{3}$$

Sostituendo nelle (3) alla W e al vettore $(c\mathbf{E} \wedge \mathbf{H})$ i loro valori ricavati da (1) e (2) si ottiene (dopo la soppressione del fattore costante $h\nu$):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) = 0. \tag{3'}$$

Questa è proprio l'equazione di continuità.

Consideriamo ora le linee di flusso dell'energia del campo elettromagnetico, cioè le linee, che hanno in ogni loro punto la tangente parallela al vettore di Pointing relativo allo stesso punto. È chiaro, che in virtù dell'equazione (2) *le traiettorie dei quanti di luce coincidono con queste linee di flusso*. E risulta senz'altro dall'equazione (1), che nei punti in cui la densità di energia W del campo elettromagnetico è nulla od è piccola, anche la densità dei quanti ϱ sarà nulla o piccola. In altre parole, nelle frangie scure si avrà una rarefazione dei quanti di luce. E viceversa si avranno degli addensamenti nelle frangie chiare.

In questa maniera tutti i fenomeni d'interferenza e di diffrazione ricevono automaticamente una spiegazione, « corpuscolare », in quanto la teoria elettromagnetica li spiega. Si noti però, che le considerazioni esposte riguardano esclusivamente la cinematica dei quanti di luce e prescindono del tutto da qualsiasi ipotesi sulla dinamica. Nulla è stato supposto anche sulla struttura delle particelle luminose. La questione del perchè i quanti si muovono colle leggi cinematiche espresse dalle equazioni (1) e (2), come anche la spiegazione del modo con cui

il contorno del campo di interfenza determina le traiettorie di questi quanti escono dai limiti del presente lavoro.

3. - L'equazione (2) dice che il flusso di energia e le traiettorie dei quanti di luce coincidono col flusso di energia e le linee di flusso del campo elettromagnetico, il quale rappresenta il fenomeno nella teoria ondulatoria.

Ciò rende per noi necessario lo studio della distribuzione di queste linee di flusso nei campi di interferenza, studio che finora è stato trascurato.

Prima di considerare il caso generale di un campo qualsiasi, illustreremo la distribuzione di queste linee sopra l'esempio tipico degli specchi di Fresnel.

Ricordiamo, che se in questa esperienza si sposta lo schermo, si ottiene come luogo dei punti, per cui si ha per es. elisione di luce con una data differenza di cammino $\left(\frac{\lambda}{2} \text{ p. es.}\right)$, un iperboloide di rotazione avente i fuochi nelle due immagini speculari della sorgente di luce. Nei piani meridiani si hanno le iperboli sezioni. Ebbene, è facile vedere che queste iperboli sono precisamente le linee di flusso dell'energia elettromagnetica. Si dimostra, infatti, con considerazioni elementari, che il vettore di Pointing, in ogni punto sufficientemente lontano dagli specchi, è tangente a queste iperboli. Va notato, che in vicinanza immediata degli specchi il fenomeno ondulatorio è molto complesso. Quindi anche le linee di flusso dell'energia seguono un andamento estremamente complicato.

È chiaro però, anche senza un'analisi dettagliata di tale andamento, che l'energia luminosa emessa dalla sorgente arriva agli specchi e *lì viene distribuita e diretta* secondo le traiettorie iperboliche sopra considerate in modo da concentrarsi lungo le iperboli corrispondenti alle frangie chiare, e dar luogo a densità energetiche piccole o nulle per le iperboli relative a frangie scure. Ed è evidente anche, che nella nostra teoria, in virtù delle leggi cinematiche (1) e (2), i quanti di luce seguono le stesse traiettorie e danno luogo agli stessi addensamenti e rarefazioni energetiche. La formazione delle frangie viene con ciò completamente chiarita.

4. - È noto, che le leggi dell'ottica geometrica hanno una validità limitata, in quanto già il concetto del raggio luminoso, come anche i principi di Fermat e di Malus-Dupin si ottengono per approssimazione dalle leggi dell'ottica ondulatoria con un passaggio al limite per lunghezze d'onda tendenti a zero. È noto anche, che queste leggi dell'ottica geometrica si adattano bene a una teoria corpuscolare della luce.

Faremo vedere come il campo di applicazione di queste leggi possa essere esteso ai fenomeni d'interferenza e di diffrazione. Conviene partire dalla nota teoria di Debye-Sommerfel-Runge [1] sulla relazione fra l'ottica geometrica e l'ottica fisica.

---

[1] Ann. d. Phys., v. 30, 1911 e RIEMANN-WEBER: *Differentialgleichungen der Physik*, v. II, p. 484, 1927.

Si consideri con Debye il vettore di Hertz Π relativo a un campo di onde elettromagnetiche. Supposto il fattore del tempo della forma e^{-iwt}, si ha per Π l'equazione:

$$\Delta_2\Pi + n^2k^2\Pi = 0 \tag{4}$$

ove n è l'indice di rifrazione e $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Senza pregiudizio della generalità possiamo supporre per le componenti di Π che: $\Pi_x = \Pi_y = 0$ e $|\Pi| = |\Pi_z|$. Poniamo:

$$\Pi_z = A(x, y, z)e^{i[kS(x,y,z) - wt]} \tag{5}$$

ove

$$k = \frac{w}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

La (4) diventa dopo alcune riduzioni:

$$\text{grad}^2 S - n^2 = \lambda\left[\frac{i}{2\pi}(\Delta_2 S + \text{grad log } A \times \text{grad } S) + \lambda\frac{\Delta_2 A}{4\pi^2 A}\right]. \tag{6}$$

Supposto λ infinitesimo, si deduce dalla (6), che nei punti del campo in cui le derivate prime e seconde di S e A hanno valori trascurabili di fronte a $\frac{1}{\lambda}$, la differenza $(\text{grad}^2 S - n^2)$ è dell'ordine di grandezza di λ. Di solito ciò si esprime dicendo, che in tali punti la S verifica approssimativamente l'equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\text{grad}^2 S = n^2. \tag{7}$$

Dalla (7) si deduce poi nel modo noto la validità dei principi di Fermat e di Malus, cioè la validità (approssimata) delle leggi dell'ottica geometrica. Secondo la teoria di Debye e Sommerfeld, il procedimento perde la sua validità per i fenomeni d'interferenza e di diffrazione, perchè in vicinanza del contorno del campo (e in particolar modo nei punti prossimi agli apparecchi interferenziali e ai reticoli di diffrazione) le derivate di S e A assumono valori grandi rispetto a $\frac{1}{\lambda}$. Ciò è vero, ma dal fatto che l'equazione (7) cessa di valere in certe porzioni limitatissime del campo, non è lecito dedurre nulla relativamente al resto del campo. Anche nell'ottica geometrica si conoscono casi simili; ad es. nei fuochi di una lente l'equazione (7) non risulta verificata nemmeno approssimativamente.

E si dimostra facilmente, che il procedimento approssimato di Debye è perfettamente applicabile nei punti dei campi d'interferenza lontani dal contorno. Per dimostrarlo basta costruire le funzioni S e A e verificare la validità della (7). Ad es. per gli specchi di Fresnel nel vuoto si ha:

$$S = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \qquad A = \cos\left(2\pi\frac{r_1 - r_2}{\lambda}\right)$$

ove r_1 e r_2 sono le distanze del punto del campo dalle due immagini speculari del punto luminoso. Le superfici $S = \text{cost.}$ sono gli elissoidi confocali di rotazione, di cui le iperboli, traiettorie dei quanti, sono le traiettorie ortogonali.

Quest'ultima proprietà può essere generalizzata. Infatti, calcolando le componenti del vettore di Pointing mediante le formole:

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \boldsymbol{\Pi} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\ddot{\boldsymbol{\Pi}} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}(\varepsilon\dot{\boldsymbol{\Pi}})$$

e facendo la sostituzione (5) si ottiene:

$$(8)\qquad \begin{aligned} (\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_x &= k^4\cdot\varepsilon\cdot A^2\cdot e^{2ik'S}\cdot\left[n^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial S}{\partial x}+\ldots.\\ (\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_y &= k^4\cdot\varepsilon\cdot A^2\cdot e^{2ikS}\cdot\left[n^2-\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial S}{\partial y}+\ldots.\\ (\mathbf{E}\wedge\mathbf{H})_z &= k^4\cdot\varepsilon\cdot A^2\cdot e^{2ikS}\cdot\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2\right]\cdot\frac{\partial S}{\partial z}+\ldots. \end{aligned}$$

ove i termini non scritti contengono potenze di λ inferiori alla 4ª. È evidente che in virtù della (7) i coefficienti di $\frac{\partial S}{\partial x}$, $\frac{\partial S}{\partial y}$, $\frac{\partial S}{\partial z}$ nelle (8) risultano egonali approssimativamente [perchè anche l'equazione (7) è approssimata]. Ne deduciamo che, con approssimazione, dipendente dalla piccolezza di λ, *il vettore di Pointing è parallelo al* grad S. La funzione caratteristica o l'« Eikonal » S permette quindi anche nel caso generale di costruire le linee di flusso di energia come traiettorie ortogonali delle superficie $S=\text{cost}$.

Se ne deduce, come in ottica geometrica, che queste linee (raggi luminosi) soddisfano a un principio variazionale simile a quello di Fermat. Infatti, per queste traiettorie ortogonali vale evidentemente:

$$\delta\int_A^B |\operatorname{grad} S|\, ds = 0.$$

Questa relazione costituisce l'estensione del principio di Fermat ai fenomeni di interferenza e di diffrazione.

A. SMOUROFF (Leningrad - U. S. S. R.)

DIE PHYSIKALISCHE NATUR DER ELEKTRISCHEN VORGÄNGE IN HOMOGENEN ISOLATOREN

Die genaue Kenntnis der Vorgänge, die sich in einem Isolator während eines elektrischen Durchschlags desselben abspielen, ist von grösster Wichtigkeit nicht allein vom theoretischen Standpunkte, sondern würde auch von grosser praktischer Bedeutung sein. Die elektrische Festigkeit eines Isolators hängt von sehr vielen Umständen ab.

Es sind bis zum heutigen Tage hauptsächlich zwei Theorien des elektrischen Durchschlags allgemein anerkannt worden, und namentlich die Theorie der Stossionisierung, die hauptsächlich für gasförmige und flüssige Isolatoren ihre Anwendung findet, erklärt den elektrischen Durchschlag eines Isolators durch Entstehen freier Elektrone, die von einem Atom während eines Zusammenstosses desselben mit einem freien Elektron abgetrennt werden. Diese Theorie erklärt aber nicht das Entstehen der ersten freien Elektrone, die für die Stossionisierung notwendig sind.

Die Theorie des Wärmedurchschlags, die hauptsächlich ihre Anwendung für feste Isolatore findet, erklärt den elektrischen Durchschlag eines Isolators durch eine Erwärmung desselben infolge eines Durchganges des Leitungsstromes, der durch die Leitfähigkeit des Isolators bedingt ist, und zwar soll der Durchschlag an einer Stelle des Isolators stattfinden, wo seine Leitfähigkeit am grössten ist infolge einer Inhomogenität desselben. Diese Theorie würde nur schwer anwendbar sein zur Erklärung der electrischen Vorgänge in homogenen Isolatoren.

Um eine allgemeinere Theorie zu gewinnen, in der die Theorie der Stossionisierung und die Theorie des Wärmedurchschlags nur als Sonderfälle auftreten würden, schien es den Verfasser als zweckmässig die Bewegungen der Elektrone in einem Atom unter dem Einfluss eines dusseren elektrischen Feldes und eines dusseren magnetischen Feldes einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen, um ein wenig Licht auf die Vorgänge bei einem elektrischen Durchschlag eines Isolators werfen zu können, in derselben Weise wie es geschieht in der Optik zur Erklärung der Erscheinungen, die in den Spektrallinien eines Körpers bei den sogenannten Effekten von Stark und Zemann auftreten.

Betrachten wir zunächst den einfachsten Fall der Bewegung eines Elektrons auf einer Kreisbahn, in deren Mittelpunkt der positiv geladene Kern des Atoms

gelegen ist, so erhält man am einfachsten die Lösung der Aufgabe, indem man zu einem Paraboloid-Koordinatensystem greift, in welchem der Koordinatenanfang mit der Lage des positiv geladenen Kerns zusammen fällt und die Lage eines Punktes durch die Parameter λ und μ von zwei durch diesen Punkt gehenden Rotationsparaboloiden mit einer gemeinsamen mit der Richtung des äusseren elektrischen Feldes zusammenfallenden Rotationsachse, und durch den Azimut φ, wie es in Fig. 1 angegeben ist, gekenntzeichnet wird. Der Fall, wo es nicht ein Elektron, sondern mehrere um den Kern rotierende Elektrone gibt, kann leicht auf den Fall eines einzigen Elektrons zurückgeführt werden, indem wir ausser der Anziehungskraft des Kernes auf ein in der äusseren Zone des Atoms rotierendes Elektron noch die Abstossungskräfte sämtlicher Elektronen auf das betrachtete Elektron berücksichtigen. Dieses kann geschehen unter der Annahme, dass die $(p+m)$ Elektrone des Atoms sich in bestimmten Atomzonen befinden, die verschiedenen Quantenzahlen entsprechen und infolge dieses besitzen die Elektrone der verschiedenen Zonen verschiedene Energiemengen. Wenn wir uns die Elektrone jeder Zone auf einer Kugelfläche gleichmässig verteilt denken, so besteht die Wirkung der p Elektronen auf den inneren Zonen auf ein Elektron auf der äusseren Zone in einer Verminderung der Anziehungskraft des Kernes um $(p \cdot e)$, wo « e » die Ladung eines Elektrons ist. Die « m » Elektrone der äusseren Zone würden auch eine Verminderung der Anziehungskraft ausüben, sodass, wenn die Ladung des Kernes gleich $+(p+m)e$ ist, würden die sämtlichen Ladungen eines Atoms eine resultierende Kraft auf ein in der äusseren Zone befindliches Elektron ausüben, die einer Ladung $+(ke)$ des Kernes entsprechen würde. Unter den angegebenen Vor aussetzungen erhält man den folgenden Ausdruck für k:

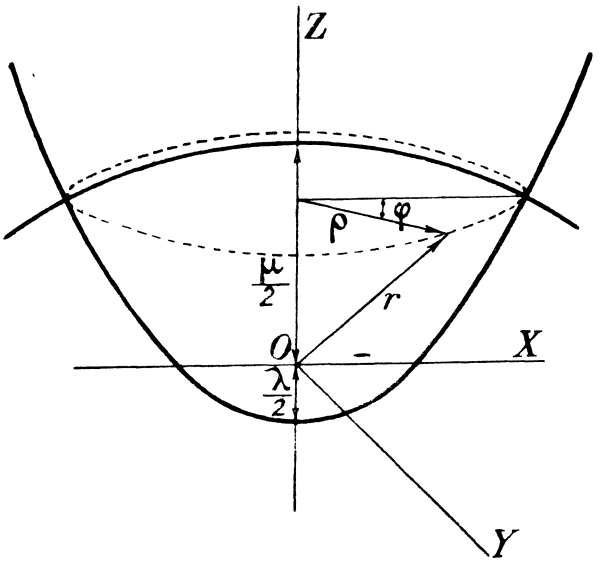


Fig. 1.

$$k = \frac{m}{2}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{m}}\right].$$

Aus diesem Ausdruck kann man ersehen, dass mit einer Vergrösserung der Elektronenzahl m in der äusseren Zone, die Anziehungskraft auch eine Vergrösserung erleiden muss.

Im Fall, wo das Atom eine negative Ladung $-(xe)$ trägt, also z. B. im Fall eines negativ geladenen Ions, würde « k » die folgende Form annehmen:

$$k=\frac{1}{2}[m-x+\sqrt{m+x}],$$

aus welcher man ersehen kann, dass in diesem Fall die resultierende Anziehungskraft des Kerns ausserordentlich geschwächt wird.

Zur Bestimmung der Bewegungsbahn eines Elektrons im Atom unter dem Einfluss eines äusseren elektrischen Feldes, welches einen Gradienten « g » besitzt, geht man am zweckmässigsten aus der Energiegleichung aus: $T+W=h=\text{const.}$

In parabolischen Kordinaten ausgedrückt, werden die Werte von T und W folgende Gestalt erhalten:

$$T=m\left\{\frac{\lambda+\mu}{8}\left(\frac{\lambda'^2}{\lambda}+\frac{\mu'^2}{\mu}\right)+\frac{\lambda\mu}{2}\varphi'^2\right\},$$
$$W=eg\frac{\lambda-\mu}{2}-2\frac{ke^2}{\lambda+\mu},$$

wo « m » die Masse Elektrons ist.

Indem wir das Verfahren nach der Methode von Hamilton-Jacobi zum integrieren der Differenzialgleichungen anwenden, erhalten wir die folgenden allgemeinen Ausdrücke für die Bewegungsbahn eines Elektrons unter dem Einfluss eines äusseren elektrischen Feldes:

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\sqrt{F(\lambda)}}=\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\sqrt{F_1(\mu)}},$$
$$\varphi=\frac{\lambda_0\mu_0 m\varphi_0'}{2}\left[\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{\lambda\sqrt{F(\lambda)}}+\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{d\mu}{\mu\sqrt{F_1(\mu)}}\right],$$

in welchen λ_0, μ_0 und φ_0 die Koordinaten des Anfangzustandes Elektrons sind. Die Funktionen $F(\lambda)$ und $F_1(\mu)$ sind Funktionen dritten Grades und deswegen wird die allgemeine Lösung durch elliptische Funktionen dargestellt.

Um sich eine möglichst klare und anschauliche Vorstellung vom Charakter der Bewegung des Elektrons zu machen, nehmen wir hier einzelne Fälle vor, und zwar den Fall, wo: 1°) die ursprüngliche Bevegung des Elektrons in einer, zur Richtung des äusseren elektrischen Feldes normalen Ebene, stattfindet: und 2°) wenn diese Bewegung in der Ebene der elektrischen Krafteinwirkung vor sich geht.

Im ersten Fall würden die Funktionen $F(\lambda)$ und $F_1(\mu)$ folgende Gestalt erhalten:

$$F(\lambda)=meg(\varrho-\lambda)\left[\lambda^2+\lambda\left(\varrho+\frac{ke}{g\varrho}\right)-\frac{ke}{g}\right],$$
$$F_1(\mu)=meg(\mu-\varrho)\left[\mu^2-\mu\left(\frac{ke}{g\varrho}-\varrho\right)+\frac{ke}{g}\right],$$

wo ϱ der Radius der ursprünglichen Kreisbahn des Elektrons ist.

Die Wurzeln der Funktion $F(\lambda)=0$ werden alle reell sein und sind gleich:

$$\alpha_0=\varrho,$$

$$\alpha_1=-\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{ke}{g\varrho}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\varrho+\frac{ke}{g\varrho}\right)^2+\frac{ke}{g}}>0,$$

$$-\alpha_2=-\frac{1}{2}\left(\varrho+\frac{ke}{g\varrho}\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\varrho+\frac{ke}{g\varrho}\right)^2+\frac{ke}{g}}<0.$$

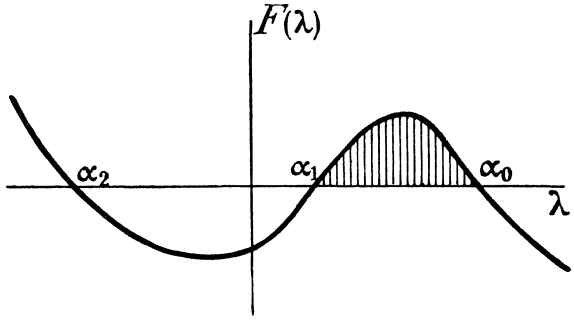


Fig. 2.

Da λ eine durchaus positive Grösse ist und ausserdem $F(\lambda)$ immer grösser als 0 sein muss, um keine imagenere Werte des Radikals zu erhalten, so ersieht man aus der Kurve Fig. 2, dass die Funktion $F(\lambda)$ nur die Werte, welche zwischen den Wurzeln α_0 und α_1 liegen, haben kann, wie es durch den gestrichelten Teil der Kurve gezeigt ist.

Die Wurzel der Funktion $F_1(\mu)$ sind ebenso reell und sind gleich:

$$\beta_0=\varrho,$$

$$\beta_1=\frac{1}{2}\left(\frac{ke}{g\varrho}-\varrho\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{ke}{g\varrho}-\varrho\right)^2-\frac{ke}{g}}>0,$$

$$\beta_2=\frac{1}{2}\left(\frac{ke}{g\varrho}-\varrho\right)-\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{ke}{g\varrho}-\varrho\right)^2-\frac{ke}{g}}>0.$$

Die Veränderung der Werte der Funktion $F_1(\mu)$ trägt den Charakter, der auf Fig. 3 dargestellt ist. Somit kann die Funktion $F_1(\mu)$, um ein reelles Radikal zu bekommen, sich nur in den Grenzen von $\mu=\beta_0$ bis $\mu=\beta_2$, oder von $\mu=\beta_1$ bis $\mu=\infty$ verändern.

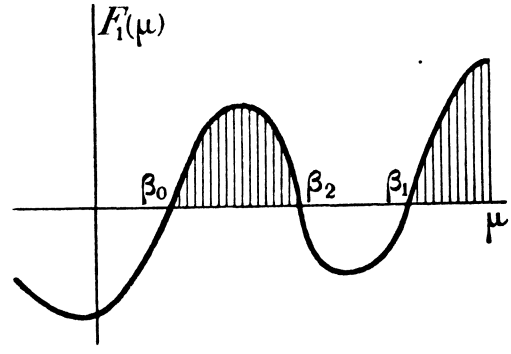


Fig. 3.

Wie es aus den Gleichungen der Bewegungsbahn des Elektrons hervorgeht, ist das Elektron in seiner Bewegung in einem ringförmigen Raum, welcher aus den Paraboloiden α_0, α_1, β_0 und β_2 gebildet ist, wie es auf der Fig. 4 dargestellt ist, eingeschlossen. Die Bewegungskurve des Elektrons füllt den ganzen Raum des Ringvolumens aus und das Elektron strebt eine gewisse Grenzlage

der Bahn auf der Oberfläche des äussersten Paraboloids einzunehmen, wobei es in einem ringförmigen Abschnitt auf dem Paraboloid β_2, welcher durch die Paraboloiden α_0 und α_1 auf dem letzteren ausgeschnitten wird, eingeschlossen ist und kleine Schwingungen zwischen den Paraboloiden α_0 und α_1 ausübt. Die beste Vorstellung von der Art der Bewegung eines Elektrons wird gewonnen, wenn man an ein Draht, welcher auf eine von den Seiten begrenzte Spule aufgewickelt wird, denkt.

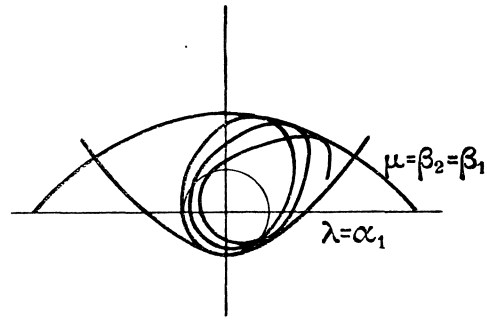


Fig. 4.

Bei einer Vergrösserung des Gradientwertes « g », die Werte der Wurzel β_2 und β_1 der Funktion $F_1(\mu)$ nähern sich einander und bei

$$g=\frac{ke}{\varrho^2}(3-2\sqrt{2})=0{,}17\frac{ke}{\varrho^2}$$

fallen diese Werte zusammen. In diesem Fall wird die Funktion $F_1(\mu)$ durch die Kurve der Fig. 5 dargestellt. Für diesen kritischen Fall wird die Grösse des Gradienten « g » umgekehrt proportional dem Quadrat des Radius ϱ sein, und wird also für kompliziertere Substanzen, die einen grösseren Radius ϱ der Bewegungsbahn der Elektrone besitzen, viel kleiner ausfallen.

Man kann nachweisen, dass die Lage eines Elektrons auf dem Paraboloid β_2 bei $\lambda=\alpha_1$ labil ist und infolgedessen der kleinste Impuls, wie er z. B. bei der Wärmebewegung der Atome entstehen kann, würde genügen, um das Elektron in das Gebiet von $\mu=\beta_2=\beta_1$ bis $\mu=\infty$ der Kurve Fig. 5 zu bringen. In diesem Fall würde das Elektron dem Atom entzogen werden und es würde eine Ionisierung des Atoms entstehen. Aber auch im Fall, wo die Wurzeln β_1 und β_2 nicht einander gleich sind, könnte eine Ionisierung des Atoms zustande kommen, wenn durch ein Impuls, der durch die Wärmebewegung der Atome verursacht ist und bei welchem eine genügende Menge von Energie abgegeben werden könnte, das Elektron vom Paraboloid β_2 auf das Paraboloid β_1 (Fig. 4) gebracht würde. Wenn wir durch

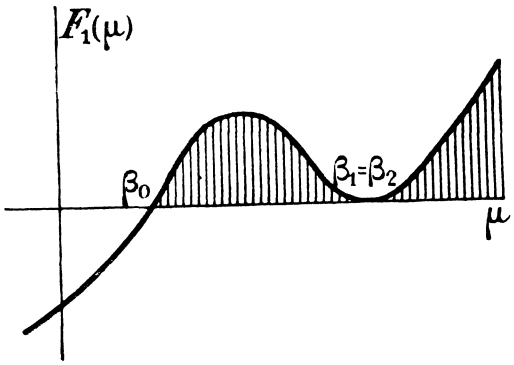


Fig. 5.

$$A=\int_{\varrho}^{\infty}\frac{ke^2}{r^2}\,dr=\frac{ke^2}{\varrho}$$

die Arbeit, welche zur Entfernung eines Elektrons aus dem Atom notwendig sein würde und durch A_1 die Arbeit, die notwendig sein würde, um das Elektron vom Paraboloid β_2 auf den Paraboloid β_1 zu bringen, bezeichnen, so kann man setzen

$$\frac{A_1}{A} = \psi(T),$$

wo $\psi(T)$ eine Funktion der absoluten Temperatur T ist.

Aus dieser Beziehung kann man den Wert des ionisierenden Gradienten bestimmen, und zwar erhält man:

$$g = \frac{ke}{\varrho^2}\left\{1{,}5 - \sqrt{2 + \frac{1}{4}[\psi(T)]^2}\right\}.$$

Die Funktion $\psi(T)$ muss eine ansteigende Funktion der Temperatur sein und sie charakterisiert den Teil der Arbeit an der Entfernung des Elektrons aus dem Atom, welcher sich auf die Wärmebewegung bezieht und der augenscheinlich mit der Energie der Wärmebewegung, welche der absoluten Temperatur proportional ist, verbunden ist, und es muss $\psi(T)=0$ bei $T=0$ sein. Jedoch kann $\psi(T)$ keine einfache lineare Funktion der Temperatur sein, da beim Anstieg der Energie der Wärmebewegung sich die Ausnutzungsbedingungen dieser Energie zu Ionisierungszwecken stetig verändern werden. In der Tat wird die Energie im festen und gasförmigen Zustande infolge verschiedener Entfernungen zwischen den Molekülen und ebenso infolge verschiedener Freiheitsgrade der Bewegung derselben bei verschiedener Freiheitsgrade der Bewegung derselben bei verschiedenen Temperaturen und Phasen, nur verschieden zur Ionisierung der Atome beitragen können, und infolgedessen wird die Funktion $\psi(T)$ nicht direkt proportional der Temperatur sein, sondern sie ist eine kompliziertere Funktion der Temperatur.

Um diesen Umstand prüfen zu können, es wurden im Hochspannungslaboratorium des Elektrotechnischen Instituts in Leningrad Versuche über die Durchschlagfestigkeit des Schwefels im Temperatur-Intervall von $-200^\circ c$ bis $+1100^\circ c$ ausgeführt. Die Ergebnisse dieser Versuche und die ermittelten Ausdrücke für die Werte des Gradienten g in verschiedenen Phasenzuständen des Schwefels in Funktion der absoluten Temperatur, sowie die Werte der ermittelten Radii der Elektronbahnen des Schwefels, sind auf Fig. 6 angegeben. Aus diesen Kurven ersieht man deutlich, dass die Funktion $\psi(T)$ einen verschiedenen Verlauf für verschiedene Phasen des Schwefels hat. Auf den Kurven sind die Anfangsspannungen bei dem ersten Durchschlag angegeben, da bei flüssigen und gasförmigen Zuständen des Schwefels es traten immer spätere Durchschläge bei viel niedrigeren Spannungen ein, weil der Schwefel nach dem ersten Durchschlag schon ionisiert geworden ist und es konnte eine weitere Ionisierung durch Zusammenstoss der Atome mit dem beim ersten Durchschlag gebildeten Elektronen einsetzen, wozu im allgemeinen eine kleinere Spannung erforderlich ist, als für die Ionisierung durch das äussere elektrische Feld und die Wärmebewegung.

Im Fall, wo die Richtung des elektrischen Feldes mit der Ebene der Bewegungsbahn zusammenfällt, erhält man Resultate, die analog den schon erhaltenen

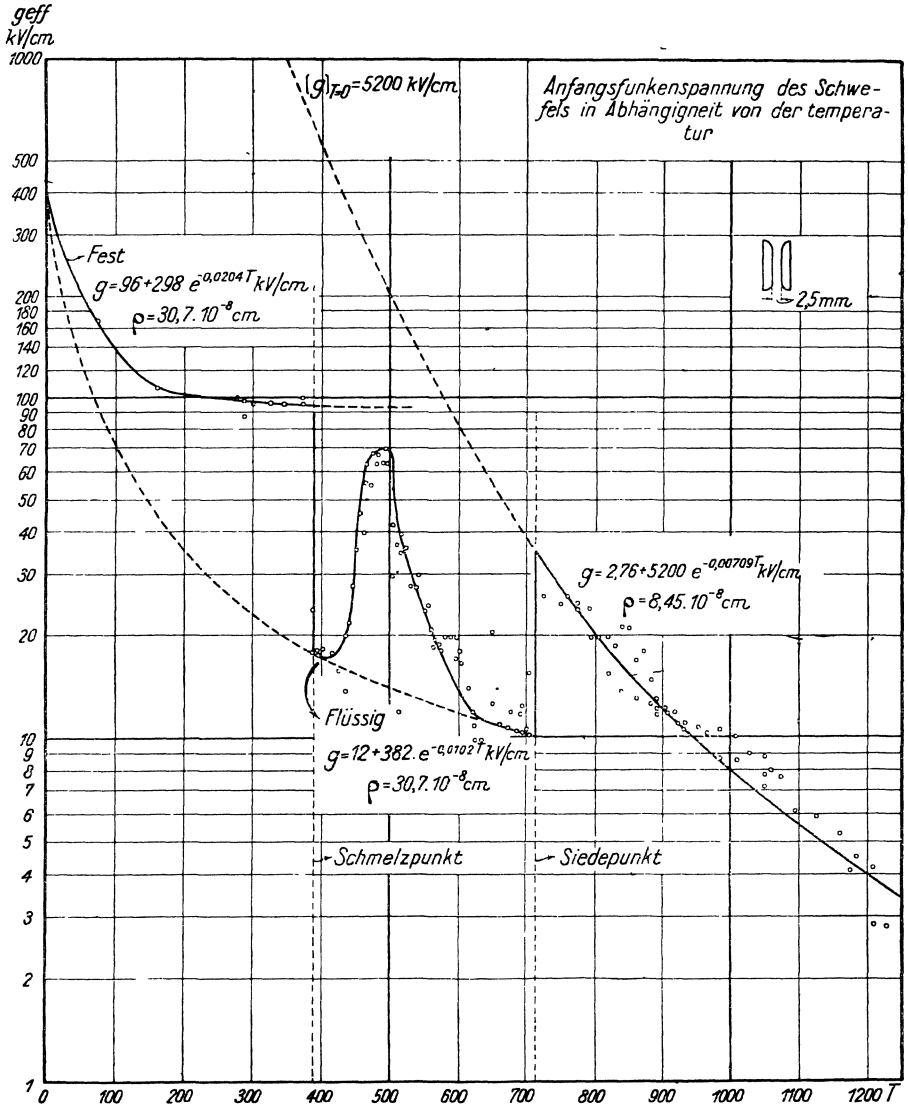


Fig. 6.

für den ersten Fall sind. In diesem Fall aber bleibt die Bewegungsbahn des Elektrons in einer und derselben Ebene und die Bahn selbst hat eine Gestalt, wie sie auf der Fig. 7 angegeben ist.

Die aus den Versuchen erhaltenen Radiuswerte der Schwefel-Elektronenbahnen

sind zweifellos übertrieben, da bei Bestimmung des Ionisierungsgradienten nur die elektrischen Kräfte des Atoms in Betracht gezogen wurden, ohne Rücksichtsnahme auf die elektrischen Kräfte der nächstliegende Atome, welche das Monekül bilden und auf die Kräfte der benachbarten Moleküle, die den Ionisierungsgradienten reduzieren; desgleichen wurden auch die magnetischen Kräfte der sich

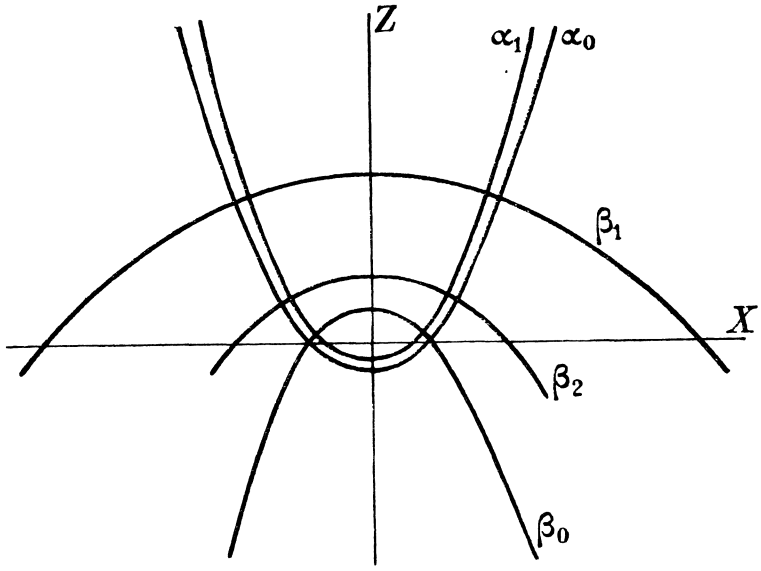


Fig. 7.

bewegenden Elektronen ausser Acht gelassen, welche im Atom unter dem Einfluss des äusseren elektrischen Feldes entstehen können, sogar im Fall, wenn das Atom in magnetischer Hinsicht neutral war, d. h. wenn die magnetischen Wirkungen der Elektronen sich gegenseitig aufheben da diese Kompensation unter dem Einfluss des äusseren elektrischen Feldes Abbruch erleiden kann.

Das Vorhandeusein eines magnetischen Feldes kann zu einer Erniedrigung des Ionisierungsgradienten führen.

Unter Berücksichtigung dieses magnetisches Feldes von der Intensität H in der Richtung des elektrischen Feldes es würde sich der folgende Wert des kritischen Gradienten ergeben:

$$g = \frac{ke}{\varrho^2}\left[(3-2\sqrt{2}) \mp \frac{H\varrho^{\frac{3}{2}}}{c\sqrt{mk}}(1-\sqrt{2})\right],$$

wo c die Lichtgeschwindigkeit ist.

Die Versuche, die mit Transformator-Oel und mit Luft durchgeführt wurden, zeigten, dass es tatsächlich eine Erniedrigung der Durchschlagspannung unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes gebe.

Einige Resultate dieser Versuche sind in der folgenden Tabelle angegeben:

	Magnetisierungs Strom *A*	Feld Intensität *H*	Richtung des magn. Feldes	Verhältnis der Durchschlagspannung mit Magnetfeld zu derselben ohne Magnet *F*
Oel, Magnetisches Wechselstromfeld	7	—	perpendikulär	0,99
	11,2	—	»	0,995
	18,5	—	»	0,96
	10,1	—	Parallel	0,934
Luft, magnetisches Gleichstromfeld	—	10100	Parallel	0,92

Das Auftreten von magnetischen Feldern im inneren eines Atoms unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes, kann durch das Diagramm auf Fig. 8 veranschaulicht werden, auf welchem drei um den Kern symmetrisch rotierende Elektrone in normalem Zustand des Atoms kein Feld im Inneren des Atoms aufweisen, weil sich ihre Felder gegenseitig aufheben. Aber bei einer Verschiebung der Bahnen der Elektronen infolge der Wirkung eines elektrischen Feldes, wird sofort ein magnetisches Feld eintreten, weil sich die Felder nicht mehr gegenseitig kompensieren. Dieses kann auch leicht experimentell geprüft werden mittels Torsionsschwingungen eines Stäbchens aus einem Isolator, welche unter dem Einfluss von parallelen elektrischen und magnetischen Feldern verlaufen. Solche Versuche wurden mit Stäbchen aus Schwefel und Bakelit gemacht und dabei hat sich erwiesen, dass der Schwefel, welcher diamagnetisch ist, strebt unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes paramagnetische Eigenschaften anzunehmen.

Es könnte auch eine Erniedrigung der Durchschlagspannung eintreten durch die katalysierende Wirkung von Substanzen mit hoher Dielektrischer Konstante, so wie z. B. Wasser oder Metalle, wenn ein Molekül eines Isolators in das Feld eines Moleküls von einer solchen Substanz geraten würde. Die erniedrigte Durchschlagspannung von feuchtem Oel, sowie der Einfluss der verschiedenen Metalle auf die Durchschlagspannung von trockenen Flüssigkeiten, der von Prof. W. O. SCHUMANN ([1]) beobachtet wurde, könnte auf solche eine katalysierende Wirkung zurückgeführt werden.

([1]) Prof. W. O. SCHUMANN, E. T. Z. 1927, Heft 48, S. 1779.

Die dielektrischen Verluste können auch auf Elektronenbewegungen zurückgeführt werden und mann könnte dann erwarten, dass sie auch durch magnetische Felder beeinflusst werden können. Theoretisch würde sich die folgende

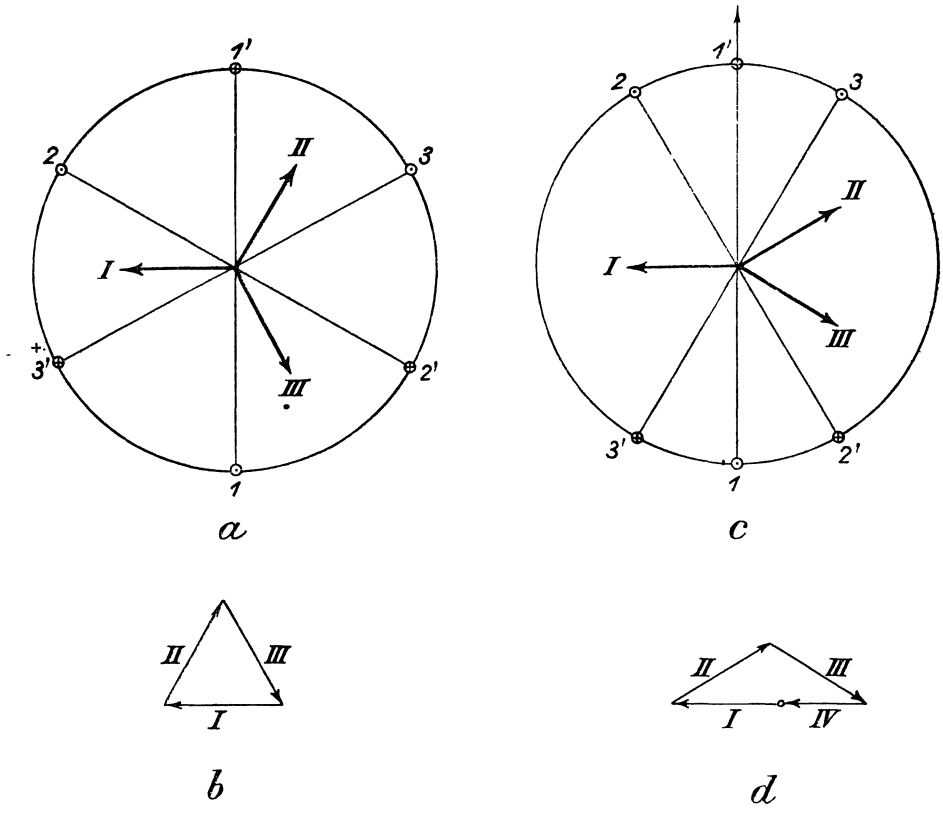


Fig. 8.

Formel für das Verhältnis vom dielektrischen Verlust P in einem Isolator unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes allein zu dem Verlust P_m mit der Wirkung noch eines parallel zum elektrischen Felde verlaufenden magnetischen Feldes ergeben:

$$\frac{P_m}{P} = 1 \mp 2 \frac{\varrho^{\frac{3}{2}} H}{c\sqrt{mk}}.$$

Das Vorzeichen $\mp$ hängt von der Rotationsrichtung des Elektrons relativ zur Richtung des magnetischen Feldes ab. Als Folgerung aus dieser Formel würde es sich ergeben, dass ein Einfluss des magnetischen Feldes auf die dielektrischen Verluste könnte nicht eintreten bei Wechselstrommagnetisierung und dass solche eine Wirkung nur bei Gleichstrommagnetisierung zu beobachten würde.

Es ergab sich aus den Versuchen, die mit einer Scherings Brücke gemacht

wurden, dass es besteht kein merklicher Einfluss der Wechselstrommagnetisierung auf die dielektrischen Verluste, aber dass dagegen der Einfluss einer Gleichstrommagnetisierung sehr gross werden konnte und dass der letzte eine Zunahme ober Abnahme der Verluste kervorrufen konnte, wie es auch aus der theoretischen Formel zu folgern ist.

Es werden in der nachstehenden Tabelle einige Resultate der ausgeführten Versuche angegeben:

Bakelit			Periodenzahl 50	
$g=0{,}33\ kV/mm$				
$H=0$	9750	13300	15500	
$\frac{\operatorname{tg}\delta_{me}}{\operatorname{tg}\delta_e}=1$	1,285	1,418	1,46	
$g=0{,}67\ kV/mm$				
$H=0$	9750	13300	15100	17700
$\frac{\operatorname{tg}\delta_{me}}{\operatorname{tg}\delta_e}=1$	0,968	1,037	1,145	1,13

Glass

$g=0{,}67\ kV/mm$

$H=10500$

$\frac{\operatorname{tg}\delta_{me}}{\operatorname{tg}\delta_e}=0{,}806.$

Die skizzierte Theorie stellt selbstverständlich nur einen ersten Versuch die Vorgänge in Isolatoren bei einem elektrischen Durchschlag derselben durch Elektronenbewegungen zu erklären, und es muss noch viel Arbeit gemacht werden und es müssen noch viele Versuche angestellt werden, um die Theorie zu prüfen, bevor dieselbe alle Vorgänge in den Isolatoren darzustellen erlauben würde. Bei der Aufstellung dieser Theorie bin ich von dem Gedanken ausgegangen, dass das Studium der Elektronenbewegungen, welches zu so guten Ergebnissen in der Optik geführt hatte, auch für die elektrische Festigkeitslehre anwendbar sei. Es liegt nahe zu glauben, dass durch diese Theorie zwei sehr verschiedene und weit auseinander stehende Gebiete der Physik, wie die physikalische Optik mit der Lehre über die Spektrallinien und die elektrische Festigkeitslehre mit einander verknüpft werden können und dass es vielleicht sogar Beziehungen gebe zwischen der elektrischen Festigkeit und der optischen Eigenschaften der Körper.

MARIA SOLE (Cagliari - Italia)

FORMOLE PER LA CALCOLAZIONE DEI FENOMENI NEI FILTRI D'ONDA ELETTRICI

Il Prof. G. GIORGI nelle sue lezioni di Fisica-Matematica (1) e in una recente nota (2) ha mostrato come, sviluppando un metodo che nella sua prima origine credo sia dovuto a K. W. WAGNER, le calcolazioni sui filtri d'onda si possono far dipendere da quelle dei trasduttori percorsi da correnti continue, e quindi ultimamente da matrici di secondo ordine.

Precisamente detti $V_0 I_0$ il voltaggio e l'amperaggio d'entrata in un trasduttore (cioè in un sistema ohmico qualunque intercalato su una linea bifilare) e detti similmente V_1 e I_1 gli stessi elementi in uscita, la relazione lineare che lega fra loro questi elementi si può assumere scritta sotto la forma:

$$(1) \qquad \begin{cases} V_0 = aV_1 + bI_1 \\ I_0 = cV_1 + dI_1 \end{cases}$$

e quindi le proprietà del trasduttore, comunque esso sia composto, dipendono dalla conoscenza della matrice

$$(2) \qquad \Phi = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|$$

la quale conduce a scrivere la (1) sotto la forma simbolica

$$(3) \qquad \frac{(V_0 I_0)}{(V_1 I_1)} = \left\| \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \right\|.$$

La matrice Φ contiene quattro elementi di cui tre soli sono indipendenti poichè a causa del teorema di reciprocità la matrice Φ è unimodulare, cioè vale la relazione

$$ad - bc = 1.$$

---

(1) G. GIORGI: *Lezioni di Fisica-Matematica* tenute nell'anno scolastico 1926-27, Roma. Editore A. Sampaolesi 1927, Capitolo XV, pag. 308 e segg.

(2) G. GIORGI: *Filtri d'onda e linee infinite sotto l'azione di correnti variabili di forma qualunque.* Estratto dai « Rendiconti del Congresso Internazionale di Telegrafia e Telefonia » in Como, sett. 1927: Roma Tip. del Senato 1928.

Similmente si possono considerare queste altre matrici

$$\frac{(V_1,\ I_1)}{(V_0,\ I_0)} = \left\| \begin{matrix} d & -b \\ -c & a \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

$$\frac{(I_0,\ I_1)}{(V_0,\ V_1)} = \left\| \begin{matrix} A & B \\ C & D \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

dove

$$\begin{cases} A = \dfrac{d}{b} & B = \dfrac{cb - ad}{b} = \dfrac{-1}{C} \\ C = \dfrac{1}{b} & D = -\dfrac{a}{b} \end{cases} \tag{6}$$

La prima di esse è pure unimodulare; la seconda non lo è, ma soddisfa invece alla condizione:

$$B + C = 0.$$

Per facilitare l'applicazione pratica di questo metodo, ho calcolato la matrice caratteristica per i trasduttori tipici composti di quattro e di sei elementi, e dò qui i risultati esponendo, affinchè il prospetto sia completo, anche quelli, per quanto elementari e noti, relativi ai trasduttori di tre elementi.

In tutto quanto segue indico con r la resistenza, con g le conduttanze degli elementi medesimi; le une e le altre sono quantità reali se si tratta di elementi ohmici o percorsi da correnti continue; sono quantità complesse (impedenza, o ammettenza) se si tratta di elementi qualunque con induttanza e capacità, percorsi da correnti variabili sinusoidali; in quest'ultimo caso deve intendersi che le r e le g sono funzioni della frequenza.

Nel caso di correnti non periodiche le r e le g divengono operatori funzionali rappresentati mediante espressioni che contengono il simbolo derivatore $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial t}$.

Le formole che qui espongo valgono egualmente in ciascuno di questi casi. Tutte queste formole sono ottenute mediante semplici applicazioni dei teoremi di KIRCHHOFF e delle formole di JEANS (1).

CASO PRIMO - *Trasduttore a triangolo* detto anche trasduttore a Π.

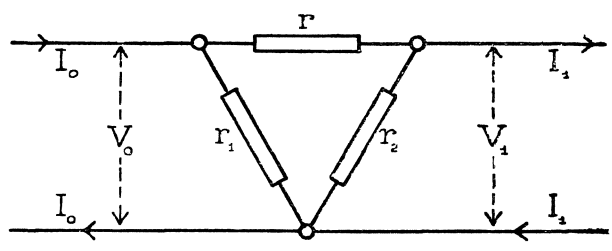


Fig. 1.

(1) J. H. JEANS: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.* Cambridge 1925 Ch. IX, art. 360-364, pp. 324 e segg.

Valgono le formole note

$$(7)\qquad \frac{(V_0,\ I_0)}{(V_1,\ I_1)} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{r+r_2}{r_2} & r \\ \dfrac{r+r_1+r_2}{r_1 r_2} & \dfrac{r+r_1}{r_1} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{g+g_2}{g} & \dfrac{1}{g} \\ \dfrac{gg_1+gg_2+g_1g_2}{g} & \dfrac{g+g_1}{g} \end{matrix} \right\|$$

e le formole che danno i coefficienti della matrice $\dfrac{(I_0,\ I_1)}{(V_0,\ V_1)}$ si ricavano facilmente per mezzo della (6).

CASO SECONDO - *Trasduttore a stella* detto anche trasduttore a *T*.

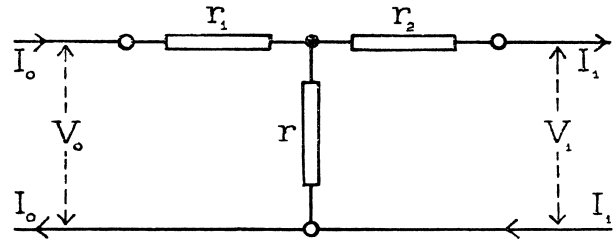


Fig. 2.

Anche qui si hanno formole note

$$(8)\qquad \frac{(V_0,\ I_0)}{(V_1,\ I_1)} = \left\| \begin{matrix} \dfrac{r+r_1}{r} & \dfrac{rr_1+r_1r_2+rr_2}{r} \\ \dfrac{1}{r} & \dfrac{r+r_2}{r} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{g+g_1}{g_1} & \dfrac{g+g_1+g_2}{g_1g_2} \\ g & \dfrac{g+g_2}{g_2} \end{matrix} \right\|$$

e si applicano le (6) per ricavare i coefficienti *A*, *B*, *C*, *D*, come nel caso primo.

CASO TERZO - *Trasduttore a forma di ponte di Wheatstone.*

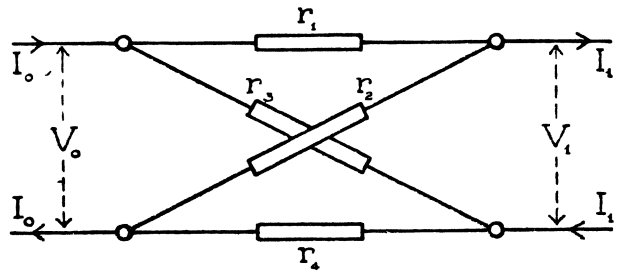


Fig. 3.

Gli elementi della matrice $\dfrac{(V_1,\ I_1)}{(V_0,\ I_0)}$ sono:

$$(9)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{r_1r_2+r_1r_4+r_2r_3+r_3r_4}{r_2r_3-r_1r_4} = \dfrac{g_1g_2+g_2g_3+g_2g_4+g_3g_4}{g_1g_4-g_2g_3} \\ b = \dfrac{r_1r_2r_3+r_1r_2r_4+r_1r_3r_4+r_2r_3r_4}{r_2r_3-r_1r_4} = \dfrac{g_1+g_2+g_3+g_4}{g_1g_4-g_2g_3} \\ c = \dfrac{r_1+r_2+r_3+r_4}{r_2r_3-r_1r_4} = \dfrac{g_1g_2g_3+g_1g_2g_4+g_1g_3g_4+g_2g_3g_4}{g_1g_4-g_2g_3} \\ d = \dfrac{r_1r_3+r_2r_3+r_1r_4+r_2r_4}{r_2r_3-r_1r_4} = \dfrac{g_1g_3+g_1g_4+g_2g_3+g_2g_4}{g_1g_4-g_2g_3} \end{cases}$$

CASO QUARTO - *Trasduttore a sei elementi.*

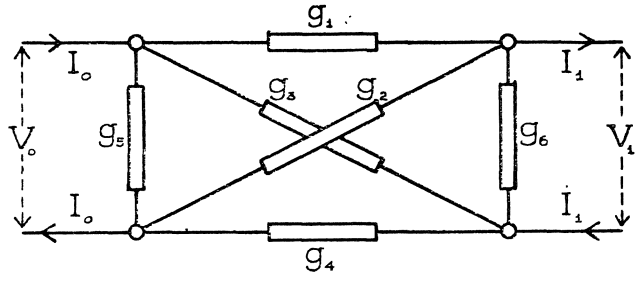


Fig. 4.

Gli elementi della matrice $\frac{(V_1,\ I_1)}{(V_0,\ I_0)}$ sono:

$$(10)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{g_1g_3 + g_1g_4 + g_2g_3 + g_2g_4 + g_3g_6 + g_4g_6 + g_1g_6 + g_2g_6}{g_2g_3 - g_1g_4} \\ b = -\dfrac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4}{g_2g_3 - g_1g_4} \\ c = \dfrac{g_1g_3g_4 + g_1g_4g_5 + g_1g_3g_5 + g_1g_2g_4 + g_2g_3g_4 + g_2g_4g_5 + g_2g_3g_5 + g_1g_4g_6 + g_3g_4g_6 + g_4g_5g_6 + g_3g_5g_6 + g_1g_2g_6 + g_2g_3g_6 + g_2g_5g_6 + g_1g_5g_6 + g_1g_2g_3}{g_2g_3 - g_1g_4} \\ d = -\dfrac{g_1g_4 + g_3g_4 + g_4g_5 + g_3g_5 + g_1g_2 + g_2g_3 + g_2g_5 + g_1g_5}{g_2g_3 - g_1g_4} \end{cases}$$

Ora mostrerò, a titolo d'esempio, come si applicano queste formole a casi singoli.

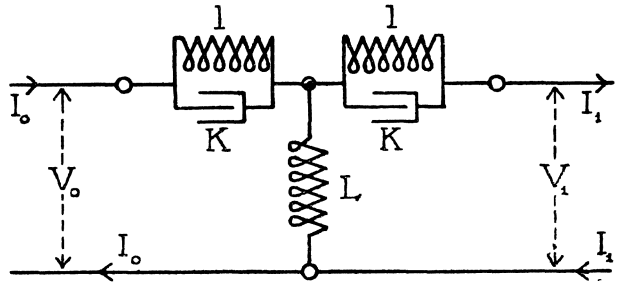


Fig. 5.

Supponiamo d'avere una catena infinita, percorsa da corrente non periodica di trasduttori uguali e simmetrici.

Ogni cellula sia composta così come in figura (1), dove l, L, sono induttanze e le K sono capacità.

---

(1) Questo è il filtro dato da OTTO J. ZOBEL nella sua Memoria: *Theory and design of Uniform and Composite Electric Wave-Filters.* The Bell Sistem Technical Journal, 1923.

Vogliamo calcolare la corrente d'entrata $I_0(t)$ in funzione del voltaggio applicato all'origine $V_0(t)$. L'una funzione dipende funzionalmente dall'altra e si ha in base alle formole (15) e (21) della Nota citata dal prof. G. GIORGI

$$I_0(t) = \sqrt{\frac{c}{b}}\, V_0(t) \tag{11}$$

dove c e b si calcolano con la formola (8) e risultano operatori funzionali contenenti $\Delta = \frac{d}{dt}$ perchè ogni l va contata come una resistenza funzionale $l\Delta$, e ogni K come una conduttanza funzionale $K\Delta$.

Con riferimento alle figure 2 e 5 si avrebbe

$$\begin{cases} r_1 = r_2 = \dfrac{1}{K\Delta + \dfrac{1}{l\Delta}} = \dfrac{l\Delta}{Kl\Delta^2 + 1} \\ r = L\Delta \end{cases} \tag{12}$$

Per conseguenza

$$\begin{cases} b = \dfrac{2lL\Delta^2(Kl\Delta^2 + 1) + l^2\Delta^2}{L\Delta(Kl\Delta^2 + 1)} \\ c = \dfrac{1}{L\Delta} \end{cases} \tag{13}$$

quindi

$$I_0(t) = \sqrt{\frac{c}{b}}\, V_0(t) = \frac{Kl\Delta^2 + 1}{\Delta\sqrt{2l^2LK\Delta^2 + 2Ll + l^2}}\, V_0(t). \tag{14}$$

Applicando artificio analogo a quelli seguiti dal prof. F. SBRANA e dall'ing. S. L. STRANEO, questa formola simbolica si trasforma in integrale esplicito così:

$$I_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dt}\int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \int_0^{\infty} \frac{Kl\omega^2 + 1}{\omega^2\sqrt{2l^2LK\omega^2 + 2lL + l^2}}\, e^{\omega\theta} V_0(t-\theta)\, d\theta. \tag{15}$$

Similmente si procede in ogni altro caso analogo, qualunque sia la composizione della catena.

Sezione Quarta B

R. RISSER (Paris - Francia)

SUR UNE FORMULE DE SURVIE POUR L'ENSEMBLE DE LA VIE HUMAINE

De nombreux actuaires et staticiens se sont préoccupés de représenter entre 0 et ω la survie d'un groupe homogène et aussi celle d'une population; un des plus remarquables actuaires, THIELE, a préconisé pour l'établissement de la table « Hafnia » la formule suivante:

$$\log v_x = P_{S-1}(\sqrt{x}) + b_1 a_1^{\sqrt{x}} + b_2 a_2^{\sqrt{x}} + b_3 a_3^{\sqrt{x}} + \ldots, \tag{1}$$

où v_x désigne le nombre des vivants d'âge x et P_{S-1} est un polynome de degré $(S-1)$ en $\sqrt{x}$.

Ce savant a donné une méthode élégante pour le calcul des constantes (b_i, a_i) dans le cas où le développement $\sum b_i a_i^{\sqrt{x}}$ ne comporte que trois termes, méthode que j'ai eu l'occasion d'exposer succinctement dans une note au congrès international des actuaires de 1927, avant de traiter une question analogue se rattachant d'ailleurs à une formule d'Oltramare et sur laquelle j'apporte aujourd'hui quelques considérations nouvelles.

Je rappelle qu'Oltramare (voir: Bulletin des actuaires français, n.° 60, 1905) préconisait pour le logarithme de la probabilité de vie le développement suivant:

$$\log p_x = a_0 + a_1 c^x + a_2 c^{2x} + \beta_1 c^{-x} + \beta_2 c^{-2x}. \tag{2}$$

Oltramare, dans le cas de la formule (2), ne se préoccupait que des valeurs de c supérieures à 1, alors que l'examen d'une certaine équation en z apparaissant dans son exposé mettait en évidence des valeurs de c supérieures et inférieures à 1; de plus il n'envisageait nullement le mode des calculs dans l'hypothèse où les racines de l'équation $y + \frac{1}{y} = z$ étaient négatives.

J'ai été amené ainsi à montrer que la formule (2) conduisant à trois lois numériques distinctes et non à 6 [1], et ensuite à préconiser une formule différente de celle d'Oltramare, dont les constantes se calculent sans difficulté spéciale.

---

[1] Voir Note aux C. R. de l'Accadémie des Sciences de Paris (1927).

Formons tout d'abord les sommes:

$$\sum_{nk}^{n(k+1)-1} \log p_x = a_k,$$

avec $k=(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ et $n=16$, puis les différences:

$$b_i = a_{i+1} - a_i,$$

avec $i=(0, 1, 2, 3, 4)$, qui s'écrivent en remplaçant c^{16} par y, et en posant:

$$\alpha_1' = \alpha_1 \frac{c^{16}-1}{c-1}; \qquad \alpha_2' = \alpha_2 \frac{c^{32}-1}{c^2-1}; \qquad \beta_1' = \beta_1 \frac{c^{-16}-1}{c^{-1}-1}; \qquad \beta_2' = \beta_2 \frac{c^{-32}-1}{c^{-2}-1};$$

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} b_0 = \alpha_1'(y-1) + \alpha_2'(y^2-1) + \beta_1'(y^{-1}-1) + \beta_2'(y^{-2}-1), \\ b_1 = \alpha_1' y(y-1) + \alpha_2' y^2(y^2-1) + \beta_1' y^{-1}(y^{-1}-1) + \beta_2' y^{-2}(y^{-2}-1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_4 = \alpha_1' y^4(y-1) + \alpha_2' y^8(y^2-1) + \beta_1' y^{-4}(y^{-1}-1) + \beta_2' y^{-8}(y^{-2}-1). \end{cases}$$

Si l'on pose

$$\alpha_1'(y-1) = M, \qquad \alpha_2'(y^2-1) = N,$$
$$\beta_1' \frac{(y-1)}{y} = P, \qquad \beta_2' \frac{(y^2-1)}{y^2} = Q,$$

les équations (I) peuvent être remplacées par les suivantes:

$$\text{(I')} \quad \begin{cases} b_0 = M + N - P - Q, \\ b_1 = My + Ny^2 - Py^{-1} - Qy^{-2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_4 = My^4 + Ny^8 - Py^{-4} - Qy^{-8}. \end{cases}$$

L'élimination de M, N, P, Q conduit à écrire qu'un certain déterminant est nul, déterminant dont le développement n'est autre que l'équation réciproque:

$$b_2\left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) - (b_1+b_3)\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + (b_2 - b_1 - b_3)\left(y + \frac{1}{y}\right) + (b_0 + 2b_2 + b_4) = 0.$$

Après la substitution $y + \frac{1}{y} = z$, on est conduit à résoudre l'équation

$$z^3 - \frac{(b_1+b_3)}{b_2} z^2 - \frac{(b_1+2b_2+b_3)}{b_2} z + \frac{(b_0+2b_1+2b_2+2b_3+b_4)}{b_2} = 0.$$

Connaissant z_i, on peut calculer les valeurs de y et de c afférentes à z_i, et en remontant les quantités α_0, α_1, α_2, β_1, β_2 en opérant ainsi qu'il suit.

Désignons par z_1, z_2, z_3 les racines de l'équation en z et soient:

$$\begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & c_1, & c_2 \\ y_3, & y_4, & c_3, & c_4 \\ y_5, & y_6, & c_5, & c_6 \end{array}$$

les systèmes de valeurs (y, c) qui leur correspondent respectivement.

Soit un système de valeurs (z, y, c), et formons en partant des équations (I') les quantités $b_i - b_{i-1}y = L_i$, avec $i = (1, 2, 3)$ qui s'écrivent

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} L_1 = N' + P' + Q' \\ L_2 = N'y^2 + P'y^{-1} + Q'y^{-2} \\ L_3 = N'y^4 + P'y^{-2} + Q'y^{-4}, \end{cases}$$

après avoir posé

$$Ny(y-1) = N', \qquad P\frac{(y^2-1)}{y} = P', \qquad Q\frac{(y^3-1)}{y^2} = Q'.$$

Du système (II), on déduit les équations

$$L_2 - L_1y^2 = -P'\frac{(y^3-1)}{y} - Q'\frac{(y^4-1)}{y^2},$$
$$L_3 - L_2y^2 = -P'\frac{(y^3-1)}{y^2} - Q'\frac{(y^4-1)}{y^4},$$

qui fournissent les valeurs de P' et de Q' ; on évalue N' grâce à la première équation du système (II). On calcule ensuite N, P, Q et M et enfin a_0.

Supposons d'nne part que l'équation en z ait deux racines positives et une racine négative, et d'autre part que les quantités (y_1, y_2, y_3, y_4) soient positives, et que y_5 et y_6 soient négatives, ainsi que nous l'avons constaté dans un exemple tiré de l'examen des tables de mortalité pour le royaume des Pays Bas (*Observations de la période 1880-1890*, Étude du docteur VAN PESCH) (voir également note du bulletin n.° 131 des actuaires français, 1927).

Je vais montrer que les systèmes y_1 et y_3 conduisent à des fonctions interpolatrices identiques à celles déduites des systèmes y_2 et y_4 ; quant aux systèmes y_5 et y_6, ils doivent être combinés pour faire apparaître la solution réelle qui introduit le produit d'exponentielles par cos $(h\pi x + \varphi)$.

Cas des racines positives (y_1, y_2) déduites de l'équation $y + \frac{1}{y} = z_1$.

Soit

$$a_0 + a_1c_1^x + a_2c_1^{2x} + \beta_1c_1^{-x} + \beta_2c_2^{-2x},$$

la fonction interpolatrice relative au système (y_1, c_1), et

$$A_0 + A_1c_2^x + A_2c_2^{2x} + B_1c_2^{-x} + B_2c_2^{-2x},$$

celle afférente au second système (y_2, c_2), qui peut encore s'écrire :

$$A_0 + A_1c_1^{-x} + A_2c_1^{-2x} + B_1c_1^x + B_2c_1^{2x}.$$

On remarque tout d'abord que la substitution de $\frac{1}{y}$ à y et des quantités

$$-P, \quad -Q, \quad M, \quad N$$

à

$$M, \quad N, \quad -P, \quad -Q$$

ne modifie en rien les 4 dernières équations du système (I'); il s'ensuit que l'on a:

$$A_1'(y_2-1)=-P,$$

d'où

$$A_1'=-\frac{P}{y_2-1}=\frac{Py_1}{y_1-1}=\beta_1',$$

et

$$A_2'(y_2^2-1)=Q,$$

d'où

$$A_2=\frac{Qy_1^2}{y_1^2-1}=\beta_2'.$$

On verrait de même que $B_1'=\alpha_1'$, et $B_2'=\alpha_2'$.

Or l'équation

$$A_2'=A_2\frac{y_2^2-1}{c_2^2-1}$$

peut encore s'écrire:

$$A_2'=\beta_2'=A_2\frac{y_1^{-2}-1}{c_1^{-2}-1},$$

d'où l'on déduit $A_2=\beta_2$.

On trouve par un procédé analogue que

$$A_1=\beta_1, \qquad B_1=\alpha_1 \qquad \text{et} \qquad B_2=\alpha_2.$$

Si l'on se reporte à la première équation du système (I), on constate immédiatement — eu égard aux relations entre les A_i' et β_i', les B_i' et α_i' — que $A_0=\alpha_0$, et enfin que la fonction interpolatrice afférente à (y_2, c_2) n'est autre que:

$$\alpha_0+\alpha_1c_1^x+\alpha_2c_1^{2x}+\beta_1c_1^{-x}+\beta_2c_1^{-2x}.$$

Cette observation, qui ne semble point avoir été signalée jusqu'ici, offre l'avantage de diminuer considérablement la tâche du calculateur lors de l'ajustement, puis qu'il n'a plus que deux séries de taux à évaluer au lieu de 4, s'il y a deux racines positives z_1 et z_2 donnant des valeurs (y_1, y_2) (y_3, y_4) positives.

Cas des racines négatives y_5, y_6 déduits de l'équation $y+\frac{1}{y}=z_3$.

Eu égard au nombre n des sommations effectuées pour le calcul des α_i, on voit que l'on a

$$c_5^n=y_5, \qquad c_6^n=y_6 \qquad \text{avec} \qquad y_5y_6=1,$$

et

$$c_5=|y_5|^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{(2K+1)}{n}\pi+i\sin\frac{(2K+1)}{n}\pi\right\},$$

où l'on fera $K=0$,

$$c_5c_6=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n},$$

et par suite

$$c_6 = |y_5|^{-\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}\right);$$

c_5 et $\frac{1}{c_6}$ sont donc imaginaires conjugués:

Soit

$$a_0 + a_1 c_5^x + a_2 c_5^{2x} + \beta_1 c_5^{-x} + \beta_2 c_5^{-2x},$$

la solution correspondate à z_3, y_5, c_5,

$$A_0 + A_1 c_6^x + A_2 c_6^{2x} + B_1 c_6^{-x} + B_2 c_6^{-2x},$$

celle relative au système z_3, y_6, c_6, et faisons deplus remarquer que les a_i et A_i sont déterminés au moyen des relations suivantes:

$$a_1'(y_5-1)=M; \quad a_2'(y_5^2-1)=N; \quad \beta_1'\frac{(y_5-1)}{y}=P; \quad \beta_1^2\frac{(y_5^2-1)}{y_5^2}=Q;$$

$$A_1'(y_6-1)=-P; \quad A_2'(y_6^2-1)=-Q; \quad B_1'\frac{(y_6-1)}{y_6}=-M; \quad B_2'\frac{(y_6^2-1)}{y_6^2}=-N;$$

si dans ces dernières équations l'on tient compte de ce que $y_5 y_6 = 1$, on voit de suite que l'on a

$$A_1' = \beta_1', \qquad A_2' = \beta_2', \qquad B_1' = a_1', \qquad B_2' = a_2'.$$

Procédons maintenant au calcul des constantes (A_i, B_i). On sait que l'on a

$$A_1' = A_1\frac{y_6-1}{c_6-1},$$

d'où

$$A_1 = \beta_1'\frac{c_6-1}{y_6-1}, \qquad c_6 = \varrho^{-1}e^{\frac{i\pi}{n}}, \qquad \text{avec } \varrho = |y_5|^{\frac{1}{n}};$$

le terme $A_1 c_6^x$ peut donc s'écrire:

$$\beta_1'\frac{c_6-1}{y_6-1}\varrho^{-x}e^{\frac{i\pi x}{n}},$$

et le terme correspondant

$$\beta_1 c_5^{-x} = \beta_1'\frac{c_5^{-1}-1}{y_5^{-1}-1} = \beta_1'\frac{c_5^{-1}-1}{y_6-1}\varrho^{-x}e^{-\frac{i\pi x}{n}}.$$

Les quantités (c_6-1) et $(c_5^{-1}-1)$ étant conjuguées, on voit que si l'on pose

$$c_6 - 1 = \lambda e^{i\mu},$$

on trouve que l'ensemble $A_1 c_6^x + \beta_1 c_5^{-x}$, qui est égal à

$$\frac{\beta_1'\varrho^{-x}}{y_6-1}\left[(c_6-1)e^{\frac{i\pi x}{n}} + (c_5^{-1}-1)e^{-\frac{i\pi x}{n}}\right],$$

peut être remplacé par

$$\frac{2\beta_1'\lambda\varrho^{-x}}{y_6-1}\cos\left(\frac{\pi x}{n}+\mu\right).$$

Les quantités λ et μ se calculent facilement au moyen de la relation

$$\varrho^{-1}e^{\frac{i\pi}{n}}=\lambda e^{i\mu}.$$

On grouperait d'une manière analogue les termes $a_1c_5^x$ et $B_1c_6^{-x}$ qui ont respectivement pour valeur

$$a_1'\cdot\frac{c_5-1}{y_5-1}\cdot c_5^x=a_1'\frac{c_5-1}{y_5-1}\varrho^x e^{\frac{i\pi x}{n}},$$

et

$$a_1'\cdot\frac{c_6^{-1}-1}{y_6^{-1}-1}\cdot c_6^x=a_1'\frac{c_6^{-1}-1}{y_5-1}\varrho^x e^{-\frac{i\pi x}{n}};$$

comme (c_5-1) et $(c_6^{-1}-1)$ sont des quantités imaginaires conjuguées, on remarque de suite que l'ensemble $(a_1c_5^x+B_1c_6^{-x})$ a pour valeur

$$\frac{2a_1'\varrho^x}{y_5-1}\cdot\lambda'\cos\left(\frac{\pi x}{n}+\mu'\right).$$

En définitive, la solution résultant de l'emploi des valeurs c_5 et c_6 conduit à la fonction interpolatrice

$$a_0+\frac{a_1'\varrho^x}{y_5-1}\cdot\lambda'\cos\left(\frac{\pi x}{n}+\mu'\right)+\frac{\beta_1'\lambda\varrho^{-x}}{y_6-1}\cos\left(\frac{\pi x}{n}+\mu\right)+$$
$$+\frac{a_2'\lambda''\varrho^{2x}}{y_5^2-1}\cos\left(\frac{2\pi x}{n}+\mu''\right)+\frac{\beta_2'\lambda'''\varrho^{-2x}}{y_6^2-1}\cos\left(\frac{2\pi x}{n}+\mu'''\right),$$

puisque A_0 et a_0 sont identiques.

De l'examen des calculs effectués, il résulte qu'il y aurant lieu de substituer à la formule préconisée par Oltramare, une formule de l'un des types suivants:

$$\log p_x=P_n(x)+a_1c^x+\beta_1c^{-x},$$
$$\log p_x=P_n(x)+a_1c^x+a_2c^{2x}+\beta_1c^{-x}+\beta_2c^{-2x},$$

où $P_n(x)$ serait un polynome du second degré.

Les calculs pourraient être conduits dáns le cas de $n=2$, en évaluant

$$\Delta^3\log p_0,\quad \Delta^3\log p_3,\ldots,\quad \Delta^3\log p_{X_0+3},$$

si les résultats de l'observation peuvent être utilisés jusqu'à l'âge X_0+3; de ces différences, on déduira, en utilisant le procédé exposé au cours de cet essai, la constante c et les quantités (a_1, β_1) (ou c et a_1, a_2, β_1, β_2).

Ceci étant, il resterait à déterminer les constantes du polynôme

$$P_2=\lambda_0+\lambda_1x+\lambda_2x^2.$$

On répartira à cet effet les observations en deux grands groupes d'âges:

Premier groupe

0,	10,	20,	30,	40
2,	12,	22,	32,	42
.	.	.	.	.
8,	18,	28,	38,	48

,

Seconde groupe

10,	25,	40,	55,	70
14,	29,	44,	59,	74
.	.	.	.	.
26,	41,	56,	71,	86

,

et l'on déterminera les valeurs des constantes λ en recourant à la méthode de Tchebycheff, qui dans le cas d'observations régulièrement échelonnées s'adapte fort bien.

R. RISSER (Paris - Francia)

SUR LA POSSIBILITÉ DE REPRÉSENTATION D'UNE POPULATION PAR LA LOI DE MAKEHAM

Dans une étude antérieure, j'ai exposé le mode de calcul des constantes figurant dans les formules de survie, et celui des modules de précision caractérisant ces constantes; je vais rechercher maintenant si la formule de Makeham qui s'adapte, à partir de 23 à 25 ans, d'une manière intéressante, à la représentation, de la mortalité des assurés des compagnies d'assurances, est susceptible de figurer avec une certaine précision la mortalité des habitants d'un pays.

A la loi de Makeham donnant le nombre v_x des têtes d'âge x

$$v_x = k s^x g^{c^x}, \tag{1}$$

correspond pour le logarithme de la probabilité de vie l'expression suivante:

$$\log p_x = \alpha + \beta c^x, \tag{1'}$$

dans laquelle $\alpha = \log s$, et $\beta = (c-1)\log g$.

Le calcul des constantes de la loi de Makeham peut s'effectuer au moyen de la méthode de King et Hardy qui consiste à utiliser les logarithmes de v_x depuis l'âge x_0 jusqu'à l'âge X_0, X_0 étant l'âge au dessus duquel les observations ne sont plus en nombre suffisant pour réaliser une précision notable dans l'évaluation du taux de mortalité et par suite de la probabilité de vie.

Grâce aux sommes

$$\sum_{x+at}^{x+(a+1)t-1} \log v_x,$$

et aux différences

$$\Delta \sum_{x+bt}^{x+(b+1)t-1} \log v_x, \qquad \Delta^2 \sum_{x+ct}^{x+(c+1)t-1} \log v_x$$

où l'on fait respectivement $a = (0, 1, 2, 3)$, $b = (0, 1, 2)$, $c = (0, 1)$, on calcule c, g, s à la condition de se donner l'intervalle t.

En prenant pour v_x les nombres de vivants tirés de la table de mortalité de la population masculine (année moyenne 1899-1903), [voir tableau II, pag. 48 de la communication de M. MARCH sur les tables de mortalité de la population

française, Séance du 20 Juin 1906 de la Société de Statistique de Paris], et choisissant 23 ans pour l'âge initial et 18 ans pour l'intervalle t, on a trouvé:

$$c=1{,}098.512\,; \qquad g=0{,}999.123.26\,; \qquad s=0{,}992.743.2\,; \qquad k=85.417.$$

Partant des valeurs ainsi calculées pour c, g, s et k, on a calculé le nombre v_x' des vivants et on les a comparé aux v_x; on a deplus formé les écarts $(v_x'-v_x)$.

On peut résumer les indications de ce tableau ainsi qu'il suit:

Groupes d'âges	Écarts ε	
	positifs	négatifs
23-29	1.696	. . . . .
30-47	. . . . .	2.210
48-56	662	. . . . .
57-72	. . . . .	1.427
73-89	7.176	. . . . .
90-103	. . . . .	501
	9.534	9.138

$$\sum_{23}^{103} v_x = 2.812.462$$

$$\sum \varepsilon = 5.396$$

$$\frac{\sum \varepsilon}{\sum v_x} = 0{,}00192 \text{ environ}$$

$$\frac{\sum |\varepsilon|}{\sum v_x} = 0{,}00486 \text{ environ.}$$

On constate l'existence de 6 zônes particulières et de 5 points de rencontre de la courbe des v_x' avec la courbe des v_x résultant de l'ajustement effectué par M. MARCH; alorsque les écarts pris en valeur absolue sont relativement peu élevés dans les quatre premières zônes, ils deviennent importants dans les zônes 73-89, 90-103.

On peut se demander dès lors, si ces anomalies peuvent être attribuées exclusivement à l'impossibilité de la représentation analytique du nombre des vivants v_x d'une population par la loi de Makeham, ou si elles sont une conséquence d'erreurs systématiques que l'on n'a pas pu déceler au moment où l'on a procédé aux ajustements préparatoires des vivants et des décédés, avant d'effectuer le calcul des taux de risque.

Du logarithme de la probabilité de vie d'après la loi de Makeham.

Nous allons nous préoccuper exclusivement du logarithme de la probabilité de vie, et rechercher l'âge à partir du quel il y a lieu d'utiliser normalement les documents statistiques, a près avoir eusoin de comparer deux types classiques de formules donnant le logarithme de la probabilité de vie.

Soit p_x' la probabilité déduite de la table et p_x la probabilité ajustée; une valeur c_0 approchée de c se calcule au moyen de la formule:

$$(2) \qquad c_0^n = \frac{\sum_{a+n}^{a+2n-1} \log p_x' - \sum_{a+2n}^{a+3n-1} \log p_x'}{\sum_{a}^{a+n-1} \log p_x' - \sum_{a+n}^{a+2n-1} \log p_x'},$$

en prenant n égal au tiers du nombre des âges considérés. Quant aux valeurs approchées α_0 et β_0 de α et β, elles se déterminent en recourant aux formules classiques:

$$(3) \qquad \beta_0 = (c_0 - 1) \frac{\sum_{a+n}^{a+2n-1} \log p_x' - \sum_{a}^{a+n-1} \log p_x'}{c_0^a (c_0^n - 1)^2},$$

$$(4) \qquad \alpha_0 = \frac{\sum_{a}^{a+n-1} \log p_x' - c_0^a (c_0^n - 1) \log g_0}{n}.$$

La valeur exacte du logarithme de la probabilité de vie est égale à

$$\log p_x = \log (p_x' + \varepsilon_x) = \log p_x' + \log \left(1 + \frac{\varepsilon_x}{p_x'}\right);$$

il s'ensuit que l'on peut prendre pour valeur approchée de $\log p_x$ l'expression

$$\log p_x' + M \frac{\varepsilon_x}{p_x'}, \text{ avec } M = \log e.$$

La réciproque du théorème de BERNOUILLI nous montre que la probabilité pour que l'erreur attachée à $(q_x' = 1 - p_x')$ soit compris entre ε_x et $(\varepsilon_x + d\varepsilon_x)$ est égale à

$$\frac{h_x}{\sqrt{\pi}} e^{-h_x^2 \varepsilon_x^2} d\varepsilon_x,$$

avec $h_x = \sqrt{\frac{v_x}{2 p_x q_x}}$, et que le module de précision s'attachant à $\log p_x'$ est égal à:

$$k_x = \frac{p_x' h_x}{M} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{v_x p_x'}{2 q_x'}}.$$

Ceci étant, nous avons évalué le module de précision de c, en nous référant à une note de M. GALBRUN (*Sur l'application de la méthode des moindres carrés au calcul des trois constantes de la loi de Makeham.* Bulletin des actuaires français, 1903); on voit ainsi que si H_x, H_{x+n}, H_{x+2n} désignent respectivement les poids de

$$\lambda_x^{(n)} = \sum_{x+n}^{x+n-1} \lambda_x, \qquad \lambda_{x+n}^{(n)} = \sum_{x+2n}^{x+2n-1} \lambda_x, \qquad \lambda_{x+2n}^{(n)} = \sum_{x+2n}^{x+3n-1} \lambda_x, \text{ avec } \lambda_x = \log p_x',$$

que l'on a pour valeur du poids H_c relatif à c_0 :

$$\frac{1}{H_c^2} = \frac{c_0^2}{n^2 C_0^2 [\lambda_x^{(n)} - \lambda_{x+n}^{(n)}]} \left[\frac{C_0^2}{H_x^2} + \frac{(C_0+1)^2}{H_{x+n}^2} + \frac{1}{H_{x+2n}^2} \right], \quad \text{avec } C_0 = c_0^n,$$

après avoir admis que les erreurs sur les λ_x suivant la loi de Gauss.

Il y a lieu de remarquer que le calcul ne fournit qu'une valeur approchée de c_0, et qu'il est indispensable de rechercher la correction δc_0 ; de plus, si l'on revient à la formule (2) qui donne c_0^n, on voit qu'elle se ramène à

$$\frac{2 \log V_{x_0+2n} - \log V_{x_0+n} - \log V_{x_0+3n}}{2 \log V_{x_0+n} - \log V_{x_0} - \log V_{x_0+2n}},$$

toutes les fois que l'on a procédé à un ajustement approché de la table de survie, et que cette formule ne fait alors intervenir que quatre valeurs de $\log V_x$

$$\log (V_{x_0}, V_{x_0+n}, V_{x_0+2n}, V_{x_0+3n}),$$

alors que la formule initiale de KING et HARDY, en introduit un multiple de 4 correspondant à l'intervalle (x_0, X_0) où l'on opère.

Si par exemple, l'on considère l'ensemble des valeurs de V_x de 23 à 86 ans inclus, ou pourra utiliser pour le calcul de c la méthode préconisée au début, enfaisant $t=16$, et introduire ainsi les logarithmes de V_x (avec $x=23, 24, \ldots, 86$), ou encore la formule (2) avec les logarithmes de

$$\begin{array}{cccc} V_{23}, & V_{39}, & V_{55}, & V_{71} \\ V_{24}, & V_{40}, & V_{56}, & V_{72} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ V_{38}, & V_{54}, & V_{70}, & V_{86} \end{array}$$

alors même qu'un ajustement approché aurait été effectué ; en suivant alors la méthode exposée ci-dessus, on fera intervenir tout l'ensemble des données expérimentaler, et l'on sera alors conduit à 16 valeurs de c_0, dont on prendra la moyenne avec poids H_{c_0}.

La comparaison des 16 valeurs de c_0 à la valeur la plus probable c', mettra en évidence des écarts qui doivent s'accorder avec la loi de Gauss, si la formule de Makeham répond à la question à partir de l'âge x_0.

On peut préconiser pour le calcul de la constante c une autre méthode basée sur l'emploi de la formule

$$c_x^n = \frac{\log p'_{x+n} - \log p'_{x+2n}}{\log p_x' - \log p'_{x+n}}; \tag{5}$$

de plus, l'application de la méthode classique de la théorie des erreurs qui nous a permis de calculer le poids H_c de la valeur c_0 (formule (2)), donne pour le carré de poids K_x, attaché à la valeur c_x déduit de la formule (5), la valeur

$$\frac{1}{K_x^2} = \frac{c_x^2}{n^2 C_x^2 (\lambda_c - \lambda_{x+n})} \left[\frac{C_x^2}{k_x^2} + \frac{(C_x+1)^2}{k_{x+n}^2} + \frac{1}{k_{x+2n}^2} \right],$$

avec $\lambda_x = \log p'_x$, $\lambda_{x+n} = \log p'_{x+n}$ et $C_x = c_x^n$ (k_x, k_{x+n}, k_{x+2n} désignant respectivement les poids de $\log p_x'$, $\log p'_{x+n}$, $\log p'_{x+2n}$).

Aux n' valeurs de c_x, on fait correspondre la valeur la plus probable

$$c' = \frac{\sum_1^{n'} K_x^2 c_x}{\sum_1^{n'} K_x^2},$$

dont le poids K_c est défini par l'expression

$$K_c^2 = \sum_1^{n'} K_x^2.$$

Si l'on prend pour n' la tiers des probabilités de vie, on démontre que la valeur de K_c est un peu supérieure à celle de H_c.

L'étude des différences $c' - c_x = \omega_x$ permet de voir si les diverses valeurs de c_x peuvent être assimilées à des mesures d'une même grandeur, mesures résultant d'expérience différentes; si elles répondent à cette condition d'une manière absolue, les écarts apparents ω_x doivent satisfaire à la relation classique

$$\sqrt{\frac{\sum_1^{n'} K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Toutes les fois que le radical en question différera peu de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, on pourra considérer les expériences comme acceptables; dans le cas contraire, on devra les rejeter et rechercher si en partant d'un âge plus élevé que x_0 (23 dans le cas actuel), la condition demandée se trouvera réalisée.

Dans une étude parue dans le « Bulletin des actuaires français » (n.° 128, 1927), j'ai fait une application des formules (2) et (5), en prenant $n = 18$, et constaté que l'emploi de la formule (6) donnait avec $n' = 30$:

$$c' = 1{,}104.61, \qquad K_c = 1.707,$$

et que la quantité

$$\sqrt{\frac{\sum K_x^2 \omega_x^2}{29}},$$

avait pour valeur 2,841 environ, soit un chiffre quadruple de celui attendu $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

On est donc conduit à penser, ou bien que la loi de Makeham ne vaut, ou encore que l'introduction d'erreurs systématiques dans le voisinage de $x = 23$ fausse complétement les résultats.

J'ai ainsi été amené pour trancher cette difficulté, à faire d'une part une série d'essais en donnant à l'intervalle n les valeurs (13 14,...., 23), et à l'âge

initial des valeurs supérieures à 23, et d'autre part à voir si le critère du calcul des probabilités invoqué ci dessus ne se trouve jamais mis en défaut lorsque l'on se trouve en présence de documents statistiques d'une assez grande précision.

L'emploi de la formule (5) adaptée aux taux de mortalité relatifs à l'année 1900 (voir p. 62, tome IV, *Recensement de 1901 de la population française*), en donnant à n les valeurs (13,...., 23) et en adoptant des zônes d'action telles que toutes les valeurs de p_x' de x_0 à X_0 fussent utilisées, a permis d'établir un tableau des valeurs de c', K_c et de $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$. Il résulte de l'examen de ces dernières quantités que la répartition des valeurs de c_x autour de la moyenne c' avec poids n'est pas en conformité avec la loi de Gauss toutes les fois que l'on considère comme observation initiale celle qui est relative à l'âge 23, et cela pour toutes les valeurs de l'intervalle n (de 13 à 23 inclus); toutes les fois que l'âge initial est près égal à 33 ou 35, et que l'intervalle prend l'une des valeurs 18, 19,...., 23, on constate que la quantité

$$\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$$

est inférieure à 1, sauf pour $n=18$ dans les zônes d'action 33-52 et 35-49.

L'emploi de $n=18$, dans la zône (35-52) avec ($n'=18$), conduit à la valeur 1,105.66 pour c' et à 0,697 environ pour $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$.

Comme la zône générale où les renseignements semblent avoir été recueillis avec précision s'étend de l'âge 35 à l'âge 88, *on remarque que l'intervalle* 18 *correspond au tiers de la zône générale, et l'on trouve ici une justification de son emploi.*

Pas plus l'utilisation de la méthode graphique conjuguée avec la méthode d'ajustement de Sprague, que celle des méthodes classiques d'ajustement mécanique des nombres de vivants et de décédés n'ont permis d'annihiler les erreurs accidentelles et systématiques qui se sont glissées dans le chiffrage des nombres de vivants et de décédés aux différents âges.

Si l'on s'était trouvé en présence de documents statistiques établis et recueillis avec le plus grand soin, on n'aurait pas vu apparaître des écarts sensibles entre $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}$; c'est ce qu'a mis nettement en évidence l'étude des documents résultant des observations faites aux Pays-Bas, durant la période 1880-1890 qui ont permis l'établissement des table de mortalité des Pays-Bas (1).

---

(1) Voir tables de mortalité pour le royaume des Pays-Bas construites par le docteur VAN PESCH, grâce aux résultats des recensements des 31 décembre 1879 et 1889, et à ceux de la statistique de l'état civil donnant pour chacune des années intermédiaires de la période

Nous donnons ci dessous à titre indicatif les résultats déduits de cette documentation.

Utilisation des documents statistiques efférents à l'année	Valeur de l'intervalle (n)	Zône d'action	Valeur de n'	Valeur de c'	Valeur de $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$
1880	18	23-52 inclus	30	1,09265	0,8976
1880	d^0	23-49 »	27	1,09454	0,7274
1881	d^0	23-52 inclus	30	1,09442	0,6808
1881	d^0	23-49 »	27	1,09567	0,6162
1882	d^0	23-52 inclus	30	1,09283	0,9579
1883	d^0	23-52 inclus	30	1,09771	0,6576
1884	d^0	23-52 inclus	30	1,09402	0,6687
1885	d^0	23-52 inclus	30	1,09516	1,0395
1886	d^0	23-52 inclus	30	1,09472	0,6655
1887	d^0	23-52 inclus	30	1,09341	0,9365
1888	d^0	23-52 inclus	30	1,09654	0,6303

L'examen de ce tableau montre que de toutes les valeurs de $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$, la plus rapprochée de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est celle qui correspond à l'année 1880 et à la zône (23-49) d'utilisation des taux bruts de mortalité; cela tient uniquement à ce que les taux de mortalité en 1880 sont évalués en partant directement des résultats du recensement, alors que ceux correspondant aux années suivantes (1881,...., 1888) font intervenir l'influence des mouvements migratoires qui ne sont pas toujour déterminés d'une manière précise.

Si la loi de Makeham ne s'adaptait pas à la représentation des survivants

---

1879-1889 le nombre des naissances classées par sexe et le nombre des décés classés par sexe suivant l'année d'âge et l'année de naissance, en tenant compte des mouvements migratoires.

d'un âge supérieur ou égal à 23 de la population d'un territoire, alors qu'elle représente avec une assez grande approximation la survie des têtes soumises à l'assurance vie et à l'assurance décés au sein des grandes compagnies d'assurance, il est évident que le critère invoqué $\sqrt{\frac{\Sigma K_x^2 \omega_x^2}{n'-1}}$ se trouverait complétement en défaut: nous constatons que le critère se trouve vérifié et l'on est par suite conduit à dire que la loi de Makeham ou les lois plus générales du type de M. QUIQUET peuvent s'adapter à la représentation de la population de 23 ans et plus; c'est pour cette raison que nous avons tenté l'ajustement de la table P^M, en utilisant les chiffres relatifs à l'année 1900, et en partant de l'âge 33.

Application de la formule de Makeham.

L'emploi des formules (2), (3), (4) aux valeur de p_x' déduits des résultats statistiques du recensement du 24 mars 1901 (têtes de sexe masculin, année 1900; voir tome IV), nous a fourni en première approximation les résultats suivants:

$$c_0 = 1{,}105.267.7\,; \qquad \beta_0 = -0{,}000.026.438.5\,; \qquad \alpha_0 = \bar{1}{,}996.093.$$

A la suite de trois séries d'approximation successives basées sur l'emploi des multiplicateurs (voir Bulletin I. A. F., n.° 128) nous avons déterminé les valeurs de α, β, c, en suite celles de s, g et enfin de la constante K de la formule de Makcham en prenant $v_{33} = 277.530$ (nombre relatif à l'année 1900).

Il nous a été possible, après avoir effectué des calculs relativement simples, d'établir un tableau, donnant pour l'année 1900 et pour chaque âge, à partir de 33 ans jusqu'à 90 ans:

le nombre de têtes soumises au risque, le taux brut de mortalité q_x, le taux ajusté q_x' (probabilité annuelle), la valeur de

$$k_x = \sqrt{\frac{v_x}{2 p_x' q_x'}} \qquad \text{(avec } p_x' = 1 - q_x'\text{)};$$

le nombre des décés $D_{1,x}$ utilisé pour le calcul du taux brut;

le nombre $D_{2,x}$ calculé au moyen du taux q_x';

les différences $(D_{1,x} - D_{2,x})$, et enfin les quantités $\varepsilon_{1,x} = \frac{2}{k_x}$.

Comme l'on a admis d'une part que de 1898 à 1902, le nombre total des décés survenus après 85 ans se répartissait proportionnellement aux nombres relevés en 1903 et 1904, et constaté d'autre part que les nombres de vivants d'âge élevé étaient entachés d'erreurs systématiques, il nous a été possible de n'accorder qu'une valeur toute relative aux résultats correspondant à ces mêmes âges; aussi dans notre comparaison, avons nous laissé de côté les chiffres concernant les têtes de plus de 90 ans.

J'ai ainsi remarqué que les écarts $(q_x' - q_x)$ au lieu de présenter de nom-

breuses variations n'en manifestent qu'un petit nombre, ainsi que cela résulte du tableau ci dessus visé; j'ai de plus constaté que ces écarts se répartissent dans les zônes 33-38, 39-52, 53-69, 70-80, 81-90, et qu'ils sont dans ces zônes respectivement +, −, +, −, +. Le même phénomène apparaît à l'examen des écarts $(D_{1,x}-D_{2,x})$.

En se reportant à l'étude de M. MARCH, on voit que ce savant statisticien s'est efforcé de substituer aux courbes de vivants et de décés observés, d'autres courbes régulières tracées dans des conditions que nous avons eu l'occasion d'analyser antérieurement.

Nous rappelons à ce propos, que les courbes de vivants et de décédés ont été divisées en 9 régions, dont la quatrième part de l'âge 33, et que les régions 4, 5,...., 9 correspondent aux subdivisions suivantes d'âges:

4e	région	33-38 ans
5e	»	39-46 »
6e	»	47-56 »
7e	»	57-66 »
8e	»	67-76 »
9e	»	77 et au delà.

Il semble résulter de notre étude que l'ajustement basé sur la loi de Makeham n'annihile qu'en partie l'influence des diverses oscillations dues à l'attraction des âges ronds, les petites oscillations dues aux erreurs accidentelles, et aussi les sauts brusques imputables à des événements exceptionnels.

On ne peut juger la valeur de l'ajustement d'après la seule valeur du rapport

$$\frac{\sum_{33}^{90}(D_{1,x}-D_{2,x})}{\sum_{33}^{90}D_{1,x}}$$

qui est égale à 0,0007 environ; il faut assi s'assurer si les écarts $\varepsilon_{1,x}$ suivent la loi de Gauss, puisque l'on a admis que les écarts sur les taux de mortalité suivaient la loi de Gauss, que l'on a fait état de la même loi dans le calcul des poids k_x et K_x.

La probabilité de l'erreur ε étant définie par $\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2\varepsilon^2}d\varepsilon$, la probabilité de commettre un erreur comprise entre 0 et ε est égale à $\frac{1}{2}\Theta(\varepsilon h)$.

Ici le problème se pose d'une manière un peu différente, car le module

$$h_x=\sqrt{\frac{v_x}{2p_x'q_x'}}$$

varie d'un âge au suivant; en ce cas, on mesure les écarts, en prenant pour unité à chaque observation l'écart qui a une probabilité donnée de ne pas être dépassé.

Si l'on adopte par exemple pour l'unité d'écart la grandeur ε_1 définie par l'expression $\Theta(\varepsilon_1 h)=0{,}995$, à laquelle correspond $\varepsilon_1 h=2$, eu égard aux valeurs de la fonction Θ, on voit immédiatement que la probabilité de commettre une erreur dont le rapport à ε_1 soit compris entre 0 et $\lambda=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$, aura pour valeur $\frac{1}{2}\Theta(2\lambda)$.

J'ai été ainsi conduit à établir le tableau suivant donnant la répartition des écarts $(q_x'-q_x)$ dans l'intervalle 33-88 inclus, en distinguant les 31 écarts positifs et les 25 écarts négatifs, après avoir adopté 0,995 pour valeur de la fonction $\Theta(\varepsilon_1 h)$:

Valeur de $\varepsilon=\lambda\varepsilon_1$	Écarts positifs		Écarts négatifs		Valeur de $\frac{1}{2}\Theta(2\lambda)$
	en nombre absolu	en valeur relative	en nombre absolu	en valeur relative	
$\frac{1}{10}$	3 sur 56	$\frac{3}{56}=0{,}054$	2 sur 56	0,036	0,111
$\frac{2}{10}$	10	0,179	3	0,054	0,214
$\frac{3}{10}$	10	0,179	5	0,089	0,302
$\frac{4}{10}$	13	0,232	6	0,107	0,371
$\frac{5}{10}$	15	0,268	7	0,125	0,421
$\frac{6}{10}$	20	0,357	11	0,196	0,455
$\frac{7}{10}$	21	0,375	15	0,268	0,476
$\frac{8}{10}$	22	0,393	16	0,286	0,488
$\frac{9}{10}$	24	0,428	21	0,375	0,494
	25	0,446	21	0,375	0,498

La comparaison des graphiques construits respectivement à l'aide des données du tableau précédent (écarts positifs et écarts négatifs en valeur relative) et de celles correspondantes de la table AF (assurés français), avec le graphique classique représentatif de la fonction $\frac{1}{2}\Theta(2\lambda)$, montre que si le diagramme AF basé sur 41 observations peut être considéré comme satisfaisant, et permet de condure à une assimilation de la survie des assurés français à celle fixée par la loi de Makeham, le diagramme P^M accuse une divergence caractéristique avec le diagramme classique, et par suite la survie des têtes âgées de 33 à 88 ans

de la population masculine française ne peut être régie d'une manière précise par la loi de Makeham.

Si l'on tient compte des erreurs systématiques qui se sont glissées dans les éléments préparatoires à la formation de la table de mortalité de la population masculine envisagée au cours de cette étude, on voit par notre essai que la question mérite un examen complémentaire, et que des recherches nouvelles devraient être effectuées en partant soit de taux de mortalité de la table Van Pesch, soit des éléments des tables de mortalité les plus récentes de la population française, et en essayant d'interpoler au moyen de la formule de Makeham, ou d'une des formules de survie de M. QUIQUET.

E. J. GUMBEL (Heidelberg - Germania)

DAS ZUFALLSGESETZ DES STERBENS

1. Die biometrischen Funktionen. — 2. Die Häufigkeit der mittleren Alter beim Tod. — 3. Normentafel. — 4. Konstantenbestimmung. — 5. Numerische Beispiele. — 6. Zusammenfassung.

1. - Wir stellen uns im folgenden die Aufgabe, den charakteristischen Verlauf der biometrischen Funktionen in Analogie zu rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Überlegungen zu bringen. Unter biometrischen Funktionen versteht man vornehmlich:

1°) Die Zahlenreihe, welche angibt, wie viele aus einer bestimmten Zahl von Neugeborenen den x-ten Geburtstag erleben. Dividiert man diese Zahl durch die Ausgangszahl und nimmt man an, dass x ein beliebiges, nicht nur ganzzahliges Alter bedeutet, so erhält man eine stetige Funktion $l(x)$, für welche gilt

$$l(x)>0 \qquad \text{und} \qquad l'(x)<0. \tag{1}$$

Die Grenzbedingungen lauten $l(0)=1$, $l(\omega)=0$ und $l'(\omega)=0$, wobei $\omega-1$ das höchst erreichbare Alter. Die Gesamtheit dieser Werte wird Sterbetafel genannt:

2°) Die verlebte Zeit

$$\int_x^\omega l(z)\,dz=T(x) \tag{2}$$

wobei wir hier wie im folgenden das Alter x, wenn es als Integrationsvariable auftritt, mit z bezeichnen.

3°) Die Lebenserwartung eines x jährigen $E(x)$, definiert durch

$$E(x)=\frac{T(x)}{l(x)} \tag{3}$$

wobei

$$E(\omega)=0 \tag{30}$$

Abgesehen von diesem Alter ist die Lebenserwartung stets positiv.

4°) Das Alter $t(x)$, bei dem diejenigen, welche den xten Geburtstag erlebten

im Durchschnitt starben, d. h. das durchschnittliche Alter derjenigen, welche mindestens x Jahre alt geworden sind beim Zeitpunkt des Todes. Es wird im folgenden mittleres Sterbealter der über x jährigen genannt und ergibt sich aus

$$t(x) = \frac{-\int_x^\omega z l'(z) dz}{-\int_x^\omega l'(z) dz}$$

als

$$t(x) = x + E(x). \tag{4}$$

5°) Das mittlere Alter der Lebenden. Es beträgt

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\omega z l(z) dz}{T(0)}$$

Nach (2) wird es

$$\bar{x} = \frac{-\int_0^\omega z dT(z)}{T(0)}$$

oder nach partieller Integration

$$\bar{x} = \frac{\int_0^\omega T(z) dz}{T(0)}. \tag{50}$$

6°) Die Sterbensintensität $\mu(x)$, definiert durch

$$\mu(x) = -\frac{d \lg l(x)}{dx}. \tag{6}$$

Sie hängt nach (3) mit der Lebenserwartung zusammen durch

$$\mu(x) = \frac{1 + E'(x)}{E(x)}. \tag{601}$$

Da die Sterbensintensität nach (1) positiv, solange $x < \omega$ muss

$$1 + E'(x) > 0. \tag{602}$$

Man definiere ferner eine stationäre Bevölkerung als eine geschlossene Bevölkerung mit konstanter Absterbeordnung, in der jährlich gleich viele geborenwerden wie sterben. Hier bedeutet $\frac{l(x)}{T(0)}$ die Verteilung der Bevölkerung nach ihrem Alter, den sogen. Altersaufbau. Von diesem Standpunkt gesehen ist die Grenzbedingung $l(0) = 1$ belanglos. Die verlebte Zeit wird in dieser Auffassung proportional zur Grösse der Bevölkerung über einem bestimmten Alter.

Die empirische Berechnung der biometrischen Funktionen geschieht durch

Beobachtung der Wahrscheinlichkeit $q(x)$ eines x jährigen der tatsächlichen Bevölkerung, innerhalb eines Jahrs zu sterben. Denn sie ist

$$q(x) = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)}.$$

Aus der Reihe der Sterbenswahrscheinlichkeiten erhält man also die Zahlen $l(x)$ durch sukzessive Multiplikationen.

Als erster hat Halley solche Sterbetafeln aufgestellt und seit dieser Zeit datieren Versuche der Auffindung eines Gesetzes, das eine der biometrischen Funktionen und damit alle als Funktion des Alters wiedergibt. Ein solches vollständiges Naturgesetz ist unmöglich, da zu dem hier betrachteten Faktor des Alters spezielle Krankheiten und soziale Einflüsse hinzu kommen, deren Verlauf nicht naturgesetzlich bedingt ist.

Man kann sich daher nur die Aufgabe stellen, die naturgesetzliche Komponente möglichst rein darzustellen. Exakt gesprochen: wir wollen Funktionen aufstellen, welche den biometrischen entsprechen und hierbei keine anderen Annahmen machen, als die in der Wahrscheinlichkeitstheorie üblichen. Wegen der starken Wirksamkeit der anderen Faktoren ist dabei von vornherein ein vollständiges Passen ausgeschlossen.

2. - Wir gehen von der ältesten Vorstellung über den Tod aus. Danach sterben wir, weil das Schicksal ein schwarzes Los aus einer Urne gezogen hat. Um diese statistische Determination durchzuführen, betrachten wir die Häufigkeit der mittleren Sterbealter in einer stationären Bevölkerung. Der kleinste Wert ist das Sterbealter der über Nulljährigen, also das mittlere Alter der Gesamtbevölkerung beim Tod, also nach (4) $E(0)$. Seine Häufigkeit ist die grösste, weil der gesamten Bevölkerung dieser Wert zukommt. Die Grösse des mittleren Sterbealters steigt mit wachsendem Alter, seine Häufigkeit dagegen fällt mit wachsendem Alter, da es sich auf eine immer kleinere Bevölkerung bezieht. Sein grösster Wert ist nach (4) die Grösse ω; da aber dieses Alter nicht mehr erreicht wird, ist seine Häufigkeit Null. Ausserhalb dieses im ersten Quadranten liegenden Bereichs hat die Zuordnung keinen Sinn.

Da das mittlere Sterbealter für diejenigen gilt, die das x-te Jahr erreichten, ist die Häufigkeit eines bestimmten mittleren Sterbealters proportional der Anzahl derjenigen, die nach dem Alter x starben, d. h. $l(x)$. Die graphische Darstellung dieser Zuordnung besteht darin, dass man zu jedem Alter x die zugehörige Lebenserwartung addiert und diesem Wert der Abszisse die Grösse $l(x)$ als Ordinate gegenüberstellt. Das ist in der Fig. 1 für die indische Sterbetafel m 1901/10 (United States Life Tables, Washington, 1923, S. 209 und 217) durchgeführt.

Der entscheidende Schritt besteht nun in der Identifikation dieser Kurve mit der Gauss'schen Zufallskurve. Man kann diese Annahme auch dahin aussprechen:

Die mittleren Alter beim Tod sind in einer stationären Bevölkerung zufällig verteilt. Da negative Abweichungen vom Ausgangspunkt $E(0)$ nicht auftreten können, hat nur der rechte Teil der Zufallskurve einen Sinn. Demnach setzen wir an

$$l(x) = e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x+E(x)-H)^2} \tag{11}$$

wobei σ und H zwei aus den Beobachtungen zu bestimmende Konstanten. Beide haben die Dimension eines Alters oder einer Lebenserwartung. Nach einer bekannten Eigenschaft der Gauss'schen Funktion ist σ dasjenige Alter beim Tod, für welches diese Kurve einen Wendepunkt hat. Es ist also stets positiv. Die Anfangsbedingung $l(0)=1$ ist dabei nicht erhalten, wohl aber können wir durch entsprechende Wahl der Konstanten dafür sorgen, dass Inhalt und Mittelwert dieser Kurve erhalten bleiben. Differenziert man diese Integralgleichung logarithmisch nach x und beachtet den Zusammenhang zwischen Sterbensintensität und Lebenserwartung (601), so wird

$$\frac{1+E'(x)}{E(x)} = \frac{1}{\sigma^2}(x+E(x)-H)(1+E'(x)).$$

Auf Grund von (602) erhält man nach kurzer Umstellung

$$E(x) = \frac{1}{2}(H-x+\sqrt{(H-x)^2+4\sigma^2}). \tag{31}$$

Das Alter H besitzt somit die Lebenserwartung σ. Die Lebenserwartung fällt stets mit dem Alter und nähert sich für grosse x dem Wert null. Dieses Verhalten entspricht nicht ganz der Beobachtung. Die empirischen Kurven der Lebenserwartung steigen nämlich infolge der enormen Kindersterblichkeit bis etwa zum 3 Jahr und fallen erst von da an. Die Kindersterblichkeit, eine eminent soziale Erscheinung, wird also von unseren Formeln in Übereinstimmung mit den in der Versicherungspraxis üblichen nicht wiedergegeben.

Die Lebenserwartung eines Neugeborenen beträgt

$$E(0) = \frac{1}{2}(H+\sqrt{H^2+4\sigma^2}). \tag{310}$$

Hieraus folgt

$$E^2(0) - E(0)H = \sigma^2$$

also

$$\frac{\sigma}{E(0)} = \sqrt{1-\frac{H}{E(0)}}$$

welche Bedingung alle Wertepaare der beiden Konstanten verbindet, die zum gleichen theoretischen Wert der Lebenserwartung eines Neugeborenen gehören. Da man vernünftigerweise verlangen wird, dass auch H positiv, sind beide höchstens gleich $E(0)$. Differenzierung von (31) nach H und σ ergibt, dass die Lebenserwartung mit H wie mit σ wächst. Wachsen beide Konstanten gleich-

zeitig auf das *k*fache, so wächst die Lebenserwartung eines Neugeborenen ebenfalls auf das *k*fache.

Setzt man den Wert der Lebenserwartung (31) in die Integralgleichung (11) ein, so wird

$$l(x) = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(x-H+\sqrt{(x-H)^2+4\sigma^2})^2} \tag{12}$$

wobei speziell

$$l(0) = e^{-\frac{1}{8\sigma^2}(-H+\sqrt{H^2+4\sigma^2})^2}. \tag{121}$$

Dieser Wert hängt also nur vom Verhältnis der beiden Konstanten ab und bleibt bei gleichmässiger Vermehrung der beiden Konstanten unverändert. Daher wächst dann auch die von den Neugeborenen verlebte Zeit auf das *k*fache.

Die Sterbetafel verläuft zuerst nach unten konkav, passiert einen Wendepunkt, worauf sie nach unten konvex wird. Eine bestimmte obere Grenze für das menschliche Leben gibt es hier wie bei den in der Versicherungspraxis üblichen Formeln nicht. Jedoch schmiegt sich die Kurve für grosse Alter sehr rasch der Abszisse an.

3. - Führt man ein reduziertes Alter

$$n = \frac{x-H}{\sigma} \tag{71}$$

ein, so gewinnen die biometrischen Funktionen eine einfache und für die praktische Berechnung geeignete Gestalt, die von den speziellen Werten der Konstanten unabhängig ist. So wird die Lebenserwartung, ausgedrückt durch die Einheit σ, zu

$$\frac{E(x)}{\sigma} = \frac{1}{2}(-n+\sqrt{n^2+4}). \tag{33}$$

Die folgende, als Normentafel bezeichnete Tabelle I enthält in der ersten Spalte das Alter x als Funktion des reduzierten Alters, in der zweiten die Lebenserwartung. Das mittlere Alter beim Tod ergibt sich (dritte Spalte) durch Vertauschung von n mit $-n$ aus

$$\frac{x+E(x)-H}{\sigma} = \frac{1}{2}(n+\sqrt{n^2+4}) = u. \tag{43}$$

Somit ist die Sterbetafel (4. Spalte) numerisch bestimmt als

$$l(x) = e^{-\frac{u^2}{2}}. \tag{13}$$

Für jedes Alter erhält man den zugehörigen Wert von u aus (43) und die Sterbetafel aus einer Tabelle für $e^{-\frac{u^2}{2}}$. Sie zeigt sehr deutlich die Verschiedenartigkeit des Einflusses der beiden Konstanten. Da dem Werte $x=H$ also $n=0$ ein fester Wert der $l(x)$-Kurve, nämlich $e^{-\frac{1}{2}}$ entspricht, bedeutet eine Vergrös-

serung von H ein Hinausschieben dieses Punktes, d. h. eine Vergrösserung sämtlicher Werte $l(x)$. Eine Vergrösserung von σ bringt dagegen bei den vor H gelegenen Altern eine Verkleinerung, bei den nach H gelegenen eine Vergrösserung hervor, da die festen Werte von $l(x)$ sich im einen Falle nach früheren, im anderen nach späteren Altern verschieben.

Durch Differenzenbildung erhält man (5. Spalte) die Zahl der innerhalb des betreffenden Intervalls Gestorbenen. Multiplikation der Werte von $l(x)$ mit der Lebenserwartung gibt die verlebten Zeiten $T(x)$ proportional der Zahl der in einer stationären Bevölkerung über dem Alter x Lebenden, ausgedrückt durch σ (6. Spalte). Differenzenbildung gibt die lebende Bevölkerung innerhalb dieser Altersstufe (7. Spalte) Die Sterbensintensität endlich ergibt sich, da

(331) $$\frac{1}{E(x)} = \frac{2}{\sigma}\,\frac{n+\sqrt{n^2+4}}{4}$$

aus (601) und (71) als

$$\mu(x) = \frac{n+\sqrt{n^2+4}}{2\sigma}\left(1+\frac{\sigma}{2}\left(-1+\frac{n}{\sqrt{n^2+4}}\right)\frac{1}{\sigma}\right)$$

oder

$$\mu(x) = \frac{(n+\sqrt{n^2+4})^2}{4\sigma\sqrt{n+4^2}}\,.$$

Sie ist in der 8. Spalte aufgetragen.

TABELLE I: NORMENTAFEL

x	$\frac{E(x)}{\sigma}$	$\frac{x+E(x)-H}{\sigma}$	$l(x)$	$\Delta l(x)$	$\frac{T(x)}{\sigma}$	$\frac{\Delta T(x)}{\sigma}$	$\sigma\mu(x)$
$H-\sigma$	1,618	0,618	0,826		1,337		0,171
				0,089		0,393	
$H-0{,}5\sigma$	1,281	0,781	0,737		0,994		0,296
				0,130		0,337	
H	1,000	1,000	0,607		0,607		0,500
				0,167		0,263	
$H+0{,}5\sigma$	0,781	1,281	0,440		0,344		0,796
				0,169		0,177	
$H+\sigma$	0,618	1,618	0,271		0,167		1,171
				0,136		0,099	
$H+1{,}5\sigma$	0,500	2,000	0,135		0,068		1,600
				0,081		0,046	
$H+2\sigma$	0,414	2,414	0,054		0,022		2,060
				0,038		0,016	
$H+2{,}5\sigma$	0,351	2,851	0,016		0,006		2,538

Die erste Spalte enthält das Alter, die zweite die Lebenserwartung, die dritte gibt den Exponenten der Gleichung (13), die vierte den Alters aufbau der stationären Bevölkerung, die fünfte die Gestorbenen, die sechste die verlebte Zeit, die

siebte die zwischen zwei Intervallen lebenden stationäre Bevölkerung, die achte die Sterbensintensität. Die zweite, dritte, sechste, siebte und achte Spalte sind in Einheiten von σ ausgedrückt. Um mithilfe dieser Normentafel die zu einer beobachteten Sterbetafel gehörigen theoretischen Werte zu berechnen, müssen zunächst die beiden Konstanten bestimmt werden.

4. - Bei völliger Übereinstimmung der Beobachtung mit der Theorie wären zwei Beobachtungen zur Bestimmung der Konstanten ausreichend. Da aber die hier vorausgesetzte Übereinstimmung nicht vorliegt, wird man, wie in der Statistik üblich, die Bestimmung der Konstanten durch eine Ausgleichung vornehmen, wobei normalerweise die Sterbetafel zugrunde legen wird.

Am einfachsten eignet sich hierzu die Methode der Momente. Hierbei wird verlangt, dass Inhalt und Schwerpunkt der Sterbetafel von einem bestimmten Alter x_0 an erhalten bleiben sollen. Das Alter x_0 wird man gewöhnlich gleich null setzen können. Dem Werte $x_0=0$ entspricht

(431) $$u_0=\frac{-H^2+\sqrt{H^2+4\sigma^2}}{2\sigma}.$$

Die Lebenserwartung wird nach (331) und (43)

$$E(x)=\frac{\sigma}{u}.$$

Die verlebte Zeit wird nach (3) und (13)

(23) $$T(x)=\frac{\sigma}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

Für $x=0$ wird speziell

(231) (I) $$T(0)=\frac{\sigma}{u_0}e^{-\frac{u_0^2}{2}}.$$

In dieser ersten Bedingung ist die linke Seite beobachtet, wogegen σ und u_0 unbekannt.

Eine zweite derartige Gleichung gewinnen wir aus der Bestimmung des mittleren Alters der über dem Alter x Lebenden. Nach (50) und (23) wird

$$\bar{x}=\frac{u_0}{\sigma}e^{-\frac{u_0^2}{2}}\int_0^\infty T(z)dz.$$

Führt man wiederum die Variable u ein, so reicht das Integral von u_0 bis ∞. Das Differential dz ergibt sich aus der Definition von u aus Einsetzung von (31) in (43) durch

$$4\sigma^2u^2-4\sigma u(x-H)=4\sigma^2$$

oder

$$\frac{\sigma u^2-\sigma}{u}=x-H$$

als

$$dz = \sigma du\left(1 + \frac{1}{u^2}\right).$$

Somit wird das mittlere Alter der Lebenden

$$\bar{x} = \sigma u_0 e^{-\frac{u_0^2}{2}} \int_{u_0}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u} + \frac{e^{-\frac{u^2}{2}}}{u^3}\right) du.$$

Nach leichten Umrechnungen wird dies unter Verwendung des Integrallogarithmus

$$\int_{\frac{u_0^2}{2}}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} = -\mathcal{E}i\left(-\frac{u_0^2}{2}\right)$$

zu

$$\bar{x} = \frac{\sigma}{2u_0}\left(1 - \frac{u_0^2}{2} e^{\frac{u_0^2}{2}} \mathcal{E}i\left(-\frac{u_0^2}{2}\right)\right). \tag{53}$$

Diese Bestimmungsgleichung enthält wie (231) die Hilfskonstante u_0 und die zu bestimmende Konstante σ. Multipliziert man sie mit der reziproken Gleichung (231), so wird sie zu

$$\frac{2\bar{x}}{T(0)} = e^{\frac{u_0^2}{2}} - \frac{u_0^2}{2} e^{\frac{u_0^2}{2}} \mathcal{E}i\left(-\frac{u_0^2}{2}\right) = F\left(\frac{u_0^2}{2}\right). \tag{531) (II}$$

Da diese Gleichung nur mehr die beobachteten Werte x und $T(0)$ und die Hilfsunbekannte u_0 enthält, lässt sich letztere numerisch bestimmen. Dann ergibt sich σ aus (I) und die Konstante H auf Grund (431) als

$$H = -\sigma u_0 + \frac{\sigma}{u_0}. \tag{III}$$

Da H stets positiv sein soll, muss $u_0^2 < 1$.

Berücksichtigt man noch die Bedeutung von $l(0)$ in (13), so lauten die uns interessierenden Grenzen

$$0 < \frac{u_0^2}{2} < 0{,}5.$$

Somit erhält man aus den beobachteten Werten des mittleren Alters der Lebenden $\bar{x}$ und der von den Neugeborenen verlebten Zeit $T(0)$ mit Hilfe von (II) die Grösse von $\frac{u_0^2}{2}$ und hieraus nach (I) und (III) die Grössen σ und H.

Diese Bestimmungsweise lässt sich leicht auf ein beliebigen Ausgangsalter x_0 ausdehnen, falls nur die Anpassung für die darüber befindlichen Werte gewünscht wird.

In der Praxis wird man nicht die Gleichung (II) durch Probieren auflösen und den so bestimmten Wert von $\frac{u_0^2}{2}$ in die beiden andern einsetzen, sondern

umgekehrt zunächst die rechte Seite von (II) und die Werte von

$$\frac{\sigma}{T(0)} = u_0 e^{+\frac{u_0^2}{2}}$$

und von

$$\frac{H}{T(0)} = e^{\frac{u_0^2}{2}} (1 - u_0^2)$$

als Funktion von $\frac{u_0^2}{2}$ tabellieren. Dies ist im folgenden geschehen.

TABELLE ZUR KONSTANTENBESTIMMUNG II

$\frac{u_0^2}{2}$	$F\left(\frac{u_0^2}{2}\right)$	$\frac{\sigma}{T(0)}$	$\frac{H}{T(0)}$
0	1,00000	0,00000	1,00000
0,025	1,10594	0,22927	0,97405
0,050	1,18764	0,33244	0,94614
0,075	1,25971	0,41746	0,91620
0,100	1,32782	0,49224	0,88414
0,125	1,39371	0,56658	0,84986
0,150	1,45835	0,63636	0,81328
0,175	1,52243	0,70477	0,77431
0,200	1,58620	0,77249	0,73284
0,225	1,65014	0,84008	0,68876
0,250	1,71446	0,90795	0,64202
0,275	1,77933	0,97636	0,59244
0,300	1,84494	1,04560	0,53994
0,325	1,91139	1,11585	0,48441
0,350	1,97885	1,18728	0,42572
0,375	2,04738	1,26007	0,36375
0,400	2,11710	1,33433	0,29837
0,425	2,18809	1,41021	0,22944
0,450	2,26044	1,48783	0,15683
0,475	2,33421	1,56730	0,08040
0,500	2,40953	1,64872	0,00000

Aus einer gegebenen Sterbetafel berechnet man also zunächst das mittlere Alter der Lebenden $\bar{x}$ und die von einem Neugeborenen verlebte Zeit $T(0)$. Division beider Grössen und Multiplikation mit 2 gibt einen bestimmten Wert der zweiten

Spalte. Die zugehörigen Werte der 3. und 4. Spalte ergeben nach Multiplikation mit $T(0)$ die beiden Fundamentalkonstanten. Damit ist jedes Alter x durch das reduzierte Alter n ausdrückbar. Die Normentafel gibt dann zu jedem reduzierten Alter und damit zu jedem Alter die zugehörigen Werte der biometrischen Funktionen. Nach Berechnung des mittleren Alters der Lebenden besteht also die ganze Konstantenbestimmung in der Interpolation zweier Tabellen. Denn die ausgeglichenen Werte sind in der Normentafel bereits ein für alle Mal berechnet.

5. - Beim Vergleich zwischen Beobachtung und Theorie ist zu beachten, dass die sich so für die theoretische Tafel ergebenden Alter im allgemeinen nicht ganzzahlig sein werden. Zum Vergleich wird man entweder unsere Ausgangskurve, also die Verteilung der mittleren Alter beim Tod, oder die Sterbetafel oder die verlebten Zeiten, also die stationäre Bevölkerung über einem bestimmten Alter, anwenden. Letzterer Vergleichsmasstab, also eine summierte Kurve, ist in der Kollektivmaßlehre üblich. Bei diesen Methoden kann der Bestimmung der Konstanten der ganze Verlauf der Sterbetafel zugrunde gelegt werden. Dagegen wird man bei den weniger wichtigen Kurven der Lebenserwartung und der Sterbensintensität nur denjenigen Teil verwenden können, bei dem das in der Theorie vorhandene monotone Fallen bzw. Steigen auch in der Praxis zutrifft. Diese Beschränkung ist auch in der Versicherungsmathematik bisher üblich.

Für die oben erwähnte indische Sterbetafel, wurde berechnet

$$\bar{x}=24{,}99270$$

während

$$T(0)=22{,}59$$

angegeben war.

Somit ist

$$F\left(\frac{u_0^2}{2}\right)=2{,}21272$$

Interpolation aus der Tabelle II ergibt

$$\sigma=22{,}59\left(1{,}41021+\frac{2463}{7253}\cdot 0{,}07762\right)=32{,}45212$$

und

$$H=22{,}59\left(0{,}22944-\frac{2463}{7253}\cdot 0{,}07261\right)=4{,}62462$$

Somit ist die numerische Berechnung der in der Normentabelle I nur in reduzierter Form angegebenen Alter durchführbar. Dem Alter null entspricht speziell $n_0=-\frac{H}{\sigma}=-0{,}142$. Auf Grund der in der Normentafel numerisch angegebenen Werte erhält man, jeweils nach Multiplikation mit σ und nach Interpolation der zum reduzierten Alter n_0 gehörigen Werte die folgende Tabelle:

INDIEN M. 1901-10

x	$l(x)$	$E(x)$	$x+E(x)$	$T(x)$
0	0,648	34,85	34,85	22,59
4,62	0,607	32,45	37,07	19,70
20,85	0,440	25,35	46,20	11,16
37,08	0,271	20,06	57,14	5,42
53,30	0,135	16,23	69,53	2,21
69,53	0,054	13,44	82,97	0,71
85,75	0,016	11,39	97,14	0,19

Die folgenden drei Figuren stellen diesen theoretischen Werten die zugehörigen beobachteten Werte der Häufigkeit der mittleren Alter beim Tod, des

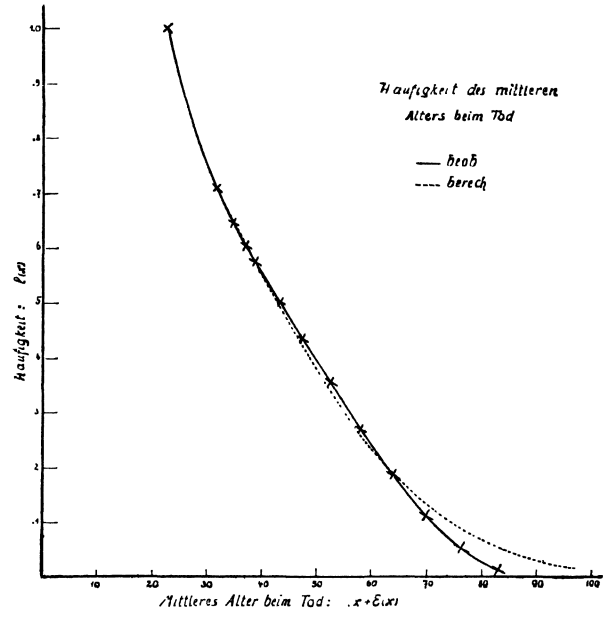


Fig. 1.

Alters aufbaus der stationären Bevölkerung und der verlebten Zeit gegenüber. Bei der 1. und 3. Figur fällt die empirische Kurve während des grössten Teils des

Lebens mit der theoretischen zusammen. Die Übereinstimmung der 2. Kurve ist durchaus befriedigend. Theorie und Erfahrung stimmen also hier in weitge-

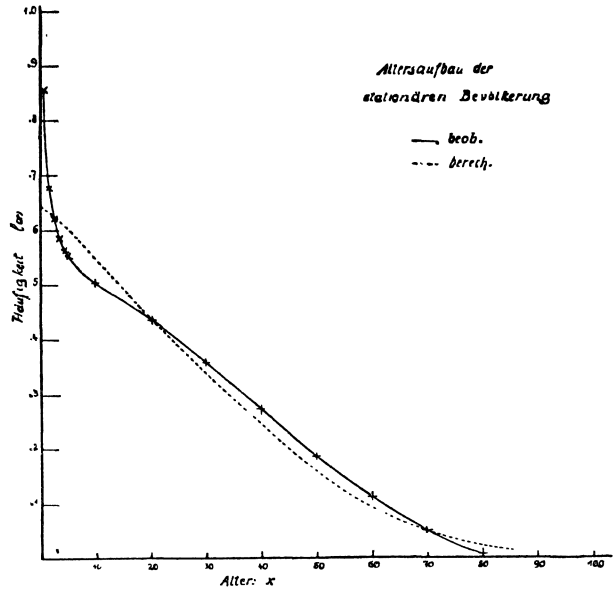


Fig. 2.

hendem Maß überein. Allerdings ist nicht zu vermuten, dass die Übereinstimmung bei allen Sterbetafeln so gut sein wird.

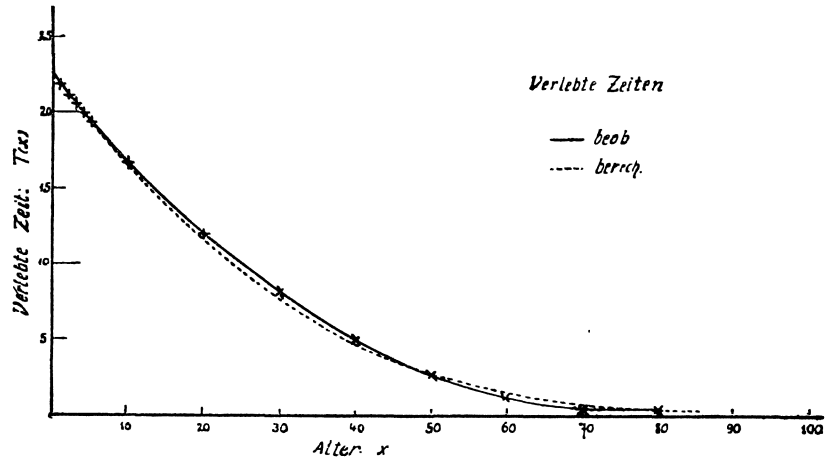


Fig. 3.

6. - Die Anpassung einer empirischen Reihe geht also ausserordentlich einfach vor sich. Sie verlangt nur die Berechnung des Inhaltes und des Mittelwertes.

Ihre Division ergibt mithilfe der Tabelle II die beiden Konstanten. Die Normentafel (I) ergibt dann bereits die fertigen Werte der biometrischen Funktionen.

Unser Versuch unterscheidet sich wesentlich von den bisherigen. Zunächst wird eine vollständige gesetzmässige Dartellung des tatsächlichen Sterblichkeitsverlaufs gar nicht versucht, weil es sich hier nicht um einen rein naturwissenschaftlichen Verlauf handelt. Ebenso wenig versuchen wir, eine praktische Interpolationsformel aufzustellen. Wir machen keine Fiktionen, sondern gehen von der einzigen Realisierung der Sterbetafel, nämlich der stationären Bevölkerung, aus. Wir beschränken uns nicht auf spezielle Altersklassen, sondern betrachten den totalen Verlauf. Wir machen keine speziellen analytischen Annahmen über den Verlauf einzelner Funktionen, sondern legen die allgemeinste Vorstellung vom Tod, die Wirksamkeit des Zufalls zugrunde.

Die so gewonnenen Kurven schliessen sich dem allgemeinen Verlauf der beobachteten gut an. Damit ist die Sterblichkeitsstatistik im Prinzip auf die Wahrscheinlichkeitstheorie zurückgeführt. Ein Fundamentalproblem der Bevölkerungs statistik, der natürliche Alters aufbau der stationären Bevölkerung ist erledigt.

R. R. BRODIE (London - Inghilterra)

VARIATION IN RATES OF MORTALITY AS AFFECTING THE RESERVES FOR SICKNESS BENEFITS

The recent publication of the English Life Table n.° 9 based upon the mortality experienced in England and Wales during the 3 years 1920-1922 draws attention to the fact that the rate of mortality among the general population which had been falling steadily for many years has declined still further. This improvement in mortality, although it is apt to be lost sight of where sickness benefits are concerned, is a matter of considerable importance to Friendly Societies. If a Society experiences lighter rates of mortality than those upon which its calculations are based, then although it receives an additional number of contributions more members survive to older ages where the rate of sickness claim is high, the net effect in general being an increase in sickness liabilities.

The calculations of many Friendly Societies are now based upon the experience of the Manchester Unity of Oddfellows during the years 1893-1897, and these are likely to remain the standard tables in Britain for many years to come. In compiling these tables central rates of sickness were tabulated, that is to say z_x is equal to (number of weeks of sickness between ages x and $x+1$) $\div l_{x+\frac{1}{2}}$ and on this assumption we have the relation in the case of an entrant at age x who has contributed for n years

$$(1) \qquad ({}_nV_x^s+\pi_x^s)(1+i)=(1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot {}_{\frac{1}{2}}p_{x+n}\cdot z_{x+n}+p_{x+n}\cdot {}_{n+1}V_x^s.$$

If we discard central rates of sickness (as has been done throughout the remainder of this paper) and recalculate z_x where z_x. is equal to (number of weeks of sickness between ages x and $x+1$) $\div l_x$ formula (1) becomes

$$(2) \qquad ({}_nV_x^s+\pi_x^s)(1+i)=(1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot z_{x+n}+p_{x+n}\cdot {}_{n+1}V_x^s.$$

This relation is quite general and applies to all classes of sickness benefit. It expresses the fundamental relation that the reserve at the commencement of the year with the annual contribution then paid if accumulated at interest for a year must provide the year's claims together with the necessary reserve at the end of the year.

Suppose that the rate of mortality actually experienced, q', differs from the

tabular rate, q. Then the modified sickness rate, z', that will enable the standard reserves to be set up without profit or loss arising may be found from the equation

$$(1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot z'_{x+n} + p'_{x+n} \cdot {}_{n+1}V^s_x = (1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot z_{x+n} + p_{x+n} \cdot {}_{n+1}V^s_x$$

that is,

$$z'_{x+n} = \frac{(1+i)^{\frac{1}{2}} \cdot z_{x+n} - (p'_{x+n} - p_{x+n}) \times {}_{n+1}V^s_x}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}. \tag{3}$$

According as p' is greater or less than p so, as a rule, will z' be less or greater than z. Owing to the fall in the rate of mortality amongst the general population the case that has most practical importance is where p' is greater than p.

As already mentioned, the latest Manchester Unity tables are based upon the experience of the Society during the period 1893-1897. The English Life Table n.° 6 was based upon the two censuses of 1891 and 1901 and the deaths during the 10 years 1891-1900. These two tables therefore relate to a certain extent to the same epoch. For the purposes of illustration it has been assumed in this paper that the rate of mortality at each age shewn by the Manchester Unity tables has improved in the same ratio as that shewn by a comparison between the English Life Table N.° 9 and the English Life Table N.° 6; that is, it is assumed that

$$\overset{\text{M. U.}}{q_x'} = q_x \times (\overset{\text{E. L. 9}}{q_x} \div \overset{\text{E. L. 6}}{q_x}).$$

It may be that the mortality amongst members of the Manchester Unity Society has not improved to the same extent as among the general population but that is of little consequence for the purposes of the present note as we are concerned not so much with the actual extent of the improvement in mortality that has taken place as with the relation between certain assumed rates of improvement (approximating more or less to actual conditions) and the other factors entering into sickness benefit calculations.

As an example illustrating the use of formula (3) suppose that a Society grants a sickness benefit throughout life of 10/- a week during the first six months of any illness and 5/- a week during the remainder of sickness, the contributions and reserves being based upon the Manchester Unity (whole Society) table at 4 per cent. interest. Throughout the paper contributions and reserves are calculated on this basis. Let us assume that the Society experiences the light rates of mortality referred to in the preceding paragraph. The figures in the following table shew to what extent the rate of sickness actually experienced must fall below the tabular rates in order that the Society may be in a position to set up the normal reserves without profit or loss arising. For the sake of simplicity it has been assumed throughout this paper that contributions are payable yearly although in practice they are usually payable at short intervals.

TABLE I. - SICKNESS BENEFIT

Reduction in rate of sickness that will offset the loss from light mortality

Age attained at commencement of jear: (1)	Percentage reduction in rate of mortality assumed: (2)	Percentage reduction in rate of sickness: Ages at entry 20: (3)	Percentage reduction in rate of sickness: Ages at entry 40: (4)
:			
22	26.2	.3	
23	27.	.4	
:			
42	41.7	7.4	1.5
43	41.4	7.9	2.1
:			
62	25.6	12.9	10.4
63	23.7	12.3	10.
:			
82	11.8	7.6	6.9
83	12.1	8.	7.3
:	:		

In place of meeting the loss from light mortality out of the saving from favourable rates of sickness it is theoretically possible to measure such loss against the profit from excess interest realized on the funds. In such a case we have the relation, where i' represents the actual rate of interest earned,

$$({}_nV_x^s+\pi_x^s)(1+i')={}_nz_{x+n}(1+i')^{\frac{1}{2}}+{}_np_{x+n}\cdot{}_{n+1}V_x^s.$$

Writing $(1+i')^{\frac{1}{2}}=I$ we have

$$({}_nV_x^s+\pi_x^s)\times I^2-{}_nz_{x+n}\times I-{}_np'_{x+n}\cdot{}_{n+1}V_x^s=0. \tag{4}$$

whence I, (and therefore i'), is readily obtained.

By way of illustration of formula (4) we may consider the same benefit as before, namely a sickness benefit throughout life of 10/- a week during the first six months of any illness and 5/- a week during the remainder of sickness, using the Manchester Unity (whole Society) 4% table. Let us assume that a Society experiences tabular rates of sickness together with the light rates of mortality already mentioned. Then if the following rates of interest are earned in place of the normal rate of 4% the gain from surplus interest will exactly make up for the loss from mortality.

TABLE II. - SICKNESS BENEFIT

Rate of interest that will offset the loss from light mortality

Age attained at commencement of year:	Percentage reduction in rate of mortality assumed:	Rate of interest (in place of 4 %):	
		Age at entry 20: %	Age at entry 40: %
:			
42	41.7	4.4	
43	41.4	4.4	
:			
62	25.6	5.	4.9
63	23.7	5.	5.
:			
82	11.8	6.3	6.2
83	12.1	6.5	6.5
:			

So far we have considered the case of a Society granting sickness benefit only. It is more usual, however, to grant, in addition to sickness benefit, a funeral benefit on the death of a member. Since variations in rates of mortality act in opposite directions in the case of sickness benefits and funeral benefits, it follows that when the benefits are combined the profit or loss arising from the operation of abnormal mortality will be lessened. Suppose, for example, that a Society grants a funeral benefit of S at the death of a member in addition to sickness benefit and that q' represents the light rate of mortality experienced. Then if z'' denote the reduced rate of sickness that will offset the loss from light mortality we have the relation (omitting suffixes which denote age and representing by V_{+1} the reserve at the end of the year in question)

$$(5)\quad S(q+p\cdot V_{+1})+(1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot z+p\cdot V^{s}_{+1}=S(q'+p'\cdot V_{+1})+(1+i)^{\frac{1}{2}}\cdot z''+p'\cdot V^{s}_{+1}$$

whence

$$(6)\quad z''=\frac{(1+i)^{\frac{1}{2}}z-(p'-p)V^{s}_{+1}}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}+\frac{S[(q-q')-(p'-p)V_{+1}]}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}=$$

$$=z'+\frac{S[(q-q')-(p'-p)V_{+1}]}{(1+i)^{\frac{1}{2}}}.$$

As an example illustrating the effect of the introduction of an assurance at death consider the case of a Society granting a funeral benefit of L. 10 in addition to the sickness benefit already mentioned.

TABLE III. - SICKNESS AND FUNERAL BENEFITS

Reduction in rate of sickness that will offset the loss from light mortality

Age attained at commencement of year: (1)	Percentage reduction in rate of mortality assumed: (2)	Percentage reduction in rate of sickness: Age at entry 20: (3)	Age at entry 40: (4)
:			
22	26.2	−1.8	
23	27.	−1.9	
:			
42	41.7	2.9	−4.
43	41.4	3.4	−3.4
:			
62	25.6	11.	7.9
63	23.7	10.6	7.8
:			
82	11.8	7.1	6.3
83	12.1	7.5	6.7
:			

The negative percentages in columns (3) and (4) of Table III shew that at the shorter durations of membership the profit derived from favourable mortality under the death benefit exceeds the loss from light mortality in the case of the sickness benefit.

From a reference to equation (6) it will be seen that $z''-z'$ is proportional to S (the amount of the funeral benefit) and therefore from the figures in Tables I and III we are enabled to determine the percentage reduction in the rate of sickness that will result from the adoption of any given amount of funeral benefit. If, for example, a sum assured of L. 20 were associated with the sickness benefit provided for in these tables the resulting percentage reduction in the rate of sickness in the case of an entrant at age 20 would be

at age attained 40, −2.7
at age attained 60, 8.9

and so on.

Theoretically it is a simple matter to vary the amount of the sum assured each year in such a way that in spite of abnormal rates of mortality (either in excess or defect) in conjunction with normal rates of sickness and interest the

standard reserves may be set up from year to year without any loss or profit arising. Suppose in such a case that S_n is the sum assured during the n^{th} year (the contribution for the funeral benefit varying annually in proportion to S) and that q' represents the abnormal rate of mortality experienced, then the equation of equilibrium will be

$$(7) \quad S_n(q_{x+n}-q'_{x+n})-(p'_{x+n}-p_{x+n})\cdot {}_{n+1}V^s_x=(S_{n+1}\cdot p'_{x+n}-S_n\cdot p_{x+n})\cdot {}_{n+1}V_x$$

whence

$$(8) \quad S_{n+1}=\frac{S_n(q_{x+n}-q'_{x+n})-(p'_{x+n}-p_{x+n})\cdot {}_{n+1}V^s_x+S_n\cdot p_{x+n}\cdot {}_{n+1}V_x}{p'_{x+n}\cdot {}_{n+1}V_x}.$$

As an example involving formula (8) let us suppose that the experience as regards sickness and interest is exactly normal but that the light rates of mortality already assumed are experienced. If the sickness benefit is as in the previous examples and if the amount of the funeral benefit is L. 10 for the first year varying from year to year as in the following table (with a proportionate variation in the contribution applicable to the funeral benefit) then the effect of light mortality will be entirely eliminated and neither profit nor loss will accrue.

TABLE IV. - SICKNESS AND FUNERAL BENEFITS

Variation in amount of Funeral Benefit that will prevent profit or loss arising from light mortality
Age at entry 20

Age attained at commencement of year:	Percentage reduction in rate of mortality assumed:	Amount of funeral benefit:
		L. S.
20	24.1	10.
21	25.2	10.18
22	26.2	11.9
:		
30	36.6	13.6
31	37.1	13.8
:		
50	39.1	13.4
51	37.8	13.
:		
70	17.3	5.16
71	16.3	5.3
:		

In the case of Table III it was seen that for the first few years after entry the profit from light mortality on the funeral benefit exceeded the loss from light mortality on the sickness benefit. Under Table IV the same feature is reflected in the amount of the sum assured which continues to increase (though at a diminishing rate) for some years after entry. It is not until age 40 is reached that the amount of the funeral benefit reaches a maximum and it does not drop so low as the original amount of L. 10 until age attained 62 but thereafter the fall is increasingly rapid.

Returning to equation (8) we see that according to the value given to S_1 there is an unlimited number of progressions representing the variation in amount of funeral benefit from year to year each of which, without any assistance from favourable rates of sickness and interest, will prevent loss arising from light mortality. The higher the initial value of S the longer will be the period that must elapse before S_n falls as low as S_1, if it ever does fall so low which theoretically is not inevitable. The sum assured will not necessarily remain positive throughout; if the rate of sickness benefit is very large in proportion to the initial sum assured the latter may from the outset be negative. If we were to trace the case dealt with in Table IV beyond age 71 we should find that the sum assured remains positive till age 80, thereafter becoming negative.

R. TAUCER (Trieste - Italia)

SULLA TEORIA DEI GRUPPI

1. - Si immagini una collettività chiusa Γ di individui della medesima età ed aventi una caratteristica o stato fisiologico suscettibile di n aspetti distinti, nel senso che un individuo (x) appartenente a Γ e della caratteristica o specie (i) possa, in seguito al verificarsi di un determinato evento, assumere una delle altre caratteristiche o morire.

Senza toglier nulla alla generalità, possiamo scomporre Γ in n gruppi distinti, relativi alle n caratteristiche, e supporre che esista un'età x_0 alla quale tutti gli appartenenti a Γ siano della medesima specie (specie 1). Chiameremo Γ_i il gruppo degli individui della specie (i), ed il numero di questi in età x lo designeremo con $l_i(x)$, con $\mu_i(x)$ denoteremo l'intensità di morte, con $\alpha_{ij}(x)$ l'intensità di passaggio (diretto) da una specie (i) ad un'altra (j), ed infine con $\beta_i(x)$ l'intensità di uscita da Γ_i.

Ammetteremo che dette funzioni siano continue, finite e positive nel campo $[x_0 \leqslant x \leqslant \omega]$, dove ω è l'età estrema della collettività Γ, e che sieno note le espressioni analitiche delle $\mu_i(x)$ e $\alpha_{ij}(x)$.

La conoscenza del sistema delle intensità è sufficiente per trattare analiticamente qualsiasi problema attuariale riguardante la collettività Γ. In questa breve nota ci proponiamo di studiare la formazione e la vita dei gruppi Γ_i senza fare ipotesi restrittive sui passaggi da una specie all'altra.

2. - Poichè tutti gli individui della collettività Γ appartengono all'età x_0 a Γ_1, segue che i rimanenti gruppi Γ_i saranno costituiti all'età x esclusivamente da immigrati, mentre il gruppo Γ_1 comprenderà oltre a questi (ritorni dagli altri gruppi), quelli che non uscirono mai dal gruppo. Si noti inoltre che, in forza del teorema di KARUP, si ha per $\beta_i(x)$ l'espressione notevole

$$\beta_i(x) = \mu_i(x) + \sum_{r=1}^{n} \alpha_{ir}(x)$$

dove $a_{ii}(x) \equiv 0$, e che la probabilità relativa a un individuo di età ξ di Γ_i di non uscire dal suo gruppo nell'intervallo $\xi \vdash\!\dashv x$ è data da

$$p_{ii}^{(0)}(\xi, x) = e^{-\int_{\xi}^{x} \beta_i(z)\,dz}.$$

Tenuto conto di queste considerazioni, i gruppi Γ_i risultano logicamente fissati dal sistema di n equazioni integrali di VOLTERRA di 2ª specie

$$(1) \qquad \begin{cases} l_1(x) = l_1(x_0)\,p_{11}^{(0)}(x_0, x) + \sum_{r=2}^{n} \int_{x_0}^{x} a_{r1}(\xi)\,p_{11}^{(0)}(\xi, x)\,l_r(\xi)\,d\xi \\ l_i(x) = \sum_{r=1}^{n} \int_{x_0}^{x} a_{ri}(\xi)\,p_{ii}^{(0)}(\xi, x)\,l_r(\xi)\,d\xi. \qquad (i = 2, 3, \ldots, n) \end{cases}$$

In questo sistema, i nuclei $a_{ri}(\xi)\,p_{ii}^{(0)}(\xi, x)$, che per semplicità indicheremo in seguito con $K_{ir}(x, \xi)$, sono funzioni finite, positive e continue in tutto l'intervallo $[x_0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant \omega]$, in virtù delle ipotesi fatte sulle funzioni $\mu_i(x)$ e $a_{ij}(x)$. Rappresentando M una frazione propria positiva, varrà quindi in questo campo la disuguaglianza

$$K_{ir}(x, \xi) < M.$$

La risoluzione del sistema (1) avviene per iterazione. Si avranno allora per i nuclei iterati le espressioni notissime (1)

$$K_{ir}^{(1)}(x, \xi) = K_{ir}(x, \xi)$$

$$K_{ir}^{(s+1)}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\xi}^{x} K_{ij}^{(k)}(x, \eta)\,K_{jr}^{(s+1-k)}(\eta, \xi)\,d\eta \qquad (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Questi nuclei, nel caso che stiamo trattando, hanno un particolare significato; infatti, essendo

$$K_{ir}^{(1)}(x, \xi) = a_{ri}(\xi)\,p_{ii}^{(0)}(\xi, x),$$

si avrà

$$K_{ir}^{(2)}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \int_{\xi}^{x} a_{ji}(\eta)\,p_{ii}^{(0)}(\eta, x)\,a_{rj}(\xi)\,p_{jj}^{(0)}(\xi, \eta)\,d\eta$$

cioè

$$K_{ir}^{(2)}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi) \int_{\xi}^{x} p_{jj}^{(0)}(\xi, \eta)\,a_{ji}(\eta)\,p_{ii}^{(0)}(\eta, x)\,d\eta.$$

L'integrale che compare in questa formola rappresenta la probabilità $p_{ji}^{(1)}(\xi, x)$ che ha un individuo (ξ) di Γ_j di passare direttamente al gruppo Γ_i nell'inter-

---

(1) VITO VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*. Pag. 71.

vallo di tempo $\xi|\!-\!|x$ e di rimanervi per il resto dell'intervallo stesso; avremo quindi la formola

$$K_{ir}^{(2)}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi)p_{ji}^{(1)}(\xi,x).$$

Per $K_{ir}^{(3)}(x,\xi)$ segue analogamente

$$K_{ir}^{(3)}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi}^{x} a_{ji}(\eta)p_{ii}^{(0)}(\eta,x)\sum_{h=1}^{n} a_{rh}(\xi)p_{hj}^{(1)}(\xi,\eta)d\eta,$$

che si trasforma facilmente in

$$K_{ir}^{(3)}(x,\xi)=\sum_{h=1}^{n} a_{rh}(\xi)\int_{\xi}^{x}\sum_{j=1}^{n} p_{hj}^{(1)}(\xi,\eta)a_{ji}(\eta)p_{ii}^{(0)}(\eta,x)d\eta.$$

Qui l'integrale rappresenta, come del resto è facile dimostrare, la probabilità $p_{hi}^{(2)}(\xi,x)$ di un individuo (ξ) appartenente a Γ_h di passare fra le età ξ e x al gruppo Γ_i, attraversando però uno qualunque dei rimanenti gruppi, e di rimanere per il resto dell'intervallo in Γ_i. In sostanza esso è la probabilità che ha un individuo (ξ) della specie (h) di assumere fra le età ξ e x due aspetti di cui il secondo è fissato. Con ciò, $K_{ir}^{(3)}(x,\xi)$ è dato da

$$K_{ir}^{(3)}(x,\xi)=\sum_{h=1}^{n} a_{rh}(\xi)p_{hi}^{(2)}(\xi,x).$$

Operando similmente, possiamo scrivere per l' $(s+1)^{\text{mo}}$ nucleo iterato l'espressione

$$K_{ir}^{(s+1)}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi)p_{ji}^{(s)}(\xi,x) \tag{2}$$

dove $p_{ji}^{(s)}(\xi,x)$ rappresenta la probabilità relativa a un individuo (ξ) del gruppo Γ_j di appartenere all'età x al gruppo Γ_i dopo aver attraversato $s-1$ gruppi qualunque, cioè la probabilità di assumere nell'intervallo $\xi|\!-\!|x$ s aspetti, di cui l'ultimo è fissato. Per detta probabilità varrà l'espressione

$$p_{ji}^{(s)}(\xi,x)=\sum_{h=1}^{n}\int_{\xi}^{x} p_{jh}^{(k)}(\xi,\eta)\sum_{r=1}^{n} a_{hr}(\eta)p_{ri}^{(s-k-1)}(\eta,x)d\eta \tag{3}$$

dove $k=0,1,2,\ldots,s-1$, dalla quale si vede che $p_{ji}^{(s)}(\xi,x)$ ammette, come pure i nuclei iterati $K_{ir}^{(s+1)}(x,\xi)$, s determinazioni formalmente distinte. Le formole (2) e (3) si dimostrano mediante il principio dell'induzione completa: infatti vedremo che se esse valgono per s, valgono anche per $s+1$.

Componendo allora il $(k+1)^{\text{mo}}$ nucleo coll' $(s+1-k)^{\text{mo}}$ e tenendo conto delle posizioni fatte per i primi s nuclei iterati, si ricava per l' $(s+2)^{\text{mo}}$ l'espressione

$$K_{ir}^{(s+2)}(x,\xi)=\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi}^{x}\sum_{h=1}^{n} a_{jh}(\eta)p_{hi}^{(k)}(\eta,x)\cdot\sum_{l=1}^{n} a_{rl}(\xi)p_{lj}^{(s-k)}(\xi,\eta)d\eta$$

cioè

$$K_{ir}^{(s+2)}(x,\xi)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{rl}(\xi)\sum_{j=1}^{n}\int_{\xi}^{x}p_{lj}^{(s-k)}(\xi,\eta)\sum_{h=1}^{n}\alpha_{jh}(\eta)p_{hi}^{(k)}(\eta,x)d\eta$$

e, col semplice scambio di k in $s-k$, si ottiene la formola

$$K_{ir}^{(s+2)}(x,\xi)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{rl}(\xi)p_{li}^{(s+1)}(\xi,x)$$

che si deduce pure dalla (2) con la sostituzione di $s+1$ al posto di s. Visto che detta formola vale per $s=1$, ne consegue che essa è valida per qualunque s.

Dimostrate queste formole, passiamo a considerare certe probabilità che hanno grande importanza nel nostro studio.

Designiamo con $p_{ji}^{[t]}(\xi,x)$ la probabilità che ha un individuo (ξ) di Γ_j di appartenere all'età x a Γ_i assumendo nell'intervallo $\xi\vdash\dashv x$ non più di t aspetti. Essa è data evidentemente, in virtù del principio della probabilità totale, dall'espressione

$$p_{ji}^{[t]}(\xi,x)=\sum_{s=0}^{t}p_{ji}^{(s)}(\xi,x).$$

Questa probabilità, coll'aumentare indefinito di t, tende ad un limite finito. Infatti, ponendo nella (3) $k=s-1$ e ricordando che $K_{ir}(x,\xi)<M$, si deduce agevolmente la

$$p_{ji}^{(s)}(\xi,x)<M\sum_{h=1}^{n}\int_{\xi}^{x}p_{jh}^{(s-1)}(\xi,\eta)d\eta,$$

da cui

$$p_{ji}^{(s)}(\xi,x)<n^{s-1}\frac{M^s}{s!}(x-\xi)^s \qquad (s=1,2,3,\ldots).$$

Questa disuguaglianza indica che le serie

$$\sum_{s=0}^{\infty}p_{ji}^{(s)}(\xi,x)$$

sono uniformemente convergenti nel triangolo $[x_0\leqslant\xi\leqslant x\leqslant\omega]$, perchè converge in maniera uniforme la serie maggiorante

$$M(x-\xi)+n\frac{M^2}{2!}(x-\xi)^2+n^2\frac{M^3}{3!}(x-\xi)^3+\ldots=\frac{1}{n}\left[e^{Mn(x-\xi)}-1\right].$$

Nel campo considerato, dette serie costituiscono delle funzioni — che chiameremo $p_{ji}(\xi,x)$ — continue, finite e positive.

$p_{ji}(\xi,x)=\lim_{t\to\infty}p_{ji}^{[t]}(\xi,x)$ viene ad essere la probabilità di un individuo (ξ) del gruppo Γ_j di appartenere all'età x al gruppo Γ_i.

Arrivati a questo punto, cioè alla conoscenza delle probabilità di appartenenza $p_{ji}(\xi,x)$, lo scopo del nostro studio sarebbe già raggiunto, poichè dalle p si deducono immediatamente le l; tuttavia vogliamo portare alla fine la risolu-

zione secondo il classico procedimento del VOLTERRA, ottenendo così una nuova giustificazione delle interpretazioni biometriche date ai nuclei iterati.

I nuclei risolventi $S_{ir}(x, \xi)$ del sistema (1) sono dati dalle serie

$$S_{ir}(x, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} K_{ir}^{(s+1)}(x, \xi) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi) p_{ji}^{(s)}(\xi, x),$$

da cui, invertendo l'ordine di sommazione e ricordando le posizioni fatte, risulta

$$S_{ir}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi) \sum_{s=0}^{\infty} p_{ji}^{(s)}(\xi, x) = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}(\xi) p_{ji}(\xi, x)$$

la quale formola prova che i nuclei risolventi sono continui, finiti e positivi in tutto il triangolo considerato. Avremo allora per i gruppi Γ_i il sistema risolvente

$$l_1(x) = l_1(x_0) p_{11}^{(0)}(x_0, x) + \int_{x_0}^{x} l_1(x_0) p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) S_{11}(x, \xi) d\xi \tag{4}$$

$$l_i(x) = \int_{x_0}^{x} l_1(x_0) p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) S_{i1}(x, \xi) d\xi \qquad (i = 2, 3, \ldots, n). \tag{5}$$

Dalla (4) si passa facilmente alla

$$l_1(x) = l_1(x_0)[p_{11}^{(0)}(x_0, x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{x_0}^{x} p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) a_{1j}(\xi) p_{j1}(\xi, x) d\xi].$$

Si può ora dimostrare che l'espressione in parentesi è la probabilità per un individuo (x_0) di appartenere in età x al gruppo Γ_1. Infatti, tenendo presente il significato di $p_{j1}(\xi, x)$, si ha

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{x_0}^{x} p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) a_{1j}(\xi) p_{j1}(\xi, x) d\xi = \sum_{s=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\xi) p_{j1}^{(s-1)}(\xi, x) d\xi =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} p_{11}^{(s)}(x_0, x) = p_{11}(x_0, x) - p_{11}^{(0)}(x_0, x)$$

di modo che vale la relazione

$$l_1(x) = l_1(x_0) p_{11}(x_0, x).$$

Più facilmente ancora si stabiliscono le relazioni analoghe per gli altri gruppi. Infatti, dalla (5), ricordando il significato del nucleo risolvente $S_{i1}(x, \xi)$, risulta

$$l_i(x) = l_1(x_0) \sum_{j=1}^{n} \int_{x_0}^{x} p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) a_{1j}(\xi) p_{ji}(\xi, x) d\xi$$

ed usando il solito metodo

$$l_i(x) = l_1(x_0) \sum_{s=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} p_{11}^{(0)}(x_0, \xi) \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\xi) p_{ji}^{(s-1)}(\xi, x) d\xi = l_1(x_0) \sum_{s=1}^{\infty} p_{1i}^{(s)}(x_0, x).$$

Questa porta infine alla relazione

$$l_i(x) = l_1(x_0) p_{1i}(x_0, x) \qquad \text{dove } i = 2, 3, \ldots, n.$$

Con ciò abbiamo risolto completamente il problema propostoci, cioè dalla conoscenza delle intensità di morte e di passaggio, siamo risaliti alla determinazione delle probabilità corrispondenti e dei gruppi in cui viene a scomporsi una collettività molto generale, quale quella da noi considerata. Abbiamo visto quindi che con l'introdurre i sistemi di equazioni integrali di VOLTERRA si può giungere in modo piano e diretto alla soluzione del nostro problema.

R. ROY (Paris - Francia)

LA DEMANDE DANS SES RAPPORTS AVEC LA RÉPARTITION DES REVENUS

Importance de la loi de la demande.

En observant, avec WALRAS, que la demande constitue dans l'échange le fait principal et l'offre le fait accessoire, on est conduit à se demander s'il ne serait pas possible de préciser la forme générale de la loi de la demande, en vue de son utilisation pour les multiples applications de la théorie de la valeur.

Ce qu'il faut entendre par « loi de la demande ».

La loi de la demande considérée par COURNOT définit la consommation ou le débit d'un article, en fonction de son prix. Dans l'esprit de COURNOT et de DUPUIT, la relation existant entre le prix et le débit d'un article suppose la permanence de tous les autres éléments du problème de l'équilibre économique notamment du prix et du débit des autres articles, du chiffre de la population, du revenu total et de sa répartition, des influences du goût et de la mode, etc.

WALRAS au contraire établit sa théorie de la valeur sur la notion d'équilibre général des prix et quantités offertes ou demandées, de telle manière que la variation des éléments relatifs à un seul article entraine celle de tous les autres éléments; VILFREDO PARETO n'admet pas non plus la possibilité de faire varier le prix ou le débit d'un article, sans faire varier ceux des autres articles. Cependant WALRAS, en faisant état du grand nombre d'articles en présence, en arrive aux courbes d'achat qui ne différent pas des courbes de débit envisagées par COURNOT, et PARETO, lui-même, aboutit à une conception analogue.

Tout en reconnaissant la mobilité du milieu économique, nous admettrons qu'il est possible de considérer les courbes ou les fonctions de débit, en supposant invariables tous les autres paramètres envisagés dans l'équilibre économique.

Caractères généraux de la demande.

Il s'agit ici de la demande totale d'un article en fonction de son prix, dans les conditions sus-indiquées. Ses caractères généraux sont les suivants:

1°) la loi de la demande s'exprime par une fonction définie, c'est-à-dire qu'à tout prix correspond une demande bien déterminée;

2°) la demande est considérée comme fonction continue du prix, en raison du grand nombre de consommateurs, et abstraction faite des phénomènes de substitution;

3°) la demande est fonction décroissante du prix.

Cette proposition présente le plus souvent un caractère axiomatique; mais en s'appuyant sur la décroissance de l'ophélimité en fonction de la quantité, PARETO en a donné une démonstration rigoureuse, en ce qui concerne la demande individuelle; nous en donnerons ultérieurement une autre démonstration, en utilisant la notion de satiété et la loi de distribution des revenus. On admet en en général aussi l'existence d'un prix-limite et d'un débit maximum;

4°) on donne en général aux courbes de demande une forme telle que la concavité soit dirigée vers la partie positive de l'axe des quantités, sans qu'aucune raison soit invoquée de façon précise à l'appui de cette manière de faire;

5°) les auteurs insistent sur le caractère empirique de la loi de la demande, ce qui ne supprime pas la possibilité de rechercher les liens qui peuvent exister entre cette loi et d'autres phénomènes présentant également un caractère empirique.

But de la présente étude.

En notant qu'à part quelques données précises et fragmentaires, comme celles de DAVENANT et de GREGORY KING relatives à la demande du blé et citées par JEVONS et MARSHALL, les fonctions de demande utilisées par les auteurs de l'école mathématique se présentent généralement sous l'aspect qualitatif, nous nous proposons de montrer le lien qui existe entre la demande et la distribution des revenus, en vue d'aboutir à des conclusions précises sur la forme générale de la loi de la demande.

Nos recherches doivent être d'ailleurs considérées comme l'indication d'une méthode, plutôt que comme une tentative aboutissant à des conclusions definitives.

La répartition des revenus.

La loi de répartition des revenus peut être exprimée par une fonction $n(r)$ telle que le nombre des individus possédant un revenu compris entre r et $r+dr$ soit exprimé par $n(r)dr$.

Nous utiliserons, à titre d'exemple, la formule simplifiée de PARETO, représentant le nombre des personnes ayant un revenu supérieur à x par l'expression

$$Ax^{-\alpha}$$

où α désigne un exposant voisin de 1,5.

La fonction $n(r)$ est donc telle que

$$Ax^{-\alpha}=\int_x^\infty n(r)dr$$

Il est bien entendu que tout autre mode de répresentation de la distribution des revenus pourrait être utilisée de la même manière.

L'affectation des revenus.

Pour un individu, il existe une certaine hiérarchie des consommations variable d'un individu à l'autre; pour l'ensemble des consommateurs, on conçoit la possibilité de constituer des groupes d'articles tels que tout bien d'une catégorie déterminée soit choisi par tout individu dans un ordre invariable par rapport à tout bien d'une catégorie voisine.

A l'intérieur des groupes, le choix s'opère donc d'après les goûts individuels, tandis que le classement des groupes résulte de la hiérarchie des besoins.

Une fois ces groupes établis, l'étude de la demande portera pur le debit de l'ensemble des articles entrant dans un groupe, en fonction du prix moyen desdits articles; ce prix moyen et la consommation dans chaque groupe seront caractérisés par des index P et Q tels qu'on ait à tout instant

$$PQ=k\Sigma pq$$

le deuxième membre de cette relation représentant le total des paiements relatifs au groupe, c'est-à-dire en somme la fraction du revenu affectée par la collectivité à l'acquisition des objets entrant dans le groupe.

Par voie de différentiation, on est conduit à définir les index P et Q, au moyen des relations ci-après, utilisées par M. DIVISIA pour l'indice monétaire [1]

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{P}=\dfrac{\Sigma qdp}{\Sigma qp} \\ \dfrac{dQ}{Q}=\dfrac{\Sigma pdq}{\Sigma pq} \end{cases}$$

On observe aisément que l'index Q traduit non seulement les variations de débit, mais encore les déplacements de la consommation vers les produits plus coûteux ou moins chers.

Cela posé, nous admettons qu'il existe pour toute catégorie de biens une consommation individuelle maxima correspondant à la satiété, et telle que tout consommateur passe à la catégorie supérieure de besoins, dès qu'il dispose d'un revenu permettant la satiété des besoins inférieurs.

---

[1] *L'indice monétaire et la théorie de la Monnaie.* (Revue d'Economie Politique, 1926 et Librairie Sirey, Paris).

En fait la partie du revenu affectée à la satisfaction des besoins les plus urgents varie avec l'importance du revenu, mais l'hypothèse est admissible pour la détermination des caractéristiques générales de la demande. Elle pourrait d'ailleurs faire place, le cas échéant, à une hypothése plus conforme aux données de l'observation, sans que la méthode utilisée dans la présente étude soit modifiée.

Les objets de première nécessité.

En désignant par r_0 le revenu individuel minimum, et par q_l la consommation individuelle qui correspond à la satiété, le total QP des paiements relatifs aux objets de première nécessité se répartit en deux catégories, la pre-

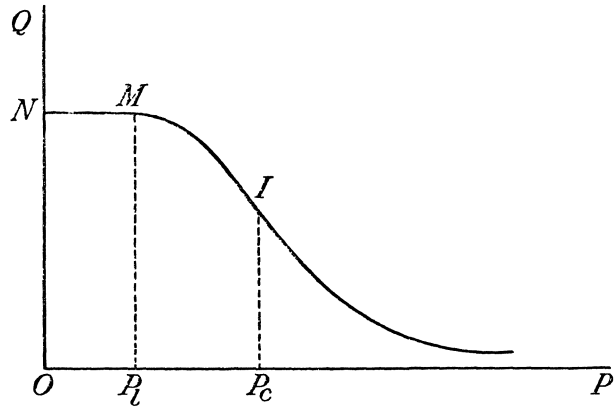


Fig. 1.

mière correspondant aux personnes dont le revenu, compris entre r_0 et q_lP, ne permet pas la satiété, le deuxième correspondant aux personnes qui peuvent se la procurer, conformément à l'équation:

$$QP=\int_{r_0}^{q_lP} rn(r)dr+q_lP\int_{q_lP}^{\infty} n(r)dr.$$

D'autre part, en adoptant la forme simplifiée de PARETO, $n(r)$ est définie par l'équation:

$$n(r)=\alpha A r^{-(\alpha+1)}$$

On en déduit immédiatement la loi de la demande, exprimant Q en fonction de P, soit:

$$Q=\frac{A}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{{r_0}^{\alpha-1}}\frac{1}{P}-\frac{1}{{q_l}^{\alpha-1}}\frac{1}{P^{\alpha}}\right).$$

Le prix P étant supposé plus grand que le prix limite $P_l=\frac{r_0}{q_l}$, la consommation Q est elle-même inférieure à la consommation limite $Q_l=\frac{q_lA}{{r_0}^{\alpha}}$.

Étude de la fonction Q. - L'étude de fonction Q et de ses deux premières dérivées conduit aux conclusions suivantes:

1°) la dérivée de Q est négative pour toutes les valeurs de P supérieures au prix limite P_l; pour cette dernière valeur la dérivée s'annule et Q atteint son maximum Q_l;

2°) la courbe présente un point d'inflexion pour une valeur de P supérieure à P_l, de telle sort que la concavité tout d'abord orientée vers la partie négative de l'axe des quantités se trouve orientée dans le sens opposé pour les valeurs de P supérieures à celle qui correspond au point d'inflexion.

Pour les valeurs de P inférieures à P_l, la loi de la demande est représentée par un palier horizontal.

Expression différentielle de la loi de la demande. Elasticité.

On constate aisément que la dérivée de QP par rapport à P est égale à la consommation Q_s afférente aux personnes qui peuvent obtenir la satiété, de telle sorte qu'on aboutit à l'expression:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dP}{P}\left(1 - \frac{Q_s}{Q}\right).$$

En posant:

$$\lambda = 1 - \frac{Q_s}{Q}$$

on obtient:

$$\frac{dQ}{Q} = -\lambda \frac{dP}{P}.$$

Le coefficient d'élasticité λ peut lui-même s'exprimer à l'aide des équations précédentes par la formule:

$$\lambda = \frac{\alpha x^{\alpha-1} - \alpha}{\alpha x^{\alpha-1} - 1}$$

x désignant le rapport $\frac{P}{P_1}$ du prix P limite.

On constate, à l'aide de cette expression, que le coefficient λ s'annule pour le prix limite, croit avec P et tend vers 1 lorsque P augmente indéfiniment; de plus, ce coefficient varie très lentement pour les valeurs de P qui ne sont pas voisines du prix limite, de telle sorte qu'en première approximation, la loi différentielle de la demande est représentée par l'équation simple ci-après.

$$\frac{dQ}{Q} = -\lambda_0 \frac{dP}{P}$$

où λ_0 représente un coefficient constant.

Cas des produits autres que les objets de première nécessité.

En désignant par ϱ la partie du revenu individuel absorbée par les groupes inférieurs, et en supposant $\varrho > r_0$, on aboutit à l'expression ci-après de Q, obtenue de la même façon que pour les objets de première nécessité:

$$Q = \frac{A}{\alpha - 1} \frac{1}{\varrho^{\alpha-1}} \cdot \frac{1}{P} \left[1 - \left(\frac{P}{\varrho + q_l P} \right)^{\alpha-1} \right]$$

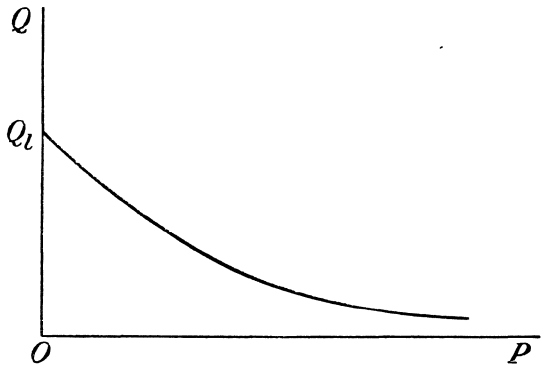


Fig. 2.

Étude de la fonction Q. - En étudiant les deux premières dérivées, on aboutit aux propriétés suivantes:

1°) la demande est fonction décroissante du prix; elle part d'une quantité finie correspondant à un prix nul pour tendre vers 0 lorsque P augmente indéfiniment;

2°) la concavité de la courbe est orientée vers la partie positive de l'axe des quantités.

A cet égard, une distinction doit être faite entre les objets de première nécessité et ceux dont la consommation exige un revenu supérieur au revenu minimum.

Demande relative à un produit particulier.
Forme probable des courbes réelles.

En utilisant les relations qui existent entre les index P, Q, d'une part, les prix et consommations p, q, d'autre part, on peut obtenir le débit d'un article en fonction de son prix, moyennant certaines hypothèses sur la répartition des revenus entre les objets d'un même groupe; par exemple, on admettra qu'il existe une proportion constante soit entre les quantités consommées des divers articles, soit entre les portions de revenu consacrées à chacun deux.

Pour ce problème particulier, il est d'alleurs inutile d'envisager d'amples

variations de prix, car de telles modifications altéreraient le classement établi entre les divers groupes d'articles.

En pratique, on doit admettre l'existence d'un prix limite, et faire état de la loi de substitution; les recherches statistiques devraient d'ailleurs surtout

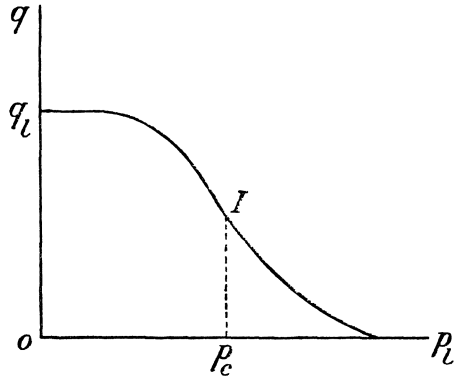


Fig. 3.

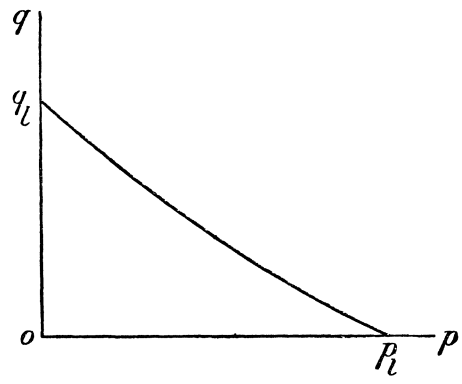


Fig. 4.

porter sur le coefficient d'élasticité, à l'effet de préciser la valeur de paramètres relatifs à la loi différentielle de la demande.

Influence de la variation des prix relatifs aux catégories inférieures de biens. Modifications des revenus individuels.

En considérant Q comme une fonction de ϱ et en supposant P constant, on peut apprécier l'influence des variations de prix relatives aux catégories inférieures de biens sur la consommation d'un groupe de produits; cette méthode pourrait d'ailleurs être utilisée dans le cas de variation des revenus individuels.

Conclusions.

Il serait intéressant de compléter cette étude théorique par des recherches statistiques précises; d'ailleurs la théorie de la valeur devra elle-même faire l'objet d'observations concrètes pour porter tous ses fruits, l'expérience seule étant rénovatrice, ainsi que le proclamait HENRI POINCARÉ.

Notre étude est complétée par quelques indications portant sur la consommation du tabac en France et sur l'Industrie des transports en commun; les données ainsi recueillies paraissent assez concluantes en ce qui concerne la stabilité du coefficient d'élasticité.

K.-G. HAGSTROEM (Stockholm - Svezia)

DE τῆς τέχνης PROBLEMATE COLLEGIORVM SALVTARIVM

I. - Prooemium.

Liceat mihi, nunc primum in Italiae regnum recenti opulentia florentissimum profecto, antiqua lingua sempiterna utier, quum in memoriam reuoco uestram, collegae praeclarissimi, *collegia salutaria*, quae temporibus principatus florescebant, praecursores quidam maturi societatum ingentium, quae nostra aetate de calamitatibus mortis cauent. Nominatim commonefaciam uos collegii funeraticii *cultorum Dianae et Antinoi*, cuius lex ab ipsis constituta, atque adeo ordo cenarum, in tabula Lanuuii inuenta inscripta et nobis conseruata est. Hanc inscriptionem, iam prius multa cum eruditione a Mommsenio atque aliis editam, duo abhinc annos denuo edidi, in linguam meam transtuli, commentatus sum (1). Quibus studiis dum me trado, etiam conatus sum quantitatem huius contra damnum obitus tutelae in calculos uocare. Funeraticium collegii Dianae et Antinoi HS CCC nummorum comparaui funeraticiis aliorum, locos scriptorum ueterum collegi de pretiis frumentorum, edictum peruulgatum Diocletiani consului de pretiis rerum uenalium inter se comparatis. Ex quo illa conclusio, quae forsitan incerta non sit, nata est, funeraticia uel saltem stipes menstruae collegiorum ueterum fere aequalia esse summis, quas promittunt nostrae societates cautioni uulgi operam tribuentes, uel stipibus quas poscunt. Quod utinam admirationem institutionum Romanorum nonnihil augeat!

Societatem, quae more nostri temporis de calamitatibus mortis caueat, institutam in hac disputatione nomine « *communitatis* » designaturus sum. Qua appellatione etiam hoc expressum uelim, societatem principiis iustissimis res sociorum administrare. Perspicuum enim est, hanc curam aut maiore aut minore studio absolui posse. Vetustiores societates nostrae aetatis quaestum ex negotio gerendo orientem sibi ipsae conseruabant. Quum autem apparuisset, hac occupatione lucra nimia facillime exoriri, salutisque publicae magni interesse, ut in his rebus principia praeualerent quam iustissima, nunc fere omnes societates nostrae socios suam cautionem petentes participes quaestus fecerunt.

---

(1) *En folkförsäkring under romerska kejsartiden.* (Nordisk Försäkringstidtskrift, 1926). Vide CIL xiv 2112.

Illud participium inuentio ut dicam noua in rebus oeconomicis est. Nam « communitas » hoc modo negotians nec est collegium uel sodalitas, quorum sociis inter se aequalibus res quaedam communis curae est, nec societas hominum suo priuato compendio seruientium. Sed constituitur communitas

primum ab hominibus quibusdam publice professis, se ex principiis palamfactis societatem gesturos esse et ex collata pecunia fenus tantummodo modicum accepturos,

tum a multitudine hominum, qui in clientelam communitatis se conferunt, ut sibi damna mortis praestentur, soli participes quaestuum ex negotio nascentium.

Quod uere *cooperatio* appellari potest, — misso iure suffragii, quod sociis minimi momenti est, — dummodo ne negligatur ius mathematicum.

Quum inter plurimas societates constet, participium iustum et expetendum esse, tamen discrepat, quomodo ad usum transferendum sit. Summum enim quaestus diuidendi ius lucet non esse. Sin dicitur, quemadmodum ex auro a singulis sociis collato quaestum communitatis natum, ita etiam diuidendum esse, apparet cuiuis mathematico, his uerbis quaestionem non persolui. Res perquam implicata ac difficilis uidetur.

II. - Fundamentum primum.

Quo facilius problemati nostro appropinquemus, res ueras simpliciore imagine constructa quasi schemate commutemus oportet. Statuamus igitur primo rationem continuam moriendi constanter $=\mu$ esse. Tractemus iam nihil nisi artem simplicem de calamitate mortis cauendi perusitata, quo pacto socio fides datur, ipsum a certo spatio temporis, n annorum, sin autem antea mortuus sit, heredem ipso mortis tempore pecuniam quandam, quae aequalis unitati monetae statuta sit, accepturum esse, dum tamdiu conferat socius quamdiu uiuet, usque ad annum n^{um}, societati stipem continuam, cuius summa annua aequalis p_0 sit. Denotante δ_0 rationem continuam usurae pro anno computatam, stips continua annalis data est aequatione sequenti:

$$p_0 \cdot \int_0^n e^{-(\mu+\delta_0)u} du = 1 - \delta_0 \cdot \int_0^n e^{-(\mu+\delta_0)u} du.$$

Quantitates summarum, uel « integralium », quae hic prodeunt, nostrae theoriae magni momenti erunt. Notationes sequentes introducimus, significante littera Δ uel $\Delta(t)$ rationem continuam annalem usurae uere ualentem tempore t.

Ratio continua annalis	δ	$\mu+\delta$	Δ	$\mu+\Delta$
Ratio ad illam accomodata, singulis annis exeuntibus soluenda	$i=e^{\delta}-1$	j	I	J

Pretium praesens summae 1 post n annos soluendae	$v^n = e^{-n\delta} = \frac{1}{(1+i)^n}$	$v(\mu)^n$	V^n	$V(\mu)^n$
Pretium praesens stipis continuae, 1 anniuersarie, n annis	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil} = \int_0^n e^{-\delta u} du$	$\bar{a}_{\overline{n}\rceil}(\mu)$	$\bar{A}_{\overline{n}\rceil}$	$\bar{A}_{\overline{n}\rceil}(\mu)$
Idem pretium post n annos	$\bar{s}_{\overline{n}\rceil} = (1+i)^n \bar{a}_{\overline{n}\rceil}$	$\bar{s}_{\overline{n}\rceil}(\mu)$	$\bar{S}_{\overline{n}\rceil}$	$\bar{S}_{\overline{n}\rceil}(\mu)$

Litteris v_0'', $v_0(\mu)^n$, $\bar{a}^0_{\overline{n}\rceil}$ etc. denotantur quantitates v^n, $v(\mu)^n$, $\bar{a}_{\overline{n}\rceil}$ etc., si δ mutatum est littera δ_0, dum μ immutabile conseruatur.

Stipem continuam p_0 pactionis supra definitae sic determinat communitas, ut rationem statuat usurae continuam quasi certam, id est uerisimiliter minimam. Ut supra illa ratio δ_0 sit, unde consequitur:

$$p_0 = 1 : \bar{a}^0_{\overline{n}\rceil}(\mu) - \delta_0 .$$

Binae quantitates (μ, δ_0) *fundamentum calculatorium primi ordinis* siue simpliciter *primum* constituunt. Omitto omnia impendia, quae assumptionibus stipique peculiari supplenti, accurate respondere puto, ut radicitus e ratione tollantur. Fundamentum primum si uerum fuisset, societas pacta stipe accepta, pactis funeraticiis exsolutis summam pecuniae

$$W_0(t) = 1 - \bar{a}^0_{\overline{n-t}\rceil}(\mu) : \bar{a}^0_{\overline{n}\rceil}(\mu)$$

tempore t reseruauisset. Qua igitur summa reseruata opus esset ad id, quod communitas se facturam recepit, bene efficiendum, si res secundum fundamentum primi ordinis progrederentur. Ac fundamentum tamen primum magna cum prudentia eligatur necesse est, itaque fere semper communitati fauetur.

III. - Fundamentum secundum. Diuisio quaestus.

Oportet definitionis respectu communitatis plus dare quam pacto praescriptum est. Quam postulationem nonnullae communitates eiusmodi obseruare solent, ut quotannis stipem pactam quodam modo minuant, quod diuisionem quaestus appellant. Aliae aliter agunt. Vtique ea res ad hoc extremum redire debet: *fundamentum secundi ordinis* uel *secundum* ita definiendum, ut certe beneficia maxima quae a communitate praestanda sunt iustissimis principiis determinentur. Nam euidenter patet, illi summae 1 primi fundamenti, quae pactione statuitur, ne assem quidem addendum esse, nisi quaedam de euolutione usurae per totum pacti spatium coniectura facta est. Ergo dici potest, utcumque diuisio quaestus fiat, extremo loco communitati semper opus esse fundamento secundo calculatorio. Systematis quod hic inuestigabimus distributorii, paucis annis prius a communitate « *Framtiden* » instituti, proprium est quod fundamentum secundum muta-

bile ad uariationes usurae accomodatur. Accedit quod communitas, memor eorum quae sibi proposuit, et incrementum summae ad mortem soluendae diminutione stipis potiorem habens, incrementum illud solum concedit. Sed ea res minor.

Motus functionis $\Delta(t)$ si ante cognouissemus, oeconomia uera pacti nostri facile numeris persequenda esset. Quae quum aliter sint, necesse est definiatur quoque temporis puncto fundamentum secundi ordinis formula quadam, ratione omnium rerum iam cognitarum habita. Quod sane non uno modo effici potest. Inter complures deligamus simplicem. Definiatur igitur tempore t binis numeris (μ, δ) fundamentum secundi ordinis, primo fundamento fere congruens, ubi denotat δ rationem usurae per totum spatium n annorum constantem. Alio tempore aliud δ definiretur. Fundamento secundo (μ, δ) ut summa 1 quocumque obitu solui possit, stipem continuam annalem

$$p = 1 : \bar{a}_{\overline{n}|}(\mu) - \delta$$

conferendam esse apparet. Quum autem stips annalis pacto determinata

$$p_0 = 1 : \bar{a}^0_{\overline{n}|}(\mu) - \delta_0$$

collata est, alia summa quam 1 repraesentari potest, uidelicet

$$p_0 : p = p_0 \cdot \frac{1 - v(\mu)^n}{\mu + \delta v(\mu)^n} = p_0 \cdot \frac{(1+j)^n - 1}{\mu(1+j)^n + \delta},$$

quae maior solet esse unitate, ratione δ_0 diligenter selecta. Ad quod faciendum quouis momento temporis t opus est pecunia

$$W(t) = \frac{p_0}{p} \cdot \left[1 - \frac{\bar{a}_{\overline{n-t}|}(\mu)}{\bar{a}_{\overline{n}|}(\mu)}\right] = p_0 \cdot \frac{v(\mu)^{n-t} - v(\mu)^n}{\mu + \delta v(\mu)^n} = p_0 \cdot \frac{\mu(1+j)^n + \delta}{(1+j)^t - 1}.$$

IV. - *Τῆς τέχνης* problema.

Principium functionis $\delta(t)$ determinandae quod sequitur esto: pecunia a communitate tempore t reseruata, quae aptum in modum aestimata est, numerum δ eius modi determinet, ut ad summam $p_0 : p$ soluendam semper accurate sufficiat, addita illa stipe p_0, si modo postea $\Delta(t) = \delta$ sit.

Vt exacte definiatur quid ualeat functio $\Delta(t)$ recte postulatur. Ratio enim usurae non una est, sed cum genere mutuationis uariabilis. Ponamus exempli gratia, tempore t pecuniam mutuam dari ciuitati uel aliis in $m - t$ annos, ubi $m \geqslant n$ sit. Duos casus praecipue distinguimus:

primum si cuncta pecunia in fenus *perpetuum* semper conuertitur,

secundum si hoc modo mutua datur, ut tempore n, id est *exeunte spatio pactionis salutaris* reddatur.

Casum primum signo $[m = \infty]$, secundum signo $[m = n]$ denotabimus.

Data problematis haec sunt. Cognouimus functionem $\Delta(x)$ ab $x = 0$ usque

ad $x=t$, in quo momento nunc sumus. Functio $\delta(x)$ iam prius a $x=0$ ad $x=t$ computabatur. Diuitiae communitatis $U(x)$ momento x cognitae sunt usque ad $x=t$. Momentum $t....t+dt$ consideramus. Quaeritur functio $\delta(t)$.

Primo diuitiae $U(t)$ respectu rationis $\delta(t)$ aestimandae sunt. Statuimus, puncto $x....x+dx$ functionem $U(x)$ numero $dU(x)$ increuisse. Quae summa illo tempore ita commodata est debitoribus, ut communitati fenus annale continuum $dU(x)\Delta(x)$ per $m-x$ annos, deinde pecunia $dU(x)$ detur. Nunc restat fenus annale $dU(x)\Delta(x)$ per $m-t$ annos, deinde eadem pecunia $dU(x)$. Aestimemus, sequitur

$$dU(x)\Delta(x)\cdot\int_0^{m-t} e^{-\delta u}du+e^{-\delta(m-t)}\cdot dU(x).$$

Integrandum est ab $x=0$ usque ad $x=t$:

$$\bar{a}_{\overline{m-t}|}\cdot\int_0^t \Delta(x)dU(x)+v^{m-t}\cdot U(t).$$

Scribi potest

$$\int_0^t \Delta(x)dU(x)=\Delta(t)\,U(t)-\int_0^t U(x)d\Delta(x)$$

atque fit quantitas diuitiarum $U(t)$ respectu δ aestimata

$$U(t)[\bar{a}_{\overline{m-t}|}\cdot\Delta(t)+v^{m-t}]-\bar{a}_{\overline{m-t}|}\cdot\int_0^t U(x)d\Delta(x).$$

Iam exprimatur, hanc quantitatem pecuniae fundamento secundo reseruandae $W(t)$ aequalem esse, ubi obtinetur in casu $[m=n]$

$$U(t)[\bar{a}_{\overline{n-t}|}\Delta(t)+v^{m-t}]-\bar{a}_{\overline{n-t}|}\cdot\int_0^t U(x)d\Delta(x)=W(t)=p_0\cdot\frac{\mu(1+j)^n+\delta}{(1+j)^t-1}\ldots.\ A[m=n].$$

In casu $[m=\infty]$ habemus, si positum est

$$\int_0^t \Delta(x)dU(x)=u(t)\quad\text{et}\quad\delta(t)\,W(t)=w(t),$$

simplicius

$$u(t)=w(t)=p_0\cdot\delta\cdot\frac{(1+j)^t-1}{\mu(1+j)^n+\delta}\ldots.\ A[m=\infty].$$

Porro formetur aequatio differentialis functionis $U(t)$ siue $u(t)$. Facile obtinemus casu generali relationem quae sequitur.

Vectigalia: stips continua:

$$p_0dt+$$

fenora:

$$+dt\int_0^t \Delta(x)dU(x)+$$

fenora morte incidente uendita:

$$+\mu dt[\bar{A}_{\overline{m-t}|} \cdot \int_0^t \Delta(x)dU(x) + V^{m-t}U(t)] =$$

Expensa: incrementum diuitiarum:

$$= U'(t)dt +$$

funeraticia:

$$+\mu dt \cdot \frac{p_0}{p}.$$

Efficitur

$$U'(t) = p_0\left(1-\frac{\mu}{p}\right) + (\mu+\Delta)\cdot U(t) - (1+\mu\bar{A}_{\overline{m-t}|}) \cdot \int_0^t U(x)d\Delta(x)$$

uel si ambo casus distinguimus

$$U'(t) = (\mu+\Delta)U(t) + p_0\left(1-\frac{\mu}{p}\right) - (1+\mu\bar{A}_{\overline{n-t}|}) \int_0^t U(x)d\Delta(x) \ldots . B[m=n]$$

atque

$$u'(t) = (\mu+\Delta)u(t) + p_0\Delta\left(1-\frac{\mu}{p}\right) \ldots . B[m=\infty].$$

Systemate aequationum A et B functiones incognitae aut U, δ aut u, δ determinantur. Apparet computationem exactam haud facilem esse.

V. - Solutiones appropinquantes.

Sit interuallo 0....n functio $\Delta(t)$ constans, facile demonstratur systema (A, B) posito $\delta(t) = \Delta$ satisfieri. Nam ponamus in aequatione B

$$d\Delta(x) = 0,\ p = P = 1 : \bar{A}_{\overline{n}|}(\mu) - \Delta,$$

erit

$$U'(t) = (\mu+\Delta)U(t) + p_0\left(1-\frac{\mu}{P}\right)$$

siue

$$U(t) = e^{(\mu+\Delta)t}\left[U(0) + p_0\left(1-\frac{\mu}{P}\right)\int_0^t dx \cdot e^{-(\mu+\Delta)x}\right]$$

$$= p_0\left(1-\frac{\mu}{P}\right)\cdot\frac{e^{(\mu+\Delta)t}-1}{\mu+\Delta} = p_0 \cdot \frac{(1+J)^t - 1}{\mu(1+J)^n + \Delta},$$

quod aequationi A, si quidem positum est $\Delta = \delta$, exacte satisfacit. Ergo apparet hanc unam solutionem esse, nec tamen dici potest, nullas alias esse.

Perspicuum est itaque, methodum quam exposuimus distribuendi exitum iustissimum habere, si ratio usurae per totum pacti spatium constans permanet. Quid, si paullum mutetur? Certe non multum aberit, quin δ medium fere aequalem medii functionis Δ habeat. Nam sine dubio functio δ modo quodam continuo generatur. Sed multum interest, casus minus simplices nonnihil illuminari.

Quod numeris haud difficile fieri poterit, si modo positum erit, tempus consideratum in interualla hoc modo diuidi, ut quolibet interuallo neque Δ neque δ uarietur. Sit $t \ldots t_1$ quoddam interuallum, habebimus aequationem huius formae

$$y' = (\mu + \Delta)y + Q_m$$

ubi

$$Q_n = p_0\left(1 - \frac{\mu}{p}\right) - (1 + \mu\bar{A}_{\overline{n-t}|}) \int_0^t U d\Delta,$$

$$Q_\infty = p_0 \Delta \left(1 - \frac{\mu}{p}\right).$$

Soluetur facillime illa aequatio, quoniam $\mu + \Delta$ et Q_m constantia ponentur, eritque, interuallo uno anno aequato,

$$y_1 = y_0(1 + J) + Q_m \cdot \frac{J}{\mu + \Delta}.$$

Interuallo exeunte, functio δ denuo aequatione A determinatur, quo numero δ adiuuante nouum Q_m computatur. Posthac iterum aequatione supra data possumus uti et similiter subinde.

Sit exempli gratia

$$\mu = \text{Log } 1{,}005 = 0{,}00498\ 754, \qquad n = 20,$$

$$j_0 = 4\,\%\ (\mu + \delta_0 = 0{,}03922\ 07,\ \delta_0 = 0{,}03423\ 32,\ i_0 = 3{,}48259\,\%),$$

unde $p_0 = 0{,}03793$. Sit porro $m = \infty$ et $J = 5\,\%$ siue $\mu + \Delta = 0{,}04879\ 02$. Solutio una huius problematis est simpliciter $j = 5\,\%$, alias nimirum adipiscemur, si aliud initium elegerimus functionis $\delta(t)$ siue $j(t)$. Si elegerimus functioni $j(t)$ ineunti numerum $10\,\%$, sequetur

$$\mu(1) = 0 + 0{,}03793 \cdot 0{,}04488\ 89 \cdot \left(1 - \frac{0{,}00498\ 754}{0{,}02162\ 85}\right)$$
$$= 0{,}00130\ 998.$$

Rationibus $j = 5\,\%$ et $4\,\%$ respondent numeri functionis $w(1)$

$$0{,}00114\ 99 \quad \text{et} \quad 0{,}00145\ 64.$$

Concluditur secundo anno j ualere $4{,}52\,\%$. Iterum functio u computatur:

$$u(2) = 0{,}00137\ 548 + 0{,}03793 \cdot 0{,}04488\ 89 \cdot \left(1 - \frac{0{,}00498\ 754}{0{,}03609\ 90}\right) = 0{,}00284\ 285.$$

Sequitur, tertio anno $j = 4{,}78\,\%$ esse. Protinus habemus

$$u(3) = 0{,}00298\ 499 + 0{,}03793 \cdot 0{,}04488\ 89 \cdot \left(1 - \frac{0{,}00498\ 754}{0{,}03523\ 50}\right) = 0{,}00444\ 659$$

et porro similiter $j = 4{,}86\,\%$ itidemque

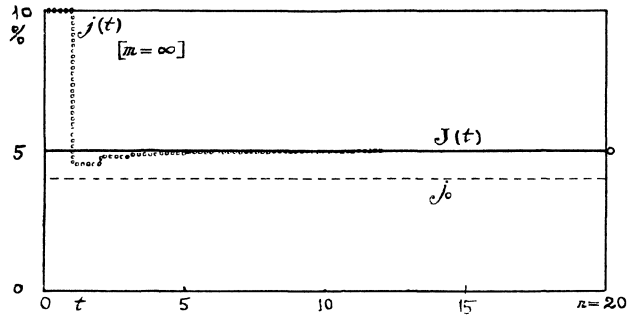
$$u(4) = 0{,}00612\ 870.$$

Mox functio $j(t)$ numero $J = 5\,\%$ proxime accedit, ut tabula sequente illustratur.

TABVLA I.

t	J %	$[m = \infty]$		t	J %	$[m = \infty]$	
		j	$p_0 : p$			j	$p_0 : p$
0	5	10 %	1,75370	10	5	4,96	1,09526
1	5	4,52	1,05070	11	5	4,96	1,09565
2	5	4,78	1,07648	12	5	4,97	1,09587
3	5	4,86	1,08462				
4	5	4,90	1,08880				
5	5	4,92	1,09078				
6	5	4,93	1,09230				
7	5	4,94	1,09344				
8	5	4,95	1,09405				
9	5	4,95	1,09466	20	5	5,00	1,099

AD TABVLAM PRIMAM



VI. - Status incipiens.

Functionibus $U(t)$ uel $u(t)$ atque $\delta(t)$ systemate (A, B) determinatis duo uidelicet gradus libertatis sunt. De exemplo nuper tractato intelligitur, functionem δ, quum initium eius ita electum sit, ut a medio illius Δ longe discrepet, nihilo minus methodo nostra huic functioni Δ paullatim appropinquare. Valetne id generaliter? Si non ualet, quibus conditionibus numerus iniens satisfacere debet, ut haec compensatio impossibilis sit?

Sed collegiorum salutarium nostrae aetatis imprimis interest scire, quo nu-

mero orsa functio δ sub lineam $\delta=\delta_0$ degrediatur. Nam si ita fieret, communitas cogeretur, funeraticium reddere minus quam pacto pollicita esset. Quando id ipsum fieri non licet, necesse est emendetur aliquantum methodus distributoria, ut sit semper $\delta \geqslant \delta_0$.

Ab $t=0$ functio $U(t)$ uel $u(t)$ semper numero 0 inchoatur. Communitas autem officium suum conservans saepe cogitur functionem δ non omnino secundum uariationes functionis Δ determinare, sed paucis annis, — pone ab $t=0$ usque ad $t=t_0$, — quasi obiter computare. Ab $t=t_0$ subtilius ratiocinari uolumus, data pecunia $U(t_0)$. Duo igitur eo casu numeri indeterminati sunt, scilicet $U(t_0)$ atque $\delta(t_0)$. Ex systemate (A, B) ut supra functiones $U(t)$ et $\delta(t)$ ab $t=t_0$ determinantur. Iterum scire oportet num permaneat semper $\delta \geqslant \delta_0$.

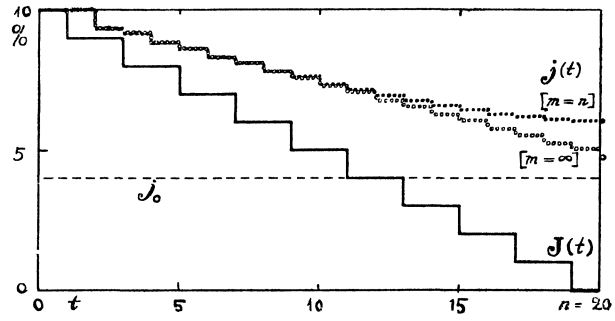
Hae quaestiones non faciles uidentur. Agitur enim de solutionibus cognoscendis omnibus quas continet systema differentiale (A, B), statu incipienti quolibet modo uariante. Hic tractare nonnullos casus speciales satis habebimus.

VII. - Solutiones selectae.

Quosdam casus speciales selegimus ad eas quaestiones paullum illuminandas, si fieri poterit, quas plurimum interesse putamus. Omnia exempla ad eandem cautionis formam referentur, quam iam ante explicauimus. Est itaque $j_0=4\,\%$, stips continua, anniuersarie soluta, 0,03793. Pecunia 1 a communitate exsoluitur tempore mortis uel saltem post 20 annos.

Sit primum functio J gradatim decrescens ab numero 0,1 ad 0 per totum spatium temporis quod consideramus. Magnitudo functionis $j(t)$ incipientis eadem sit quae functionis J, id est 10 centesimae. Nunc euoluantur algorismi, quos definiunt systemata (A, B). Generantur duae functiones $j(t)$, quas tabula sequente imagineque illustrare uoluimus. In omnibus tabulis ex duobus finibus cuiusdam interualli sinister solus ad id refertur.

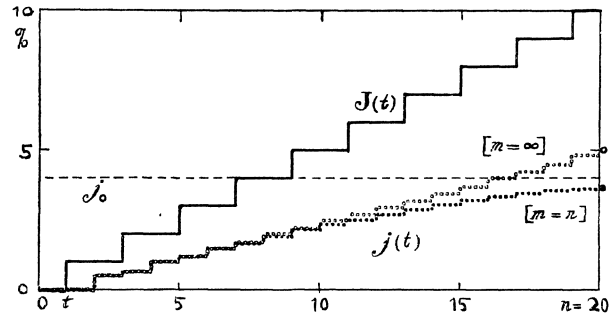
AD TABVLAM SECVNDAM



TABVLA II.

t	J %	$[m = \infty]$		$[m = n]$	
		j	$p_0 : p$	j	$p_0 : p$
0	10	10 %	1,7537	10 %	1,7537
1	9	10	1,7537	10	1,7537
2	9	9,35	1,6529	9,33	1,6501
3	8	9,21	1,6310	9,18	1,6272
4	8	8,84	1,5768	8,82	1,5741
5	7	8,64	1,5481	8,63	1,5466
6	7	8,32	1,5023	8,31	1,5009
7	6	8,10	1,4721	8,10	1,4719
8	6	7,80	1,4315	7,82	1,4340
9	5	7,57	1,4011	7,62	1,4075
10	5	7,28	1,3639	7,36	1,3736
11	4	7,06	1,3350	7,16	1,3488
12	4	6,77	1,2999	6,94	1,3205
13	3	6,54	1,2715	6,77	1,2994
14	3	6,27	1,2392	6,58	1,2764
15	2	6,04	1,2129	6,43	1,2585
16	2	5,76	1,1816	6,29	1,2419
17	1	5,52	1,1550	6,19	1,2297
18	1	5,26	1,1268	6,10	1,2198
19	0	5,03	1,1030	6,05	1,2142
20	—	4,76	1,0748	6,03	1,2118

AD TABVLAM TERTIAM



Inuestigemus et alium casum, ubi ponatur, J gradatim increscere a 0 ad 0,1, uelut si functio nuper tractata in speculo uideretur. Deriuantur facile functiones $j(t)$, quae in tabula sequente sunt.

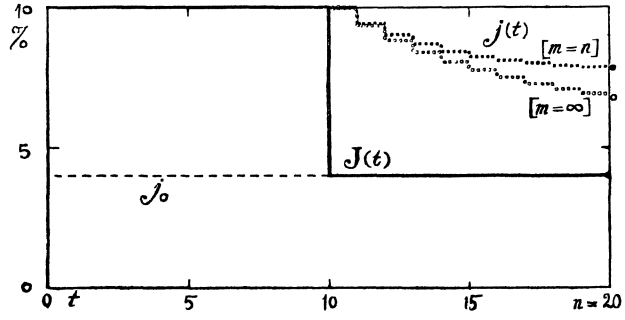
TABVLA III.

t	J %	$[m=\infty]$		$[m=n]$	
		j	$p_0:p$	j	$p_0:p$
0	0	0 %	0,6897	0 %	0,6897
1	1	0,00	0,6897	0,00	0,6897
2	1	0,50	0,7220	0,53	0,7240
3	2	0,66	0,7327	0,66	0,7328
4	2	1,00	0,7559	1,00	0,7559
5	3	1,19	0,7693	1,19	0,7693
6	3	1,48	0,7902	1,47	0,7896
7	4	1,70	0,8065	1,66	0,8036
8	4	1,99	0,8286	1,90	0,8216
9	5	2,20	0,8449	2,17	0,8425
10	5	2,47	0,8660	2,32	0,8545
11	6	2,68	0,8836	2,50	0,8690
12	6	2,95	0,9063	2,70	0,8854
13	7	3,17	0,9252	2,86	0,8986
14	7	3,44	0,9490	3,05	0,9153
15	8	3,69	0,9716	3,20	0,9279
16	8	4,00	1,0000	3,34	0,9401
17	9	4,21	1,0204	3,46	0,9508
18	9	4,47	1,0458	3,56	0,9594
19	10	4,71	1,0697	3,62	0,9648
20	—	4,98	1,0974	3,64	0,9670

Hos duos casus praesertim selegimus, ut demonstraretur, *quam uim haberent uariationes quasi seculares functionis* Δ (siue J). Quid ex his exemplis generaliter concludere audeamus, haud certum est. Interest autem obseruare, formam linearem functionis J in functione j reuerti, at certe si casum $[m=\infty]$ contempleris.

Nunc proficiscemur ad alium casum, haud minus utilem. Videndum est, *quomodo uarietur functio $j(t)$ si subito saliat J ab uno numero ad alium.* Ut supra duos casus inuestigabimus, alterum si J a $t=0$ ad $t=10$ numero $10\,^0/_0$ adaequat, eo loco saliens ad numerum $4\,^0/_0$ (id est j_0), ubi postea manet, — hic de ruina magna agitur repentinaque, — alterum si contra a numero $4\,^0/_0$ iniens in puncto $t=10$ ad $10\,^0/_0$ salit, ubi deinde remanet.

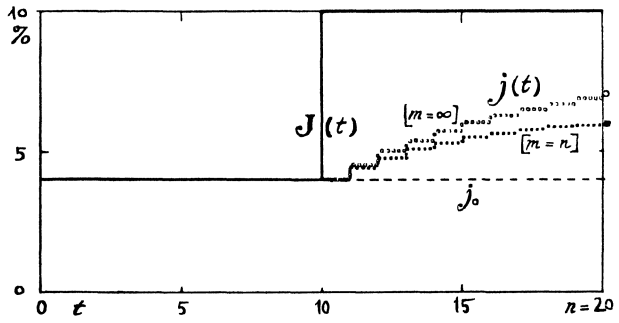
AD TABVLAM QVARTAM



TABVLA IV.

t	J $^0/_0$	$[m=\infty]$		$[m=n]$	
		j	$p_0:p$	j	$p_0:p$
$0\div9$	10	$10\,^0/_0$	1,754	$10\,^0/_0$	1,754
10	4	10,00	1,754	10,00	1,754
11	4	9,35	1,653	9,43	1,665
12	4	8,83	1,575	9,01	1,602
13	4	8,40	1,514	8,69	1,555
14	4	8,05	1,465	8,43	1,518
15	4	7,76	1,426	8,23	1,490
16	4	7,50	1,391	8,08	1,470
17	4	7,27	1,362	7,97	1,454
18	4	7,07	1,337	7,90	1,444
19	4	6,90	1,315	7,85	1,438
20	—	6,73	1,295	7,83	1,436

AD TABVLAM QVINTAM

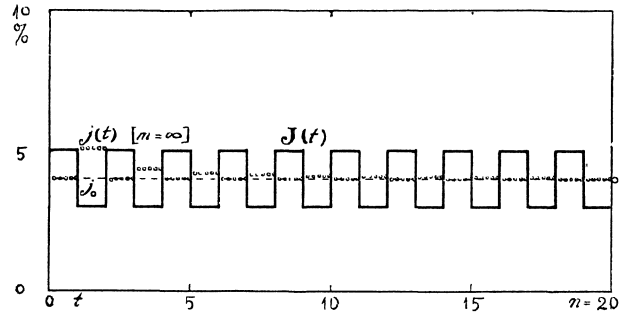


TABVLA V.

t	J %	$[m = \infty]$		$[m = n]$	
		j	$p_0 : p$	j	$p_0 : p$
0÷9	4	4 %	1,000	4 %	1,000
10	10	4,00	1,000	4,00	1,000
11	10	4,54	1,053	4,43	1,042
12	10	5,01	1,100	4,78	1,077
13	10	5,39	1,141	5,07	1,106
14	10	5,73	1,178	5,30	1,132
15	10	6,03	1,212	5,50	1,153
16	10	6,28	1,241	5,65	1,170
17	10	6,50	1,267	5,78	1,183
18	10	6,70	1,292	5,86	1,193
19	10	6,89	1,314	5,92	1,199
20	—	7,06	1,336	5,93	1,200

Postremo ueniemus ad questionem, *quemadmodum, si uibret J circum quendam numerum medium, creetur functio i(t)*. Periculum hic perturbationis frequentis rerum oeconomicarum tractatur. Ille numerus medius 4 % ualeto. Vacillationem quum inter 5 % et 3 % tum inter 7 % et 1 % intuemur. Quid fiat $j(t)$, ex tabulis sequentibus apparet.

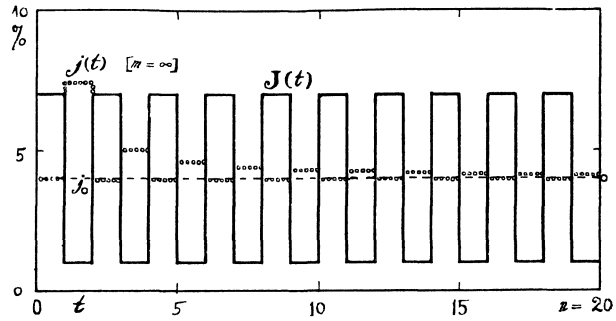
AD TABVLAM SEXTAM



TABVLA VI.

t	J %	$[m = \infty]$		t	J %	$[m = \infty]$	
		j	$p_0 : p$			j	$p_0 : p$
0	5	4 %	1,000	10	5	3,99	0,999
1	3	5,08	1,107	11	3	4,08	1,008
2	5	3,98	0,998	12	5	3,99	0,999
3	3	4,33	1,032	13	3	4,07	1,007
4	5	3,99	0,999	14	5	3,99	0,999
5	3	4,20	1,019	15	3	4,06	1,006
6	5	3,99	0,999	16	5	3,99	0,999
7	3	4,14	1,014	17	3	4,05	1,005
8	5	3,99	0,999	18	5	3,99	0,999
9	3	4,10	1,010	19	3	4,04	1,004
				20	—	3,99	0,999

AD TABVLAM SEPTIMAM



TABVLA VII.

t	J %	$[m=\infty]$		t	J %	$[m=\infty]$	
		j	$p_0 : p$			j	$p_0 : p$
0	7	4 %	1,000	10	7	3,96	0,996
1	1	7,40	1,380	11	1	4,23	1,023
2	7	3,95	0,996	12	7	3,96	0,996
3	1	5,02	1,102	13	1	4,19	1,019
4	7	3,96	0,996	14	7	3,96	0,996
5	1	4,59	1,058	15	1	4,16	1,015
6	7	3,96	0,996	16	7	3,96	0,996
7	1	4,40	1,039	17	1	4,13	1,013
8	7	3,96	0,996	18	7	3,95	0,996
9	1	4,30	1,029	19	1	4,11	1,011
				20	—	3,95	0,996

Ad finem opusculi aduecti sumus. *Τῆς τέχνης* problema non modo non soluimus — quia et uires desunt et otium —, sed ne tetigimus quidem omnia quae ad id pertinent. Exempli gratia neque quaesiuimus, methodusne nostra quaestus diuidendi melior esset ea, qua sociis uiuis continue exsoluitur pecunia $p_0 - p$, neque constaretne modus mutuandi diuitias communes, qui, ratione usurae decrescente, periculi minoris esset quam casus $[m=n]$, uel etiam minimi. Quae quum ita sint, ut supra ostendimus, perspicuum est, hunc casum meliorem esse quam $[m=\infty]$. Omnia illa problemata perbene solui collegiorum salutarium magnopere interesse oportet.

Quod autem problema uoluimus proponere uobis, collegae praeclarissimi, quamuis nondum solutum, iam tamen aliquatenus illustratum esse, sperare forsitan liceat.

K. GOLDZIHER (Budapest - Ungheria)

ANGENÄHERTE LÖSUNG ALGEBRAISCHER GLEICHUNGEN MIT ANWENDUNGEN AUF DIE RENTENRECHNUNG

1. - Die hier zu behandelnden Anwendungen gründen wir auf die folgende algebraische Vorbemerkung:

Wendet man auf das rationale ganze Polynom

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

die zusammengesetzte lineare ganze Transformation

$$x = a + by, \qquad \text{d. h.} \qquad y = \frac{x-a}{b}$$

an, so folgt nach Potenzen von y geordnet:

$$f(x) \equiv S_0 + S_1 \bar{y} + S_2 \bar{y}^2 + \ldots + S_{n-1} \bar{y}^{n-1} + S_n \bar{y}^n. \tag{1}$$

Hierbei ist

$$\bar{y} = \frac{b}{a} y$$

und

$$S_k = \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n-l}{k} a_l a^{n-l}. \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

Insbesondere ist

$$S_0 = f(a).$$

Die Werte S_k lassen sich am einfachsten mit dem aus der Kollektivmasslehre bekannten « Summenverfahren » (1) berechnen; man bestimmt als erste Kolonne die Gliederreihe von $f(a)$, bildet dann als nächste Kolonnen die aufeinander folgenden Aufsummierungen, jeweils mit Weglassung des letzten Gliedes, und addiert eine jede Kolonne. So ist z. Bp. S_1 die Summe der ersten Aufsummierungen der Gliederreihe von $f(a)$, mit Weglassung des absoluten Gliedes, u. s. f.

---

(1) Siehe z. Bp. LIPPS: *Die Theorie der Kollektivgegenstände.* (Wundt, Philosophische Studien, XVII Band), Leipzig, Engelmann, 1902, S. 182-184. Für die numerische Berechnung von Momenten nach dieser Methode siehe z. Bp. BAGNI: *Teoria matematica dei fenomeni collettivi*, Firenze, Barbera, 1915, I, § 7. - Über die Verwertung ähnlicher Aufsummierungen für die Berechnung des Barwertes der allgemeinen veränderlichen Rente siehe die Arbeit des Verfassers in der Österreichischen Handelsschulzeitung 1912, Heft 4.

Das vorkommende rechnerische Schema ist also auf Additionen zurückgeführt, die mit der Rechenmaschine vorteilhaft zu erledigen sind. Der erste Schritt: die Bestimmung der Gliederreihe von $f(a)$ kann bei den hier folgenden Anwendungen durch die Benützung der fertigen Potenztabellen der Politischen Arithmetik abgekürzt werden; es eignen sich besonders solche Tabellen, bei denen Zeilen bis zu 200 vorhanden sind, zum Beispiel die GLOVERschen oder einzelne MURAIschen Tabellen.

Als ersten Specialfall der obigen Transformation erwähnen wir die Wurzelverminderung um eine Einheit, bei der zu setzen ist:

$$a=b=1.$$

In diesem Fall kann man somit das HORNERsche Schema mit einem solchen ersetzen, welches *nur* Additionen enthält. Ist $a+1$ und eine ganze Zahl, so kann dieses Vorgehen in mehreren Schritten rasch auf den früheren zurückgeführt werden.

2. - Für die Anwendungen, besonders in der Rentenrechnung, ist nun die algebraische Vorbemerkung in der folgenden Gestalt vom Nutzen: Es sei

$$a=b=\xi, \qquad y=h.$$

Wir wenden also die specielle Transformation an

$$x=\xi(1+h)$$

und erhalten auf Grundlage von (1) die Umformung:

$$f(x)\equiv f(\xi)+\sum_{k=1}^{n} S_k h^k \tag{2}$$

wobei

$$S_k=\sum_{l=0}^{n-k}\binom{n-l}{k}a_l\xi^{n-l}.$$

Insbesondere ist

$$S_0=f(\xi).$$

Es folgt somit eine endliche Entwickelung nach Potenzen von h und zwar, wenn ξ als Anfangswert oder als Näherungswert gedeutet wird, nicht in der üblichen Art

$$x=\xi+h'$$

sondern in der Form

$$\frac{x}{\xi}=1+h.$$

Diese Abweichung von der üblichen Entwickelung ist für die numerische Arbeit deshalb wesentlich, weil mit der Quotientenbildung die späteren Forderungen für $|h|$ in einem weiteren Bereich erfüllbar sind, als gewöhnlich. Die Entwickelung

enthält ferner keine Differentialquotienten, so dass die zu betrachtenden Annäherungen und Iterationen von den speciellen Krümmungstendenzen der gegebenen Funktion unabhängig sind, was für die algebraischen Anwendungen wichtig ist.

3. - In der Rentenrechnung kann man von der Formel (2) besonders zwei Anwendungen machen. Die erste: die angenäherte Umrechnung des für einen festen Jahreszins (i) tabellierten Rentenbarwertes für einen andern nicht tabellierten Zinsfuss, ist in der Literatur der Leibrenten öfters (1) angegeben worden; es wurde aber dabei der algebraische Hintergrund nicht berührt und die Näherungsformel meistens auf Grundlage der TAYLORschen Reihe für $f(i+h)$, mit Bildung von Differentialquotienten abgeleitet. Mit Benützung der Formel (2) wählt man direkt die entsprechenden Diskontfaktoren $\left(v=\frac{1}{1+i}\right)$ für x bzw. für ξ und erweitert durch die Quotientenbildung den Bereich der Anwendbarkeit bei einem festen Zinsfuss, für die einzelnen Annäherungsformeln, die ein genügend kleines $|h|$ voraussetzen. Bei iterierten Vorgängen richtet man das Augenmerk stets auf die beiderseitigen Annäherungen ($h \gtrless 0$) ein; die Konvergenz solcher Umläufe müsste aber noch im gegebenen Fall näher untersucht werden.

Sehr einfach gestaltet sich die skizzierte Näherungsmethode für die gewöhnliche Rente $\mathfrak{a}_{\overline{n}|}$ bzw. $a_{\overline{n}|}$, bei denen die Gliederreihe und die erste Aufsummierung fertig vorliegen und die weiteren nötigen Aufsummierungskolonnen leicht zu ergänzen sind. Dieses angenäherte Umrechnungsverfahren ist bei procentuellen Abschätzungen im grossen auch für den Fall der Leibrente und anderer Kapitalwerte der Lebensversicherungs-Mathematik vom Nutzen, da bei Festhaltung der Sterblichkeit diese Werte schätzungsweise auf die analoge Betrachtung der gewöhnlichen Rente zurückführbar sind (2).

Es sei noch kurz darauf hingewiesen, dass bei der gewöhnlichen Rente für die ersten Annäherungen einfache Formeln anzuschreiben sind. Wir erwähnen in diesem Zusammenhang, dass z. Bp. für

$$S_0 = \mathfrak{a}_{\overline{n}|} = \sum_{l=0}^{n-1} v^l$$

---

(1) Wir erwähnen u. a. die Annäherungsformeln von MEIKLE und von VAN DORSTEN (siehe LANDRÉ: *Mathematisch-technische Kapitel zur Lebensversicherung*. V.te Auflage, S. 500-504), dann die neuere Arbeit von HOLLENBERG im XXVIIIten Band, 1927, der Transactions of the Actuarial Society of America, S. 42-46. Diese Umformungen sind zur Zeit der schwankenden Zinsrate von mannigfacher Verwendung in der Lebensversicherungs-Mathematik. Kompliciertere Kapitalwerte können mit der einfachen Leibrente ausgedrückt werden, so dass die nötigen Aufsummierungskolonnen nur für den Fall der bei der einfachen Leibrente vorkommenden Kommutationswerte durchzuführen sind.

(2) Siehe hierüber das IIIte Kapitel unserer Abhandlung: *Zinsreserve in der Lebensversicherungsbilanz*, Festgabe für Alfred Manes, Berlin, Mittler, 1927, S. 300-310.

die folgende Formel benützt werden kann:

$$S_k = \sum_{l=k}^{n-1} \binom{l}{k} v^l = \frac{\mathbf{a}_{\overline{n-k}|}}{i^k} - \sum_{l=0}^{k-1} \binom{n-k+l}{l+1} \frac{v^{l-k+l}}{i^{k-l}}.$$

Diese liefert auf Grundlage von (2) einfache erste Näherungsbeziehungen. (Es bestehen auch entsprechende Rekursionsformeln).

4. - Als zweite, neuartige, Anwendung der Formel (2) führen wir die numerische Lösung algebraischer Gleichungen an, besonders wenn die linke Seite wenige Glieder enthält. Besitzt die Gleichung im Intervall $I \ldots I+1$ eine und nur eine reelle Wurzel und ist im Intervall ein Näherungswerte ξ bekannt, so ist mit

$$\frac{x}{\xi} = 1 + h$$

stets

$$|h| < 1$$

und wir haben in (2) eine einseitige Beziehung, die zum Beispiel die folgende erste linear korrigierte Approximation für x liefert:

$$x^{(1)} \sim \xi\left(1 - \frac{f(\xi)}{S_1}\right).$$

Dabei ist ξ eine Annäherung von oben bzw. von unten (oder deren arithmetisches Mittel), je nachdem welcher Substitutionswert $f(\xi)$ näher zu 0 liegt. Diese lineare Annäherung kann dann weiter wiederholt werden. Es ist stets zu erreichen, dass $I=0$ oder $I=1$ ausfalle, so dass man die fertigen Tabellen der Politischen Arithmetik bei der Anschreibung der Gliederreihen erfolgreich verwenden kann.

Dieses Lösungsverfahren hat eine ergiebige Anwendbarkeit für das *Zinsfussproblem der Rentenrechnung*. Man kann eine lineare Iterationsmethode ausarbeiten, die in den praktisch auftretenden Fällen allgemein zu benützen ist (1). Einfach wird die Rechenarbeit, wenn die linke Seite der Zinsfussgleichung wenige Glieder hat, so in den zumeist vorkommenden drei-, vier- und fünfgliedrigen Fällen. Beim trinomischen Fall können, nach den obigen Angaben, für die auftretenden niedrigeren S_k einfache Ansätze gebildet werden, wodurch independente Näherungsformeln für das gesuchte v entstehen; in komplicierteren Fällen sucht man nach Umformungen, welche die Anwendung der vorhandenen Aufsummierungstabellen ermöglichen.

---

(1) Über andersgeartete algebraische Ansätze für das Zinsfussproblem siehe die Arbeiten des Verfassers in der Zeitschrift für Mathematik und Physik LV. Band, 1911 und in der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik I. Band, 1921 und VII. Band. 1927.

5. - Zum Schluss geben wir ein ganz einfaches numerisches Beispiel zur Darstellung der centralen algebraischen Aufgabe dieser Note: die angenäherte Lösung der Gleichung dritten Grades:

$$x^3-3x+1{\cdot}0165=0.$$

Diese Gleichung hat im Intervall 1·5.... 2 eine Wurzel, die wir bis zu drei Decimalen in drei Schritten finden, wenn wir die Rechnung vierstellig einrichten. Wenn möglich, so benützen wir die erste Potenztabelle (I) der Politischen Arithmetik, wie es die eckigen Klammern des nähern andeuten.

Erster Schritt mit $\xi_1=1{\cdot}5$

3·375		3·375	
0		3·375	
	−4·5		−1·125
1·0165			
4·3915	−4·5	6·750	−1·125
$f(\xi_1)=-0{\cdot}1085$		$S_1=5{\cdot}625$	

Also

$$x^{(1)}\sim 1{\cdot}5\left(1+\frac{0{\cdot}1085}{5{\cdot}625}\right)=1{\cdot}52894.$$

Zweiter Schritt mit $\xi_2=1{\cdot}5284\left[\mathrm{I}\,{}^{4\,1/3\,0/0}_{10}\right]$

3·5702		3·5702	
0		3·5702	
	−4·5852		−1·0150
1·0165			
4·5867	−4·5852	7·1404	−1·0150
$f(\xi_2)=0{\cdot}0015$		$S_1=6{\cdot}1254$	

Also

$$x^{(2)}\sim 1{\cdot}5284\left(1-\frac{0{\cdot}0015}{6{\cdot}1254}\right)=1{\cdot}52773.$$

Dritter Schritt mit $\xi_3=1{\cdot}5278\left[\mathrm{I}\,{}^{1\,1/3\,0/0}_{32}\right]$

3·56635		3·56635	
0		3·56635	
	−4·5834		−1·01705
1·01650			
4·58285	−4·5834	7·13270	−1·01705
$f(\xi_3)=-0{\cdot}00055$		$S_1=6{\cdot}11565$	

Also

$$x^{(3)} \sim 1{\cdot}5278\left(1+\frac{0{\cdot}00055}{6{\cdot}11565}\right)=1{\cdot}52794.$$

Bis zu drei Decimalen ist somit:

$$x=1{\cdot}528\,; \qquad \text{Probe: } f(1{\cdot}528)=-0{\cdot}00015.$$

B. LAGUNOFF (Kiev - U. S. S. R.)

VON DEM ZUSAMMENHANGE DES PREISES MIT DER ARBEITSLEISTUNG UND VON DER METHODE ZUM AUFFINDEN DER PUNKTE DER KURVE DES REGELMÄSSIGEN PREISENNIVEAU

1. - Wollen wir uns einen Betrieb vorstellen, der einen Produkt erzeugt, der sich (für die Ziele unserer Untersuchung) als ein gleichartiges Produkt präsentiert. Es möge in die bekannte Zwischenzeit der Arbeit des Betriebes in dem Betriebe X Produktseinheiten verbraucht. Dann ist die Arbeitsleistung, die mittlere in der gesagten Zwischenzeit, gleich der Zahl der Produktseinheiten, die im Mittel auf die Einheit der angewandten Arbeit fällt, das ist, der Zahl

$$x = \frac{X}{N}. \tag{1}$$

Mit dieser mittleren Arbeitsleistung x wird sich im bekannten, (und was leicht vorausgesetzt werden kann) hinreichend engen Korrelationszusammenhange der mittlere Markteinheitspreis v des in gesagter Zwischenzeit aus dem Betriebe ausgelassenen Produktes befinden, also wird die Gleichung bestehen

$$u = f(x), \tag{2}$$

wo $u = E_x v$ die mathematische Erwartung des Wertes v für den gegebenen Werte x und $f(x)$ eine bekannte Funktion des x ist.

Der mittlere Preis oder der volle Wert der Produktseinheit ist gleich der Summe der partiellen Werte, bezüglich deren hier angenommen wird, dass sie nach ihrer Proportionalität den ganzen Potenzen der Zahl x klassifiziert, also mit den Zahlen

$$a_k x^k$$

wo die Koeffizienten a_k konstanten und die Exponenten k die Zahlen der Reihe

$$.... -3, \ -2, \ -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, ...$$

sind, dargestellet werden können; zum Beispiel, dass dieser mittlere Preis oder der volle Wert der Summe der partiellen Werte gleich ist, die in üblicher Weise (1) in die proportionalen, d. i., auf eine Produktseinheit im konstanten Teile fallenden Werte und (2) in die konstanten, d. i., auf eine Produktseinheit im der Zahl der erzeugten Produktseinheiten-umgekehrtproportionalen Teile fallenden Werte eingeteilt werden.

Indem wir, auf Grund des eben gesagten, die Form der Funktion $f(x)$, die in der rechten Seite der Gleichung (2) steht, fixieren, bekommen wir die Gleichung der Form

(3) $$u = \sum a_k x^k;$$

zum Beispiel, die Gleichung

(α) $$u = a_0 + a_{-1} x^{-1},$$

wo a_0 und a_{-1} unabhängig von x sind.

Die Gleichung (2) ist die Gleichung der Regressionslinie zwischen v und x. Ist nun diese Gleichung in ihrer Form (3), zum Beispiel, als Gleichung (α) gegeben und sind gleichzeitig in hinreichender Zahl die einander korrespondierende Werte v und x bekannt, so ist die Möglichkeit vorhanden (nach der Methode der kleinsten Quadrate) die wahrscheinlichen Werte der Koeffizienten a_k der Regressionsgleichung, zum Beispiel, diese Werte der a_0 und a_{-1}, errechnen und auf solche Weise der Zahl der Angaben von x entsprechende Zahl der Punkte (x, u) unserer Regressionslinie bekommen.

2. - Die übliche Methode des Auffinden der Punkte der Kurve des regelmässigen Preisenniveau besteht darin, dass die Reihe der mittleren (rohen oder bereinigten) Werte des Marktpreises v wird als unmittelbar korrelierend mit der Reihe der Ordnungsnummern t der aufeinanderfolgenden Zeiträume, deren jene Werte gehören, aufgefasst und nach parabolischer Kurve

(4) $$u = a + bt + ct^2 + \ldots,$$

zum Beispiel, nach der Geraden

(β) $$u = a + bt$$

ausgegleicht.

Diese ganz empirische Methode kann mit einer mehr rationalen ersetzt werden in Fällen, in denen der Reihe der Werte v des Produktsmarktpreises eine in Aufeinanderfolge dieser Zeiträume parallele Reihe der bei der Produktserzeugung stattgefundenen Werte x der Arbeitsleistung, mit der, wie wir es angenommen haben, der Marktpreis v in einem engen Korrelationszusammenhange steht, gegeben ist: es kann, nämlich — auf dem oben im 1. erörterten Wege — eine Reihe der Punkte (x, u) der Regressionskurve zwischen v und x, welche Punkte auf der Kurve nach den zunehmenden x-Werte geordnet liegen, gefunden werden; es kann eine solche Permutation ausgeführt werden, dass die Werte x und mit diesen die entsprechenden Punkte (x, u), indem sie ihre Ordinaten u beihalten, in der Ordnung der zunehmenden Nummern t der aufeinanderfolgenden Zeiträumen zu denen die gesagten Werte x gehören, sich einrichten; und, in dieser neuen Ordnung eingerichtet werden unsere Punkte (x, u) die gesuchten Punkte der Kurve des regelmässigen Preisenniveau sein.

Indem wir auf diese Weise die Punkte der Kurve des regelmässigen Preisen-

niveau bekommen, können wir erwarten, dass die Abweichungen der Beobachtungswerte des Marktpreises v von den entsprechenden ausgerechneten mittleren seinen Werte u um so viel frei von dem konstanten Fehler sind, um wie viel mit der Auswertung dieser Abweichungen wir den systematischen Einfluss der Oekonomik unseres Betriebes auf das Preisenniveau ausschalten (es ist doch das in dem Betriebe erreichte Arbeitsleistungsniveau die konzentrierte Äusserung dieser Oekonomik); dass, folglich, diese Abweichungen sich als ein mehr reiner Typus der von der Gesamtheit der Ausseneinflusse bedingten Schwankungen darstellen, als diejenigen, die wir bekommen hätten, wenn wir uns mit der üblichen Methode des unvermittelten Korrelierens der Grössen v und t bedienten.

3. - Wollen wir unsere Erwartungen auf einem Beispiele prüfen. In dem Beispiele die Werte des Preises v sind die järlichen Mittelwerte der Preise (in

Jahren	Der Preis des Zuckers in Rubeln à Pud (v)	Die Arbeitsleistung in Puden Zuckers auf einen Arbeitstag$_1$ (x)	Das mittlere Niveau des Preises nach Gleichung $u = a + a_{-1}x^{-1}$ (u)	Die Abweichungen von dem mittleren Niveau ($v - u$)	Die Ordungsnummern der Jahre (t)	Das mittlere Niveau des Preises nach Gleichung $u = a + bt$ (u)	Die Abweichungen von dem mittleren Niveau ($v - u$)
1894-5	2,76	2,19	2,897	−0,137	0	2,871	−0,111
1985-6	2,81	2,34	2,820	−0,000	1	2,834	−0,024
1896-7	2,94	2,34	2,820	+0,120	2	2,797	+0,143
1897-8	2,91	2.30	2,840	+0,070	3	2,760	+0,150
1898-9	2,75	2,38	2,802	−0,052	4	2,722	+0,028
1899-900	2,62	2,65	2,692	−0,072	5	2,685	−0,065
1900-1	2,68	3,44	2,472	+0,208	6	2,648	+0,032
1901-2	2,61	3,33	2,495	+0,115	7	2,610	−0,000
1902-3	2,56	3,47	2,464	+0,096	8	2,573	−0,013
1903-4	2,46	3,53	2,451	+0,009	9	2,536	−0,076
1904-5	2,52	3,40	2,479	+0,041	10	2,498	+0,022
1905-6	2,47	3,05	2,566	−0,096	11	2,461	+0,009
1906-7	2,31	3,99	2,369	−0,059	12	2,424	−0,114
1907-8	2,15	4,23	2,331	−9,181	13	2,386	−0,236
1908-9	2,36	4,02	2,364	−0,004	14	2,349	+0,011
1909-10	2,51	3,96	2,374	+0,136	15	2,312	+0,192
1910-11	2,26	5,61	2,182	+0,078	16	2,275	−0,015
1911-12	2,10	5,12	2,226	−0,126	17	2,237	−0,137
1912-13	2,32	3,58	2,441	−0,121	18	2,200	+0,120
1913-14	2,24	4,83	2,256	−0,016	19	2,163	+0,077

Rubeln à Pud) des Zuckers mitten in Russland in der Zeit von 1894-5 - 1913-14, und die Werte der Arbeitsleistung x sind die jährlichen Mittelwerte der Arbeitsleistung (in Puden auf einen Arbeitstag) auf den russischen Rübenzuckerfabriken in derselben Zeit (1).

Die Gleichung der Regressionslinie	$u = \frac{2{,}561}{x} + 1{,}7263$	$u = 2{,}8714 - 0{,}0373t$
Der mittlere quadratische Fehler $\sqrt{\frac{\Sigma(v-u)^2}{n-2}}$	0,10	0,11
Der Koeffizient der Engheit des Zusammenhanges $\sqrt{\frac{\Sigma[(v_0-u)^2-(v-u)^2]}{\Sigma(v_0-u)^2}}$ $\left(v_0 = \frac{\Sigma v}{n}\right)$	0,87	0,87

In der vorliegenden Tabelle sind die paralellen Resultate der Ausrechnungen nach den Formeln

(α) $$u = a_1 x^{1} + a_0$$

und

(β) $$u = a + bt$$

gegeben. Wie der Vergleich der bezüglichen Werte des mittleren quadratischen Fehlers

$$\sqrt{\frac{\Sigma(v-u)^2}{n-2}}$$

und des Koeffizienten

$$\sqrt{\frac{\Sigma[(v_0-u)^2-(v-u)^2]}{\Sigma(v_0-u)^2}}$$

zeigt, geben die beiden Formeln in den nach ihnen berechneten Reihen der Werte u ein gleich gutes Anschliessen an die Reihe der Werte v. Indem wir aber der Art und Weise dieses Anschliessen in jedem der Fälle näher ankommen und, zwecks Erleichterung des Urteils, die Zeichnung, in der die Abweichungen $v-u$ als Ordinaten zu den Zeiträume t als Abscissen angebracht sind, zur Untersuchung heranziehen, finden wir einen bedeutenden Unterschied zwischen den beiden, mit den Punkten der Zeichnung entsprechend der Gleichungen (α) und (β) angedeuteten, Konfigurationen « α » und « β ».

Und, in gewisser Uebereinstimmung mit dem, was wir erwartet haben, sehen wir, dass die Konfiguration « α » einen mehr regulären Typus der wellenförmigen Kurve darstellt, also mehr dem Charakter der rythmischen Bewegung der Konjunktur, als die Konfiguration « β », entspricht: in der Konfiguration « α » wieder-

(1) Die Zahlen sind dem « Jahrbuche der Zuckerindustrie des Russischen Reiches im Jahre 1914-1915 », Lieferung 1, Kiew 1916 (russisch) entnommen.

erzeugt sich der Teil (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6) (1) in dem Teile (13, 14, 15, 16, 17, 18, 19), während der Zwischenteil (6, 7, 8, 10, 11, 12, 13) der Konfiguration, schief-symmetrisch gegen die Axe der Abscissen orientiert, als ein oft vorkommendes Bild der Interferenz der Schwankungen erscheint; in der Konfiguration « β » sind diese Regelmässigkeiten bedeutend mehr entstellt abgebildet. In der Konfiguration « α » ersichtigt sich mit grosser Deutlichkeit auch der hier annäherend 13-jährige Grundcyklus der Wirtschaftskurvenschwankungen.

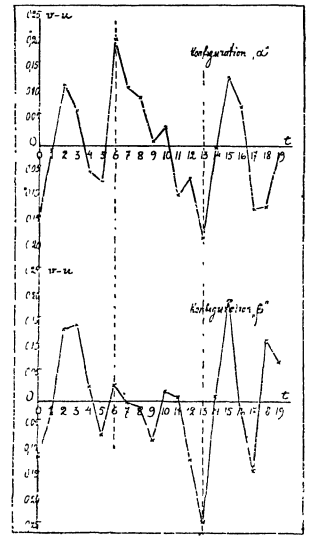


Fig. 1.

Anmerkung 1. - Die komplizierten Formen der mit den Konfigurationen « α » und « β » bezeichneten periodischen Kurven können, wenn es erwünscht gefunden werden wird, als die im Resultate des Aufeinanderlegens der elementaren periodischen Schwankungen verschiedener Perioden entstandene betrachtet werden.

Eine bekannte Zahl (mehr bedeutenden) dieser elementaren Schwankungen kann abgesondert werden, indem die Differenz $v-u$ in der Korrelation mit t sich befinded angenommen wird, also

$$w-u=f(t)$$

wo $(w-u)=E_t(v-u)$, gesetzt wird und, nach der Methode der kleinsten Quadrate die entsprechende Zahl der Koeffizienten der Zerlegung der Funktion $f(t)$ in die Fouriersche Reihe ausgerechnet wird. Es sollte dann — bei gleicher Zahl der Glieder der Zerlegung — der mittlere quadratische Fehler $\sqrt{\frac{(v-w)^2}{n-m}}$ kleiner und der Koeffizient $\sqrt{\frac{\Sigma[(v-u)^2-(v-w)^2]}{\Sigma(v-u)^2}}$ grösser für die Konfiguration « α », als für die Konfiguration « β », sich bezeigen (2).

Anmerkung 2. - Verallgemeinert gesagt: verstehen wir unter v und x zwei

---

(1) Nach der Abscisse zählend.

(2) Angenommen

$$w-u=A_1\sin\frac{2\pi t}{13}+B_1\cos\frac{2\pi t}{13}+$$
$$+A_2\sin\frac{2\pi t}{2.13}+B_2\cos\frac{2\pi t}{2.13}+$$
$$+A_3\sin\frac{2\pi t}{3.13}+B_3\cos\frac{2\pi t}{3.13},$$

ergab wirklich die Ausrechnung für die erwähnten grössen im Falle der Konfiguration « α » die Werte 6,065 und 0,872, im Falle der Konfiguration « β » aber die Werte 7,205 und 0,814.

in der Zeit veränderlich Grössen, von denen die eine v mit der anderen x in einem mehr oder weniger engen Korrelationszusammenhange sich befindet — so giebt die in dem Texte erörterte Methode die Möglichkeit das regelmässige, von dem systematischen Einflusse der Grösse x befreite, Zeitniveau der Grösse v aufzustellen.

B. LAGUNOFF (Kiev - U. S. S. R.)

AUFSTELLUNG EINER FORMEL FÜR DEN ARBEITSLEISTUNGSINDEX

Es sollen für die Anfangsperiode R: die Zahlen der Einheiten der erzeugten Produktion jeder Gattung, die wir als eine gleichartige Gattung der Produktion betrachten,

$$p_1,\ p_2,\ldots\ p_i,\ldots\ p_k$$

und, respektive, die Zahlen der zur Erzeugung dieser Produktion Einheiten der angewandten Arbeit

$$n_1,\ n_2,\ldots\ n_i,\ldots\ n_k$$

sein: und desgleichen für die Periode R', die dem Vergleiche mit der Anfangsperiode R unterliegt: die Zahlen der Einheiten der Produktion

$$p_1',\ p_2',\ldots\ p_i',\ldots\ p_k'$$

und die Zahlen der Einheiten der angewandten Arbeit

$$n_1',\ n_2',\ldots\ n_i',\ldots\ n_k'$$

sein.

Dann ist die Zahl $p_i' : \frac{p_i}{n_i} = \frac{p_i'}{p_i}\, n_i$ die Zahl der Einheiten der zur Erzeugung die Produktion p_i' der Periode R' angewandten Arbeit, wenn diese Produktion p_i' mit der mittleren Arbeitsleistung $P_i = \frac{p_i}{n_i}$, die in die Anfangsperiode R statthatte, erzeugt gewesen wäre. Und, folglich, die gesammte Zahl der Einheiten der angewandten Arbeit, die erforderlich ist, um die ganze Produktion der Periode R' mit den mittleren Arbeitsleistungen, die in der Anfangsperiode R statthatten, zu erzeugen,

$$\frac{p_1'}{p_1} n_1 + \frac{p_2'}{p_2} n_2 + \ldots + \frac{p_i'}{p_i} n_i + \ldots + \frac{p_k'}{p_k} n_k = \sum \frac{p'}{p}\, n$$

ist.

Gleichzeitig ist aber die gesammte Zahl der Einheiten der angewandten Arbeit, die in Wirklichkeit, das heisst, mit den Arbeitsleistungen, die in der Periode R' statthatten, erforderlich war, um dieselbe ganze Produktion dieser Periode zu erzeugen,

$$n_1' + n_2' + \ldots + n_i' + \ldots + n_k' = \sum n'.$$

Leicht verstanden, wird das Verhältniss der mittleren Arbeitsleistung der

Periode R' zur mittleren Arbeitsleistung der Anfangsperiode R, oder die relative Grösse der Arbeitsleistung der Periode R' mit der Zahl

$$(1^*) \qquad Q = \frac{\sum \frac{p'}{p} n}{\sum n'}$$

ausgedrückt.

Diese Formel (1*) kann sehr leicht in etwas anderer Form dargestellt sein: nehmen wir in Acht, dass

$$p_i' = P_i' n_i' \qquad \text{und} \qquad p_i = P_i n_i$$

ist, so bekommen wir

$$(1^{**}) \qquad Q = \frac{\sum \frac{P'}{P} n'}{\sum n'}$$

Der Ausdruck (1**) ist der Ausdruck des Arbeitsleistungsindexes von Prof. STRUMILIN, welchen Index er (ohne Beweis und Formeleinkleidung) im Jahre 1924 vorgeschlagen hatte (1) und welches seitdem in der Praktik der U. S. S. R. Staatsindustriestatistik eine Verbreitung fand.

Unter Bedingung der Zergliederung der Summe, die im Zähler der Formel (1*) sthet, in die Summanden entsprechendeder Zergliederung der gesammten ungleichartigen Produktion, die der Zählung unterliegt, in die gleichartige Teile, giebt die Formel (1*) die Möglichkeit die Methode der Zählung der Produktion in den konstanten physikalischen Einheiten, die mehr genau, als die Methode dieser Zählung in den fliessenden Wert- oder Geldeinheiten ist, für das Ausrechnen der Indexe in den Betrieben miturgleichartiger Produktion oder in den Gesamtheiten der ungleichartigen Betriebe anzuwenden.

Aus dem Indexe, der mit der Formel (1*) dargestellt ist, können nach dem Verfahren von I. FISCHER andere Indexe der Arbeitsleistung abgeleitet sein. Schreiben wir unseren Index Q, indem wir ihn jetzt mit ${}_{pn}Q_{01}$ bezeichnen, noch einmal hin:

$$(1) \qquad {}_{pn}Q_{01} = \frac{\sum \frac{p'}{p} n}{\sum n'}.$$

Es ist dann: seine « Antithese nach der Zeit »

$$(2) \qquad {}_{pn}Q_{10}' = \frac{\sum n}{\sum \frac{p}{p'} n'};$$

(1) STRUMILIN - Arbeitsleistung im Jahre 1922-23 in «Politik und Praktik des Arbeitslohnes», Moskau, 1924 (russisch).

seine « Antithese nach den Faktoren »

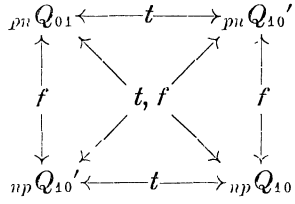
$$(3) \qquad {}_{np}Q_{01}' = \frac{\sum p'}{\sum \frac{n'}{n} p'};$$

und die Antithese nach der Zeit dieser letzten Antithese

$$(4) \qquad {}_{np}Q_{10} = \frac{\sum \frac{n}{n'} p'}{\sum p'}$$

die auch die Antithese nach den Faktoren des ${}_{pn}Q_{01}'$ ist.

Der Zusammenhang zwischen den vier Indexe (1), (2), (3), (4) kann anschaulich wie folgt dargestellt sein:



(die Zeichen ←*t*→ und ←*f*→ das Antithesieren nach der Zeit resp. nach den Faktoren bedeuten).

Durch die « Kreuzung » dieser vier Grundindexe können dann die « korrigierten » Indexe in unbegrenzter Zahl bekommen werden.

A. QUIQUET (Paris - Francia)

SUR DES CARRÉS PARFAITS VIAGERS

1. - Si l'on représente par $a_{\overline{xy}}$ le prix d'une annuité viagère immédiate de 1 fr., payable jusqu'au dernier décès de deux têtes d'âges x et y, c'est-à-dire *avec réversion totale*, l'on sait que $a_{\overline{xy}}$ est une somme de valeurs actuelles d'arrérages de 1 fr.; la valeurs actuelle du t^{e} arrérage $P^{t}_{\overline{xy}}$, a pour formule:

$$P^{t}_{\overline{xy}} = \left[\frac{l(x+t)}{l(x)} + \frac{l(y+t)}{l(y)} - \frac{l(x+t)}{l(x)}\,\frac{l(y+t)}{l(y)}\right](1+i)^{-t},$$

où $l(a)$ désigne le nombre des vivants à l'âge a, et où i désigne l'intérêt de 1 fr. pendant un an, d'après la table de mortalité et le taux de capitalisation choisis par l'assureur.

2. - Je pourrais supposer que la table de mortalité n'est pas la même pour les deux têtes x et y. Par exemple, pour la tête x le nombre des vivants à l'âge $x+t$ serait $l_1(x+t)$, et pour la tête y le nombre des vivants à l'âge $y+t$ serait $l_2(y+t)$, $l_1(a)$ et $l_2(a)$ étant deux lois de survie distinctes. Les démonstrations qui vont suivre seraient bien peu modifiées par cette hypothèse.

Cependant, je prefère ne pas l'introduire ici, afin d'obéir à la concision qui est de règle dans un Congrès tel que le nôtre.

3. - Par contre, j'étendrai mon étude à la fois au cas d'une annuité immédiate, $a_{\overline{xy}}$, et au cas d'une annuité différée de n années, $a^{n}_{\overline{xy}}$.

Les deux cas peuvent en effet se traiter simultanément si l'on remarque que que la somme $a_{\overline{xy}}$ des valeurs actuelles des arrérages à servir s'obtient en faisant varier t à partir de la valeur $t=1$, tandis que la somme $a^{n}_{\overline{xy}}$ s'obtient en faisant varier t à partir de la valeur $t=n+1$.

La limite supérieure de t est d'ailleurs commune aux deux cas: elle dépend des limites mêmes de la table de mortalité adoptée, attendu qu'il s'agit d'arrérages payables jusqu'au dernier décès.

J'admettrai, en tant que de besoin et pour simplifier, que, dans les deux cas, t est susceptible de dépasser toute grandeur donnée à l'avance: les expressions algébriques des lois de survie comprennent pour la plupart cette conclusion, qui est commode, analytiquement parlant, et sans grand inconvénient pratique.

Comme je n'aurai pas à expliciter autrement les valeurs de t, la démonstration sera apte à confondre les deux cas, annuités immédiates sur deux têtes et annuités différées sur deux têtes.

4. - Le moment est venu d'exposer les motifs qui m'ont inspiré les présentes recherches.

Pour les rentes viagères immédiates sur deux têtes avec réversion totale, les Compagnies distribuent à leurs agents un tarif qui exige un nombre assez étendu de pages, en raison des groupes qu'il est possible de former avec deux têtes d'âges différents (1).

Quant aux rentes différées sur deux têtes avec réversion totale, le parti adopté est radical, mais il est fâcheux: à ma connaissance, leur tarif ne se trouve dans aucune Compagnie entre les mains de ses agents. La raison en est facile à saisir: pour chacun des groupes dont je viens de parler à propos des rentes immédiates, il faudrait considérer autant de durées distinctes qu'il est admissible d'en prévoir dans l'usage courant; or ces durées peuvent atteindre et dépasser 20 ans, 30 ans, 40 ans, pour des couples jeunes.

Je me suis proposé d'abord d'essayer si, par des artifices dûment appropriés, on ne pourrait pas réduire l'étendue du tarif des rentes immédiates sur deux têtes, par exemple le réduire à un tarif sur deux têtes d'âge égal, ce qui le ramènerait immédiatement à un tarif très maniable, son étendue étant celle du tarif des rentes immédiates sur une seule tête, où l'âge varierait par années rondes.

Je me suis demandé ensuite si ces mêmes artifices ne permettraient pas de borner aussi à deux têtes d'âge égal un tarif de rentes différées sur deux têtes avec réversion totale. Ce tarif serait, il est vrai, assez développé, mais pas davantage que celui des rentes différées sur une seule tête, qui, lui, est tout à fait entré dans la pratique.

5. - Il serait certes présomptueux, en ce qui me concerne, de compter avoir trouvé du premier coup des artifices de ce genre qui puissent passer pour définitifs. Ceux que je vais exposer auront au moins l'avantage de faire connaître, au sujet des formules d'annuités viagères, une certaine propriété qui ne me paraît pas avoir été entrevue jusqu'ici. Si cette propriété n'est pas jugée capable de conduire convenablement aux buts que j'ai en vue, elle me laisse cependant espérer qu'un autre actuaire, plus heureux, s'en inspirera pour obtenir de meilleures satisfactions.

---

(1) 17 pages dans les Compagnies françaises. Noter que, si l'on distingue les sexes, on est amené à prévoir, non pas un seul tarif sur deux têtes, mais *quatre* tarifs.

6. - C'est à dessein que je substituerai désormais la valeur des « annuités » à la valeur des « rentes ». On passe de l'une à l'autre par des relations qui traduisent la partie commerciale des tarifs, les « chargements ». Quoique, en général, ces relations soient purement arithmétiques, elles sont susceptibles d'offrir une grande diversité: je ne pouvais entrer dans leur considération. Il appartiendra à chaque actuaire intéressé d'étendre aux « rentes » de sa Compagnie ce que je vais dire des « annuités ». Cette extension sera d'un ordre élémentaire quand, par exemple, de simples facteurs de proportion aident à passer d'un barème d'annuités à un tarif de rentes.

Pourtant, dans la partie commerciale des tarifs, un cas spécial m'a paru à relever, celui d'un chargement de gestion usité en France pour les rentes différées. Outre qu'il est, par exception, un peu compliqué, il se trouve présenter une sorte d'extension de la propriété que j'ai rencontrée aux annuités. Comme cette extension n'apparaît pas à première vue, j'ai cru bon de la démontrer sommairement.

7. - Mon point de départ sera donc l'existence préalable d'un barème d'annuités viagères immédiates *avec* réversion totale sur deux têtes d'*âge égal*. Je vais chercher à l'utiliser pour deux têtes d'*âges différents*.

Autrement dit, à l'aide de $a_{\overline{xx}}$ et de $a_{\overline{yy}}$, je tenterai d'obtenir $a_{\overline{xy}}$.

8. - Comme $a_{\overline{xy}}$ est, dans l'ordre des prévisions naturelles, compris entre $a_{\overline{xx}}$ et $a_{\overline{yy}}$, la première approximation qui vient à l'esprit est de prende la moyenne de $a_{\overline{xx}}$ et de $a_{\overline{yy}}$. On aura ainsi une valeur déjà voisine de $a_{\overline{xy}}$.

9. - Il s'agit de l'améliorer.

Entre cette moyenne et la valeur vraie de $a_{\overline{xy}}$, il existe une certaine différence J, telle que

$$J = a_{\overline{xy}} - \frac{a_{\overline{xx}} + a_{\overline{yy}}}{2}$$

Etudions cette « correction » J. De même que $a_{\overline{xy}}$, $a_{\overline{xx}}$ et $a_{\overline{yy}}$, J peut se figurer par une somme de termes en fonction de t, où, comme il a été dit ci-dessus, on fera varier t depuis $t=1$, par accroissements successifs égaux à l'unité, jusqu'à dépasser, au moins théoriquement, toute grandeur donnée.

10. - Appelons $j^t_{\overline{xy}}$ l'un de ces termes. Cet « élément de correction » sera

$$j^t_{\overline{xy}} = P^t_{\overline{xy}} - \frac{P^t_{\overline{xx}} + P^t_{\overline{yy}}}{2}.$$

$$P^t_{\overline{xy}} = \left\{ \frac{l(x+t)}{l(x)} + \frac{l(y+t)}{l(y)} - \frac{l(x+t)}{l(x)} \frac{l(y+t)}{l(y)} \right\} (1+i)^{-t},$$

$$P^t_{\overline{xx}} = \left\{ 2\,\frac{l(x+t)}{l(x)} - \left(\frac{l(x+t)}{l(x)}\right)^2 \right\} (1+i)^{-t},$$

$$P^t_{\overline{yy}} = \left\{ 2\,\frac{l(y+t)}{l(y)} - \left(\frac{l(y+t)}{l(y)}\right)^2 \right\} (1+i)^{-t}.$$

D'où

$$2j^{t}_{\overline{xy}} = \left[\left(\frac{l(x+t)}{l(x)}\right)^2 + \left(\frac{l(y+t)}{l(y)}\right)^2 - 2\,\frac{l(x+t)}{l(x)}\,\frac{l(y+t)}{l(y)}\right](1+i)^{-t},$$

c'est-à-dire

$$2j^{t}_{\overline{xy}} = \left[\frac{l(x+t)}{l(x)} - \frac{l(y+t)}{l(y)}\right]^2 (1+i)^{-t}.$$

Ainsi, abstraction faite du facteur d'escompte $(1+i)^{-t}$, apparaît, dans l'élément de correction $j^{t}_{\overline{xy}}$, un « carré parfait viager » :

$$\left[\frac{l(x+t)}{l(x)} - \frac{l(y+t)}{l(y)}\right]^2,$$

C'est une fonction assez curieuse des nombres de vivants, en ce sens que x et y s'y trouvent séparés : séparation de nature à faciliter son calcul.

11. - En premier lieu, ce carré parfait a une qualité fort générale : il existe *quelle que soit la loi de survie en jeu.* Il n'est même pas nécessaire que cette loi obéisse à une seule forme analytique : elle peut changer de forme analytique à certains âges (1). Plus encore : elle peut être empirique (2).

Cependant un examen approfondi sera prudent quant à la limite supérieure dont t sera capable, si les circonstances imposent à cette limite l'obligation d'être finie.

12. - Je viens de raisonner pour le cas des annuités immédiates. Pour les annuités différées et sans qu'il soit besoin d'insister, le raisonnement eût été le même, sauf que la limite inférieure de t serait $n+1$ au lieu de 1.

13. - Ainsi, que l'annuité soit immédiate ou différée, on est en mesure de figurer l'élément de correction à l'aide d'un carré parfait viager.

14. - De l'élément de correction passons à la correction elle-même, à J. C'est une sommation de fonctions de t que la différence

$$\frac{l(x+t)}{l(x)} - \frac{l(y+t)}{l(y)}$$

facilitera peut-être, selon certaines formes analytiques de la loi de survie. Ou encore pareil avantage sera-t-il dû à l'élévation au carré de cette différence.

---

(1) Par exemple, en France : les Tables *AF* et *RF*, dont l'expression analytique change à 25 ans.

(2) Par exemple, en France : la Table *CR*, table de la Caisse Nationale des Retraites ; la Table *PMF*, table de la population française sexes réunis, qui vient d'être adoptée par le Parlement français pour les assurances sociales.

15. - Une seconde remarque générale apparait: elle vise J. J est nul lorsque les âges x et y sont égaux: par suite, J doit différer assez peu de zéro si les âges x et y sont peu différents.

De là une faculté intéressante qui dispensera sans doute, dans bien des circonstances, de calculer J en toute rigueur. On estimera J par des valeurs, par des formules, approchées mais plus commodes, surtout lorsque les âges des deux têtes seront suffisamment voisins. Or le cas est fréquent en pratique des couples presque du même âge.

16. - Ces considérations m'amènent, pour évaluer approximativement J, à indiquer une voie que, sauf objections, je crois assez licite.

Dans l'élément de correction, mais dans cet élément seulement, *substituons à $l(x)$ une autre loi de survie*, telle que le calcul de J soit plus rapide, mais telle aussi que la valeur de J, ainsi obtenue, soit suffisamment plausible pour remplacer la valeur véritable de J. Il n'est pas défendu a priori de compter y réussir, puisque J part de zéro pour croître sans doute faiblement avec la différence des âges x et y.

17. - En d'autres termes, pour le calcul de J, on cherchera une loi de survie auxiliaire convenablement appropriée à ce calcul seul.

A une telle loi je donnerais volontiers le nom de « loi bâtarde de survie », afin de marquer la distance qui la sépare de la loi réelle adoptée, celle qui mérite le nom de « loi légitime de survie ».

18. - Dans les tarifs de rentes viagères différées, en vue des frais afférents à ces opérations, les Compagnies françaises ont introduit un chargement de gestion, qui doit couvrir ces frais annuellement et d'avance, pendant la durée du différé, et qui est proportionnel au capital constitutif de la rente arrivée à échéance.

Algébriquement parlant, quand il s'agit d'un contrat sur une seule tête, d'âge x à la souscription, ce chargement est proportionnel à

$$(1+a_x^{(n-1)})a_{x+n},$$

la durée du différé étant n; $1+a_x^{(n-1)}$ étant la valeur actuelle d'une annuité viagère temporaire de 1 fr. payable d'avance, chaque année et pendant n années sur la tête x; a_{x+n} étant la valeur actuelle à l'âge $x+n$ d'une annuité viagère de 1 fr., payable, en fin d'année, à partir de cet âge $x+n$ jusqu'au décès de la tête considérée.

Pour une rente viagère différée de n années, sur deux têtes d'âges x et y, *avec* réversion totale, le chargement sera proportionnel à

$$(1+a_x^{(n-1)})a_{x+n}+(1+a_y^{(n-1)})a_{y+n}-(1+a_{xy}^{(n-1)})a_{x+n,\,y+n},$$

$1+a_{xy}^{(n-1)}$ étant la valeur actuelle d'une annuité viagère temporaire de 1 fr. payable d'avance chaque année et pendant n années, ou seulement jusqu'au premier décès des deux têtes, s'il survient au cours des n années; $a_{x+n,y+n}$ étant la valeur actuelle aux âges $x+n$ et $y+n$ d'une annuité viagère de 1 fr. payable en fin d'année à partir de ces âges et seulement jusqu'au premier décès.

19. - En opérant comme ci-dessus pour les annuités immédiates ou différées, on prendra d'abord la moyenne des deux chargements relatifs l'un à deux têtes d'âge x,

$$2(1+a_{xx}^{(n-1)})a_{x+n}-(1+a_{xx}^{(n-1)})a_{x+n,x+n},$$

l'autre à deux têtes d'âge y,

$$2(1+a_{yy}^{(n-1)})a_{y+n}-(1+a_{yy}^{(n-1)})a_{y+n,y+n}.$$

Cette moyenne différera de K du chargement correspondant à deux têtes d'âges différents x, y,

$$K=\frac{(1+a_{xx}^{(n-1)})a_{x+n,x+n}+(1+a_{yy}^{(n-1)})a_{y+n,y+n}}{2}-(1+a_{xy}^{(n-1)})a_{x+n,y+n}.$$

20. - On est ainsi ramené à des escomptes d'arrérages viagers sur deux têtes: ceux qui figurent dans les annuités temporaires,

$$1+a_{xx}^{(n-1)},\qquad 1+a_{yy}^{(n-1)},\qquad 1+a_{xy}^{(n-1)};$$

et ceux qui figurent dans les annuités immédiates,

$$a_{x+n,x+n},\qquad a_{y+n,y+n},\qquad a_{x+n,y+n}.$$

Appelons u le u^{e} arrérage de chacune des annuités temporaires, u variant da 0 à $n+1$.

Appelons t le t^{e} arrérage de chacune des annuités immédiates, t variant de $n+1$ à la limite qu'autorise l'emploi de la table de mortalité adoptée.

Pour chaque couple de valeurs u et t, la correction K nous conduira à un élément de correction $k_{xy}^{u,t}$ tel que

$$2k_{xy}^{u,t}=\left[\left(\frac{l(x+u)}{l(x)}\right)^2\left(\frac{l(x+t)}{l(x+n)}\right)^2+\left(\frac{l(y+u)}{l(y)}\right)^2\left(\frac{l(y+t)}{l(y+n)}\right)^2-2\frac{l(x+u)}{l(x)}\frac{l(y+u)}{l(y)}\frac{l(x+t)}{l(x+n)}\frac{l(y+t)}{l(y+n)}\right](1+i)^{-u}\cdot(1+i)^{-t}.$$

La quantité entre crochets est un carré parfait viager, le carré:

$$\left[\frac{l(x+u)}{l(x)}\frac{l(x+t)}{l(x+n)}-\frac{l(y+u)}{l(y)}\frac{l(y+t)}{l(y+n)}\right]^2.$$

21. - La sommation K s'obtiendra en faisant varier u de 0 à $n-1$, t restant fixe, puis en faisant varier t dans le résultat de $n+1$ à la limite qu'autorise l'emploi de la table de mortalité adoptée.

22. - Si, dans le calcul des éléments de correction relatifs aux annuités différées, l'on a substitué à une « loi légitime » une certaine « loi bâtarde », il conviendra de garder cette loi bâtarde pour le calcul des éléments de correction relatifs aux chargements de gestion.

23. - Pour me résumer, j'ose espérer que les actuaires attacheront un intérêt au moins théorique à cette fonction que j'ai appelée un « carré parfait viager », et dont, *quelle que soit la table de mortalité employée*, j'ai établi l'existence dans le annuités sur deux têtes *avec* réversion, soit immédiates, soit différées, ainsi que dans un chargement français des rentes différées sur deux têtes *avec* réversion.

Je souhaite cependant davantage: c'est d'apprendre un jour que l'intérêt de cette fonction n'est pas purement théorique, et qu'elle a pu servir, conformément à mon dessein, pour améliorer, au profit des institutions d'assurances, l'outil principal qu'elles remettent à leurs agents, le tarif général de leurs combinaisons.

W. DOBBERNACK (Berlin - Germania)

DIE SYSTEMATISCHEN UND ZUFÄLLIGEN FEHLER IN DER INDEXZAHLENBERECHNUNG

Die außerordentliche Bedeutung der Indexzahlen für das wirtschaftliche und soziale Leben steht außer Zweifel. Es ist deshalb ein dringendes Erfordernis, daß bei ihrer Berechnung in möglichst weitem Umfange deren theoretische Unanfechtbarkeit, allerdings unter Beachtung der praktischen Erfordernisse, gewährleistet wird.

Für den Mathematiker gilt es deshalb, die bei der Indexzahlenberechnung auftretenden Fehlerquellen festzustellen und zu messen, um sich daraus ein Urteil über Wert und Unwert der einzelnen Indexzahlen zu bilden.

1. Allgemeines.

Um in der weiteren Behandlung dieses Fragenkomplexes Mißverständnisse auszuschalten, ist es notwendig, einleitend den *Begriff der Indexzahl* zu definieren. Als statistisches Meßinstrument zur Feststellung der Veränderung des Preisniveaus, aufgebaut auf dem Gesetz der großen Zahlen, kommt irgendein Mittelwert in Betracht, und zwar ein Mittelwert von Einzelwerten, die miteinander vergleichbar sein müssen. Vergleichbar Einzelwerte sind aber nicht die absoluten Preise, sondern die sogenannten « Preisvariationen », d. h. die jeweiligen Verhältnisse der einzelnen Preise am Beobachtungstermin zum Bezugstermin.

Ganz generell ist also eine Indexzahl als *irgendein Mittelwert von Preisvariationen* zu definieren.

Die Zahl der Mittelwerte ist aber unendlich groß. Glücklicherweise gelingt es, wenige typische Grundgruppen von Mittelwerten für die Indexzahlenberechnung herauszugreifen, aus denen durch einfache Rechnenoperationen alle in der Praxis vorkommenden Abarten von Indexzahlen herzuleiten sind. Die nachfolgenden Untersuchungen werden auf diese Grundtypen direkt bezogen, sind aber auf alle Abarten durch einfache Kombinationen indirekt anzuwenden.

Als die in der Praxis vorkommenden *Grundtypen* bezeichne ich den arithmetischen, harmonischen, geometrischen Mittelwert und den Zentral- oder Medianwert. Den dichtesten oder häufigten Wert lasse ich außer Betracht, da er in der Praxis

so gut wie garnicht vorkommt. Die genannten vier Grundtypen werden untersucht, und zwar sowohl in ihrer einfachen als auch in ihrer gewogenen Form.

Die drei erstgenannten Mittelwerte unterscheiden sich von dem Medianwert zunächst dadurch, daß sie durch eine mathematische *Formel* definiert sind, während der Medianwert durch seine *Position* in der nach der Größe geordneten Reihe der Mittelwerte bestimmt ist. Um den Medianwert einer fehlerteoretischen Untersuchung unterziehen zu können, ist es aber erforderlich, daß man ihn eine Formel kleidet, die zum mindesten approximativ die Höhe des Medianwertes angibt. Diese Approximation gelingt mit Hilfe der Interpolationsformel von Lagrange.

Der Interpolationsausdruck für den Medianwert ist von folgender Form:

$$I^z = \sum_{1}^{n} t(V_t \cdot \Pi_t).$$

Er ist also eine Produktsumme, in der sich die Produkte aus zwei Faktoren zusammensetzen, von denen der eine (V_t) eine Preisvariation darstellt, die von allen anderen Preisvariationen in dem Interpolationsausdruck ziffernmäßig verschieden ist, während der andere Faktor ein ebenfalls von t abhängiger, sich aus den Werten der Verteilungsfunktion der Preisvariationen ergebende Ausdruck von komplizierter Natur und folgender Form ist:

$$\Pi_t = \frac{\prod_{1}^{n} \tau \neq t(d_\tau^z)}{\prod_{1}^{n} \tau \neq t(d_\tau^t)}$$

wobei $d_\tau^t = A_t - A_\tau$ bezw. $d_\tau^z = A_z - A_\tau$ darstellen. Die A-Werte sind die unabhängigen Variablen einer Funktion:

$$V = f(A)$$

vobei die V_t-Werte di der Größe nach geordneten, aber alle verschiedenen Preisvariationen bezeichnen und die A_t-Werte die Anzahl aller Preisvariationen angeben, die kleiner sind als V_t, V_z bezw. A_z beziehen sich auf den Median- bezw. Zentralwert. Dabei ist Kontinuierlichkeit der Funktion vorausgesetzt.

II. Fehlerquellen.

Wenn wir die Genauigkeit dieser vier Indexzahltypen untersuchen, so muß man zunächst die *Fehlerquellen* ermitteln, die bei der Berechnung einer Indexzahl auftreten können.

Es gibt deren drei:

1°) *Die systematischen Formelfehler*, die ein Analogen in den instrumentalen Fehlern bei physikalischen Messungen haben. Diese systematischen

Formelfehler sind bisher in der Literatur vorwiegend behandelt worden mit dem Ergebnis, daß, wie Irving Fisher nachweist, sie durch eine geeignete Formel beliebig klein zu machen, d. h. zu vermeiden sind.

2°) *Die Fehler der Preisvariationen und Gewichte*, die unvermeidbar und zufälliger Natur sind und den Gesamtfehler der Indexzahl beeinflussen.

3°) *Die durch Unvollständigkeit des statistischen Materials erzeugten Fehler*, die ebenfalls zufälliger Natur sind und dadurch entstehen, daß zur Messung des allgemeinen Preisniveaus aus praktischen Erwägungen heraus nicht alle Preise der Waren, die dem Verkauf unterliegen, in Betracht gezogen werden. Es liegt also in gewissem Umfange eine repräsentative Statistik zugrunde.

Die letzten beiden Fehlerquellen sollen in diesem Referat behandelt werden, um dadurch eine deutlich fühlbare Lücke in der bisherigen Literatur der formalen Indexzahlentheorie auszufüllen und um dadurch ein abschließendes Urteil über die Frage der Genauigkeit und Zuverlässigkeit der Indexzahlen zu gewinnen.

III. Die Fehlergesetze.

Zu dem Zwecke ist es erforderlich, zunächst die Fehlergesetze der Haupttypen von Indexzahlen zu untersuchen.

Es zeigt sich, daß es durch geeignete Auswahl der Einzelwerte möglich ist, die Fehlergesetze der sogenannten formulierten Mittelwerte (arithmetisches, harmonisches und geometrisches Mittel) approximativ auf di Gauß'sche Fehlerfunktion zurückzuführen sind. Das Fehlergesetz für den Medianwert ist allerdings von anderer Form, und zwar ist es von Fechner folgendermaßen formuliert:

$$\varphi(\lambda) = \frac{h}{2} \cdot e^{-h^2|\lambda|}$$

wobei $\Sigma(|\lambda|)$ ein Minimum wird.

Voraussetzung für die Anwendung der Gauß-Gesetze für die formulierten Mittelwerte in der Indexzahlenberechnung ist die Anwendung des Basisketten-systems, wobei also Basis- und Vergleichstermin relativ eng beieinander liegen und außerdem die Ermittlung von Gruppenindizes, die dann zu einer Totalindexzahl zusammenzufassen sind, wobei die Gruppenindizes eine starke Konzentrationstendenz aufweisen in der Form, daß die zu ihnen gehörenden Preisvariationen im allgemeinen nicht über 10 % des Mittelwertes hinaus schwanken.

IV. Die Fehler der Preisvariationen und der Gewichte.

Die Fehler der Preisvariationen und Gewichte entstehen vorwiegend dadurch, daß zur Feststellung des Preises einer Ware eine große Anzahl von Einzelpreisen zugrunde gelegt wird, die mit einem bestimmten mittleren Fehler um den Mittelwert schwanken. Die Fehler der Gewichte werden im allgemeinen größer sein

als die der Preisvariationen, da ihre Statistik auf unsichereren Grundlagen liegt als die der Preise. Nennt man die Fehler der Einzelwerte « elementare Werte », so handelten sich darum den daraus entstehenden Fehler der Indexzahl, der als « resultierender Fehler » bezeichnet wird, ermitteln. Es handelt sich also um eine Fehlervergleichung im Gegensatz zu den üblichen fehlertheoretischen Untersuchungen, die ihr Ziel meist darin sehen, für einen Mittelwert ein Dispersionsmaß zu finden.

Der Hauptgrundsatz bei der mathematischen Herleitung der resultierenden Fehler besteht darin, daß man unter der Voraussetzung, daß die Fehler der Preisvartationen und Gewichte bekannt sind, von « wahren » Preisvariationen und Gewichten von folgender Form ausgeht:

$$v_t(1+e_t) \qquad \text{bezw.} \qquad q_t(1+\varepsilon_t).$$

Diesen « wahren » Preisvariationen und Gewichten steht die « wahre » Indexzahl

$$J(1+e)$$

gegenüber. Betrachtet man die elementaren Fehler als Fehler, die zufällig um den Mittelwert 0 schwanken, so ist es möglich, einen mittleren elementaren Fehler festzustellen, und zwar von der Formel:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma e_t^2}{n}} \qquad \sigma_2 = \sqrt{\frac{\Sigma \varepsilon_t^2}{n}}.$$

Es ergeben sich dann folgende resultierende Fehler der einzelnen ungewogenen Indexzahltypen:

Für J^a (arithmetisches Mittel):

$$\sigma_e^a = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1+V^2},$$

V ist der Variabilitätskoeffizient der Preisvariationen.

Für J^h (harmonisches Mittel):

$$\sigma_e^h = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1+V_{1,0}^2},$$

$V_{1,0}$ ist der Variabilitätskoeffizient der reziproken Preisvariationen bezüglich J^a.

Für J^g (geometrisches Mittel):

$$\sigma_e^g = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}.$$

Für ${}^{(g)}J^z$ (Zentral- oder Medianwert):

$$J^z \qquad \text{bzw.} \qquad {}^gJ^z$$

werden erst dann durch die Fehler der Preisvariationen und Gewichte beeinflußt,

wenn diese so groß sind, daß die Preisvariationen, die ursprünglich unter dem Zentralwert lagen durch Hinzufügung von relativen, elementaren Fehlern größer als ${}^{(g)}J^z$ gemacht werden und umgekehrt, was aber nur bei Preisvariationen vorkommt, die in der Nähe des Zentralwertes gelegen sind.

Zieht man die gewogenen Mittelwerte in entsprechende Betrachtung, so muß man zunächst feststellen, in welchem Umfange zwischen den Preisvariationen und Gewichten Unabhängigkeit oder Korrelation besteht. Dabei genügt es nicht, nur den einfachen Korrelationskoeffizienten

$$r_{11}=\frac{\Sigma(d_t\cdot d_t')}{n\cdot\sigma_t\cdot\sigma_{t'}}$$

zu untersuchen, sondern man muß auch feststellen, ob die Korrelationskoeffizienten höherer Ordnung von 0 verschieden sind oder nicht, d. h. man muß untersuchen, ob

$$r_{12}=\frac{\Sigma(d_t\cdot d_t'^2)}{n\cdot\sigma_t\cdot\sigma_{t'}}=0$$

$$r_{21}=\frac{\Sigma(d_t^2\cdot d_t')}{n\cdot\sigma_t^2\cdot\sigma_{t'}}=0$$

und

$$r_{22}=\frac{\Sigma(d_t^2\cdot d_t'^2)}{n\cdot\sigma_t^2\cdot\sigma_{t'}^2}-1=0$$

werden oder nicht.

Je nachdem, ob Unabhängigkeit oder Korrelation besteht, ergeben sich folgende mathematische Ausdrücke für die resultierenden Fehler, wobei zu beachten ist, daß der Totalfehler nur dadurch errechnet werden kann, daß man nacheinander zwei Partialfehler feststellt, wobei in einem Falle nur die Preisvariationen und im anderen Falle nur die Gewichte elementaren Fehlern unterliegen.

Für ${}^gJ^a$:

a) Nur die Preisvariationen sollen Fehlern unterliegen.

α) Zwischen den Preisvariationen und Gewichten besteht völlige Unabhängigkeit

$${}^g\overline{\sigma}_e''=\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{(1+V^2)(1+V'^2)},$$

V' ist der Variabilitätskoeffizient der Gewichte.

β) Bei Korrelation zwischen Preisvariationen und Gewichten

$${}^g\overline{\sigma}_e''=\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{1}{1+r_{11}\cdot V\cdot V'}$$

$$\times\sqrt{(1+V^2)(1+V'^2)+4r_{11}\cdot V\cdot V'+2r_{12}\cdot V\cdot V'^2+2r_{21}\cdot V^2\cdot V'+r_{22}\cdot V^2\cdot V'^2}.$$

b) Nur die Gewichte sollen Fehlern unterliegen.

α) Unabhängigkeit:

$${}^g\overline{\sigma}_e''=\frac{\sigma_2}{\sqrt{n}}\cdot V\cdot\sqrt{1+V'^2}.$$

β) Korrelation:

$$ {}^{g}\sigma_e^a = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \cdot V \cdot V'} \cdot V $$

$$ \times \sqrt{1 + V'^2(1 + r_{22} - 3r_{11}^2) + r_{11}^2 \cdot V'^4 + 2V'(r_{21} - 2r_{12} \cdot V'^2)}. $$

c) Totalfehler:

$$ {}^{g}\sigma_e^a = \sqrt{({}^{g}\overline{\sigma}_e^a) + ({}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^a)^2}. $$

Für ${}^{g}J^h$:

Die Formeln lauten analog denen für ${}^{g}J^a$:

a) α) Bei Unabhängigkeit:

$$ {}^{g}\overline{\sigma}_e^h = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{(1 + V_{1,0}^2)(1 + V'^2)}. $$

β) Bei Korrelation:

$$ {}^{g}\overline{\sigma}_e^h = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \cdot V_{1,0} \cdot V'} $$

$$ \times \sqrt{1 + V'^2 + V_{1,0}^2 + (1 + r_{22}) V_{1,0}^2 \cdot V'^2 + 4r_{11} \cdot V_{1,0} \cdot V' + 2r_{12} \cdot V_{1,0} \cdot V'^2 + 2r_{21} \cdot V_{1,0}^2 \cdot V'}. $$

b) α) Bei Unabhängigkeit:

$$ {}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^h = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \cdot V_{1,0} \cdot \sqrt{1 + V'^2}. $$

β) Bei Korrelation:

$$ {}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^h = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + r_{11} \cdot V_{1,0} \cdot V'} \cdot V_{1,0} $$

$$ \times \sqrt{1 + V'^2(1 + r_{22} - 3r_{11}^2) + r_{11}^2 \cdot V'^4 + 2V'(r_{21} - 2r_{12} \cdot V'^2)}. $$

c)

$$ {}^{g}\sigma_e^h = \sqrt{({}^{g}\overline{\sigma}_e^h)^2 + ({}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^h)^2}. $$

Für ${}^{g}J^g$:

a) Sowohl bei Unabhängigkeit als auch bei Korrelation:

$$ {}^{g}\overline{\sigma}_e^g = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + V'^2}. $$

b) α) Bei Unabhängigkeit:

$$ {}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^g = \frac{\sigma_2 \cdot \sigma_{\log r}}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{1 + V'^2}. $$

$\sigma_{\log r}$ ist das Streuungsmaß der Logarithmen der Preisvariationen um $(\log J^g)$.

β) Bei Korrelation:

$$ {}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^g = \frac{\sigma_2 \cdot \sigma_{\log r}}{\sqrt{n}} $$

$$ \times \sqrt{1 + V'^2(1 + r_{22} - 3r_{11}^2) + r_{11}^2 \cdot V'^4 + 2V'(r_{21} - 2r_{12} \cdot V'^2)}. $$

c)

$$ {}^{g}\sigma_e^g = \sqrt{({}^{g}\overline{\sigma}_e^g)^2 + ({}^{g}\bar{\bar{\sigma}}_e^g)^2}. $$

Alles in Allem sagen die Formeln, die über die Beziehungen zwischen den elementaren Fehlern der Preisvariationen und Gewichte einerseits und den re-

sultierenden Fehlern der Indexzahlen andererseits Aufschluß geben, folgende Tatsachen aus:

1°) Falls die Fehler der dem Zentralwert benachbarten Preisvariationen gering sind, ist ${}^{(g)}J^z$ allen anderen Indexzahtypen vorzuziehen; andernfalls ist dem geometrischen Mittelwert der Vorzug zu geben. Die arithmetische und harmonischen Mittelwerte ergeben jedenfalls immer die größten « resultierenden » Fehler.

2°) Die Fehler der Preisvariationen haben auf den resultierenden Fehler jedweder Indexzahl meistens einen größeren Einfluß als die Fehler der Gewichte, so daß für die Praxis der Indexzahlenberechnung die Genauigkeit der Preisvariationen von größerer Wichtigkeit ist als die Genauigkeit der Gewichte.

3°) Da die resultierenden Fehler um so größer sind, je größer die Dispersion der Preisvariationen bzw. Gewichte sind, muß es als ratsam angesehen werden, Gruppenindices zu berechnen und zwar aus Gruppen, in denen die Dispersion der Preisvariationen und Gewichte relativ gering ist und im übrigen das Basiskettensystem in Anwendung zu bringen. Dadurch wird übrigens auch erreicht, daß die Fehler der Gewichte von geringerem Einfluß auf die resultierenden Fehler sind als die Fehler der Preisvariationen, was für die Praxis durchaus von Bedeutung ist, denn die Berechnung der Gewichte basiert im allgemeinen auf einəm unvollkommeneren Material als die Festsetzung der Preisvariationen.

4°) Ergeben die Formeln, daß die resultierenden Fehler umgekehrt proportional zu der Anzahl n der Preisvariationen sind. Dieser Einfluß auf den Indexzahlfehler ist jedoch, von ungleich geringerer Bedeutung als die Fehlerhaftigkeit und Ungleichheit der Preisvariationen und Gewichte.

V. Die durch Unvollständigkeit des statistischen Materials erzeugten Fehler.

Diese Fehler können nicht nach dem bekannten Quadratwurzelgesetz aus der Fehlertheorie bestimmt werden, wonach der mittlere Fehler einfach umgekehrt proportional zur Quadratwurzel aus der Anzahl n der Preisvariationen ist, denn offenbar besteht zwischen den Preisvariationen keine Unabhängigkeit, sondern zweifellos eine mehr oder minder hohe Korrelation, die bei geeigneter Festsetzung der Gruppen recht hoch gemacht werden kann.

Berechnet man die Preisvariationen für mehrere aufeinanderfolgende Zeitpunkte eines Jahres, so erhält man eine Korrelationstafel, aus der die Werte der Korrelations-Koeffizienten zu berechnen sind und aus der ersichtlich wird, daß die Streuungsmasse der sich für die einzelnen Preisvariationen ergebenden statistischen Reihen nur mit geringer Dispersion um einen Mittelwert σ schwanken. Ebenfalls kann man bei entsprechender Konstruktion eines Gruppen-Index, dessen Preisvariationen eine eng miteinander verknüpfte Schwankungstendenz aufweisen, einen mittleren Korrelations-Koeffizienten r annehmen, der nur mit einem geringen Streuungsmaß versehen ist.

Als « wahren » Wert des Preisniveaus einer Warengruppe definiere ich den Durchschnitt von unendlich vielen Gruppen-Indices. Der Korrelations-Koeffizient zwischen einem solchen Index und dem « wahren » Index ist z. B.

$$r_{J^\alpha W^\alpha} = \frac{n \cdot r}{1 + (n-1)r}.$$

Betrachtet man die diesbezügliche Korrelationstafel, dann ergibt sich als mittlerer Fehler des Index folgender Bestimmungsgleichung:

$$J^\alpha = r_{J^\alpha W^\alpha} \cdot \frac{\sigma_{J^\alpha}}{\sigma_{W^\alpha}} \cdot W^\alpha,$$

also

$$\bar{\sigma}_{J^\alpha} = \sigma_{J^\alpha} \sqrt{1 - r^2_{J^\alpha W^\alpha}}$$

$\bar{\sigma}_{J^\alpha}$ ist der mittlere Fehler, d. h. das Streuungsmaß einer besonderen Reihe der Korrelationstafel oder, anders ausgedrückt, der mittlere Fehler einer zu untersuchenden Indexzahl, während σ_{J^α} den mittleren Fehler aller Indices darstellt.

Ersetzt man die einzelnen Dispersionsmasse der Indices durch deren Mittelwert und benutzt man den schon erwähnten mittlere Korrelations-Koeffizienten, so ergeben sich folgende Resultate:

$$\sigma_{J^\alpha} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1-r}{2 + (n-2)r}}, \quad \text{bzw.} \quad = \sigma' \cdot \sqrt{\frac{1-r}{n}},$$

wenn σ' das mittlere Streuungsmaß aller Preisvariationen für die Zeit der Korrelationstafel bedeutet

$$\sigma_{{}_{\prime\prime}J^\alpha} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{1 + \sigma_q^2 - r}{2 + (n-2)r}}, \quad \text{bzw.} \quad = \sigma' \cdot \sqrt{\frac{1 + \sigma_q^2 - r}{n}},$$

venn σ_q das mittlere Dispersionsmaß der Gewichte. Für σ_{J^h} und $\sigma_{{}_{\prime\prime}J^h}$ ergeben sich dieselben Resultate.

Weiterhin ist:

$$\sigma_{J^g} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\frac{n}{2} \cdot r}{1 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) r}} \cdot \sqrt{\frac{1-r}{1 + (n-1)r}},$$

$$\sigma_{{}_{\prime\prime}J^g} = \sigma \cdot \sqrt{\frac{\frac{n}{2} \cdot r}{1 + \sigma_q^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) r}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \sigma_q^2 - r}{1 + \sigma_q^2 + (n-1)r}},$$

$$\sigma_{({}^g)J^z} = \frac{i \cdot \sqrt{n}}{2f},$$

wobei i ein kleines Intervall auf der Abszissenachse, auf der die Preisvariationen aufgetragen werden und das ${}^{(g)}J^z$ in sich schließt und f die Frequenz in diesem Intervall bedeuten. Aus den Formeln ergibt sich, daß auch bzgl. dieser Fehlerquelle in den meisten Fällen dem Zentralwert der Vorzug vor den anderen

Mittelwerten zu gewähren ist und daß dann das geometrische Mittel in der Abstufung der Genauigkeitsgrade folgt.

Alles in Allem ist für die Praxis der Indexzahleberechnung festzuhalten, daß es weniger darauf ankommt, eine große Anzahl von Preisvariationen in die Berechnung hineinzuziehen, als vielmehr darauf zu achten, daß Gruppenindices dergestalt berechnet werden, daß die Korrelation zwischen den eingeschlossenen und weggelassenen Preisvariationen möglichst groß ist. Durch diese Eigenschaften der Preisindices ergeben sich manche Erleichterungen für die Praxis, was besonders durch graphische Darstellungen obiger Formeln verdeutlicht wird.

W. DOBBERNACK (Berlin - Germania)

VERSICHERUNGSMATHEMATISCHE UND MATHEMATISCH-STATISTISCHE ERKENNTNISSE AUS DER JÜNGSTEN ENTWICKLUNG DER DEUTSCHEN SOZIALVERSICHERUNG

I. - Versicherungstechnische Begründung der strukturellen Veränderungen des Finanzsystems der deutschen Sozialversicherung durch Weltkrieg und Inflation.

Der Zweck dieses Referats ist, die Ergebnisse mathematisch-statistischer und versicherungsmathematischer Untersuchungen darzustellen, da sie geeignet sind, in objektiver und eindeutiger Weise die finanziellen Umgestaltungen der deutschen Sozialversicherung zu erklären. Diese Umgestaltungen lassen sich einmal in dem starken Unterschied der Versicherungsaufwendungen, die von etwa 1,4 Milliarden *M* im Jahre 1913 auf rund 3,7 Milliarden *M* im Jahre 1927 gestiegen sind, und außerdem in einer versicherungstechnisch vollkommen geänderten finanziellen Lage erkennen. Von diesen beiden Erscheinungen ausgehend gelangt man unmittelbar in eine Betrachtung über die Veränderungen der versicherungstechnischen Grundlagen, die die natürliche Ursache für jene Veränderungen infolge der Auswirkungen des Krieges mit allen seinen Begleiterscheinungen darstellen.

1. - **Die Versicherten.** — *Zahlenmässig* hat die Masse der Versicherten einen beträchtlichen *Zuwachs* erfahren, wie er sich bereits aus einem Vergleich der Zahl der Erwerbstätigen zwischen der letzten Vorkriegszählung im Jahre 1907 mit derjenigen des Jahres 1925 ergibt. Diese Erscheinung tritt in besonders starkem Masse in der *Angestellten-versicherung* infolge eines vermehrten Zuflusses zu den Angestelltenberufen hervor. Bei der Krankenversicherung ist noch zu berücksichtigen, daß vor dem Kriege etwa 16 Millionen Versicherte und 4 Millionen Familienangehörige gezählt worden sind, während heute von den Trägern der Krankenversicherung etwa 20 Mill. Versicherte und 15 Millionen Familienangehörige versorgt werden.

Über die *zukünftige Entwicklung* der Versicherten lassen sich insofern einige Prognosen stellen, als man in der Lage ist, die Entwicklung der Zahl der erwerbsfähigen Personen vorauszubestimmen. Voraussichtlich wird sich diese Zahl im allgemeinen noch in den nachsten Jahren erhöhen, im Jahrfünft, 1930

bis 1935, infolge sich des dann auswirkenden Geburtenausfalls aus dem Kriege vorübergehend vermindern, um dann wieder anzusteigen, um 1950 ihr Maximum zu erreichen und dann infolge des verminderten Geburtenüberschusses abzusinken. Dieses Absinken wird um so schärfer sein, jenachdem man annimmt, daß die Fruchtbarkeit oder die Zahl der Lebendgeborenen gleichbleibt oder die Fruchtbarkeit in abnehmender Geschwindigkeit etwa in Anlehnung an eine Parabel 3 Grades sinkt.

Die einwirkung des Anwachsens der Versicherten auf die finanzielle Entwicklung der Sozialversicherung wird noch verschärft, wenn man sich mit dem *Altersaufbau und dem Geschlecht* der Versicherten befaßt. Es zeight sich nämlich, daß Geburtenrückgang und Sterblichkeitsverminderung auf die finanzielle Entwicklung der Sozialversicherung in ungünstiger Weise einwirken. Sie bedeuten eine Altersanhäufung der Versicherten, und zwar nich nur für die bisher vergangene Zeit, sondern auch nachweislich für die nächste und fernste Zukunft. Es läßt sich z. B. feststellen, daß sich die Gruppe der 65 und mehr alten Personen vom Jahre 1925 bis zum Jahre 1965 etwa verdoppeln wird. Diese Altersanhäufung ist um so beachtlicher, als die Generation, die gegenwärtig auf der Höhe der Fortpflanzungsperiode steht, sich aus den stark besetzten Geburtsjahren der Vorkriegszeit zusammensetzt. Der Unterbau der Alterspyramide, der sich vor dem Kriege dauernd verbreiterte, hat eine außerordentliche Verminderung erfahren. Die Bevölkerung des Deutschen Reiches aus dem heutigen Reichsgebiet war Mitte 1925 in allen Altersklassen größer als im Jahre 1910, ausgenommen aber die Altersgruppen 0-10, wo ein beträchtlicher Rückgang zu verzeichnen ist, und bei der männlichen Bevölkerung der Altersgruppen von 30-35, d. h. diejenige Altersklasse, die während des Krieges den Hauptteil der Frontsoldaten stellte. Diese Erscheinung wird später ein stetig ansteigendes Mißverhältnis von Beitragszahlern und erwerbsunfähigen Personen zur Folge haben. Es läßt sich schon bereits in der Angestelltenversicherung nachweisen, daß die Besetzung der unteren Altersklassen in Zukunft stark absinken wird, während die hohen Altersklassen eine Anhäufung erfahren werden. Diese Erscheinung tritt in stärkstem Maße hervor bei den weiblichen Versicherten, deren höchste Altersklasse (60-65) vom Jahre 1960 an etwa mit der achtfachen Zahl besetzt sein wird wie im Jahre 1926. Bei den männlichen Versicherten wird diese Altersklasse dann etwa die $2\,^1/_2$ fache Zahl aufweisen.

Die finanziellen Wirkungen der Altersanhäufung werden noch weiter verstärkt durch die beträchtliche Zunahme der weiblichen Versicherten, die bekanntlich ein schlechtes Versicherungsrisiko darstellen, da sie im allgemeinen früher und häufiger invalide werden als die Männer und in der Regel trotz ihres schlechteren Invaliditätsgrades ein höheres Lebensalter als die Männer erreichen und dadurch die Versicherungseinrichtungen stark belasten.

2. - Die Leistungsempfänger. — Die bereits erfolgte Altersanhäufung steht in engem Zusammenhang mit der *erhöhten Invaliditätsgefahr*. Die Invaliditätsziffer, d. h. das Verhältnis der Invaliden zur Zahl der Versicherten beträgt z. Zt. etwa 1-9 gegenüber 1-19 im Jahre 1913. Die statistischen Ergebnisse der Vorkriegszeit ließen dagegen für die Gegenwart nur eine Invaliditätsziffer von 1-15 erwarten. Nach den statistischen Entwicklungsgesetzen der Vorkriegszeit war für das Jahr 1926 ein Neuzugang von 190000 Invalidenrenten neu festgesetzt worden und es liefern im Jahre 1926 etwa 1,7 Millionen Invalidenrenten. Der Unterschied beruht einmal auf der Altersanhäufung, dann aber auch darauf, daß der körpeliche Widerstand der Versicherten abgenommen hat und die Rationalisierung der Wirtschaft die Invalidenversicherung in gewissem Umfange zu einer Krisenversicherung gemacht hat. Außerdem muß man beachten, daß durch die Invalidenversicherung etwa 70000 Kriegsbechädigte, 90000 Kriegswitwen und 30000 Kriegerwaisen versorgt werden.

Wenn einerseits die Schadenswahrscheinlichkeiten in der sozialen Versicherung zugenommen haben, so haben andererseits die *Ausscheidewahrscheinlichkeiten* der Rentner durch Tod oder Reaktivierung abgenommen. Diese Tatsache, die als ein Spiegelbild der allgemein festzustellenden längeren Lebenserwartung anzusehen ist, belastet die Versicherungsträger mit den Rentenzahlungen länger als früher.

Der *Beharrungszustand* nach der Zahl der Renten wird in der Invalidenversicherung nicht vor dem Jahre 1960 und in der Angestelltenversicherung nicht vor dem Jahre 1990 zu erwarten sein. Wegen der in den Renten enthaltenen Steigerunsbeträge wird der finanzielle Beharrungszustand noch beträchtlich später eintreten müssen. Für der Versicherungsmathematiker wären diese Tatsachen unbedenklich, wenn man in der Sozialversicherung wie vor dem Kriege das Anwartschaftsdeckungsverfahren für die Erhebung der Beiträge anwenden würde. Dieses theoretisch und praktisch einwandfreieste aller Deckungsverfahren ließ sich jedoch nach Beendigung der Inflation infolge der Vernichtung der Versicherungsreserven nicht mehr durchführen und man war gezwungen, das Umlageverfahren einzuführen. Ein Übergang vom Umlageverfahren zum Anwartschaftsdeckungsverfahren ist aus wirtschaftlichen Gründen in der Invalidenversicherung unmöglich, da wegen des hohen Rentnerbestandes Beiträge gefordert werden mussten, die alle Beteiligten nicht bestreiten könnten. Dagegen halte ich es in der Angestelltenversicherung ohne besondere Schwierigkeiten für möglich, das Anwartschaftsdeckungsverfahren wieder einzuführen. Eine versicherungs-mathematische Bilanz weist aus, daß die jetzt gültigen Beiträge zur Angestelltenversicherung um etwa 40 v. H. erhöht werden müssten, um diesen Versicherungszweig für alle Zukunft sicherzustellen. Diese Erhöhung ist meines Erachtens wirtschaftlich und sozialpolitisch zu vertreten, wenn man beachtet, daß die gegenwärtigen Beiträge um 20 v. H. geringer, und zwar nominal geringer, sind als diejenigen vor dem Kriege. Zieht man noch die Entwertung des Geldes in Betracht, so brauchte

man höchstens den Realwert der Beiträge der Vorkriegszeit zu erheben, um das vom Standpunkt des Versicherungsmathematikers erwünschte Ziel zu erreichen.

II. - Die mathematischen Grundlagen der deutsch Arbeitslosenversicherung.

Während die Mathematik der Lebensversicherung zu einem gewissen Abscluß gelangt ist und die Mathematik der Sachversicherung sich seit längerer Zeit im Fluß befindet, tauchten ganz neue Probleme auf, als man nach dem Kriege daran gehen mußte, den sozialen und wirtschaftlichen Schäden der anschwellenden Arbeitslosigkeit, zumal in Deutschland, durch Versicherungseinrichtungen entgegenzuwirken.

Methodisch unterscheidet sich die Mathematik der Arbeitslosenversicherung vollkommen von den üblichen versicherungsmathematischen Problemes.

Geht man von der Finanzwirtschaft der Versicherungsträger, insbesondere von der Aufbringung der Mittel aus, so handelt es sich für den Versicherungsmathematiker zunänachst darum, das Totalrisiko, d. h. die Häufigkeit und Dauer der Schadensfälle im Zusammenhang mit der Höhe der Versicherungsleistungen zu messen.

Bekanntlich ist aber das *Risiko der Arbeitslosigkeit* örtlich und zeitlich außerordentlich verschieden.

Die *örtlichen Verschiedenheiten* werden zweckmäßig durch eine Beitragsgemeinschaft zwischen den einzelnen Versicherungsträgern egalisiert. Das Gesetz hat sich darauf beschränkt, eine teilweise Beitragsgemeinschaft vorzuschreiben. Diese beschränkte Risikogemeinschaft bringt aber m. E. Gefahren in sich, sodaß eine vollkommene Zentralisation der Mittel genau wie in der sozialen Invalidenversicherung zu fordern ist.

Die *Zeitlichen Unterschiede* in Bezug auf das Risiko der Arbeitslosenversicherung sind unvergleichlich intensiver als bei sämtlichen anderen Versieherungsrisiken. Es darf deshalb nicht dabei sein Bewenden haben, nur die Lage des Arbeitsmarktes an Hand der Arbeitsmarktstatistik zu verfolgen, sondern es ist notwendig, auch darüber hinaus die Arbeitslosigkeit in ihrem zeitlich verschieden starken Auftreten zu ergründen und Klarheit über die jeweilige Stärke der einzelnen, die Arbeitslosigkeit beeinflussenden Faktoren zu gewinnen.

Mit dem Studium dieser Faktoren begibt man sich in das Gebiet der *dynamischen Statistik*. Für die Arbeitslosenversicherung besteht die Aufgabe darin, die Kurven der Arbeitslosigkeit in ihre einzelnen Bestandteile und sich gegenseitig überlagernden Wellenbewegungen zu zerlegen. Es lassen sich folgende 4 Komponenten bilden:

1°) Saisonmüßige Schwankungen;
2°) säkulare Schwankungen;
3°) Konjunkturschwankungen;
4°) durch restliche Ursachen bedingte Schwankungen.

Für die rechnerischen Bestimmungen der *Saisonschwankungen* und ihre Ausschaltung halte ich die Methode von Persons für die Arbeitsmarktuntersuchungen für besonders tauglich.

Indem ich diese Methode als bekannt voraussetze, möchte ich dazu bemerken, daß ich zwar aus Gründen der praktischen Berechnung die Korrekturen an den Kettenziffern entweder in arithmetischer oder in geometrischer Form für richtig halte, daß es jedoch m. E. unzulässig ist, wenn man annimmt, dadurch bereits die säkularen Schwankungen ausgeschaltet zu haben. Ich halte es für dringend notwendig, die säkularen Schwankungen besonders zu erfassen. Diese Anschauung stütze ich außerdem auch darauf, daß bei der Persons'schen Methode stillschweigend vorausgesetzt ist, daß die Saisonwellen in dem Untersuchungszeitraum ein starres System bilden, während praktisch der Fall meist so liegt, daß die Saisonwellen als solche wiederum säkular schwanken. Auch diese Schwankungen müssen besonders ermittelt werden.

Die Berechnung der säkularen Schwankungen geschieht durch die Konstruktion einer sogenannten Trendkurve. Dieser Trendkurve kann man eine beliebige Funktion zugrunde legen und zwar eine Funktion von sogenannten Zeitwerten, die man den Ursprungswerten zuordnet. Die Auswertung der Parameter dieser allgemeinen Funktion geschieht mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate. Im algemeinen dürfte es ausreichen, eine parabolische Funktion dritten Grades zugrunde zu legen.

Hat man die Trendfunktion konstruiert, so kann man entsprechend wie bei der Ausschaltung der Saisonschwankungen die vom Trend bereinigten Werte auf arithmetische und geometrische Weise ermitteln.

Nach Ausschaltung der saisonmässigen und säkularen Schwankungen bleibt eine Restkurve, die im allgemeinen die Konjunkturschwankungen wiedergibt. Um über den Verlauf der Konjunkturen aber noch eingehenderen Aufschluß zu erhalten, ist es erforderlich, diese Restkurve mit anderen Wirtschaftskurven zu vergleichen. Dazu dienen die dynamischen Korrelations-Koeffizienten. Gelingt es, eine Korrelation zwischen der Arbeitsmarktkurve einer anderen Wirtschaftskurve herzustellen, die von dem Konjunkturverlauf empfindlicher und in einer bekannten und annähernd gleichbleibenden Phasendifferenz früher beeinflußt wird, so kann man auf eine gewisse Zeit für den Arbeitsmarkt Konjunkturprognosen anstellen. Praktisch sind derartige Untersuchungen bereits mit Erfolg durchgeführt worden.

In zeitlich beschränkem Umfange läßt sich also mit derartigen Methoden das schwer zu erfassend Risiko der Arbeitslosigkeit feststellen.

J. VALERA GIL (Buenos Aires - Argentina)

SOBRE GENERACION DE CURVAS ORBIFORMES (1)

1. - En todo este trabajo nos referiremos unicamente a curvas de Jordan, es decir, conjuntos de puntos en correspondencia biunívoca y continua con los puntos de un segmento, regulares, entendiéndose por curva regular, una curva con tangente única en cada punto, girando ésta siempre en el mismo sentido al moverse el punto sobre la curva en sentido constante. Si se trata de curvas cerradas la correspondencia debe establecerse con los puntos de una circunferencia.

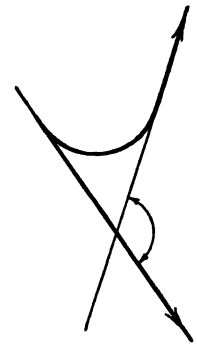


Fig. 1.

Nos proponemos estudiar en esta nota qué condiciones debe reunir un polígono curvilineo de lados regulares, tangentes en los vértices, formando en ellos puntos de retroceso de primera especie, para que sea evoluta de una curva orbiforme.

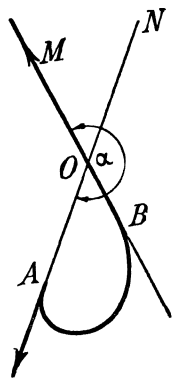


Fig. 2.

Observemos primeramente que si se tiene un arco de curva regular (fig. 1) y las tangentes en sus extremos, de manera que la curva séa en todos los puntos convexa respecto al punto de encuentro de dichas tangentes, la amplitud (flexión) de la curva, o sea el ángulo descrito por la tangente mientras el punto recorre toda la curva, es igual al suplementario del que contiene a la curva. En cambio, si la curva es la AB (fig. 2) con las tangentes en sus extremos y tiene la propiedad de que todas las tangentes la dejan en la misma región en que dejan al punto O, la amplitud es el ángulo cóncavo MOA.

2. - Para estudiar las propiedades de los polígonos curvilineos que consideramos, construiremos lo que vamos a llamar el *polígono rectilineo adjunto,* que se obtiene uniendo por medio de rectas, los vértices consecutivos del curvilíneo dado.

TEOREMA: *La suma de las amplitudes de los lados de un polígono formado por curvas regulares tangentes en los vértices, formando en ellos puntos de retroceso de primera especie, es igual a la suma de los ángulos del polígono rectilineo adjunto.*

---

(1) *Nota del Comitato.* — Questa comunicazione, che apparterrebbe alla Sezione II-A, si trova pubblicata qui per ritardo nel rinvio delle bozze.

Consideremos (fig. 3) un polígono curvilíneo con su rectilíneo adjunto. Trazando en los vértices las tangentes comunes a cada dos lados consecutivos, un lado del rectilíneo y cada dos de aquellas, formarán un triángulo. El ángulo

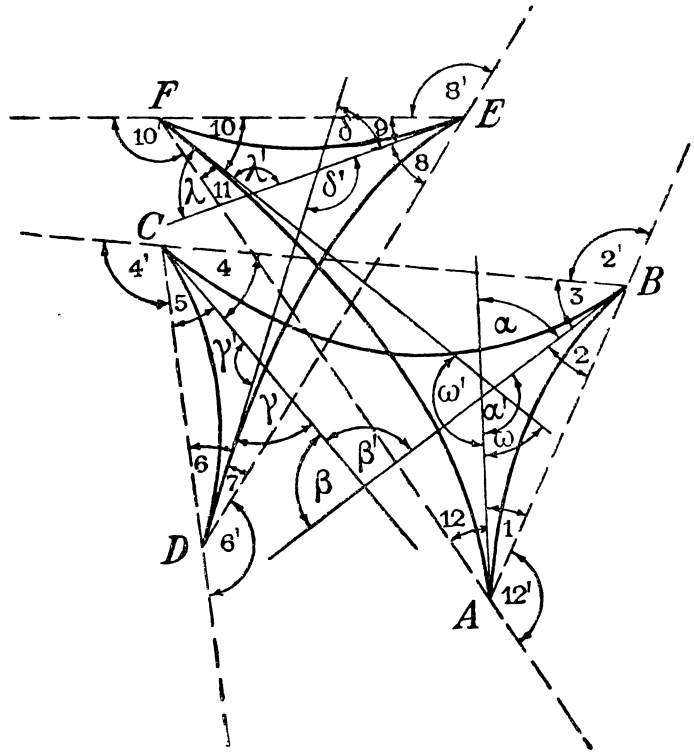


Fig. 3.

de cada dos tangentes, suplementario del que contiene a cada lado del curvilíneo tangente a ellas, es igual a la amplitud de ese lado del curvilíneo, e igual a la suma de los que forman cada lado del rectilíneo con las tangentes al curvilínio que pasan por los extremos de ambos.

Se tiene, pues, adoptando las notaciones de la figura, que:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\lambda+\omega=(1+2)+(3+4)+\ldots.+(12+1)$$

y como la suma de estos últimos, es igual a la de los ángulos del rectilineo, que da demostrado el teorema.

La demostración subsiste en el caso de que haya lados de amplitud igual o mayor que π, pues si se trata, por ejemplo, del arco AMB (fig. 4), cuya amplitud es igual al ángulo cóncavo BCE, se tiene:

$$\left.\begin{matrix} A=\beta+\gamma \\ B=\alpha+\gamma \end{matrix}\right\} A+B=\alpha+\beta+2\gamma=2R+\gamma=\text{Ang.}^{\text{o}}\ \text{concavo}\ BCE$$

3. - Fijemos un sentido sobre el perímetro del polígono rectilíneo, y prolonguemos todos sus lados en ese sentido; la prolongación de un lado y el siguiente, formará en cada vértice un ángulo que sumado al del polígono valdrá π, si se ha fijado tambien un sentido positivo para los ángulos.

Llamando 2', 4', 6', etc., a esos ángulos externos y A, B, C, etc., a los del polígono, podremos escribir $(\alpha+\alpha')+(\beta+\beta')+\ldots.+(\omega+\omega')=$

(1) $$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\omega)+(\alpha'+\beta'+\gamma'+\ldots.+\omega')=n\pi;$$

y

(1') $$(A+B+C+\ldots.+F)+(2'+4'+\ldots.+12')n\pi$$

siendo n el número de lados del polígono.

Por ser iguales los primeros paréntesis de las igualdades (1) y (1'), resulta

$$(\alpha'+\beta'+\ldots.+\omega')=(2'+4'+\ldots.+12');$$

pero, por no tener los polígonos curvilineos que consideramos puntos de retroceso de segunda especie, la suma de las amplitudes de esos lados es igual a un multiplo de π, $m\pi$ (m intero), luego:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\ldots.+\omega)=m\pi$$

de donde según (1)

$$\alpha'+\beta'+\ldots.+\omega'=(n-m)\pi$$

ó

$$2'+4'+\ldots.+12'=(n-m)\pi$$

es decir un múltiplo de π, y como los lados del polígono rectilíneo se han prolongado en un mismo sentido, ese múltiplo de π, será, necesariamente, par.

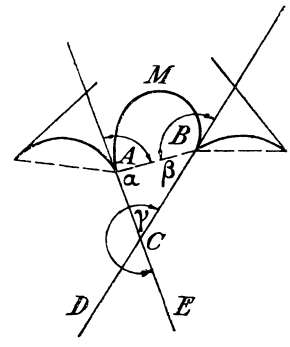


Fig. 4.

Los polígonos de lados rectos que cumplen la condición de que las sumas de los ángulos formados en cada vértice por un lado y la prolungación del otro al prolongar todos los lados en un mismo sentido, séa un múltiplo de 2π, distinto de cero, son los que nos interesan para nuestro estudio.

4. - Llamaremos *género* de un polígono formado por rectas a su número de lados, y *especie* al múltiplo de 2π que mide la suma de los ángulos externos que resultan de prolongar en un mismo sentido todos sus lados. El género lo designaremos por n y la especie por q.

En los polígonos rectilíneos que estudiamos las sumas de sus ángulos es igual, en cada uno de ellos, a $2n-4q$ rectos, pues siendo $2nR$ la suma de los del polígono y de los externos, por definición de especie, se deduce que la de los primeros vale $2n-4q$ rectos.

Para determinar la especie, se fija un sentido al perímetro del polígono y

por un punto del plano, se trazan paralelas a los lados, dirigidas en el sentido de éstos. La suma de los ángulos formados, será un multiplo de 2π, que indicará la especie del polígono.

5. - *Llamaremos género y especie de un polígono curvilíneo, al género y especie de su rectilíneo adjunto.*

Del teorema demostrado en el párrafo 4, se deduce inmediatemente el siguiente:

TEOREMA: *La suma de las amplitudes de los lados de un polígono curvilíneo formado por curvas regulares tangentes en los vértices, formando en ellos puntos de retroceso de primera especie, es igual a* $2n-4q$ *rectos.*

Podemos conocer ahora, inmediatemente, si un polígono curvilíneo dado puede ser evoluta de una curva convexa cerrada regular.

Es preciso, ante todo, que la amplitud de su perímetro séa igual a 2π cuando la evolvente está engendrada por un punto de la tangente a la evoluta que rueda una sola vez sobre todo el perímetro de ésta; o lo que es lo mismo, que esa amplitud, que es igual a $2n-4q$, valga 4 rectos. Se determina si se cumple esa condición por medio de su rectilíneo adjunto.

6. - De la expresión

$$2n-4q=4$$

se deduce

$$n=2q+2.$$

Dando a q los valores

$$1,\ 2,\ 3,\ldots.\ n,$$

resultan para n los siguientes:

$$4,\ 6,\ 8,\ 10,\ldots.\ 2n+2.$$

Luego: el número de vértices de una curva convexa regular, no puede ser inferior a 4 y es siempre número par.

7. - Se necesita tambien para que un polígono curvilíneo sea evoluta de una curva convexa cerrada regular, que el punto de la tangente a la evoluta que engendra la evolvente, vuelva a su posición primitiva despues de haber rodado la recta sobre el perímetro de la evoluta.

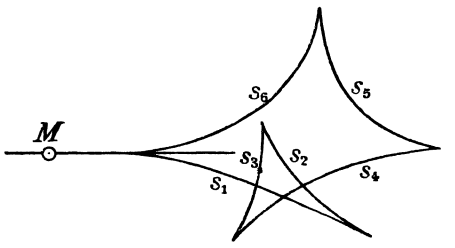


Fig. 5.

Designemos por s_1, s_2, s_3, s_4,...., s_{2n} las longitudes de los lados de la evoluta (fig. 5).

Séa M un punto de la tangente a la evoluta en uno de los vértices, el generador de la curva evolvente y a la distancia de M a dicho vértice.

Para que la curva séa cerrada se necesita que se tenga

$$a=a+s_1-s_2+s_3-s_4 \ldots . -s_{2n},$$

o bien

$$s_1+s_3+s_5+s_7+s_9 \ldots . +s_{2n-1}=s_2+s_1+s_6+s_8 \ldots . +s_{2n};$$

resulta, por lo tanto, esta propiedad:

TEOREMA: *La condición necesaria y suficiente para que un polígono curvilíneo formado por curvas regulares tangentes en los vértices, siendo estos puntos de retroceso de primera especie, séa evoluta de una curva regular convexa cerrada engendrada por un punto de una tangente a dicha evoluta y que rueda una sola vez sobre el contorno de ella, es que satisfaga a la condición* $2n-4q=4$, *y que la suma de las longitudes de los lados de orden par séa igual a la de las longitudes de los lados de orden impar.*

8. - Se sabe que una curva orbiforme se engendra por dos puntos de una recta que rueda sobre la evoluta de aquella.

En este caso, para que se tenga una cerrada, debe verificarse que la amplitud del perímetro de la evoluta séa igual a π, o lo que es lo mismo, que se cumpla la condición

$$2n-4q=2 \quad \text{o} \quad n=2q+1 \quad (1)$$

Haciendo q igual a

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots.$$

resultan para n los valores

$$3,\ 5,\ 7,\ldots.$$

Siendo dos puntos de la tangente a la evoluta los que engendran la evolvente, el número de vértices de estas curvas será uno de los términos de la progrésion

$$6,\ 10,\ 14,\ldots. \quad (2)$$

luego, el número de vértices de una curva orbiforme no es inferior a 6 y es siempre uno de los términos de la progresión (2).

9. - Si llamamos a a la distancia del punto de la tangente a la evoluta, generador de la evolvente, al punto de tangencia, y s_1, s_2, s_3, s_4,...., s_{2n+1} a las longitudes de los lados de aquella, se vería fácilmente que la anchura del recinto correspondiente es igual a la suma

$$2a+s_1-s_2+s_3- \ldots . +s_{2n+1}.$$

Se observa tambien que si un polígono curvilíneo de un número impar de lados satisface la condición

$$2n-4q=2,$$

es la evoluta de una curva orbiforme con indicatríz contínua, sin que seá necesario ninguna relación entre las longitudes de los lados.

Se puede, pues, enunciar la siguiente propiedad:

TEOREMA: *Todo polígono curvilíneo de lados regulares tangentes en los vértices y formando en ellos puntos de retroceso de primera especie, es la evoluta de una infinidad de curvas orbiformes, con indicatriz de curvatura continua, paralelas, si satisface a la condición de que sea* $2n-4q=2$.

De esto se deduce facilmente que se puede siempre inscribir en una circunferencia, una curva orbiforme con indicatriz de curvatura continua, que le sea tangente en n puntos, siéndo n un número impar tan grande como se quiera, porque dividiendo la circunferencia en un número n impar de partes iguales y trazando el polígono estrellado cuyo lado sea la cuerda del arco que comprenda $\frac{n-1}{2}$ divisiones, se construye de inmediato la evoluta de la curva buscada.

INDICE

COMUNICAZIONI

SEZIONE III-A

BIRKHOFF G. D. - A new criterion of stability . . . . . Pag. 5

CHAZY J. - Sur la stabilité à la Poisson dans le problème des trois corps . . . . . » 15

LEVI-CIVITA T. - Applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici » 17

NOBILE V. - Sulla necessità e possibilità di definire in maniera rigorosa i triedri di riferimento per lo studio dei moti stellari . . » 29

DE CHAURAND DE SAINT EUSTACHE E. - Modi tipici di calcolo per la forma e il volume degli astri rotanti . . . . . » 35

BILIMOVITCH A. - Sur les équations intrinsèques du mouvement d'un système matériel . . . . . » 43

POPOFF K. - Sur le problème des trois corps . . . . . » 49

GEPPERT H. - Die adiabatischen Invarianten beliebiger Differentialsysteme . . . . . » 55

VRANCEANU G. - Parallélisme et courbure dans une variété non holonome » 61

LE ROUX J. - La relativité du langage et la théorie de la gravitation » 69

GONSETH F. et JUVET G. - Sur la relativité à cinq dimensions et sur une interprétation de l'équation de Schrödinger . . . . . » 75

LARMOR J. - Historical note on Hamiltonian Rays and dynamical action » 79

RAINICH G. Y. - On a space-time possessing the symmetry properties of radiation . . . . . » 83

WRINCH DOROTHY - On a method for constructing harmonics for surfaces of revolution . . . . . » 89

DONATI L. - Relazioni generali concernenti le reti di trasmissione e distribuzione dell'energia elettrica, desunte dalla legge di reciprocità » 95

DENIZOT A. - Sur le rapport du coefficient de dilatation à la chaleur spécifique et au coefficient de compressibilité . . . . . » 103

CABRAS ANGELINA - Fenomeni transitori in un ponte di Wheatstone a costituzione complessa . . . . . Pag. 113
TIMPANARO S. - Celerimensura magnetica . . . . . » 119

SEZIONE III-B

DEMTCHENKO B. - Sur une généralisation des invariants intégraux . Pag. 123
BURGATTI P. - Sopra a una particolare deformazione dei cilindri soggetti a forze laterali . . . . . » 129
HADAMARD J. - Sur le battage des cartes et ses relations avec la mécanique statistique . . . . . » 133
HOSTINSKÝ B. - Sur la propagation dirigée des ondes . . . . . » 141
SBRANA F. - Considerazioni sul calcolo degli operatori funzionali che si presentano nella Fisica Matematica . . . . . » 143
MURNAGHAN F. - On finite deformations and the energy of deformation of a non-isotropic medium . . . . . » 151
MEISSNER E. - Zur Elastizitätstheorie dünner Schalen . . . . . » 155
MESNAGER A. - Élasticité à deux dimensions . . . . . » 159
DIXON A. C. - The theory of a thin isotropic rectangular plate clamped at the edges . . . . . » 163
ROSENBLATT A. - Sopra certi moti permanenti dei liquidi viscosi incompressibili . . . . . » 165
RIABOUCHINSKY D. - Hydrodynamiques non lagrangiennes . . . . » 175
GUNTHER N. - Sur le mouvement d'un liquide, enfermé dans un vase qui se deplace . . . . . » 185
SCHOENBAUM E. - Contribution à la théorie de l'ajustement mécanique » 193
LABOCCETTA L. - Metodo ottico per la determinazione di una unità assoluta di lunghezza di grandezza arbitraria . . . . . » 199
PICONE M. - Sul problema della propagazione del calore in un mezzo privo di frontiera, conduttore, isotropo e omogeneo . . . . . » 207
MAGGI G. A. - Sulla propagazione di onde di forma qualsivoglia da un mezzo isotropo in un altro . . . . . » 215
SEN B. M. - Waves in canals and basins . . . . . » 217
GIORGI G. - Sul calcolo spaziale più esteso. . . . . » 223
† BROMWICH T. J. - An extension of Heaviside's solution for the electromagnetic field accompanying a charged sphere, suddenly jerked into motion at the speed of light . . . . . » 237

† BROMWICH T. J. - An application of solutions of cable-problems to the numerical evaluation of the problem of a sphere falling in a viscous liquid . . . . . Pag. 243

SILLA L. - Applicazione dei metodi di Poincaré e Levi-Civita alla risoluzione del problema asteroidico (di Hill) . . . . . » 245

KRYLOFF N. - Sur quelques recherches récentes dans le domaine de la solution approchée des problèmes de la Physique Mathématique » 257

TIERCY G. - Note sur quelques céphéides . . . . . » 275

TIERCY G. - Sur l'erreur de compensation des chronomètres de poche » 281

KOLOSSOFF G. - Sur le centre des forces non parallèles . . . . . » 287

KOLOSSOFF G. - Sur la torsion d'un prisme ayant pour base un contour formé de deux droites rectangulaires et une ligne onduleuse » 291

KOLOSSOFF G. - Sur une application de la transformation complexe des équations d'élasticité à la recherche des solutions générales de ces équations . . . . . » 293

LENNERTZ J. - Gegenseitiger Einfluss von Tragfläche und Rumpf. . » 297

WAVRE R. - Sur les figures d'équilibre d'une masse fluide hétérogène » 303

SMITH J. J. - Heaviside's operators and contour integrals . . . . » 309

DEL PULGAR J. P. - Les fonctions analytiques de tétravecteur en Physique Mathématique . . . . . » 337

WATAGHIN G. - Teoria corpuscolare dell'interferenza e della diffrazione » 345

SMOUROFF A. - Die physikalische Natur der elektrischen Vorgänge in homogenen Isolatoren. . . . . » 351

SOLE MARIA - Formole per la calcolazione dei fenomeni nei filtri d'onda elettrici. . . . . » 363

SEZIONE IV-B

RISSER R. - Sur une formule de survie pour l'ensemble de la vie humaine . . . . . Pag. 371

RISSER R. - Sur la possibilité de représentation d'une population par la loi de Makeham . . . . . » 379

GUMBEL E. J. - Das Zufallsgesetz des Sterbens . . . . . » 391

BRODIE R. R. - Variation in rates of mortality as affecting the reserves for sickness benefits . . . . . » 405

TAUCER R. - Sulla teoria dei gruppi . . . . . » 413

ROY R. - La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus » 419

HAGSTROEM K. G. - De τῆς τέχνης problemate collegiorum salutarium Pag. 427
GOLDZIHER K. - Angenäherte Lösung algebraischer Gleichungen mit Anwendungen auf die Rentenrechnung . . . . . » 443
LAGUNOFF B. - Von dem Zusammenhange des Preises mit der Arbeitsleistung und von der Methode zum Auffinden der Punkte der Kurve des Regelmässigen Preisenniveau . . . . . » 449
LAGUNOFF B. - Aufstellung einer Formel für den Arbeitsleistungsindex » 455
QUIQUET A. - Sur des carrés parfaits viagers . . . . . » 459
DOBBERNACK W. - Die systematischen und zufälligen Fehler in der Indexzahlenberechnung . . . . . » 467
DOBBERNACK W. - Versicherungsmathematische und Mathematisch-statistische Erkenntnisse aus der jüngsten Entwicklung der deutschen Sozialversicherung . . . . . » 477
VALERA GIL J. - Sobre generacion de curvas orbiformes . . . . » 483
INDICE . . . . . » 489