ATTI

DEL

CONGRESSO INTERNAZIONALE DEI MATEMATICI

BOLOGNA 3-10 SETTEMBRE 1928 (VI)

TOMO VI.

COMUNICAZIONI

SEZIONE IV [A] - V - VII

BOLOGNA
NICOLA ZANICHELLI
EDITORE
ITALY

L'EDITORE ADEMPIUTI I DOVERI
ESERCITERÀ I DIRITTI SANCITI DALLE LEGGI

Bologna, Società Tipografica già Compositori - 1932-X

COMUNICAZIONI

Sezione Quarta A

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel - Svizzera)

SUR LES NOUVEAUX FONDEMENTS PHILOSOPHIQUES ET MATHÉMATIQUES DU CALCUL DES PROBABILITÉS

Première partie.

§ 1. - La première définition de la probabilité mathématique, la définition classique basée sur la notion des cas également possibles, a dès le début soulevé de graves objections qui laissaient subsister des doutes fort légitimes sur la validité des résultats obtenus, surtout après les « Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile » de Poisson (1). Et Pierre-Simon de la Place, dans sa monumentale « Théorie analytique des probabilités », après avoir donné cette brève explication : « Cas également possibles, c'est-à-dire tels que nous soyons également indécis sur leur existence », ajoutait avec beaucoup de raison : « Si tous les cas ne sont pas également possibles, on déterminera d'abord leurs possibilités respectives, dont la juste appréciation est un des points les plus délicats de la théorie des hasards ».

L'appréciation subjective, dépendant de l'étendue des connaissances de celui qui apprécie, joue donc un rôle prépondérant ; et d'autre part, des cas « également possibles », ce n'est guère autre chose que des cas également probables. Un penseur aussi profond qu'Henri Poincaré avait bien critiqué la base habituelle des probabilités « qui s'appuient », disait-il, « sur le probable ». C'est un cercle vicieux ; et Poincaré en était arrivé à la conclusion qu'il n'est guère possible de donner une définition satisfaisante de la probabilité mathématique.

Pour les adeptes de la théorie classique, il est impossible de concilier le hasard avec le déterminisme absolu postulé par la Science. La probabilité mathématique ne peut exister que là où il y a ignorance, au moins partielle ; car sans ignorance, disent-ils, point de hasard et point de faits fortuits. Le hasard n'est qu'un mot qui sert à voiler notre ignorance. Selon ces penseurs, la probabilité mathématique est incompatible avec la connaissance complète et détaillée de toutes les circonstances ontologiques et nomologiques qui régissent les phénomènes étudiés. La Science tend à éliminer de plus en plus les faits fortuits ; et à la

(1) Siméon-Denis Poisson : *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*, précédées des règles générales du calcul des probabilités. Paris, 1837. 16+415 pages in-4°.

limite, c'est-à-dire pour un esprit universel et omniscient, il n'y aurait plus ni hasard ni probabilité mathématique, il ne pourrait y avoir que certitude.

§ 2. - Je passe à la deuxième manière d'étayer le calcul des probabilités; elle constitue un perfectionnement essentiel de la définition classique. Cette nouvelle base philosophique est *le hasard dans le sens logique*, idée qui se trouve en germe chez Antoine-Augustin COURNOT, chez Jean-Baptiste-Joseph FOURIER, chez Frédéric-Albert LANGE, surtout dans les ouvrages de COURNOT. Mais c'est à M. Frédéric-Marie URBAN (1) que revient le mérite d'avoir donné, dès 1912, en se basant sur les notions de mesure que la théorie des ensembles permet de définir si nettement, une formulation mathématique précise de cette importante notion de hasard dans le sens logique. Ce concept permet de concilier le hasard avec le déterminisme absolu postulé par la Science classique. Étant défini un certain ensemble d'éléments, *tout attribut ou tout caractère distinctif non contenu dans la définition et non impliqué par elle, mais appartenant en propre à un élément, est jugé lui appartenir fortuitement ou par hasard.* La probabilité mathématique est alors, par définition, le rapport des mesures de deux ensembles dont l'un est contenu dans l'autre.

La probabilité mathématique devient ainsi une grandeur objective qui, chose essentielle, est tout à fait indépendante de l'état de nos connaissances. Pour les adeptes de cette théorie, la probabilité mathématique est parfaitement compatible avec la connaissance la plus complète et la plus détaillée de toutes les circonstances qui régissent les phénomènes étudiés. La probabilité mathématique subsisterait même pour un esprit universel et omniscient. On voit par là le progrès réalisé par cette nouvelle définition; tout en s'inspirant de la même notion fondamentale, celle des cas équipossibles, la définition *urbanienne* donne à la science fondée par PASCAL et FERMAT une base philosophique logiquement inattaquable.

§ 3. - Je passe à la troisième manière d'étayer le calcul des probabilités. Elle fut conçue et développée par M. Richard-Edler VON MISES. Tandis que la théorie du hasard dans le sens logique reste encore sur le terrain de la définition classique de la probabilité, M. VON MISES abandonne complètement ce terrain et crée la notion des *collectifs mathématiques*. Elle lui sert de base théorique. Grâce à cette innovation radicale, il évite les grandes difficultés que la fameuse notion des cas équipossibles introduisait dans la théorie et du même coup, il réussit à faire du calcul des probabilités une science purement déductive, tirée tout entière de quelques définitions et axiomes posés à priori, suggérés par les besoins de la pratique.

---

(1) *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Theorie der Beobachtungsfehler,* von Friedrich M. URBAN, Leipzig und Berlin, 1923.

Toute science exacte opère sur des fictions, c'est-à-dire sur des êtres construits par la raison et qui n'existent que dans le monde de la pensée. Bien que le but d'une science exacte soit de rendre compte des relations entre les phénomènes réels et observables, elle ne les prend pas tels quels; elle commence au contraire par les idéaliser, grâce à la faculté d'abstraction. C'est la première étape.

Puis, une fois envolée dans le monde éthéré de la pure pensée, la Science procède par déductions abstraites; en partant de certains axiomes et de postulats déterminés, elle enchaîne les théorèmes les uns aux autres et finit par échafauder tout un édifice logique ayant sa beauté et sa valeur intrinsèque. C'est la deuxième étape.

Enfin, l'édifice logique une fois érigé, la Science cherche à en augmenter l'intérêt et la valeur en examinant si les conclusions qu'elle en tire, ou du moins quelques-unes d'entre elles, sont conformes à la réalité des faits. C'est la troisième étape.

On peut donc dire que l'édification d'une science se fait en trois étapes. Il est facile de démontrer qu'en principe le calcul des probabilités, à condition toutefois de le baser sur la théorie des collectifs mathématiques, suit dans son développement la même voie que la géométrie et la mécanique rationnelle.

Les *collectifs empiriques* sont le point de départ. On envisage certains phénomènes, ou certaines observations ou certaines grandeurs, comme *éléments* d'un ensemble que l'on appelle un *collectif.* Chaque élément est affecté d'un *attribut* ou *caractère distinctif* qui est soit net et fixe, soit variable entre certaines limites, en tout cas exprimable numériquement à l'aide d'une variable x dite l'*argument du collectif*; en voici quelques exemples:

1° *Éléments*: les soldats d'un corps d'armée. *Attribut* d'un soldat: sa taille, exprimée en centimètres. Par « taille de n cm. », on entendra toutes celles comprises entre $\left(n-\frac{1}{2}\right)$ et $\left(n+\frac{1}{2}\right)$ cm. Au lieu de la taille, on pourrait prendre comme attribut d'un soldat: la grandeur du thorax ou le rapport de la largeur à la longueur de la tête ou le poids de l'individu ou n'importe quel caractère anthropométrique.

2° *Éléments*: les naissances inscrites aux registres de l'état civil dans un pays déterminé. *Attribut* d'un élément: le nombre 1 ou le zéro, suivant que la naissance inscrite envisagée est masculine ou féminine.

3° *Éléments*: les jets d'un dé à jouer. *Attribut* d'un élément: le point amené dans le jet envisagé, donc l'un des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.

4° *Éléments*: les logarithmes des nombres entiers consécutifs. *Attribut* d'un élément: le chiffre de la $7^{\text{ième}}$ décimale du logarithme envisagé, donc l'un des nombres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

5° *Éléments*: les tableaux des musées de peinture de Florence ou d'un pays déterminé. *Attribut* d'un élément: le rapport de la hauteur à la largeur du tableau envisagé.

6° *Éléments*: les mesures d'une longueur ou les déterminations d'une constante physique ou chimique ou météorologique. *Attribut* d'un élément: le résultat de la mesure envisagée, ou l'écart d'avec la moyenne arithmétique de toutes les mesures.

Comme on le voit par ces exemples, les collectifs empiriques se trouvent partout, depuis les mathématiques et la physique jusqu'à la biométrique, à la psychologie, aux sciences médicales, sociales et économiques; et leurs éléments peuvent présenter les attributs les plus variés et les plus inattendus, car on peut faire rentrer dans ce cadre presque toutes les manifestations de la vie et de l'activité humaine. Le collectif empirique, voilà le point de départ pour ériger le calcul des probabilités sur une nouvelle base, inattaquable du point de vue logique et philosophique. Remarquons en effet que les notions de répétition et de fréquence sont indépendantes de celle de probabilité. La définition de la probabilité ne s'appuiera donc plus sur le probable, et l'objection formulée par Henri POINCARÉ tombera.

On peut représenter un collectif empirique, schématiquement, par sa *liste primordiale* ou *liste de distribution*. S'y trouvent inscrits:

1°) Les éléments; désignons-les par

$$e_1, \quad e_2, \quad e_3, \ldots, \quad e_s, \ldots, \quad e_n.$$

2°) À côté de chacun d'eux, l'attribut ou caractère distinctif, x_s, qui lui correspond ($s = 1, 2, 3, \ldots, n$).

Or, pour la théorie mathématique, la nature des éléments n'entre pas en considération. On peut donc en faire complètement abstraction et ne retenir que les attributs, c'est-à-dire les nombres x_s; de sorte que, en définitive, la liste primordiale représentant le collectif empirique peut se réduire à une suite de nombres réels quelconques:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \ldots, \quad x_s, \ldots, \quad x_n.$$

§ 4. - L'édification d'une science, ai-je dit, se fait en trois étapes. Dans la première, on a recours à la faculté d'abstraction. Dans notre cas, elle conduit à créer le « collectif mathématique ». Tout d'abord, on passe du collectif empirique au *syllepte*, c'est-à-dire d'un ensemble fini à un collectif infini (1).

Définition 1. - Un *syllepte* est un ensemble d'une infinité d'éléments se succédant dans un ordre bien déterminé et à chacun desquels est lié un *attribut*

---

(1) Il y a vingt ans, M. le professeur Corrado GINI a réussi à ériger une nouvelle théorie des probabilités en basant la définition de la probabilité mathématique sur la fréquence relative. Cette théorie a la particularité de ne pas se fonder sur la notion de collectif infini. Voir l'article de M. Corrado GINI, intitulé: *Che cos'è la probabilità?* paru dans « Scientia », Anno 2°, Milano, 1908, vol. III, p. 337-361.

ou *caractère distinctif* exprimable numériquement. Je supposerai de plus que les éléments n'ont pas tous le même attribut, ni tous les éléments abstraction faite d'un nombre fini d'entre eux. À l'ensemble infini des éléments correspondra donc un ensemble infini de nombres différents. Cette notion de syllepte est nettement définie au point de vue mathématique et logiquement inattaquable.

Dans le cas le plus simple, l'attribut d'un élément est donné par un seul nombre et le syllepte est une suite illimitée de nombres réels quelconques,

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_s, \ldots, \quad x_n, \ldots \text{ ad inf.}$$

Dans le cas général, l'attribut d'un élément est un ensemble de k nombres réels. Je rappellerai quelques définitions utilisées ci-dessous.

Définition 2. - Le nombre $k_n(x_s)$ ou $k_n(s)$ qui indique combien de fois l'attribut x_s se présente parmi les n premiers éléments du syllepte envisagé, est dit « *la répétition* ou *la fréquence absolue* du dit attribut x_s parmi les n premiers éléments » $(s=1, 2, 3, \ldots)$.

Définition 3. - Le nombre [1]

$$fr_n(x_s) \quad \text{ou} \quad fr_n(s) \equiv \frac{k_n(x_s)}{n}$$

est dit « *la fréquence relative* ou simplement *la fréquence* de x_s parmi les n premiers éléments du syllepte étudié ».

Définitions 4 et 5. - Les éléments d'un collectif C étant rangés dans un ordre de succession tel que les attributs se suivent par ordre de grandeur algébriquement croissante, $x_s < x_{s+1}$, l'ensemble des fréquences absolues $k(x_s)$, y compris les arguments *vides*, c'est-à-dire les $k(x_t)=0$, est « *la table de répétition* ou la loi de répétition ou la *diadose* du collectif C ». L'ensemble des fréquences relatives correspondantes, $fr(x_s)$, est « *la fonction de fréquence* du collectif envisagé », appelée parfois sa *loi de probabilité.*

La ligne d'équation $y=fr(x)$ est dite « *la courbe de fréquence* ou *la courbe caractéristique* du collectif étudié C ».

Définition 6. - Les éléments d'un collectif C étant rangés dans un ordre de succession tel que les attributs se suivent par ordre de grandeur algébriquement croissante, posons

$$\delta\iota_n(t) \equiv fr_n(x_1) + fr_n(x_2) + fr_n(x_3) + \ldots + fr_n(x_s),$$

où s est un nombre entier tel que $x_s = t$. Dans le cas d'un collectif continu, on a

$$\delta\iota(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} fr(x) \cdot dx.$$

---

[1] Le signe $\equiv$ signifie et se prononce: « égal *par définition* à ».

L'ensemble des valeurs de $\delta\iota(x)$ est dit: « *la fonction de répartition* du collectif ». Elle indique combien d'éléments du collectif envisagé ont un attribut inférieur ou au plus égal à x; cette fonction est donc toujours univoque, non négative et à croissance monotone. De plus, la fonction de fréquence est la dérivée de la fonction de répartition.

§ 5. - Dans la deuxième étape de l'édification d'une science, on a recours à la logique. Il s'agit de poser les axiomes et postulats auxquels ces sylleptes doivent satisfaire par hypothèse. Sinon, le syllepte n'est pas un collectif mathématique.

Axiome I. - *Le postulat de l'existence des valeurs limites.*

Soit x_s l'un des attributs des éléments du collectif étudié. L'axiome I postule que sa fréquence relative parmi les n premiers éléments tende, lorsque le nombre n augmente au delà de toute limite, vers une limite finie et bien déterminée qui dépend en général de x_s et que je désigne par $p(s)$. En formule:

$$(A) \qquad \lim fr(x_s) \equiv p(s) \quad \text{existe.}$$

Axiome II. - La correspondance entre éléments et attributs doit être *arégulière*, c'est-à-dire présenter un caractère de fortuité ou d'irrégularité. D'une manière plus précise: si du syllepte donné on extrait une suite partielle illimitée

$$e_1', \quad e_2', \ldots, \quad e_n', \ldots \quad \text{ad inf.}$$

par un choix admissible, c'est-à-dire sans tenir compte des attributs des éléments que l'on choisit, le nouveau collectif infini ainsi obtenu doit jouir de cette double propriété que:

1°) pour chacun des caractères distinctifs x_s, il existe une limite $p'(s)$ définie par (A); de plus

2°) cette limite est la même que dans le collectif total. Donc

$$p'(s) = p(s) \qquad \text{pour } s = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Définition 7. - *Un collectif mathématique* est un syllepte satisfaisant aux axiomes I et II ci-dessus posés. D'une manière plus explicite: un collectif mathématique est une suite bien ordonnée et illimitée d'éléments affectés chacun d'un attribut exprimable à l'aide d'un ou de plusieurs nombres réels, avec une *correspondance arégulière* entre attributs et éléments, telle que la fréquence relative de chacun des attributs, dans toute suite partielle de n éléments extraite par un choix admissible de la suite donnée, tende vers une limite finie, bien déterminée et toujours la même, lorsque le nombre n des éléments choisis finit par dépasser toute grandeur donnée d'avance.

Ces préliminaires posés, je vais formuler la nouvelle définition de la probabilité mathématique. Je l'appelle la définition *stocastique*, par opposition à la définition classique.

Définition 8. - *La probabilité mathématique d'un attribut ou caractère distinctif*, x_s, est la limite vers laquelle tend la fréquence relative du dit attribut, $fr_n(x_s)$, dans le collectif mathématique donné (1).

Il suit de cette définition que la probabilité mathématique n'a de sens précis que par rapport à un collectif mathématique bien déterminé *C*. De plus, elle est toujours comprise entre zéro et 1, limites incluses, $0 \leqslant p(x_s) \leqslant 1$.

Il ne faut pas oublier que toute observation réelle se rapporte à une suite forcément limitée, tandis qu'un collectif mathématique se compose, par définition, d'une infinité d'éléments et que dès lors il n'y a pas identité entre la probabilité mathématique et les résultats de mesures ou de dénombrements effectifs. Il faut donc s'attendre à des écarts, et l'expérience du passé permet d'en prévoir la grandeur. L'étude des irrégularités dues au hasard conduit à de nouvelles lois auxquelles on peut appliquer la même étude, et ainsi de suite. On retrouve de cette façon, constamment, la variation *arégulière* dans la vérification des règles obtenues.

Deuxième partie.

§ 6. - La définition stocastique de la probabilité mathématique (voir § 5) présuppose, pour chaque attribut $x_1, x_2, \ldots, x_s, \ldots, x_n$, l'existence de la valeur limite

$$p(s) \equiv \lim_{n \to \infty} fr_n(x_s) \equiv \lim_{n \to \infty} \frac{k_n(x_s)}{n}.$$

Si cette limite $p(s)$ n'existe pas pour un ou pour plusieurs attributs, le syllepte envisagé n'est pas un collectif mathématique. Ne pourrait-on pas, dans ce cas, modifier ou généraliser la définition de manière à arriver tout de même à un concept de probabilité ? C'est un problème analogue à celui des séries divergentes.

Soient donc pour l'un quelconque des attributs, pour $x = u$ par exemple,

$$k_1, \quad k_2, \quad k_3, \ldots, \quad k_n, \ldots$$

les répétitions ou fréquences absolues, et

$$fr_1, \quad fr_2, \quad fr_3, \ldots, \quad fr_n \equiv \frac{1}{n} \cdot k_n, \ldots$$

les fréquences relatives.

---

(1) Dans deux mémoires remarquables: *Sulla probabilità come limite della frequenza*, Roma, 1917, Rendiconti della Reale Accad. dei Lincei, série V, vol. 26, p. 39-45; et: *Sulla oscillazione delle frequenze intorno alla probabilità*, paru dans « Metron », Rivista internazionale di statistica, 1923, vol. III, n.° 2, M. Francesco Paolo CANTELLI étudie les fréquences relatives et la manière dont elles tendent vers une limite déterminée. L'auteur arrive à des théorèmes nouveaux et très importants. Contrairement à ce que l'on pourrait conclure du *titre* du premier mémoire, M. CANTELLI prend comme point de départ la définition classique de la probabilité mathématique et non la définition stocastique posée dans ce paragraphe.

Première hypothèse: $\lim_{n\to\infty} fr_n(u)$ n'existe pas. Formons alors

$$s_1(x) \equiv fr_1(x); \qquad s_2(x) \equiv \frac{1}{2}[fr_1(x) + fr_2(x)];$$

. . . . . .

$$s_n(x) \equiv \frac{1}{n} \cdot [fr_1(x) + fr_2(x) + \ldots + fr_n(x)];$$

. . . . . .

puis étudions l'ensemble constitué par ces moyennes $s_r(x)$.

Deuxième hypothèse: $\lim s_n(u) \equiv s(u)$ existe quand $n \to \infty$.

Si, de plus, l'axiome II postulant la fortuité de l'attribut est satisfait, j'appellerai encore cette limite $s(u)$ « la probabilité mathématique de l'attribut u dans le collectif envisagé », et je poserai en conséquence $p(u) \equiv s(u)$.

Troisième hypothèse: Si, au contraire, $\lim s_n(u)$ n'existe pas quand $n \to \infty$, formons encore une fois les moyennes arithmétiques:

$$s_1'(x) \equiv s_1(x); \qquad s_2'(x) \equiv \frac{1}{2}[s_1(x) + s_2(x)];$$

. . . . . .

$$s_n'(x) \equiv \frac{1}{n}[s_1(x) + s_2(x) + \ldots + s_n(x)];$$

. . . . . .

puis étudions l'ensemble constitué par ces nouvelles moyennes.

Quatrième hypothèse: $\lim s_n'(u) \equiv s'(u)$ existe quand $n \to \infty$. Si de plus, l'axiome II, postulant la fortuité de l'attribut, est satisfait, j'appellerai encore cette limite $s'(u)$ « la probabilité mathématique de l'attribut u dans le collectif envisagé », et je poserai $p(u) \equiv s(u)$.

Cinquième hypothèse: Si, au contraire, $\lim s_n'(u)$ pour $n \to \infty$ n'existe pas, formons de nouveau les moyennes arithmétiques. Et ainsi de suite, indéfiniment.

C'est le procédé de HÖLDER, ou procédé des moyennes arithmétiques itérées, appliqué aux fréquences relatives. On a les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. - Si $p(u) \equiv \lim_{n\to\infty} fr_n(u)$ existe, alors

$$p(u) = s(u) = s'(u) = s''(u) = \ldots.$$

et la probabilité mathématique de l'attribut u dans le collectif envisagé peut se définir stocastiquement.

THÉORÈME II. - Si $p(u) \equiv \lim_{n\to\infty} fr_n(u)$ n'existe pas, aucune des moyennes itérées

$$s_n(u), \quad s_n'(u), \quad s_n''(u), \quad s_n'''(u), \ldots.$$

ne tend vers une limite finie et déterminée quand $n \to \infty$. Dans ce cas, la probabilité mathématique n'est pas définissable par le procédé des moyennes arithmétiques itérées.

§ 7. - Pour la démonstration, on suppose, il est vrai, que dans la diadose du collectif (voir la définition au § 4) les différences $(k_{r+1}-k_r)$ restent toutes bornées, même quand les nombres de répétition k_r, eux, dépassent toute limite assignée d'avance. Or, *je dis qu'on peut ramener l'étude du collectif donné à celle d'un autre, où les différences de deux nombres de répétition k_n consécutifs ont toujours l'une des trois valeurs* 0 *ou* 1 *ou* -1.

Pour fixer les idées et avoir un syllepte, prenons comme *éléments* du collectif tous les êtres vivants et qui vivront encore au cours des âges dans le canton de Neuchâtel, par exemple. *Attribut* du $r^{\text{ième}}$ élément: sa taille, h_r, exprimée en millimètres ($r=1, 2, 3, 4,....$). Par « taille de h mm. », il faudra entendre toutes celles comprises entre $(h-\varepsilon)$ et $(h+\varepsilon)$, où $\varepsilon>0$ est arbitrairement choisi d'avance. Soit k_n le nombre des éléments de taille h, parmi les n premiers éléments ($n=1, 2, 3, 4,....$). Dans ce cas, k_{n+1} étant égal au nombre des éléments de même taille h parmi les $(n+1)$ premiers éléments, on aura évidemment

$$k_{n+1}=k_n \quad \text{ou} \quad =1+k_n,$$

suivant que l'élément envisagé, qui est donc le $(n+1)^{\text{ième}}$, n'a pas la même taille h ou a la même taille h que le $n^{\text{ième}}$ élément.

Introduisons les nombres l_r en posant:

$$l_{r+1} \equiv \begin{cases} 0, & \text{si} \quad h_{r+1} \neq h_r \\ 1, & \text{si} \quad h_{r+1} = h_r \end{cases}$$

On voit que

$$\begin{aligned} k_r &= k_{r-1} + l_r \\ k_{r-1} &= k_{r-2} + l_{r-1} \\ k_{r-2} &= k_{r-3} + l_{r-2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ k_2 &= k_1 + l_2 \\ k_1 &= 0 + l_1 \end{aligned}$$

Additionnons ces égalités membre à membre; on trouve

$$k_r = l_1 + l_2 + l_3 + ... + l_r.$$

La différence $(k_{r+1}-k_r)$ ne peut donc prendre que l'une des trois valeurs 0, -1, $+1$; elle est par conséquent bornée, *quel que soit l'indice r.*

La fréquence relative de l'attribut h, parmi les n premiers éléments, devient la moyenne arithmétique des n premiers nombres l_r, puisqu'en effet

$$fr_n(h) \equiv \frac{1}{n} \cdot k_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{n=1}^{r} l_r.$$

Le théorème II ci-dessus résulte de la proposition suivante. Soit une suite

de nombres a_1, a_2, a_3,...., a_n,.... *Si la moyenne arithmétique,* $\text{med}_r(a)$, *des r premiers nombres,*

$$\text{med}_r(a) \equiv \frac{1}{r} \cdot \sum_{n=1}^{r} a_n,$$

ne tend vers aucune limite pour $r \to \infty$, *et si, de plus, les nombres* a_n *sont bornés dans leur ensemble, alors la moyenne arithmétique des moyennes arithmétiques,* $\text{med}_r(\text{med}_r)$, *ne tend pas non plus vers une limite déterminée quand* $r \to \infty$.

Ce théorème, communiqué par M. J. KARAMATA, découle d'un théorème de M. LANDAU, qui dit ceci:

Soit $a_n \equiv c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n$. Si la moyenne arithmétique des nombres a_n converge vers une limite s, donc si

$$\text{med}\, a_n \equiv \left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} a_t\right) \to s \quad \text{pour } n \to \infty,$$

si, de plus, il existe une constante M telle que le produit

$$n \cdot c_n < M$$

quel que soit l'indice n, alors la série infinie

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

est convergente et a précisément la somme s; en formule:

$$a_n \to s \quad \text{pour } n \to \infty.$$

§ 8. - *Le théorème II du* § 6 *est encore valable si, au lieu des moyennes arithmétiques itérées des divers ordres, on prend les moyennes de Cesàro des divers ordres.*

Cela provient de ce que les deux procédés de sommation: celui de CESÀRO et celui de HÖLDER, la sommabilité (*Cr*) et la sommabilité (*Mr*), sont tout à fait équivalents; l'une entraîne l'autre. Toute série sommable (*Mk*) avec la somme s est aussi sommable (*Ck*) avec la même somme s, et vice versa ($k=1, 2, 3, 4,....$).

On pourrait enfin songer à appliquer aux fréquences relatives des méthodes de sommabilité plus puissantes que celle de CESÀRO, lorsque $\lim fr_n$ n'existe pas pour $n \to \infty$, par exemple *la sommabilité Borel.* On sait que ce procédé permet de sommer, entr'autres, les progressions géométriques de raison $r < -1$, telle que

$$1 - 4 + 16 - 64 + 256 - 1024 + 4096 - 16384 + ...,$$

qui résistent à toutes les moyennes (*Mr*) ou (*Cr*), quelque grand que soit r.

Mais, dans notre cas particulier, le procédé de sommation Borel, et d'autres méthodes plus puissantes encore, ne servent de rien. Cela tient au fait que les

fréquences relatives, fr_1, fr_2, fr_3,...., fr_n,...., forment toujours un ensemble borné. M. PAUL LÉVY a démontré ce *théorème*: Si les termes d'une série divergente sont tous compris entre 0 et 1, ou plus généralement *s'ils sont bornés dans leur ensemble, la sommabilité (B) ou méthode de sommation par le procédé Borel est moins puissante que celle par les moyennes arithmétiques ou par les moyennes de Cesàro.*

Or, comme ces dernières ne donnent rien quand $\lim fr_n(x)$ n'existe pas pour $n \to \infty$, il en est encore ainsi des autres méthodes calquées sur les procédés de sommabilité de séries divergentes et que l'on essaierait d'appliquer aux fréquences relatives.

Nous sommes donc arrivés à un résultat négatif. Ce n'est pas de ce côté-là qu'il faut chercher une généralisation ou une nouvelle définition de la probabilité mathématique pour le cas où $\lim fr_n(x)$ n'existe pas, quand $n \to \infty$.

§ 9. - On peut chercher à définir la probabilité mathématique à l'aide de la fonction de répartition $\delta\iota(x)$. Étant données les relations existant entre la fonction de fréquence $fr(x)$, la probabilité mathématique $p(x) \equiv \lim fr_n(x)$ et la fonction de répartition $\delta\iota(x)$ dans le même collectif mathématique C (v. § 4), la théorie des fonctions enseigne que $\delta\iota(x)$ est une fonction continue en général, même quand $fr(x)$ ne l'est pas. De plus, $\delta\iota(x)$ existe pour toute valeur de x, sauf peut-être pour un ensemble dénombrable E de valeurs exceptionnelles de x. On sait que E est compris dans l'ensemble des points de discontinuité de $\delta\iota(x)$.

Définition 9. - Soit a une valeur particulière, arbitrairement choisie, de l'argument x. Je poserai

$$P(a) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \delta\iota(a+\varepsilon) - \delta\iota(a-\varepsilon) \}.$$

Si $fr_n(x)$ n'existe pas pour $n \to \infty$, mais que, dans le collectif envisagé C, l'axiome II postulant la correspondance *arégulière* entre éléments et attributs soit satisfait (v. § 5), j'appellerai encore $P(a)$ « la probabilité mathématique de l'attribut a dans le collectif C »; je poserai en conséquence

$$p(a) \equiv P(a).$$

Je vais donner un exemple où $p(a)$ n'existera pas d'après la définition stocastique, car $\lim fr_n(a)$ n'existera pas, mais où $P(a)$ existera; puis je démontrerai une relation générale entre $p(x)$ et $P(x)$.

§ 10. - Pour exposer un exemple suggéré par M. J. KARAMATA, je vais introduire deux suites illimitées de nombres, comme suit:

1°) Les nombres l_1, l_2, l_3,...., l_m,...., l_r,...., entiers positifs constamment croissants, $l_m < l_{m+1}$, et, en plus, choisis de telle manière que le rapport $\frac{n}{l_n}$, qui

est évidemment toujours inférieur à 1, ne tende vers aucune limite, quand n diverge vers l'infini. Un tel choix est possible:

(1) $$\lim \frac{n}{l_n} \text{ n'existe pas, pour } n \to \infty.$$

2°) Le nombre a, réel et positif, à part cela quelconque, et les nombres a_1,

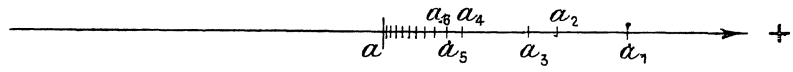


Fig. 1.

a_2, a_3,...., a_n,.... réels, positifs, tous supérieurs à a, mais tendant vers a d'une manière monotone (v. fig. 1); donc, pour $n=1, 2, 3, 4,....$,

(2) $$a_n > a, \qquad a_{n+1} < a_n, \qquad a_n \to a \quad \text{pour } n \to \infty.$$

Quant à l'attribut x_r qui correspond à l'élément l_r de notre collectif ($r=1, 2, 3, 4,....$), je le fixe comme suit:

$$x_n = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \neq l_r \\ a, & \text{si } n = \text{à l'un des nombres } l_r, \end{cases}$$

donc:

$$x_{l_1} = x_{l_2} = x_{l_3} = ... = x_{l_r} = ... = a;$$

dans tous les autres cas $x_n = a_n$.

Cherchons la fréquence relative de l'attribut a. Parmi les n premiers éléments, combien y en a-t-il dont l'attribut est $=a$? Soit $k_n(a)$ le nombre de ces éléments-là; $k_n(a)$ est égal au plus grand nombre m tel que $l_m \leqq n$. Cela résulte de la liste primordiale de notre collectif (v. § 3). Donc, si

(3) $$l_m \leqq n < l_{m+1},$$

alors $k_n(a) = m$. La fréquence relative cherchée est donc

(4) $$\frac{k_n(a)}{n} = \frac{m}{n} \equiv p_n(a).$$

Il faut montrer que la suite $p_1(a)$, $p_2(a)$,...., $p_n(a)$,.... n'a pas de limite univoquement déterminée:

$$\lim \left(\frac{m}{n}\right) \text{ pour } n \to \infty \text{ n'existe pas.}$$

Il est facile de le démontrer. De l'inégalité (3), on tire successivement:

$$\frac{1}{l_{m+1}} < \frac{1}{n} \leqq \frac{1}{l_m}, \quad \text{puis} \quad \frac{m}{m+1} \cdot \frac{m+1}{l_{m+1}} < \frac{m}{n} \leqq \frac{m}{l_m}$$

puis, en tenant compte de (4),

(5) $$\left(1 - \frac{1}{m+1}\right) \cdot \frac{m+1}{l_{m+1}} < p_n(a) \leqq \frac{m}{l_m}.$$

Posons

(6) $$\varepsilon_m \equiv 1 : l_{m+1}.$$

Cette quantité positive ε_m tend vers zéro quand m augmente au-delà de toute limite; l'inégalité (5) devient

(7) $$\frac{m+1}{l_{m+1}} - \varepsilon_m < p_n(a) \leqslant \frac{m}{l_m}$$

où $\lim \varepsilon_m = 0$ pour $m = \infty$.

De l'hypothèse (1), il suit que le quotient $n : l_n$ a une limite inférieure l et une limite supérieure $L > l$.

Le premier membre de l'inégalité (7) donne

(8) $$\frac{m+1}{l_{m+1}} < p_n(a) + \varepsilon_m.$$

Opérons le passage à la limite, $m \to \infty$, ce qui entraîne $n \to \infty$. En se rappelant que $\lim \varepsilon_m = 0$ et en considérant *les limites supérieures*, on voit que

(9) $$L \equiv \limsup_{m \to \infty} \left(\frac{m+1}{l_{m+1}} \right) \leqslant \limsup_{n \to \infty} p_n(a).$$

Le second membre de l'inégalité (7) donne $p_n(a) \leqslant m : l_m$. Opérons le passage à la limite $m \to \infty$, d'où $n \to \infty$, et considérons maintenant *les limites inférieures*; il vient

(10) $$\liminf_{n \to \infty} p_n(a) \leqslant \liminf_{m \to \infty} \frac{m}{l_m} \equiv l.$$

Quand $n \to \infty$, il arrive donc infiniment souvent que $p_n(a) \leqslant l$, qui est un nombre fixe indépendant de n. D'autre part, $\limsup p_n(a) \geqslant L$, qui est un nombre fixe supérieur à l. Il résulte ainsi de (9) et de (10) que

$$\lim_{n \to \infty} p_n(a) \text{ ne peut pas exister, q. e. d.}$$

§ 11. - Ayant démontré que $\lim fr_n(a)$ n'existe pas pour $n \to \infty$, je vais démontrer que

(11) $$P(a) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} \{ \delta_\iota(a+\varepsilon) - \delta_\iota(a-\varepsilon) \}$$

existe et a la valeur 1 dans notre cas particulier.

En premier lieu, je dis que, dans notre exemple, la fonction de répartition

$$\delta_\iota(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < a, \\ 1 & \text{pour } x > a; \end{cases}$$

elle n'est pas définie pour $x = a$. La représentation graphique de cette fonction donne comme « courbe de répartition » $y = \delta_\iota(x)$ la figure ci-dessous (v. fig. 2).

En effet: on voit immédiatement que $\delta_\iota(x) = 0$ pour $x < a$. Cela résulte de la liste primordiale ou liste de distribution de notre collectif, définie au commencement du § 10. Ensuite, quelque petite que soit la valeur de $\varepsilon > 0$, il n'y a

qu'un nombre fini d'éléments e_r dont l'attribut, x_t, soit supérieur à $a+\varepsilon$. Cela résulte également de la liste de distribution de notre collectif.

D'autre part, quel est, parmi les n premiers éléments e_r, le nombre de ceux dont l'attribut est $\leqslant a+\varepsilon$? Soit k_n le nombre de ces éléments-là. Ce nombre k_n

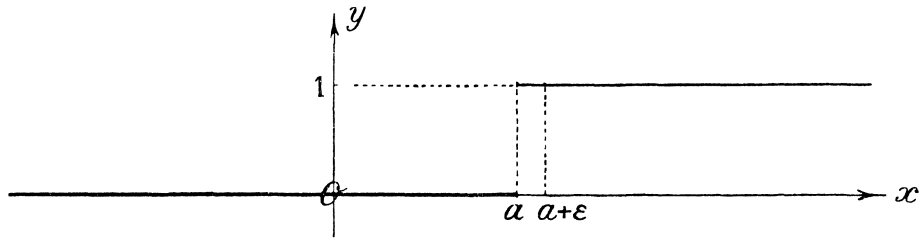


Fig. 2.

est inférieur à n dès que ε est suffisamment petit, mettons $k_n=n-n(\varepsilon)$, où $n(\varepsilon)$ est, comme on vient de le remarquer, un nombre naturel fini, quel que soit ε.

La fonction de répartition étant construite à l'aide de $fr(x)$, il faut les fréquences relatives $(k_n : n)$. La division par n donne

$$\delta\iota_n(a+\varepsilon) \equiv \frac{k_n}{n} = 1 - \frac{n(\varepsilon)}{n}.$$

En faisant augmenter n audelà de toute limite, $n \to \infty$, on voit que

$$\lim_{n\to\infty} \delta\iota_n(a+\varepsilon) = 1 - \lim \frac{n(\varepsilon)}{n},$$

et comme cette dernière limite est nulle, le passage à la limite une fois opéré, on a bien

$$\delta\iota(a+\varepsilon)=1, \text{ quel que soit } \varepsilon>0.$$

En second lieu, je dis que $P(a)=1$. Cela ressort immédiatement du résultat que je viens de démontrer, appliqué à la définition 9 (v. § 9), car il vient

$$P(a)=\delta\iota(a+0)-\delta\iota(a-0)=1-0=1.$$

Voilà donc un exemple où $p(a)$ n'existe pas, tandis que $P(a)$ existe, grâce à la fonction de répartition.

§ 12. - Je vais démontrer le théorème suivant qui se rapporte à la définition stocastique de la probabilité mathématique.

THÉORÈME. - Soit un collectif infini C dans lequel

$$p(a) \equiv \lim fr_n(a) \quad \text{pour } n \to \infty$$

et

$$P(a) \equiv \delta\iota(a+0)-\delta\iota(a-0) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \{\delta\iota(a+\varepsilon)-\delta\iota(a-\varepsilon)\}.$$

Je dis qu'on a toujours $p(a) \leqslant P(a)$.

Démonstration. - Nous supposons d'emblée l'ordre de succession des éléments e_r tel que leurs attributs, x, se suivent dans l'ordre de grandeur algébriquement croissant. Soit $k_n(a)$ le nombre de ceux, parmi les n premiers éléments, dont l'attribut est $=a$; soit $P_n(a, \varepsilon_n) \equiv$ le nombre de ceux, parmi les n premiers éléments, dont l'attribut est compris dans l'intervalle $\leqslant a-\varepsilon_n,\ a+\varepsilon_n' >$.

Les nombres positifs ε_n et ε_n' ont par hypothèse pour limite 0, quand $n \to \infty$, de sorte que $\lim \varepsilon_n = \lim \varepsilon_n' = 0$. Il s'en suit

$$k_n(a) \leqslant P_n(a, \varepsilon_n).$$

Or, par définition, $\delta\iota(x)$ est la fréquence relative de ceux, parmi les n premiers éléments, dont l'attribut est $\leqslant x$. On voit dès lors que

$$\frac{P_n(a, \varepsilon_n)}{n} = \delta\iota(a+\varepsilon_n) - \delta\iota(a-\varepsilon_n'),$$

de sorte qu'il vient

(c) $$k_n(a) : n \leqslant \delta\iota(a+\varepsilon_n) - \delta\iota(a-\varepsilon_n').$$

Pour être rigoureux et aussi général que possible, distinguons deux cas.

Premier cas: la fonction de répartition existe partout, c'est-à-dire est définie pour toute valeur de x. L'inégalité précédente peut alors être remplacée par

$$k_n(a) : n \leqslant \delta\iota(a) - \delta\iota(a-\varepsilon_n').$$

En opérant maintenant le passage à la limite $n \to \infty$, on voit que

$$p(a) \leqslant \delta\iota(a) - \delta\iota(a-0) \quad \text{qui est} \equiv P(a).$$

Deuxième cas: la fonction de répartition n'existe pas partout. Elle est alors non définie pour un ensemble dénombrable E de valeurs exceptionnelles de x, ensemble E compris dans l'ensemble des points de discontinuité de $\delta\iota(x)$. On pourra choisir la suite des ε_n et des ε_n' de telle sorte que ni $(a+\varepsilon_n)$ ni $(a-\varepsilon_n')$ n'appartiennent à l'ensemble exceptionnel E.

Faisons maintenant augmenter n indéfiniment, $n \to \infty$, en évitant de faire tomber $(a+\varepsilon_n)$ et $(a-\varepsilon_n')$ sur des points de l'ensemble exceptionnel E, ce qui est possible, puisque E est dénombrable. Le passage à la limite une fois effectué, on a bien

$$p(a) \leqslant \delta\iota(a+0) - \delta\iota(a-0), \qquad \text{q. e. d.}$$

§ 13. - *Corollaires.*

Si x est un point de continuité de la fonction de répartition $\delta\iota(x)$, on a

$$\delta\iota(a+0) = \delta\iota(a-0)$$

de sorte qu'il vient $P(a)=0$.

Ce raisonnement, étant vrai quelle que soit la fonction de répartition envisagée, s'applique aux collectifs mathématiques qui sont des sylleptes particuliers. On arrive ainsi à ce résultat, qui paraît paradoxal à première vue: *Quand*

un collectif mathématique est continu, la probabilité mathématique d'une valeur isolée, x, de l'attribut, est nulle. Exemple: « Choisir au hasard » un point sur une circonférence. La probabilité mathématique que le point choisi au hasard soit exactement un point mathématique déterminé P, assigné à l'avance sur la circonférence, est nulle; et pourtant, au point de vue purement logique, la coïncidence n'est pas exclue; d'où le paradoxe apparent.

M. BOREL a démontré que cette notion d'événement logiquement possible, mais de probabilité mathématique nulle, est purement théorique. En pratique, les choses ne se passent pas ainsi. Un point mathématique est quelque chose qu'on ne peut pas distinguer des points infiniment voisins. C'est donc uniquement en théorie qu'un segment de droite contient une infinité de points, car dans la réalité, il nous est absolument impossible de les distinguer les uns des autres. Un segment de droite doit être considéré pratiquement comme composé d'un très grand nombre de segments très petits. Quel que soit le procédé physique utilisé pour choisir le point, sa position ne sera jamais connue avec une précision rigoureusement parfaite. Par exemple, on n'arrivera jamais à savoir avec une certitude absolue si le nombre qui lui correspond est rationnel ou irrationnel, algébrique ou transcendant. Ces subtilités, quelqu'intéressantes et importantes qu'elles soient pour le mathématicien, n'ont pas de portée pratique. De même, quel que soit l'instrument de mesure utilisé, on ne pourra jamais indiquer une longueur *en cm* avec 20 décimales exactes. Non seulement parceque cela est pratiquement impossible, mais parceque, théoriquement, la question n'a pas de sens, car avec la dixième décimale, on est dans le monde des atomes et la longueur envisagée n'est plus définie rigoureusement. D'ailleurs, des nombres mathématiquement exacts ne nous serviraient pratiquement de rien, puisque nous ne pourrions tout de même pas les écrire, faute de temps et de papier.

Il est possible d'interpréter les théorèmes mathématiques comme des propositions purement logiques qui n'ont rien à voir avec le monde matériel. Mais il ne faudrait pas en conclure qu'il existe une séparation nette et tranchée entre la loi idéale et la réalité physique, car la logique elle-même présuppose une réalité en dehors de la logique. Et même la mathématique la plus formelle se base en dernière instance sur des signes bien concrets, tracés au tableau noir ou sur le papier. Seule, l'union des mathématiques pures et des mathématiques appliquées donne l'harmonie complète, et le calcul des probabilités réalise cette union à un très haut degré.

F. M. URBAN (Brno - Cecoslovacchia)

DAS MISCHUNGSPROBLEM DES DANIEL BERNOULLI

DANIEL BERNOULLI bespricht in den Abhandlungen der Petersburger Akademie für das Jahr 1769 folgende Aufgabe: Gegeben sind 3 Urnen, von welchen die erste n weisse, die zweite n schwarze und die dritte n rote Kugeln enthält. Aus jeder Urne wird eine Kugel gezogen. Die Kugel aus der ersten Urne wird in die zweite Urne gelegt; die Kugel, die der zweiten Urne entnommen wurde, kommt in die dritte, und jene aus der dritten in die erste Urne. Man fragt nach der durchschnittlichen Anzahl der weissen Kugeln in einer Urne nach x-maliger Wiederholung dieser Mischungsoperation.

Diese Aufgabe lässt sich ersichtlich nach verschiedenen Richtungen erweitern. Die meisten dieser Verallgemeinerungen sind leicht und insofern von geringerem Interesse, als die Eigentümlichkeiten des Problems bereits in dem Falle dreier Urnen und zweier Farben hervortreten. Wir wollen die Aufgabe in folgender Form betrachten. Die Bernoullische Operation wird an k Urnen U_1, U_2,...., U_k vorgenommen und jede der Urnen enthält n Kugeln, von denen a_1, a_2,...., a_k weiss sind. Es soll untersucht werden, ob die Bernoullische Operation in dem Sinne eine vollkommene Mischung ergibt, dass bei oftmaliger Wiederholung des Prozesses die Wahrscheinlichkeit des Erscheinenens einer weissen Kugel bei allen Urnen gleich ist.

Nach der x^{ten} Ziehung können in der i^{ten} Urne 0, 1, 2,...., n weisse Kugeln vorhanden sein, wofür die Wahrscheinlichkeiten $\Pi_{x,0}^{(i)}$, $\Pi_{x,1}^{(i)}$, $\Pi_{x,2}^{(i)}$,...., $\Pi_{x,n}^{(i)}$ heissen mögen. Nach der x^{ten} Ziehung sind demnach die durchschnittlichen Anzahlen der weissen Kugeln in den einzelnen Urnen

$$w_x^{(i)} = \sum_{\lambda=0}^{k} \lambda \Pi_{x,\lambda}^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Es hängt nun $w_{x+1}^{(i)}$ mit $w_x^{(i)}$ und $w_x^{(i-1)}$ in folgender Weise zusammen:

$$w_{x+1}^{(i)} = w_x^{(i)} + \frac{1}{n} w_x^{(i-1)} - \frac{1}{n} w_x^{(i)}.$$

In der Tat ist $\frac{w_x^{(i)}}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei der $(x+1)^{\text{ten}}$ Ziehung aus der i^{ten} Urne eine weisse Kugel gezogen wird, was die Anzahl der in dieser Urne

vorhandenen weissen Kugeln um Eins verringert, da die gezogene Kugel in die $(i+1)^{te}$ Urne kommt. Ebenso ist $\frac{w_x^{(i-1)}}{n}$ die Wahrscheinlichkeit, dass bei der $(x+1)^{ten}$ Ziehung aus der $(i-1)^{ten}$ Urne eine weisse Kugel gezogen wird, die in die i^{te} Urne kommt und so die Zahl der in dieser Urne vorhandenen weissen Kugeln um Eins vermehrt. Diese Formel gilt für sämtliche Werte von i, wenn man die Verabredung trifft, dass auf die letzte Urne die erste folgen soll.

Indem man $Ew_x^{(i)}=w_{x+1}^{(i)}$ schreibt und die Operationssymbole von jenen für Quantitäten trennt, erhält man das folgenden System von Differenzengleichungen

$$\left[E-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]w_x^{(1)}=\frac{1}{n}w_x^{(k)},$$
$$\left[E-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]w_x^{(2)}=\frac{1}{n}w_x^{(1)},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\left[E-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]w_x^{(k)}=\frac{1}{n}w_x^{(k-1)}.$$

Man multipliziert die Gleichungen mit einander, kürzt und erhält folgende Gleichung zur Bestimmung von $w_x^{(1)}$:

$$\left[E-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^k w_x^{(1)}=\frac{1}{n^k}w_x^{(1)}.$$

Durch Verwertung der gefundenen Lösungen erhält man nach und nach für die gesuchten Grössen folgende Ausdrücke

$$w_x^{(1)}=A\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^x+B\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_2}{n}\right)^x+\ldots.+K\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_k}{n}\right)^x$$
$$w_x^{(k)}=A\alpha_1\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^x+B\alpha_2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_2}{n}\right)^x+\ldots.+K\alpha_k\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_k}{n}\right)^x$$
$$w_x^{(k-1)}=A\alpha_1^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^x+B\alpha_2^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_2}{n}\right)^x+\ldots.+K\alpha_k^2\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_k}{n}\right)^x$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$w_x^{(2)}=A\alpha_1^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_1}{n}\right)^x+B\alpha_2^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_2}{n}\right)^x+\ldots.+K\alpha_k^{k-1}\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\alpha_k}{n}\right)^x.$$

Hierin sind α_1, α_2,...., α_k die k^{ten} Einheitswurzeln und A, B,...., K sind konstante Grössen, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen. Setzt man $x=0$, so stehen links vom Gleichheitszeichen die Zahlen α_1, α_2,...., α_k und man hat zur Bestimmung der Unbekannten das folgende System linearer Gleichungen

$$\alpha_1=A+B+\ldots.+K$$
$$\alpha_k=A\alpha_1+B\alpha_2+\ldots.+K\alpha_k$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\alpha_2=A\alpha_1^{k-1}+B\alpha_2^{k-1}+\ldots.+K\alpha_k^{k-1}.$$

Wir wollen jene Grösse bestimmen, die als Koeffizient der Einheitswurzel 1 auftritt. Dies sei A, so dass $\alpha_1=1$. Man addiert in der Systemdeterminante

sämtliche Zeilen zur ersten und erhält unter Berücksichtigung des Satzes über die Summe der ersten $k-1$ Potenzen der k^{ten} Einheitswurzeln

$$\Delta = \begin{vmatrix} k, & 0, \ldots, & 0 \\ 1, & a_2, \ldots, & a_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & a_2^{k-1}, \ldots, & a_k^{k-1} \end{vmatrix} = k\delta_{11}.$$

Setzt man in der zu A gehörigen Determinante $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = N$ und addiert ebenfalls sämtliche Zeilen zur ersten, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} N, & 0, \ldots, & 0 \\ a_k, & a_2, \ldots, & a_k \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2, & a_2^{k-1}, \ldots, & a_k^{k-1} \end{vmatrix} = N\delta_{11},$$

und es ist also

$$A = \frac{N}{k}.$$

Um die Grenzwerte der $w_x^{(i)}$ zu bestimmen, beachte man, dass die absoluten Beträge der Klammerausdrücke sämtlich kleiner als Eins sind mit Ausnahme jenes, in dem die Einheitswurzel Eins auftritt. Dieser hat den absoluten Betrag Eins. Für unendliches x verschwinden demnach sämtliche Glieder mit Ausnahme des ersten und man hat

$$\lim_{x=\infty} w_x^{(1} = \lim w_x^{(2} = \ldots = \lim w_x^{(k)} = \frac{N}{kn}.$$

Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten nähern sich also bei hinreichend oftmaliger Wiederholung der Bernoullischen Mischungsoperation alle dem Werte $\frac{N}{kn}$. Das Erscheinen einer weissen Kugel hat schliesslich bei allen Urnen die gleiche Wahrscheinlichkeit un diese hängt nur von der Anzahl der weissen Kugeln und von der der überhaupt vorhandenen Kugeln ab. Diese Wahrscheinlichkeit hat den gleichen Wert, als ob sämtliche Kugeln in einer einzigen Urne vereinigt und gut durcheinander gemischt worden wären. Sie ist von der anfänglichen Verteilung der weissen Kugeln unabhängig.

Den Fall einer beliebigen Urnenzahl behandelte Herr HOSTINSKY unter der Voraussetzung einer unendlichen Kugelzahl in den einzelnen Urnen. Dies entspricht einem System von miteinander verbundenen Gefässen, die mit sofort mischbaren Flüssigkeiten verschiedener Farbe gefüllt sind. LAPLACE gibt die Lösung, ohne auf Einzelheiten einzugehen. Statt der Differenzengleichungen erhält man ein System von Differentialgleichungen, deren Lösung keine Schwierigkeiten bietet. Es empfiehlt sich aber, die Rechnung symmetrisch anzulegen, da man sonst auf sehr umständliche Rechnungen stösst. Übrigens findet man die Laplacesche Lösung auch aus unsern Formel für $w_x^{(i)}$, indem man den Grenzübergang für unendliches x ausführt. Die Annahme einer unendlichen Kugelzahl verhüllt etwas die Eigentümlichkeit der Aufgabe und es dürfte besser sein, von der Voraus-

setzung einer endlichen Kugelzahl auszugehen, da man leicht von den Differenzengleichungen zu den Differentialgleichungen übergehen kann, während der entgegengesetzte Weg nicht so einfach ist.

Das Entstehen einer vollkommenen Mischung durch oftmalige Wiederholung der Bernoullischen Operation lässt sich auch durch das Verfahren, welches in meinen: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, für die Analysis des Mischens von Karten verwendet wurde, beweisen. Man denke sich die $k \cdot n$ Plätze, auf welchen die Kugeln liegen, mit Nummern bezeichnet und markiere jede Kugel mit der Nummer des Platzes, auf welchem sie vor Beginn der Mischungsoperation liegt. Die i^{te} Urne enthält die Plätze $(i-1)n+1$, $(i-1)n+2$,...., in.

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass eine einmalige Ausführung der Mischungsoperation die Kugel, welche auf dem r^{ten} Platze liegt, an die s^{te} Stelle bringt, mit $p_{r,s}$. Die einmalige Ausführung der Mischungsoperation kann eine Kugel in der i^{ten} Urne entweder in dieser belassen oder sie in die nächsthöhere Urne bringen. Alle andern Lagen sind ausgeschlossen, so dass für alle Werte $s \leqq (i-1)n$ oder $s \geqq (i+1)n$

$$p_{r,s}=0,$$

falls $(i-1)n+1 \leqq r \leqq in$. Dagegen muss die Kugel nach Ausführung der Mischungsoperation notwendig auf einem der $2n$ Plätze

$$(i-1)n+1, \quad (i-1)n+2,.... \quad (i+1)n$$

sein und es gilt deshalb die Beziehung

$$p_{r,(i-1)n+1}+p_{r,(i-1)n+2}+ \cdots +p_{r,(i+1)n}=1.$$

Diese Gleichung gilt für alle Werte $1 \leqq r \leqq kn$. Die gleiche Anzahl von Beziehungen ergibt sich daraus, dass jeder Platz von einer der Kugeln besetzt sein muss, dass aber für seine Besetzung nur die Kugeln der betreffenden Urne oder der vorhergehenden Urne in Betracht kommen. Zwischen den $(kn)^2$ Grössen $p_{r,s}$ bestehen also $2nk$ Beziehungen.

Wir bezeichnen mit $P_{r,s}^{(x)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass nach x-maliger Ausführung der Mischungsoperation die mit der Zahl r bezeichnete Kugel sich in der i^{ten} Urne auf der s^{ten} Stelle befindet, und es soll gezeigt werden, dass unter den Bedingungen der Aufgabe sämtliche Grössen $P_{r,s}^{(x)}$ bei wachsenden Werten von x der gleichen Grenze zustreben. $P_{r,s}^{(x)}$ setzt sich aus den Wahrscheinlichkeiten susammen, dass die r^{te} Kugel nach der $(x-1)^{\text{ten}}$ Operation auf einem der $2n$ Plätze in der betreffenden oder in der vorhergehenden Urne lag und durch die x^{te} Operation an die s^{te} Stelle gebracht wird. Es ist also

$$P_{r,s}^{(x)}=P_{r,(i-1)n+1}^{(x-1)}p_{(i-1)n+1,s}+P_{r,(i-1)n+2}^{(x-1)}p_{(i-1)n+2,s}+ \cdots +P_{r,in}^{(x-1)}p_{in,s}.$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist $(kn)^2$ und es ergibt sich ein Gleichungssystem, wie es für Mischungsprobleme charakteristisch ist. Das Bernoullische Problem

ist so gefasst, dass alle Wahrscheinlichkeiten $p_{r,s}$, die von Null verschieden sind, als gleich anzusetzen sind. Für das schliessliche Zustandekommen einer vollkommenen Mischung ist es hinreichend, dass keine der Grössen $p_{r,s}$ den Wert Eins erreicht, woraus folgt, dass jede Kugel an jeder Stelle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten kann. Die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens einer weissen Kugel ist demnach bei jeder beliebigen Urne $\frac{N}{nk}$, falls die Bernoullische Mischungsoperation hinreichend oft wiederholt wird.

Diese Aufgabe dürfte eines der ältesten Beispiele sein, in welchen der Ausgleich von ursprünglich verschiedenen Wahrscheinlichkeiten durch die oftmalige Wiederholung eines Prozesses herbeigeführt wird, dessen einmalige Ausführung die bestehenden Unterschiede durchaus nicht zum Verschwinden bringen könnte. Sie ist interessant, weil wir den Ausgleich der Wahrscheinlichkeiten in doppelter Weise verfolgen können: Durch Anwendung der Formel für die Analyse von Mischungsprozessen und aus der Analyse des Prozesses selbst.

Bei schematischen Aufgaben kann man sich nach Belieben für das eine oder das andere Verfahren entscheiden. Der zu untersuchende Prozess ist durch die Voraussetzungen der Aufgabe festgelegt und damit sind auch die Werte der $p_{r,s}$ gegeben. Es kann also kein Zweifel darüber bestehen, ob die Bedingungen für die Konvergenz der $P_{r,s}^{(x)}$ gegen einen gemeinsamen Grenzwert erfüllt sind oder nicht.

Bei Vorgängen der Wirklichkeit besteht eine solche Einsicht in die Natur des zu untersuchenden Prozesses nicht und es ist die Analyse aus den physischen Bedingungen des Prozesses vorzuziehen. Die Erfahrung, dass ein gewisser Prozess meist zu einem stationären Zustand und einem Ausgleich der Wahrscheinlichkeiten führt, lässt leicht vergessen, dass dieses Ergebnis nicht notwendig ist und nur unter gewissen Bedingungen eintritt. Am Wesen der Sache ändert sich dadurch nichts, dass diese Bedingungen vielleicht sehr häufig erfüllt sind und das Gegenteil die Ausnahme ist. So untersuchte HENRI POINCARÉ die Mischung von Flüssigkeiten aus den hydromechanischen Voraussetzungen und fand, dass unter gewissen Bedingungen eine vollkommene Mischung nicht stattfindet. Ebenso lassen sich leicht Bedingungen angeben, unter denen eine vollkommene Mischung der Karten nicht zustande kommen kann.

Die vorbehaltlose Anwendung der Mischungsformel müsste bei Anwendung auf nicht näher untersuchte Vorgänge der Wirklichkeit zum Übersehen dieser eventuell bestehenden Ausnahmsfälle führen. Man muss stets an die Möglichkeit denken, dass die Voraussetzungen für das Zustandekommen einer vollkommenen Mischung nicht erfüllt sind. Es ist ebenso falsch, bei einem Prozesse von vornherein das Zustandekommen einer vollkommenen Mischung wie das eines geordneten Zustandes anzunehmen. Man muss nicht nur den Verlauf der Mischungsprozesse untersuchen, sondern auch die Bedingungen angeben, unter welchen eine vollkommene Mischung stattfindet und unter welchen dies nicht geschieht.

C. A. DELL'AGNOLA (Venezia - Italia)

INTORNO ALLE SUCCESSIONI DI VARIABILI CASUALI DISCONTINUE TENDENTI AD UNA VARIABILE CASUALE LIMITE

Le ricerche che formano l'oggetto di questa comunicazione, traggono origine dai lavori sul Calcolo delle probabilità del prof. F. P. CANTELLI (1), fondatore della « Teorica delle variabili casuali », e si riattaccano ad altre contenute in una mia Memoria in corso di stampa (2).

Data una successione illimitata di variabili casuali discontinue

$$X_1,\ X_2,\ldots,\ X_n,\ldots, \tag{1}$$

indichiamo con G_n il gruppo dei valori che la variabile X_n può assumere, gruppo che per brevità diremo *corrispondente alla variabile* X_n, e con $p_n(\alpha, \beta)$ la probabilità che la variabile stessa assuma un valore dell'intervallo (α, β). Vien fatto allora di considerare, insieme alla successione (1), due altre successioni ad essa congruenti: la successione di aggregati

$$G_1,\ G_2,\ldots,\ G_n,\ldots \tag{2}$$

e la successione delle probabilità

$$p_1(\alpha, \beta),\ p_2(\alpha, \beta),\ldots,\ p_n(\alpha, \beta),\ldots \tag{3}$$

S'intuisce senz'altro, come dal comportamento delle successioni (2) e (3) si possa far dipendere quello della successione (1) nei riguardi della tendenza ad un limite, o, più generalmente, della tendenza ad una variabile casuale limite; e come la teoria dei gruppi di punti sulla retta possa fornire un prezioso contributo alla teoria astratta del Calcolo delle probabilità.

Dal punto di vista ora accennato, ho avuto occasione di occuparmi nella citata Memoria, con l'intento precipuo di estendere alle successioni di variabili casuali il teorema fondamentale di Cauchy sull'ordinaria tendenza ad un limite.

---

(1) Fra i quali lavori è di fondamentale importanza il seguente: *La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XLI, Fasc. II° e III°, 1916, pag. 191-201.

(2) C. A. DELL'AGNOLA: *Sulla tendenza ad un limite di una successione di variabili casuali.* Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1928.

In questa comunicazione, partendo da opportune ipotesi concernenti le successioni (2) e (3), mi propongo di dedurre la tendenza della successione (1) di variabili casuali ad una variabile casuale limite, in conformità alla seguente definizione:

« Se X è una variabile casuale che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_h$, con le probabilità rispettive $p_1, p_2, \ldots, p_h$, dire che una successione di variabili casuali

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

tende alla variabile casuale X, significa: a ciascuno dei valori x_i, $(i=1, 2, \ldots, h)$, che la variabile X può assumere, corrisponde un numero positivo δ_i, tale che per ogni numero positivo $\varepsilon < \delta_i$ risulti

$$\lim_{n\to\infty} p_n(x_i-\varepsilon, x_i+\varepsilon)=p_i, \qquad (i=1, 2, \ldots, h) \text{ ».}$$

Tutto ciò si esprimerà con la scrittura

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} X_n = X,$$

e si dirà talora che la variabile X_n, al crescere indefinitamente di n, tende alla variabile casuale X secondo il Calcolo delle probabilità.

È evidente di per sè, che la definizione precedente fornisce una prima, naturale estensione di quella stabilita dal prof. CANTELLI per la tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità (1).

La legittimazione esauriente delle proposizioni che formano l'oggetto della presente comunicazione, esigerebbe considerazioni non brevi, e talora alquanto delicate, le quali troveranno posto più conveniente in una Memoria di prossima pubblicazione (2).

Le nozioni sui gruppi di punti della retta, che più specialmente ricorrono nei ragionamenti, sono quelle di *gruppo denso in tutto un intervallo* (3) (e per converso, di *gruppo che non è denso in alcun intervallo*), di *gruppo di prima categoria* (4), e la proposizione seguente: « Un gruppo chiuso di misura nulla è rinchiudibile » (5). Giocano pure una parte importante nel lavoro

---

(1) F. P. CANTELLI: *La tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità.* Loco citato, pag. 193.

(2) Il ritardo, del resto inevitabile, nella pubblicazione di questa Nota mi consente ora di aggiungere che la Memoria accennata è apparsa, sotto lo stesso titolo, negli Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti; Tomo LXXXVIII, Parte seconda, 1928, A. VI.

(3) Vedasi ad es.: U. DINI: *Lezioni di Calcolo infinitesimale.* Vol. II° (Calcolo integrale). Pisa, Stab. Tip. succ. F.lli Nistri, 1915, pag. 979. — É. BOREL: *Leçons sur la théorie des fonctions.* Paris, Gauthier-Villars, 1898, pag. 38.

(4) É. BOREL: *Leçons sur les fonctions de variables réelles.* Paris, Gauthier-Villars, 1905, pag. 21-22. La nozione di gruppo di prima categoria è dovuta al sig. R. BAIRE.

(5) H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration.* Paris, Gauthier-Villars, 1904, pag. 109. I gruppi

i concetti di *gruppo derivato completo* e di *gruppo derivato ristretto di una successione di aggregati*, già da me introdotti nella citata Memoria, e contenuti nelle seguenti definizioni.

Supposto che gli aggregati (2) sieno limitati nel loro insieme, e designando con (a, b) un intervallo contenente in senso stretto i punti di G_n, qualunque sia n, consideriamo il gruppo $\overline{G}'$ dei punti x di (a, b), che godono della seguente proprietà:

« Scelti arbitrariamente un intorno c_x del punto x e un numero intero positivo N, fra gli aggregati della successione (2) successivi a G_N, sempre esiste un aggregato G_n avente almeno un punto in comune con l'intorno c_x ».

L'aggregato $\overline{G}'$ esiste certamente, ed è chiuso: è il *gruppo derivato completo della successione* (2).

Indicheremo invece con $\overline{\Gamma}'$ il gruppo dei punti x di (a, b), che soddisfano alla condizione seguente:

« Scelto arbitrariamente un intorno c_x del punto x, esiste un intero positivo N, tale che per $n > N$ l'aggregato G_n ha almeno un punto in comune con l'intorno c_x ».

L'aggregato $\overline{\Gamma}'$ è il *gruppo derivato ristretto della successione* (2). Questo gruppo, quando esiste, è contenuto in $\overline{G}'$, $(\overline{G}' \geqslant \overline{\Gamma}')$, ed è chiuso alla sua volta.

È evidente che l'insieme limite completo e l'insieme limite ristretto della successione (2), definiti dal sig. BOREL (1), sono contenuti rispettivamente in $\overline{G}'$ e $\overline{\Gamma}'$. Appartengono pure a $\overline{G}'$ e a $\overline{\Gamma}'$ rispettivamente, l'insieme limite completo e ristretto, secondo BOREL, della successione

$$G_1' \quad G_2', \ldots, \quad G_n', \ldots$$

formata coi derivati dei gruppi della (2).

L'importanza dei gruppi $\overline{G}'$ e $\overline{\Gamma}'$ è resa manifesta dalle proposizioni che seguono.

I. - « Se i gruppi della successione (2) sono limitati nel loro insieme e senza punti comuni a due a due (2), posto

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots$$
$$g = G_1' + G_2' + \ldots + G_n' + \ldots,$$

si ha

$$G' = g + \overline{G}',$$

essendo G' il gruppo derivato di G e G_n' il gruppo derivato di G_n $(n = 1, 2, 3, \ldots, \infty)$ ».

---

rinchiudibili sono quelli che P. DU BOIS REYMOND chiamò *gruppi integrabili*, e la stessa denominazione venne adottata dal LEBESGUE nell'opera testè citata.

(1) *Leçons sur les fonctions de variables réelles.* Loco citato, pag. 18.

(2) Si potrebbe, volendo, supporre che non esistano punti comuni ad infiniti gruppi della successione (2), non escludendo così che un punto possa appartenere a più gruppi, sempre però in numero finito.

Quindi, nelle stesse ipotesi, si può affermare:

II. - « Se il derivato G' del gruppo G è di misura nulla, anche il derivato completo $\overline{G}'$ della successione (2) è di misura nulla, e, oltre a ciò, il gruppo G è di prima categoria ».

III. - « Se gli aggregati della successione (2) sono limitati nel loro insieme; se il derivato completo $\overline{G}'$ di questa successione è di misura nulla; se (a, b) è un intervallo contenente in senso stretto i punti di $\overline{G}'$; allora, assegnato un numero positivo η piccolo a piacere, esiste nell'intervallo (a, b) un numero *finito* di tratti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, i quali contengono in senso stretto tutti i punti di G_n, da un certo valore dell'indice n in avanti ».

Nelle stesse ipotesi, designando con $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ quelli fra i tratti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, di cui al teorema precedente, che contengono almeno un punto del gruppo $\overline{\Gamma}'$, *supposto esistente,* si ha ancora:

IV. - « Assegnato un numero positivo η piccolo a piacere, esiste un numero *finito* di tratti $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, tali che ciascuno di essi contiene almeno un punto di G_n, da un certo valore dell'indice n in poi ».

Più generalmente, si può supporre in quest'ultima proposizione che il gruppo $\overline{\Gamma}'$ sia di misura nulla, senza stabilire alcuna ipotesi circa la misura del gruppo $\overline{G}'$. Si arriva così alla stessa conclusione. Ma la *dispersione* degli elementi dei gruppi G_n della successione proposta non è più limitata, almeno in generale, a certi determinati intervalli in numero finito, e la cui somma possa ridursi piccola a volontà.

Sempre nelle ipotesi del teorema III, se i gruppi $\overline{G}'$ e $\overline{\Gamma}'$ della successione (2) coincidono, dai teoremi III e IV scende tosto il corollario:

V. - « Assegnato un numero positivo η piccolo a piacere, esiste un numero *finito* di tratti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, e un numero intero positivo N, tale che per $n > N$, i punti di G_n sono *tutti* distribuiti nei tratti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$, per modo che ciascuno di questi contenga almeno un punto di G_n ».

Dalle proposizioni I, II, e III si deduce la dimostrazione del teorema seguente:

VI. - « Se le variabili casuali della successione (1) sono limitate nel loro insieme; se i gruppi corrispondenti (2) sono senza punti comuni a due a due; se il derivato G' del gruppo

$$G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n + \ldots,$$

somma dei gruppi della successione (2) è di misura nulla: allora, assegnato un numero positivo η arbitrariamente piccolo, esiste un numero *finito* di tratti $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, tali che risulti

$$p_n(\mu_1) + p_n(\mu_2) + \ldots + p_n(\mu_p) = 1$$

da un certo valore dell'indice n in avanti, ove $p_n(\mu_i)$, $(i=1, 2, ..., p)$, indica la probabilità che la variabile casuale X_n assuma un valore appartenente al tratto μ_i ».

Le proposizioni I, II, III, IV e V riguardano soltanto le successioni di aggregati considerate in sè. Nella proposizione VI mi sembra degno di particolare attenzione il fatto, che essa fornisce una proprietà della successione (1) di variabili casuali, la quale dipende unicamente dal comportamento della successione (2) dei corrispondenti aggregati. Ed invero, nella VI non figura alcuna ipotesi concernente la successione delle probabilità (3). Nelle proposizioni che seguono, viene invece inclusa costantemente nell'ipotesi la condizione seguente: « ogni punto del derivato completo $\overline{G}'$ della successione (2) è un *punto di convergenza* per la successione delle probabilità [1].

VII. - « Se le variabili casuali (1) sono limitate nel loro insieme; se il gruppo

$$G = G_1 + G_2 + ... + G_n + ...,$$

somma dei gruppi corrispondenti della (2), è di prima categoria; se ogni punto del derivato completo $\overline{G}'$ della successione (2) è un punto di convergenza per la successione delle probabilità (3); allora, in ogni intervallo (α, β) di (a, b) [2] contenuto in senso stretto in uno degli intervalli contigui al gruppo derivato ristretto $\overline{\Gamma}'$ della (2), la successione $p_n(\alpha, \beta)$ delle probabilità è infinitesima ».

Questo teorema è valido anche se l'intervallo avente per estremi α e β è aperto o semiaperto. Le ipotesi in esso stabilite assicurano poi l'esistenza del gruppo $\overline{\Gamma}'$. Il teorema ha un ufficio, se così mi è lecito esprimermi, di collegamento fra le proposizioni che lo precedono e quelle che lo seguono. Queste ultime, di cui ora ci occuperemo, costituiscono l'oggetto principale delle mie ricerche attuali.

VIII. - « Se le variabili casuali della successione (1) sono limitate nel loro insieme; se i gruppi corrispondenti (2) sono senza punti comuni a due a due; se il derivato G' del gruppo

$$G = G_1 + G_2 + ... + G_n + ...$$

è di misura nulla; se ogni punto del derivato completo $\overline{G}'$ della successione (2) è un punto di convergenza per la successione (3) delle probabilità; allora, asse-

---

[1] Si dice che x è un *punto di convergenza* per la successione delle probabilità, allorquando esiste un numero positivo δ, tale che per ogni numero positivo $\varepsilon < \delta$, la successione $p_n(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ risulti convergente.

Si dirà poi che la successione delle probabilità è *infinitesima* nel punto x, quando esiste un intorno di questo punto, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, in cui la successione stessa è infinitesima. Vedasi a proposito la citata mia Memoria.

[2] (a, b) è il solito intervallo contenente in senso stretto i punti di G_n, $(n = 1, 2, 3, ..., \infty)$, e qualunque altro gruppo che occorresse considerare.

gnati due numeri positivi η ed ε arbitrariamente piccoli, esiste un numero *finito* di tratti $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, tali che risulti

$$p_n(\nu_1)+p_n(\nu_2)+ \ldots +p_n(\nu_q)>1-\varepsilon$$

da un certo valore dell'indice n in avanti ».

Brevemente: nelle ipotesi del teorema, assegnato un numero positivo η piccolo a volontà, esiste un numero finito di tratti $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$, la cui somma è minore di η, tali che tenda alla certezza la probabilità che la variabile X_n assuma un valore appartenente ad uno di codesti tratti, allorquando si fa crescere n indefinitamente.

Nelle ipotesi del teorema precedente, pongasi, per ogni punto x di $\overline{G}'$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} p_n(x-\varepsilon, x+\varepsilon)=p(x),$$

ove ε si suppone abbastanza piccolo in guisa che la successione $p_n(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ risulti convergente. La funzione $p(x)$, definita nel gruppo $\overline{G}'$, è nulla nei punti di $\overline{G}'-\overline{\Gamma}'$, mentre esiste almeno un punto di $\overline{\Gamma}'$ in cui $p(x)>0$. Se poi nelle ipotesi del teorema precedente viene inclusa la condizione che il gruppo $\overline{\Gamma}'$ sia *finito*, e indichiamo con $x_1, x_2, \ldots, x_h$ i punti di questo gruppo nei quali la funzione $p(x)$ non è nulla, si può affermare che la successione (1) tende, secondo il Calcolo delle probabilità, alla variabile casuale X che può assumere i valori $x_1, x_2, \ldots, x_h$, con le probabilità rispettive $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_h)$, la cui somma è uguale all'unità.

Riassumendo, abbiamo:

IX. - « Se alle ipotesi del teorema precedente si aggiunge la condizione che il gruppo derivato ristretto $\overline{\Gamma}'$ della successione (2) sia *finito*, allora si può affermare che la successione di variabili casuali (1) tende ad una variabile casuale limite nel senso della definizione dianzi stabilita ».

Col sussidio del teorema VII, le proposizioni VIII e IX si possono estendere, modificandone opportunamente le ipotesi. Si ha precisamente:

X. - « Se le variabili casuali della successione (1) sono limitate nel loro insieme; se il gruppo

$$G=G_1+G_2+ \ldots +G_n+\ldots$$

è di prima categoria; se ogni punto del derivato completo $\overline{G}'$ della successione (2) è un punto di convergenza per la successione (3) delle probabilità; se il derivato ristretto $\overline{\Gamma}'$ della successione (2) è di misura nulla: allora, assegnati due numeri positivi η ed ε arbitrariamente piccoli, esiste un numero *finito* di tratti $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q$ senza punti comuni a due a due, la cui somma è minore di η, tali che risulti

$$p_n(\nu_1)+p_n(\nu_2)+ \ldots +p_n(\nu_q)>1-\varepsilon$$

da un certo valore dell'indice n in avanti, con $p_n(v_i)$, $(i=1, 2, ..., q)$, designando, come precedentemente, la probabilità che la variabile casuale X_n assuma un valore appartenente al tratto v_i ».

Questo teorema continua manifestamente a sussistere, se si suppone che il gruppo $\bar{\Gamma}'$ sia *finito*, e in tal caso si ha:

XI. - « Se alle ipotesi stabilite nel precedente teorema si aggiunge la condizione che il gruppo derivato ristretto $\bar{\Gamma}'$ della successione (2) sia finito, allora si può affermare che la successione di variabili casuali (1) tende ad una variabile casuale limite ».

Nelle proposizioni VIII, IX, X e XI, il gruppo G è sempre di prima categoria; ma mentre nelle VIII e IX questo gruppo è non denso, le ipotesi dei teoremi X e XI non escludono che il gruppo G possa essere denso in qualche intervallo. In questo senso appunto i teoremi X e XI sono più generali dei teoremi VIII e IX.

Si può osservare da ultimo, a proposito dei teoremi IX e XI, che quando il gruppo $\bar{\Gamma}'$ si riduce ad un unico punto, si ricade nel caso ordinario della tendenza ad un limite nel senso del Calcolo delle probabilità.

Questa tendenza, di cui faccio ora cenno, non è però quella che si riferisce alla « loi forte des grands nombres », espressione introdotta dal sig. KHINTCHINE per denotare un nuovo teorema di Calcolo delle probabilità, teorema che in una recente nota del sig. EUGEN SLUTSKY [1] viene attribuito, sia pure in un caso particolare, al sig. ÉMILE BOREL. Mi si consenta una breve parentesi su questo argomento.

Da un accurato studio che ho potuto fare mi sembra risulti non dubbio che il primo a porre e a dimostrare rigorosamente la « loi forte », considerando naturalmente *successioni di eventi dipendenti*, tanto nel caso particolare dello schema bernoulliano quanto nel caso generale, ed assegnando al tempo stesso, in modo numericamente e facilmente valutabile, limiti inferiori significativi delle probabilità ricercate, sia stato il prof. F. P. CANTELLI [2]. Questi è riuscito nell'intento ricorrendo ad un dimenticato teorema del BOOLE, che ha dovuto estendere al caso di una infinità di eventi *dipendenti*, e traendo inoltre profitto di una estensione del noto teorema di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF. Ritengo pertanto che, ove ci si limiti soltanto alla considerazione delle basi logiche della « loi forte », esse sieno contenute nel teorema accennato del BOOLE, e più precisamente nella estensione fattane dallo stesso CANTELLI.

Ciò ho voluto rilevare principalmente perchè apparisca un mio modesto desi-

---

[1] *Sur un critérium de la convergence stochastique des ensembles de valeurs éventuelles.* Comptes Rendus, agosto 1928.

[2] *La probabilità come limite della frequenza.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1917.

derio, che credo condiviso da tutti, che i riferimenti a lavori di Calcolo delle probabilità, come del resto in tutti i campi della scienza, sieno sempre completi, allo scopo di evitare possibili equivoci di priorità.

La tendenza particolare che io deduco dai miei teoremi IX e XI è quella che si collega al noto teorema di BERNOULLI, sulla quale ancora molti teoremi sono da dimostrare nonostante le ricerche del CANTELLI e di qualche altro.

J. NEYMAN (Warszawa - Polonia) (1)

ON METHODS OF TESTING HYPOTHESES

The purpose of the present paper is to give an account of some work I have carried out partly in cooperation with Dr. E. S. PEARSON of University College, London.

The problem of the application of the theory of probability to testing hypotheses is, as is well known, a very old one. The first solution of the problem given in Bayes' Theorem has however been very seriously attacked since it needs for its application in practice a knowledge of the a priori probability law, which can only in quite exceptional cases be deduced from the conditions of the particular problem under consideration. Doubt has even been expressed whether problems exist at all in which the a priori law of probability is given.

If rarely met with, such problems do exist, as for example in connection with Mendelism, where we may be testing hypotheses regarding the genetic components of the parents of certain offsprings, when those of the grandparents are known.

In other cases when the a priori law is not given by the nature of the problem, the application of Bayes' Theorem generally needs some new assumptions, which in most practical cases, and particularly when dealing with small samples, will influence the result considerably, and being arbitrary, put the same into the danger of being useless.

Certain attempts have been made to show that under some conditions, when the number of trials is very large, the actual a priori probability law will not influence very much the final result of the application of the theorem (2).

I have succeded in proving the following two theorems:

1°) Let Σ be a sample of N individuals falling into k groups with relativ frequencies

$$q_1, \quad q_2, \ldots, \quad q_k.$$

---

(1) Biometric Laboratory, Nencki Institute, Soc. Scient. ac Litt. Varsoviensis.

(2) K. PEARSON: Biometrika, vol. XIII and XVI. E. S. PEARSON: Biometrika, vol. XVII. Besides that several authors proved theorems under consideration, but did not publish them or the publications are not obtainable. Such are theorems of S. BERNSTEIN (published in lithografic edition of his lectures in Kharkoff in 1917), of E. BOREL (lectures at the Sorbonne, 1926) and of Miss A. MIKLASZEWSKA in Warsaw (not published).

This sample has been randomly drawn from some population π divided also into k groups in which the corresponding group proportions are

$$p_1, \quad p_2, \ldots, \quad p_k.$$

The p's are unknown and we assume that the a priori law of probability is a function $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ which satisfies the two following conditions: at the point Σ, that is for $p_i = q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ the function φ is positive and at the same point it is continuous.

If these two conditions are satisfied, then

The a posteriori probability that the unknown numbers $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *satisfy the condition*

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^{k} \left\{ \frac{(p_i - q_i)^2}{q_i} \right\} \leq \chi_0^2$$

where χ_0^2 *is any given positive number, tends to*

$$\int_0^{\chi_0} \chi^{k-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi \Big/ \int_0^{\infty} \chi^{k-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi$$

when $N \to \infty$, *the ratios* q, *being constant.*

2°) Suppose that the groups into which sample and the population are classed correspond to different values $x_1, x_2, \ldots, x_k$ of a certain character of their individuals, and that $\bar{x}$ and m are the mean values of this character in sample and population respectively. Further let s be the standard deviation in the sample and write $\sigma = s/\sqrt{N}$. If the a priori law of probability $\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ satisfies the same conditions as in theorem (1), then

The probability a posteriori that $a \leq m \leq b$, *where* $a < b$ *are two arbitrary numbers, teds to*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(m-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} dm$$

as $N \to \infty$, *the ratios* q, *being constant.*

This second theorem has of course been stated before (1), but the nature of the assumptions involved in reaching the limit has not perhaps been before fully examined.

It has been possible to show that there are discontinuous functions φ, for which the first theorem does not hold and also that, if that function is continuous, for the validity of the same theorem the condition $\varphi > 0$ is a necessary one. It seems probable that the condition of continuity at the point Σ cannot be weakened very much. Since in applications this condition means a practical constancy of a priori probability at any rate near the sample point Σ, we see that the necessity

---

(1) See for instance BOWLEY'S: *Elements of Statistics*, Part II, p. 416.

of arbitrary assumptions regarding the a priori law of probability is not removed even in the case, when the number of observations is very large, and that it is probably impossible for it to be removed.

In addition to that, in both cases, the order of approximation of the actual value of the a posteriori probability to its limit depends closely, for a given N, upon the variability of the function φ at the point Σ, and so, even if the assumption as to continuity were true, we can never be sure in practice whether the limiting value is a reasonable approximation to the probability itself.

Although the two theorems have a theoretical interest, they are of more doubtful value in practice and help to indicate the uncertainty that must always be associated with the method of inverse probabilities (1).

After this method had been thrown into doubt there seems to have been accepted very generally a new principle for testing hypotheses, which can be formulated as follows (2).

If the observed event has a character, which from the point of view of the hypothesis considered is improbable, then the hypothesis itself is improbable.

Clearly not every character of the observed event is suitable for testing hypotheses and E. BOREL and P. LÉVY state that such characters should be from some point of view « remarquable ». They explain the meaning of this word in several examples, but have given no definition of it.

Our general considerations on these points and some applications have been published in the last volume of Biometrika (XX-A) (3).

The principle which is used in testing hypotheses must, to be useful, follow our intuition, and intuitively we are inclined some times to accept a hypothesis explaining the event even if the probabitity of the event happening if the hypothesis were true is very small, provided there is no alternative hypothesis according to which the chance of the event is greater. On the other hand we are unwilling to accept an hypothesis when others exist which, if they were

---

(1) Since the time when the above results were presented to the International Mathematical Congress at Bologna, they have been considerably extended and are already published. See: J. NEYMAN: *Contribution to the Theory of Certain Test Criteria,* Bulletin de l'Institut International de Statistique, t. XXIV, 2e Livraison, pp. 44-87. With regard to the theorem under 1°) I must apologize that I overlooked it in the paper by R. v. MISES in the Mathematische Zeitschrift, 1919. Unfortunately nobody present during my reading the paper in Bologna noticed that the theorem was not new and its authorship has been wrongly attributed.

(2) E. BOREL: *Le Hasard,* Paris, 1920. — P. LÉVY: *Calcul des Probabilités,* Paris, 1925. Pp. 91 and ff.

(3) J. NEYMAN and E. S. PEARSON: *On the Use and Interpretation of Certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference.* Part I. Biometrika, Vol. XX-A, pp. 175-240.

true, would give rise to the event perhaps a thousand times more often. It has therefore seemed to us that it is impossible to test a hypothesis without taking into account alternative ones and we have sought for some test criterion based on this principle.

This has lead us to mahe use of the idea of likelihood, introduced by Dr. R. A. FISHER.

His considerations have been mainly concerned with estimation of the most probable population from a knowledge of the sample; we have tried to apply the idea to the question of testing hypotheses.

It will be observed that the errors arising in testing hypotheses are of two different kinds, 1°) we sometimes reject a hypothesis when it is true, and 2°) we sometimes accept a false hypothesis. Now it is easy to give rules which will reduce the probability of commiting an error of the first kind to any given level as low as desired, but the control of errors of the second kind is much more difficult. What it seems possible to do, is to avoid the acceptance of hypotheses with small likelihoods, where this term is used in a sense, which will now be defined.

We distinguish between simple and composite hypotheses. A hypothesis is simple if it be sufficient to determine completely the probability of the observed event. A hypothesis is composite if this be not the case, but additional assumptions be necessary to determine the probability of the event. As these assumptions are arbitrary, we see that what we call a composite hypothesis is really a set of single ones. This may be illustrated as follows. If the hypothesis consists for example in the assumption, that the mean and the standard deviation of a normally distributed population have given values, say a and σ, — this is a simple hypothesis. If however one of these constants is not specified —, the hypothesis is composite. The hypothesis that a population is normally distributed is also a composite one.

Let Ω be the set of all admissible simple hypotheses about the sampled population π and let Σ be a random sample of π. Further let H denote a simple hypothesis and $P(H)$ the probability of Σ which follows from H, while $P(\max)$ is the upper bound of numbers $P(H)$.

We then call likelihood of the hypothesis H the ratio

$$\lambda(H)=P(H)/P(\max).$$

If we consider a composite hypothesis $\overline{H}$, it will be associated with a subset ω of Ω. Let $P(\overline{H})$ denote the upper bond of probabilities $P(H)$ corresponding to simple hypotheses included in ω. The likelihood of the composite hypothesis $\overline{H}$ we then define as

$$\lambda(\overline{H})=P(\overline{H})/P(\max).$$

Where, as is generally the case, it is impossible to express in exact terms the

relative a priori probabilities of the different populations making up Ω and ω, we are inclined to think that these two ratios provide us with a kind of numerical measure which it is rational to use in forming a judgment.

We now consider the method to be employed in controlling the two sources of errors involved in testing hypotheses. Let H be a simple hypothesis concerning the sampled population π and let $x_1, x_2, \ldots, x_k$ be the numbers which specify the sample Σ. If the observations are not grouped, these numbers will represent the variate values in a sample of k individuals, if grouped, then the proportions of individuals falling into k groups. In either case we may consider the x's as coordinates of a point Σ in a k-dimensioned space Q. The hypothesis H connects with every such point, or small element of volume surrounding such point, a number $P(H, \Sigma)$ representing the chance of drawing the sample Σ in the case when the hypothesis H were true. The sum of the numbers $P(H, \Sigma)$ (or their integral) taken over the whole space Q by fixed H, is clearly equal to unity. Now let ε be an arbitrarily small positive number, and let W be any region whatever in the space Q but such, that the sum of $P(H, \Sigma)$ corresponding to points inside W is equal to $\varepsilon_1 < \varepsilon$.

If now we adopt the rule of rejecting the hypothesis H every time we have the sample Σ lying within the region W, we can be sure that we shall make the error of the first kind (that is to say reject a true hypothesis) in an average proportion of cases ε_1 out of the number of times in which we are dealing with a true hypothesis.

This will be true whatever be the region W. To control the second kind of errors we propose to reject the hypothesis H only when the likelihood $\lambda(H)$ is very small. That is to say we chose for the region W that bounded by a hypersurface on which $\lambda(H)$ is constant. Each of these hypersurfaces will be associated with a different value of ε_1 and the practical method of testing a hypothesis consists in finding out the value of ε_1 corresponding to the hypersurface of constant $\lambda(H)$ passing through the sample point Σ. The smaller be $\lambda(H)$ and therefore ε_1, the more inclined we are to reject the hypothesis. As $\lambda(H)$ may be considered as a character of the sample (but of the hypothesis H and of their set Ω also) and as ε_1 is the probability of drawing a sample with as or less probable value of $\lambda(H)$ than that observed, we refind here the principle of E. BOREL with the only modification, that the notion of a « remarquable » character is now defined. Such a « remarquable » character will be $\lambda(H)$ itself, but sometimes it is preferable to calculate some function of it.

In a paper refered to we have applied these principles to testing hypotheses concerning various distributions of the sampled population.

When we pass to testing composite hypotheses there are certain complications. The region W which we will now denote $\overline{W}$ will be bounded by the hypersurface on which $\lambda(\overline{H})$ is constant. If the simple hypothesis H included

in the set ω corresponding to the composite hypothesis $\overline{H}$ can be specified by ascribing definite values to certain parameters, say a_1, a_2,...., a_c, which may vary continuously, then the new region $\overline{W}$ will be limited by the envelope of the hypersurfaces of constant likelihood corresponding to the simple hypotheses included in ω. Fix a certain hypothesis of that set, and let $P(H, \Sigma)$ be the probability of drawing a given sample Σ, following from that hypothesis. If now we sum $P(H, \Sigma)$ over all sample points inside $\overline{W}$, we shall get $SP(H, \Sigma)$, the chance of rejecting a true hypothesis in cases when that true hypothesis is H. An important case arises when $SP(H, \Sigma)$ does not depend upon the particular hypothesis H, chosen from the set ω corresponding to $\overline{H}$. In such cases $SP(H, \Sigma)$ is the probability of rejecting a true hypothesis *whatever be true the hypothesis out of the set* ω. In other words, if the sampled population π conforms to one or other of the simple hypotheses constituting the composite one $\overline{H}$, the chance that it will be rejected by using the proposed test is equal to $SP(H, \Sigma)$. If this expression however depends upon H, we cannot calculate the probability of rejecting a true hypothesis, although taking its upper bound, if this can be effectively found, we shall calculate a limite which it cannot exceed. In the cases we have considered, either $SP(H, \Sigma)$ has been found independent of H, or we could not solve the question whether it is dependent or not.

It is worth noticing that in the case when the composite hypothesis $\overline{H}$ consists in the assumption that the normal population from which a sample hase been drawn has its mean equal to a given value, the standard deviation being unspecified, the method of testing which follows from our principles is identical with that of « STUDENT » (1).

In the case when the sampled population is grouped and a simple hypothesis consists in ascribing definite values to group proportions p_i $(i=1, 2,...., n)$ in the population, the surfaces of constant likelihood correspond approximately to the equation

$$\chi^2 = N \sum_{i=1}^{n} \frac{(p_i - q_i)^2}{p_i} = \text{constant}$$

where q's are the group proportions in the sample. We reach here from another point of view the well known (P, χ^2) test of Prof. KARL PEARSON.

If on the other hand we have a composite hypothesis which assumes that the group probabilities p's are given functions of c independent parameters a_1, a_2,...., a_c the surfaces of constant likelihood are approximately those of constant minimum χ^2, and it is possible to show that under certain conditions

$$\underset{N \to \infty}{SP(H, \Sigma)} \to \text{const.} \times \int_{\chi_1}^{+\infty} \chi^{k-c-2} e^{-\frac{1}{2}\chi^2} d\chi$$

(1) « STUDENT », Biometrika, Vol. VI, p. 1 et seq.

where k means the number of groups in sample, N the size of the sample and χ_1 the value found by minimising the above expression of χ with regard to the variable parameters a_1, a_2,...., a_c.

An equivalent result has been given by Dr. R. A. FISHER (1), but we have followed up a somewhat different method of proof by a more detailed examination of the nature of the limiting conditions and the limiting integral (2).

This general result has frequent applications in statistical practice.

---

(1) Jour. Roy. Stat. Soc., vol. 87.

(2) J. NEYMAN and E. S. PEARSON: *On the Use and Interpretation of certain Test Criteria for Purposes of Statistical Inference.* Part II. Biometrika, Vol. XX-A, pp. 263-294.

MARIA CASTELLANI (Roma - Italia)

SULLA RAPPRESENTAZIONE IN SERIE DELLE LEGGI DI FREQUENZA

Oggetto di studi importanti è stata la rappresentazione delle curve di frequenza mediante serie di particolari funzioni. Le ricerche fatte si limitano però alla rappresentazione di leggi di frequenze continue; il caso della rappresentazione per serie di una legge di frequenza qualsiasi non è generalmente considerato.

In questa comunicazione mi propongo di richiamare brevemente l'attenzione sulla possibilità che una legge di frequenza qualsiasi sia rappresentabile con l'approssimazione che si vuole, mediante speciali serie di funzioni.

Sia dunque x una variabile casuale qualunque, sia $df(x)$ la probabilità che essa assuma il valore x.

Si avrà:

$$\int_{-\infty}^{\infty} df(x) = 1 \tag{1}$$

e la probabilità che la X assuma un valore compreso tra α e β sarà:

$$\int_{\alpha}^{\beta} df(x). \tag{2}$$

Ciò premesso, si introduca una variabile casuale ausiliaria Y la cui densità della probabilità sia:

$$\frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2 y^2}; \tag{3}$$

si consideri la variabile casuale:

$$Z = X + Y, \tag{4}$$

la cui densità di probabilità sarà espressa da

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H}{\sqrt{\pi}} e^{-H^2(z-x)^2} df(x). \tag{5}$$

La densità della probabilità $g(z)$ risulta ovviamente una funzione continua e limitata della variabile z.

In queste condizioni è noto che in un intervallo finito qualunque la $g(z)$ può

essere rappresentata mediante serie uniformemente convergenti di particolari funzioni continue. Sia

$$g(z)=\sum_{n=0}^{n=\infty}\psi_n(z) \tag{6}$$

una di queste serie.

Potremo anche scrivere:

$$\int_\alpha^\beta g(z)dz=\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_\alpha^\beta \psi_n(z)dz. \tag{7}$$

Posto:

$$F(y)=\int_{-\infty}^{y} df(x) \tag{8}$$

si può dimostrare che la (7) è atta a rappresentare con l'approssimazione che si desidera la (2) a condizione che la $F(y)$ sia continua in $y=\alpha$ ed $y=\beta$.

In altri termini, assegnato η piccolo a piacere, può determinarsi in corrispondenza un valore di H tale che risulti

$$\left|\int_\alpha^\beta df(x)-\int_\alpha^\beta g(z)dz\right|<\eta. \tag{9}$$

Fondo la dimostrazione della proposizione precedente sulla seguente disuguaglianza dovuta al prof. CANTELLI (1) e valida per ogni y e ogni positivo η.

Posto:

$$G(y)=\int_{-\infty}^{y} g(z)dz$$

la disuguaglianza indicata è:

$$F(y-\varepsilon)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du<G(y)<F(y+\varepsilon)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du. \tag{10}$$

Sottraendo dai singoli membri della disuguaglianza (10) la $F(y)$ si deduce:

$$F(y-\varepsilon)-F(y)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du<G(y)-F(y)<F(y+\varepsilon)-F(y)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du \tag{11}$$

la quale è vera per qualunque y e qualunque ε.

In particolare posto $y=\alpha$ e $y=\beta$ si deducono le formule

$$F(\alpha-\varepsilon)-F(\alpha)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du<G(\alpha)-F(\alpha)<F(\alpha+\varepsilon)-F(\alpha)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du$$

$$F(\beta-\varepsilon)-F(\beta)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du<G(\beta)-F(\beta)<F(\beta+\varepsilon)-F(\beta)+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty}e^{-u^2}du.$$

---

(1) F. P. CANTELLI: *Una nuova dimostrazione del secondo teorema limite del calcolo delle probabilità.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo LII, anno 1928.

Fissato un positivo η piccolo a piacere, determino in primo luogo un ε tale che si abbia simultaneamente

$$(12)\qquad \begin{cases} F(a)-F(a-\varepsilon)<\frac{\eta}{4} \\ F(a+\varepsilon)-F(a)<\frac{\eta}{4} \end{cases}$$

$$(13)\qquad \begin{cases} F(\beta)-F(\beta-\varepsilon)<\frac{\eta}{4} \\ F(\beta+\varepsilon)-F(\beta)<\frac{\eta}{4}. \end{cases}$$

Fissato ε, determineremo H in modo che sia

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\varepsilon H}^{\infty} e^{-u^2}du<\frac{\eta}{4}$$

pertanto la (11) tenuto conto della (12) dà:

$$-\frac{\eta}{4}-\frac{\eta}{4}<G(a)-F(a)<\frac{\eta}{4}+\frac{\eta}{4}$$

ossia

$$|G(a)-F(a)|<\frac{\eta}{2}.$$

Analogamente la (11), tenuto conto delle (13), dà:

$$|G(\beta)-F(\beta)|<\frac{\eta}{2}.$$

Osservando che si ha:

$$\int_{a}^{\beta} df(x)=F(\beta)-F(a); \qquad \int_{a}^{\beta} g(z)dz=G(\beta)-G(a)$$

segue:

$$\left|\int_{a}^{\beta} df(x)-\int_{a}^{\beta} g(z)dz\right|<|G(\beta)-F(\beta)|+|G(a)-F(a)|$$

ossia

$$\left|\int_{a}^{\beta} df(x)-\int_{a}^{\beta} g(z)dz\right|<\eta$$

in definitiva per la (7)

$$\left|\int_{a}^{\beta} df(x)-\sum_{n=0}^{n=\infty}\int_{a}^{\beta}\psi_n(z)dz\right|<\eta$$

come volevamo dimostrare.

Per brevità ometto oggi ulteriori considerazioni, che mi riprometto trattare in un prossimo mio lavoro in cui dovrò intrattenermi anche sulla uniformità dell'ultima disuguaglianza per ogni coppia di valori (a, β).

F. P. CANTELLI (Roma - Italia)

SUI CONFINI DELLA PROBABILITÀ

1. - In questa Nota richiamo l'attenzione sul seguente problema posto e studiato da P. L. TCHEBYCHEF (1):

Noti i valori degli m *integrali*

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx,\ldots, \qquad \int_a^b x^{m-1}f(x)dx$$

in cui f(x) *si mantiene positiva tra* x=a *e* x=b, *determinare i limiti più convenienti, ossia il confine inferiore più grande e il confine superiore più piccolo, di*

$$\int_a^v f(x)dx, \qquad v \leqslant b.$$

Per la risoluzione del problema, il TCHEBYCHEF ha indicato un metodo, basato sulla teorica dei residui integrali, il quale non è stato applicato ai casi concreti anche per le difficoltà di indole pratica che implica il metodo stesso quando la teoria voglia piegarsi alle applicazioni.

Soltanto nel caso $m=3$, il TCHEBYCHEF diede le formule risolutive della questione con riferimento ad un problema di fisica (2).

Il problema posto dal TCHEBYCHEF è andato dimenticato. A questa dimenticanza ha forse pure contribuito la celebre Memoria dello stesso Autore: *Des valeurs moyennes* (3) nella quale è dimostrato in modo elementare il teorema generalizzato di J. BERNOULLI facendosi ricorso ad una nota formula di M. BIENAYMÉ (4), la quale oggi è a tutti nota sotto il nome di: *Teorema di Bienaymé-Tchebychef.*

---

(1) *Oeuvres de P. L. Tchebychef*, publiées par les soins de MM. A. MARKOFF et N. SONIN. Tome II (St. Petesbourg, 1907), pagine 183, 421, 443, 561, 681.

(2) *Oeuvres*, Tome II. Acta mathematica t. IX, XII.

(3) *Oeuvres*, Tome I, 1907.

(4) *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans al méthode des moindres carrés.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2ª Série, Tome XII, 1867.

Gli studiosi, fermandosi su questa formula, hanno proceduto a delle generalizzazioni utili ma che non presentano novità di ragionamenti che potessero dirsi ignoti allo stesso BIENAYMÉ, tralasciando di indagare sul problema come fu posto e studiato dal TCHEBYCHEF.

Quanto sopra ho detto è stato veramente da me rilevato nella Nota: *Intorno ad un teorema fondamentale della teoria del rischio* (1) e nell'altra: *Intorno ad un teorema di calcolo delle probabilità* (2).

In queste Note, proponendomi di far conoscere alcuni lavori di Calcolo delle probabilità dovuti alla Scuola russa, diedi, fra altro, delle generalizzazioni del teorema di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF e feci delle considerazioni sulla risoluzione del problema posto dal TCHEBYCHEF ed enunciato a principio.

Queste due Note, evidentemente, non sono state consultate da alcuni Autori i quali, dopo molti anni, sono ricaduti nelle soluzioni da me date sin dal 1910, senza che d'altra parte avessero esaminata la questione dal punto di vista della ricerca dei limiti *più convenienti.*

Pur volendo richiamare l'attenzione su quest'ultima ricerca, sarà utile che io riassuma, in quanto segue, i risultati ottenuti seguendo un ordine cronologico.

Avverto che tutte le formule che darò in seguito valgono per i casi più generali che si riferiscono a *variabili casuali qualsiasi, continue o discontinue.*

2. - P. L. TCHEBYCHEF, nella sua Nota ricordata *Des valeurs moyennes*, ricava il seguente teorema:

Se f(x) *è una funzione positiva; se*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \tag{1}$$

se a è un numero reale qualsiasi, λ un numero positivo, ed è

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-a)^2 dx = \mu_2, \tag{2}$$

allora si ha

$$1 - \frac{1}{\lambda^2} \leqslant \int_{a-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{a+\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx \leqslant 1. \tag{3}$$

Il ragionamento che conduce alla (3) è semplicissimo e notissimo: Dalla (2) si ricava successivamente

$$\int_{-\infty}^{a-\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)(x-a)^2 dx + \int_{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}^{\infty} f(x)(x-a)^2 dx \leqslant \mu_2$$

(1) Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, Milano, 1910, n. 24.

(2) Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XLIX (2° della 3ª serie), Napoli, 1911.

$$\lambda^2\mu_2\left(\int_{-\infty}^{a-\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx+\int_{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}^{\infty} f(x)dx\right)\leqslant\mu_2$$

$$\lambda^2\mu_2\left(1-\int_{a-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{a+\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx\right)\leqslant\mu_2$$

e quindi la (3); il confine superiore 1 è evidente per sè stesso.

Rilevai a suo tempo (1) che la (3) è dovuta a BIENAYMÉ (2) e che lo stesso TCHEBYCHEF avverte (3): « La démonstration simple et rigourense de la loi de Bernoulli que l'on trouve dans ma Note sous le titre « *Des valeurs moyennes* » n'est qu'un des résultats que l'on tire aisément de la méthode de M. BIENAYMÉ ».

Al teorema (3) è quindi appropriato il nome di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF.

3. - La questione era limitata alla conoscenza della (3) quando il prof. PAOLO MEDOLAGHI, in una sua Nota (4) del 1909, dava un'estensione del teorema di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF.

Il ragionamento che ha condotto il MEDOLAGHI alla estensione indicata, per quanto formalmente diverso, equivale precisamente a quello che serve per stabilire la (3). Supposto infatti noto, col MEDOLAGHI,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(x-a)^{2k}dx=\mu_{2k}$$

dove k rappresenta un *intero positivo*, si ha successivamente

$$\int_{-\infty}^{a-\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)(x-a)^{2k}dx+\int_{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}^{\infty} f(x)(a-x)^{2k}dx\leqslant\mu_{2k}$$

$$\lambda^{2k}\mu_2^k\left(\int_{-\infty}^{a-\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx+\int_{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}^{\infty} f(x)dx\right)\leqslant\mu_{2k}$$

$$\lambda^{2k}\mu_2^k\left(1-\int_{a-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{a+\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx\right)\leqslant\mu_{2k}$$

---

(1) Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, Milano, 1910, n. 24.

(2) *Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés.* Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2ª Série, Tome XII, 1867.

(3) *Oeuvres*, Tome II. Acta mathematica t. IX, XII, pag. 183.

(4) *La teoria del rischio e le sue applicazioni.* Rapporti, memorie e processi verbali del Sesto Congresso Internazionale degli Attuari. Vienna, 7-13 giugno 1909, vol I.

e quindi

$$1-\frac{\mu_{2k}}{\lambda^{2k}\mu_2^k}\leqslant\int_{a-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}f(x)dx\leqslant 1. \tag{4}$$

È questa la estensione fatta dal MEDOLAGHI: per $k=1$ si ricade nella (3).

Questa prima estensione del vecchio teorema di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF ha importanza pratica non soltanto perchè numericamente risponde meglio della (3), ma anche perchè, in certe questioni di probabilità, che qui non è il caso di ricordare, la considerazione del confine inferiore della probabilità stabilito da BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF porta a serie divergenti mentre il confine inferiore determinato dal MEDOLAGHI conduce a serie convergenti, rispondenti allo scopo [1].

4. - Nella mia Nota [2] del 1910 ho fatto osservare che il teorema enunciato dal MEDOLAGHI era suscettibile di una ulteriore estensione. Indicando infatti n *un positivo qualsiasi*, e supposto noto

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,|x-a|^n dx=\mu_n,$$

l'identico ragionamento che serve a stabilire la (3) e la (4) conduce a scrivere

$$1-\frac{\mu_n}{\lambda^n\mu_2^{\frac{n}{2}}}\leqslant\int_{a-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{a+\lambda\sqrt{\mu_2}}f(x)dx\leqslant 1 \tag{5}$$

che per $n=2k$ coincide con la (4).

La (5) può ovviamente porsi sotto forme diverse.

Quando si ponga, ad es.,

$$\lambda\sqrt{\mu_2}=t\sqrt[n]{\mu_n},\qquad t>0,$$

essa può scriversi

$$1-\frac{1}{t^n}\leqslant\int_{a-t\sqrt[n]{\mu_n}}^{a+t\sqrt[n]{\mu_n}}f(x)dx\leqslant 1. \tag{6}$$

La (6) si trova pubblicata in un altro mio lavoro [3] del 1916.

---

[1] CANTELLI. *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V, vol. XXVI, 1° semestre 1917, pp. 39-45.

CANTELLI. *Su due applicazioni di un teorema di Boole alla statistica matematica.* Stessi Rendiconti, pp. 295-302.

CANTELLI. *Sulla oscillazione delle frequenze intorno alla probabilità.* « Metron » Rivista internazionale di Statistica, Vol. III, n. 2. Ferrara, 1923.

[2] Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, Milano, 1910, n. 24.

[3] *Sulla legge dei grandi numeri.* Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Vol. XI, Serie V, fasc. 7, Roma, 1916.

Ancora, la (5), quando si ponga,

$$\lambda \sqrt[r]{\mu_2} = t \sqrt[r]{\mu_r}$$

si trasforma nell'altra:

$$(7) \qquad 1 - \frac{\mu_n}{t^n \mu_r^{\frac{n}{r}}} \leqslant \int_{a - t\sqrt[r]{\mu_r}}^{a + t\sqrt[r]{\mu_r}} f(x)\,dx \leqslant 1.$$

È ovvio pertanto che le (5), (6) e (7) sono equivalenti.

Il ragionamento che ha condotto alle (3), (4) e (5) è, come si è visto, identico. Non può quindi considerarsi come concettualmente nuova ogni estensione del genere. Così ad es. la seguente altra che si trova pure nella mia nota (1) del 1910.

Sia $G(x-a)$ una funzione positiva di $x-a$; sia ε un positivo assegnato e $G(\varepsilon)$ non sia nulla; di più risulti $G(x-a)$ non decrescente a destra di $x = a+\varepsilon$.

Applicando il preciso ragionamento che ha condotto alle (3), (4) e (5), si ricava successivamente:

$$\int_{a+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx$$

$$G(\varepsilon) \int_{a+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx$$

$$\int_{a+\varepsilon}^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx}{G(\varepsilon)}$$

e quindi

$$(8) \qquad \int_{-\infty}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx \geqslant 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx}{G(\varepsilon)}.$$

Si noti che nel caso che la $G(x-a)$ sia funzione pari di $x-a$, si ricava pure immediatamente

$$(9) \qquad \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} f(x)\,dx \geqslant 1 - \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,G(x-a)\,dx}{G(\varepsilon)}.$$

È facile vedere come dalla (9) si deducano, in particolare, tutte le formule precedenti.

---

(1) Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, Milano, 1910, n. 24, pp. 9-10.

5. - Da quanto sopra ho detto si rileva che non hanno costituito novità le formule date da ALF. GULDBERG (1) e da CONSTANT LURQUIN (2) che si identificano colla (5). E nemmeno ha costituito novità una formula pubblicata recentemente da EUGEN SLUTSKY (3) sotto la forma (9), che io ho indicata da molto tempo.

Quanto ho detto ora è ben lungi dal voler significare un reclamo di priorità. Le formule tutte sopra indicate si deducono da un ragionamento dovuto a BIENAYMÉ, come ho sopra spiegato, e pertanto non implicano alcuna novità concettuale. Per alcuni teoremi, poi, da me studiati è stato sufficiente l'uso della formula del MEDOLAGHI o di qualche altra notoria perchè ben messa in vista (4).

Quel che m'interessa è di far rilevare che diversi Autori, fermandosi alle considerazioni che conducono al teorema di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF (3), sono stati sviati, a mio parere, dall'indagare sulla risoluzione *pratica* del problema posto dal TCHEBYCHEF ed enunciato in questa Nota. In conclusione i limiti delle probabilità come sopra sono stati indicati *non sono i più convenienti* in dipendenza degli elementi che si suppongono noti.

Mi propongo di illustrare la questione nel modo più semplice, nella speranza che le considerazioni del grande matematico russo possano essere meglio studiate ed approfondite per la loro pratica applicazione.

In quanto segue mi riferirò ancora a lavori miei del 1910 e del 1911.

6. - Ho detto che P. L. TCHEBYCHEF diede la risoluzione pratica del problema, posto a principio di questa Nota, nel caso di $m=3$, con riferimento ad una questione di fisica.

Per le applicazioni al Calcolo delle probabilità potei pervenire (5) al seguente teorema, più generale di quello cui strettamente corrispondono le formule risolutive date dall'Autore russo.

Se X *è una variabile casuale, suscettibile di assumere valori compresi tra* m *ed* n, *il cui valore medio è* a *e la cui deviazione media è* $\sqrt{\mu_2}$, *cioè*

$$\int_m^n x f(x)dx = a, \qquad \int_m^n (x-a)^2 f(x)dx = \mu_2, \tag{10}$$

allora per la probabilità

$$P = \int_m^v f(x)dx, \qquad v \leq n,$$

(1) Cfr. Comptes Rendus, Anno 1922, t. 175, pag. 418 e pag. 1382; « Metron » Rivista Internazionale di Statistica, Vol. III, n. 1., Ferrara, 1923.

(2) Cfr. Comptes Rendus, Anno 1922, t. 175, pag. 681; Anno 1924, t. 178, pag. 306.

(3) *Ueber stochastische Asymptoten und Grenzwerte.* « Metron », Rivista Internazionale di Statistica, Vol. V, n. 3, Padova, 1925, pag. 41.

(4) Cfr. ad es.: *Sulla legge dei grandi numeri.* Memorie della Reale Accademia dei Lincei, Vol. XI, Serie V, fasc. 7, Roma, 1916.

(5) Giornale di matematiche di Battaglini, Vol. XLIX (2° della 3ª serie), Napoli, 1911.

che si verifichino le ineguaglianze,

$$m<X<v, \tag{11}$$

si hanno i seguenti limiti che sono i più convenienti:

$$0\leqq P\leqq\frac{\mu_2}{\mu_2+(v-a)^2} \tag{12}$$

se

$$v<a-\frac{\mu_2}{n-a}; \tag{13}$$

$$\frac{(v-a)^2}{\mu_2+(v-a)^2}\leqq P\leqq 1 \tag{14}$$

se

$$v>a+\frac{\mu_2}{a-m}; \tag{15}$$

$$\frac{(n-a)(v-a)+\mu_2}{(n-m)(v-m)}\leqq P\leqq\frac{(n-a)(a+n-m-v)-\mu_2}{(n-m)(n-v)} \tag{16}$$

se

$$a-\frac{\mu_2}{n-a}<v<a+\frac{\mu_2}{a-m}. \tag{17}$$

Delle relazioni precedenti diedi pure una dimostrazione elementare.

7. - Per n tendente a $+\infty$, per m tendente a $-\infty$, e per $v=a\pm\lambda\sqrt{\mu_2}$ con $\lambda>0$, si ricava agevolmente dal precedente teorema:

Se X *è una variabile casuale il cui valore medio è* a *e la cui deviazione media è* $\sqrt{\mu_2}$, *si hanno, per la probabilità* P *che si verifichino le ineguaglianze*

$$-\infty<X<a+\lambda\sqrt{\mu_2}, \tag{18}$$

le limitazioni:

$$1-\frac{1}{\lambda^2+1}\leqq P\leqq 1, \tag{19}$$

e per la probabilità P_1 *che sia*:

$$-\infty<X<a-\lambda\sqrt{\mu_2} \tag{20}$$

le limitazioni

$$0\leqq P_1\leqq\frac{1}{\lambda^2+1}. \tag{21}$$

Il confine inferiore della probabilità P, cioè $1-\frac{1}{\lambda^2+1}$ è evidentemente più elevato del confine $1-\frac{1}{\lambda^2}$ che si può ricavare dal ragionamento di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF.

Nella teoria del rischio, che riguarda la matematica attuariale, dove interessa specialmente di conoscere un confine inferiore della probabilità che la perdita di un Istituto assicuratore, dovuta agli scarti accidentali della mortalità, non superi il multiplo secondo λ della deviazione media delle perdite, $\sqrt{\mu_2}$, il confine inferiore $1-\frac{1}{\lambda^2+1}$, che non mi risulta sia stato ancora da altri indicato, è da preferirsi all'altro $1-\frac{1}{\lambda^2}$.

8. - Dal teorema del n. 6, per mezzo di semplici trasformazioni, si ricavano altri risultati che possono essere utilmente confrontati con i corrispondenti ottenuti applicando il criterio di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF.

Soltanto per semplicità prendo come punto di partenza un caso particolare del teorema del n. 6. Questo, per $m=0$, $n\to\infty$, si riduce al seguente:

Se X *è una variabile casuale positiva, il cui valore medio è* a *e la cui deviazione media è* $\sqrt{\mu_2}$, *allora per la probabilità* P *che sia*

$$0<X<v \tag{22}$$

si hanno i seguenti limiti che in relazione agli elementi assegnati sono i più convenienti:

$$0\leqslant P\leqslant\frac{\mu_2}{\mu_2+(v-a)^2} \tag{23}$$

se

$$v<a; \tag{24}$$

$$\frac{(v-a)^2}{\mu_2+(v-a)^2}\leqslant P\leqslant 1 \tag{25}$$

se

$$v>a+\frac{\mu_2}{a}; \tag{26}$$

$$\frac{v-a}{v}\leqslant P\leqslant 1 \tag{27}$$

se

$$a<v<a+\frac{\mu_2}{a}. \tag{28}$$

9. - Applichiamo il teorema precedente alla variabile casuale positiva

$$|X-\beta|^n \tag{29}$$

in cui: β è un numero reale *qualunque*; n un positivo *qualsiasi.*

Essendo M il simbolo di valore medio, si può scrivere rispettivamente per il valore medio e per il quadrato della deviazione media della variabile (29),

$$M|X-\beta|^n=\mu_n, \qquad M[|X-\beta|^n-\mu_n]^2=\mu_{2n}-\mu_n^2. \tag{30}$$

Posto ancora

$$v=\lambda^n\mu_n, \tag{31}$$

si deduce facilmente dal teorema del paragrafo precedente:

Se di una variabile casuale X *si conoscono i valori*

$$M|X-\beta|^n=\mu_n, \qquad M|X-\beta|^{2n}=\mu_{2n}, \tag{32}$$

essendo n *un positivo qualsiasi, e* β *un numero reale qualunque, allora per la probabilità* P *che si verifichi l'ineguaglianza*

$$|X-\beta|<\lambda\sqrt[n]{\mu_n} \tag{33}$$

si hanno i seguenti limiti che, in relazione agli elementi assegnati, sono i più convenienti:

$$0 \leqslant P \leqslant \frac{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1}{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} + \lambda^{2n} - 2\lambda^n} \tag{34}$$

se

$$\lambda < 1; \tag{35}$$

$$1 - \frac{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1}{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} + \lambda^{2n} - 2\lambda^n} \leqslant P \leqslant 1 \tag{36}$$

se

$$\lambda > \sqrt[n]{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2}}; \tag{37}$$

$$1 - \frac{1}{\lambda^n} \leqslant P \leqslant 1 \tag{38}$$

se

$$1 < \lambda < \sqrt[n]{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2}}. \tag{39}$$

È noto che il rapporto μ_{2n}/μ_n^2 non è mai inferiore all'unità.

È utile paragonare la (7) del n. 4, dedotta dal ragionamento di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF, e le (36), (38) dedotte in questo paragrafo.

10. - Nella (7) n, t ed r rappresentano positivi qualsiasi, α indica un numero reale qualunque. Cambiando n in $2n$, r in n, t in λ, α in β, si perviene al seguente risultato:

Per la probabilità P che sia

$$|X - \beta| < \lambda \sqrt[n]{\mu_n} \tag{40}$$

valgono generalmente le limitazioni

$$1 - \frac{\mu_{2n}}{\lambda^{2n}\mu_n^2} \leqslant P \leqslant 1. \tag{41}$$

Per le (36), (38) risultano invece, come più convenienti, le limitazioni:

$$1 - \frac{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} - 1}{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2} + \lambda^{2n} - 2\lambda^n} \leqslant P \leqslant 1 \tag{42}$$

quando sia

$$\lambda > \sqrt[n]{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2}}; \tag{43}$$

le limitazioni

$$1 - \frac{1}{\lambda^n} \leqslant P \leqslant 1 \tag{44}$$

quando sia

$$1<\lambda<\sqrt[n]{\frac{\mu_{2n}}{\mu_n^2}}. \tag{45}$$

Per un confronto che farò in seguito conviene mettere in rilievo i risultati ora enunciati nel caso particolare $n=2$, cioè nel caso in cui si suppongano noti i momenti μ_2 e μ_4. Si deduce da (41) che per la probabilità P che sia

$$|X-\beta|<\lambda\sqrt{\mu_2} \tag{46}$$

valgono generalmente le limitazioni

$$1-\frac{\mu_4}{\lambda^4\mu_2^2}\leqslant P\leqslant 1. \tag{47}$$

Dalle (42), (44) risultano invece come più convenienti le limitazioni

$$1-\frac{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-1}{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}+\lambda^4-2\lambda^2}\leqslant P\leqslant 1 \tag{48}$$

quando sia

$$\lambda>\sqrt{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}}; \tag{49}$$

le limitazioni

$$1-\frac{1}{\lambda^2}\leqslant P\leqslant 1 \tag{50}$$

quando sia

$$1<\lambda<\sqrt{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}}. \tag{51}$$

11. - Per la ricerca di confini inferiori della probabilità studiata, che siano più elevati di quelli cui conduce il semplice ragionamento di BIENAYMÉ-TCHEBYCHEF, ho indicato [1] a suo tempo un mio procedimento che conduce a risultati soddisfacenti.

Esso sostanzialmente è basato sopra una generalizzazione delle (8), (9).

In relazione ad un insieme di valori di un parametro r, rappresenti

$$G(X-\beta, r) \tag{52}$$

una famiglia di variabili casuali positive, tali che le funzioni

$$G(x-\beta, r) \tag{53}$$

soddisfino alle condizioni di non essere nulle nel punto $x-\beta=\varepsilon$, $\varepsilon>0$, e di non essere decrescenti a destra del punto $x-\beta=\varepsilon$.

---

[1] Bollettino dell'Associazione degli Attuari Italiani, Milano, 1910, n. 24.

Per ognuno dei valori di r considerati può scriversi dunque, in base alla (8),

$$\int_{-\infty}^{\beta+\varepsilon} f(x)dx \geqslant 1 - \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x-\beta, r)dx}{G(\varepsilon, r)}. \tag{54}$$

Se r_1 è un valore del parametro r per cui la frazione che figura nel secondo membro di (54) assume il valore più piccolo, resterà determinata una variabile casuale

$$G(X-\beta, r_1), \tag{55}$$

appartenente alla famiglia (52), per cui il confine inferiore del primo membro di (54) risulta il più elevato.

Se per il valore r_1 di r, la (53) rappresenta inoltre una funzione pari di $x-\beta$, allora, per quanto si è detto a proposito della (9), il secondo membro di (54), per $r=r_1$, sarà pure il confine inferiore più conveniente, tra quelli studiati, di

$$\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} f(x)dx. \tag{56}$$

Mi limito ad accennare ad una elementare applicazione.

12. - Considero la famiglia di variabili casuali positive

$$G(X-\beta, r)=[(X-\beta)^2+r]^2. \tag{57}$$

In conseguenza sarà da considerare la funzione

$$G(x-\beta, r)=[(x-\beta)^2+r]^2 \tag{58}$$

e, posto

$$\varepsilon=\lambda\sqrt{\mu_2}, \tag{59}$$

si avrà pure da considerare l'espressione

$$G(\varepsilon, r)=[\lambda^2\mu_2+r]^2. \tag{60}$$

Si può rilevare:

a) che la (58) è una funzione pari di $x-\beta$;

b) che affinchè la (60) non sia nulla bisogna che sia

$$r \neq -\lambda^2\mu_2 \tag{61}$$

c) che la funzione (58) è crescente a destra di

$$x-\beta=\varepsilon=\lambda\sqrt{\mu_2} \tag{62}$$

quando sia

$$r > -\lambda^2\mu_2 \tag{63}$$

d) che la frazione che figura nel secondo membro di (54), che nel caso esaminato è

$$\frac{M[(X-\beta)^2+r]^2}{[\lambda^2\mu_2+r]^2}=\frac{\mu_4+2r\mu_2+r^2}{[\lambda^2\mu_2+r]^2}, \tag{64}$$

diventa minima e minore dell'unità nel punto

$$r_1=\frac{\mu_4-\lambda^2\mu_2}{\lambda^2\mu_2-\mu_2}. \tag{65}$$

Affinchè dunque possa scriversi

$$\int_{\beta-\lambda\sqrt{\mu_2}}^{\beta+\lambda\sqrt{\mu_2}} f(x)dx>1-\frac{\mu_4+2r_1\mu_2+r_1^2}{[\lambda^2\mu_2+r_1]^2} \tag{66}$$

e considerare il secondo membro di questa ineguaglianza come il più conveniente, *tra quelli che la presente ricerca offre*, bisognerà, in base alle (61), (63), che sia

$$r_1>-\lambda^2\mu_2. \tag{67}$$

Sostituendo la (65) in (66), e studiando la condizione (67), si perviene facilmente al seguente risultato:

Essendo β un numero reale qualsiasi, e supposti noti i valori

$$M(X-\beta)^2=\mu_2, \qquad M(X-\beta)^4=\mu_4, \tag{68}$$

allora per la probabilità P che sia

$$|X-\beta|<\lambda\sqrt{\mu_2} \tag{69}$$

vale la limitazione

$$P\geqslant 1-\frac{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-1}{\frac{\mu_4}{\mu_2^2}+\lambda^4-2\lambda^2} \tag{70}$$

se

$$\lambda>1. \tag{71}$$

Questo risultato va paragonato colle (48), (49), (50), (51).

Si osservi che quando nella (64) si facesse $r=0$, sarebbero pur rispettate le condizioni (61) e (63), poichè λ è supposto positivo; è applicabile a questo caso particolare la formula del n. 11, cioè

$$\int_{\beta-\varepsilon}^{\beta+\varepsilon} f(x)dx\geqslant 1-\frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x-\beta,0)dx}{G(\varepsilon,0)}$$

e risulta, per la probabilità P che si verifichi la (69), la limitazione

$$P\geqslant 1-\frac{\mu_4}{\lambda^4\mu_2^2}$$

ma questa non è la più conveniente tra quelle che possono trarsi dalla famiglia di variabili casuali considerate in questo paragrafo: la più conveniente è la (70).

Tralascio dall'indicare altre utili applicazioni e una evidente generalizzazione del procedimento esposto.

13. - Le sommarie considerazioni che precedono hanno lo scopo, come ho detto, di richiamare l'attenzione sulla pratica determinazione dei confini più *convenienti* delle probabilità subordinatamente a speciali assegnate condizioni.

B. HOSTINSKÝ (Brno - Cecoslovacchia)

SUR LES PROBABILITÉS DES EFFETS QUI DÉPENDENT D'UNE SUITE DE TRANSFORMATIONS SUCCESSIVES PRISES AU HASARD

HENRI POINCARÉ a posé et résolu le problème suivant: Un joueur bat un jeu de cartes. A chaque battement, il intervertit l'ordre des cartes et il peut les intervertir de plusieurs manières. Les diverses manières d'intervertir les cartes dans un battement peuvent avoir des probabilités différentes. Après un nombre infini de battages succesifs, tous les ordres possibles de cartes auront la même probabilité. La méthode ingénieuse et simple employée par M. HADAMARD dans l'étude de ce problème (Comptes Rendus, t. 185, p. 8, 1927) suggère des problèmes nouveaux où figurent les variables continues (voir mon travail: *Sur les transformations itérées*, etc. Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, n. 93, 1928).

Au lieu de considérer les permutations des cartes, nous allons envisager un groupe continu de transformations. Soit $A(x_1,\ldots,x_r)$ un point dans un domaine Σ à r dimensions et T une transformation qui fait correspondre à A un autre point $B(y_1,\ldots,y_r)$; elle sera exprimée par les formules

$$y_i=\varphi_i(x_1,\ldots,x_r;\ u_1,\ldots,u_m) \qquad (i=1,\ldots,r). \tag{1}$$

Le nombre m de paramètres u_i dont dépend T est au moins égal à r. Supposons que les transformations T forment un groupe continu et transitif G; deux points quelconques A et B étant donnés dans Σ, il y a au moins une transformation du groupe G qui change A en B. Le choix de transformations T appliquées successivement, sera dû au hasard. Désignons par

$$F(u_1,\ldots,u_m)du_1,\ldots,du_m \tag{2}$$

la probabilité élémentaire pour que les paramètres $u_1^0,\ldots,u_m^0$ d'une transformation T prise au hasard vérifient les conditions $u_i<u_i^0<u_i+du_i$.

Désignons par $f(A,B)d\tau_B$ la probabilité pour que le point A soit transformé par T en un autre point qui se trouve à l'intérieur de l'élément infinitésimal $d\tau_B$ de Σ au voisinage de B. Et soit enfin $P^{(n)}(A,B)$ la probabilité pourque, le résultat de n transformations T successives fasse correspondre au point A un point situé à l'intérieur de $d\tau_B$. Nous nous occuperons de deux problèmes

suivants: 1°) Calculer la fonction f, si F est donnée; 2°) Chercher la limite de $P^{(n)}$ quand n augmente indéfiniment.

Commençons par introduire l'espace paramètrique E, c'est-à-dire l'espace dont les points $(u_1,\ldots,u_m)$ représentent les transformations T. Deux points A et B étant donnés dans Σ, il y a un ensemble e (partie de E) de transformations T qui changent A en B. Pour obtenir f changeons d'abord les variables dans l'expression (2) en introduisant les coordonnées $y_1,\ldots,y_r$ du point B à la place de $u_1,\ldots,u_r$; nous supposons qu'il est possible de résoudre les r équations (1) par rapport aux quantités $u_1,\ldots,u_r$ de sorte qu'elles seront exprimées en fonction de $x_1,\ldots,x_r$; $y_1,\ldots,y_r$; $u_{r+1},\ldots,u_m$. Après ce changement la fonction f multipliée par $d\tau_B=h(B)dy_1,\ldots,dy_r$ ne sera autre chose que l'intégrale, de l'expression (2) transformée, par rapport aux variables $u_{r+1},\ldots,u_m$, e étant le domaine d'intégration. On trouve

$$f(A,B)=\iint_e\ldots\int F\cdot\frac{D(u_1,\ldots,u_r)}{D(y_1,\ldots,y_r)}\frac{du_{r+1},\ldots,du_m}{h(B)}.$$

Le théorème sur les probabilités totales donne

$$\iint_\Sigma\ldots\int f(A,B)d\tau_B=1.$$

Dans mon travail déjà cité j'ai démontré que $\lim P^{(n)}=\text{const.}$ pour n infini, si

$$\iint_\Sigma\ldots\int f(A,B)d\tau_A=1.$$

Voici un cas remarquable où cette dernière condition est vérifiée: Une sphère de rayon R à centre fixe O subit des rotations successives autour des axes passant par O; les directions des axes ainsi que les angles de rotation dépendent du hasard. La fonction F dépend de trois variables ($m=3$). L'espace Σ est formé par la surface de la sphère ($r=2$). Si le nombre n de rotations successives est petit, différentes positions de la sphère se présentent avec des probabilités $P^{(n)}$ différentes suivant le choix de la fonction F. Mais si n augmente indéfiniment, l'influence de F sur $P^{(n)}$ disparaît. Après un nombre infini de rotations, toute position de la sphère peut être atteinte avec la même densité de probabilité constante

$$\lim_{n=\infty}P^{(n)}=(4\pi R^2)^{-1}$$

qui ne dépend ni de F ni de la position initiale de la sphère.

G. PÓLYA (Zürich - Svizzera)

UEBER EINE EIGENSCHAFT DES GAUSSSCHEN FEHLERGESETZES

Es seien $l_1, l_2, \ldots, l_n$ die durch n unabhängige gleichartige Messungen gelieferten Werte einer physikalischen Grösse, deren « wahrer Wert » l ist. Die Messungsfehler sind also $l-l_1, l-l_2, \ldots, l-l_n$ und die Wahrscheinlichkeit für ihr Zusammentreffen ist $\varphi(l-l_1)\varphi(l-l_2)\ldots\varphi(l-l_n)$ proportional, falls die Wahrscheinlichkeitsdichte der Fehlerverteilung $\varphi(x)$ ist. Nun ist uns l unbekannt, und wir sollen über l, in Kenntnis der Messungsresultate $l_1, l_2, \ldots, l_n$ und des Fehlergesetzes $\varphi(x)$, eine Konjektur machen. Es ist natürlich von der Wahrscheinlichkeitsverteilung auszugehen, deren Dichte

$$\varphi(x-l_1)\varphi(x-l_2)\ldots\varphi(x-l_n) \tag{1}$$

proportional ist. Es sind die folgenden beiden Wege die nächstliegenden:

a) Man nimmt den « wahrscheinlichsten Wert », d. h. denjenigen Wert $x=l'$, für welchen (1) ihren grössten Wert erreicht (GAUSS);

b) Man nimmt den « wahrscheinlichen Wert », d. h. die Schwerpunktsabscisse l'' der Verteilung (1), eindeutig bestimmt durch die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-l'')\varphi(x-l_1)\varphi(x-l_2)\ldots\varphi(x-l_n)dx=0.$$

POINCARÉ, indem er Anregungen von J. BERTRAND nachging, bemerkte gelegentlich (*Calcul des probabilités*, 2e éd., S. 237-240, vgl. auch S. 176 ff.), dass bei dem Gaussschen Fehlergesetz stets $l'=l''$ ausfällt. Ich frage nun: *Welches ist das allgemeinste Fehlergesetz, das für alle möglichen Kombinationen beliebig vieler Messresultate* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *stets* $l'=l''$ *ergibt?*

Es wird also von $\varphi(x)$ insbesondere verlangt:

I. Das Produkt (1) soll seinen grössten Wert bei beliebig gegebenen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ nur für einen einzigen Wert von x erreichen.

II. Die Gleichung

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(x-l)\{\varphi(x-l_1)\varphi(x-l_2)\ldots\varphi(x-l_n)\}^p dx=0$$

soll bei beliebig gegebenen $l_1, l_2, \ldots, l_n$ für $p=1, 2, 3, \ldots$ stets demselben Wert l liefern.

Wir kommen zu II, wenn wir bemerken, dass bei den np Messresultaten

$$l_1,\ l_1,\ldots,\ l_1;\quad l_2,\ l_2,\ldots,\ l_2;\ldots;\quad l_n,\ l_n,\ldots,\ l_n$$

(jede Zahl tritt p Mal auf) die Methode a) offenbar für $p=1, 2, 3,\ldots$ stets dasselbe Resultat liefert: Das soll also auch die Methode b) tun.

Ich mache ferner einige Annahmen, die sich vielleicht bei genauerer Untersuchung zum Teil als überflüssig erweisen werden.

I'. Durch die Stelle des Maximums von $\varphi(x)$ (vgl. I) wird die Abscissenachse in zwei Teile geteilt; $\varphi(x)$ sei in beiden Teilen monoton.

III. Es sei $\varphi(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $\varphi(x)>0$, und es existiere das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,\varphi(x)dx.$$

Eine Funktion $\varphi(x)$, die diesen Postulaten I, I', II, III genügt, ist notwendigerweise entweder von der Form

$$Ae^{-\frac{1}{2}B\left(e^{Cx+D}+e^{-Cx-D}\right)}=Ae^{-B\cosh(Cx+D)} \tag{2}$$

oder von der Form

$$Ae^{-(Cx+D)^2}. \tag{3}$$

Dass bei diesen Funktionen die Methoden a) und b) tatsächlich dasselbe Ergebnis liefern, ist sofort zu sehn. (3) ist ein Grenzfall von (2); zwischen den 4 Parametern in (2) besteht eine Relation, weil die Gesamtwahrscheinlichkeit $=1$ ist, und ein Parameter ist unwesentlich (Verschiebung). Die sachgemäss modifizierten Postulate zeichnen unter allen möglichen « zyklischen » Fehlergesetzen die VON MISESsche eindeutig aus.

F. SIBIRANI (Trieste - Italia)

RICERCA DELLA MASSIMA PROBABILITÀ NEL PROBLEMA DELLE PROVE RIPETUTE NEL CASO DI m EVENTI INDIPENDENTI DI PROBABILITÀ COSTANTE

1. - In ciascuna di n prove successive sono possibili gli eventi $E_1, E_2, \ldots, E_m$ di probabilità costanti $p_1, p_2, \ldots, p_m$ tali che $p_1+p_2+\ldots+p_m=1$. La probabilità che nelle n prove gli eventi indicati si siano verificati $r_1, r_2, \ldots, r_m$ volte rispettivamente è

$$\frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!}\, p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}. \tag{1}$$

Si vuole determinare la m^{pla} o le m^{ple} di interi $r_1, r_2, \ldots, r_m$ che rendono massima codesta probabilità.

2. - Occorrerà, in seguito, considerare sistemi di equazioni lineari del tipo seguente:

$$a_i(x_1+\ldots+x_{i-1})+(a_i+a_{s+1})x_i+a_i(x_{i+1}+\ldots+x_s)=c_i \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Le s soluzioni sono date da

$$x_i=\frac{c_i}{a_{s+1}}-\frac{a_i\sum_1^s c_h}{a_{s+1}\sum_1^{s+1} a_h}, \tag{2}$$

e la loro somma da

$$\sum_1^s x_i=\left(\sum_1^s c_h\right):\left(\sum_1^{s+1} a_h\right). \tag{3}$$

3. - Supponiamo ordinati gli eventi in modo che $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_m$. Poichè

$$r_m=n-(r_1+\ldots+r_{m-1}), \tag{4}$$

la probabilità (1) può riguardarsi funzione di $r_1, \ldots, r_{m-1}$; la rappresenteremo con $P_n(r_1, \ldots, r_{m-1})$.

In uno spazio Σ_{m-1} ad $m-1$ dimensioni fissiamo un sistema di assi cartesiani $x_1, \ldots, x_{m-1}$. Detto intero un punto se intere sono le sue coordinate, la P_n è definita nei punti interi di quella porzione Φ_{m-1} dello spazio Σ_{m-1} contenente

i punti le cui coordinate sono nulle o positive e la cui somma è minore od uguale ad n.

Per brevità di linguaggio, diciamo isoclini gli iperpiani $x_1 + \ldots + x_{m-1} = c$ e c la norma dell'iperpiano. I punti interi in cui P_n è definita li possiamo pensare distribuiti sugli $n+1$ iperpiani isoclini di norma 0, 1,...., n. Se si determina su quale iperpiano isoclino sta un punto in cui P_n diviene massima, conoscendosi la somma $r_1 + \ldots + r_{m-1}$, mediante la (4) si determina r_m. Ora proveremo che al più sono due gli iperpiani isoclini contenenti punti ove P_n diviene massima.

Sulla retta

$$x_1 = r_1, \ldots, \quad x_{i-1} = r_{i-1}, \quad x_{i+1} = r_{i+1}, \ldots, \quad x_{m-1} = r_{m-1}$$

consideriamo tre punti interi consecutivi in cui la coordinata i-esima prende i valori $r_i - 1$, r_i, $r_i + 1$. Sarà

$$P_n(r_1, \ldots, r_i - 1, \ldots, r_{m-1}) \leqslant P_n(r_1, \ldots, r_i, \ldots, r_{m-1}) \geqslant P_n(r_1, \ldots, r_i + 1, \ldots, r_{m-1})$$

se

$$\frac{p_i[n - (r_1 + \ldots + r_{m-1})] - p_m}{p_i + p_m} \leqslant r_i \leqslant \frac{p_i[n + 1 - (r_1 + \ldots + r_{m-1})]}{p_i + p_m}. \tag{5}$$

La $(m-1)^{\text{pla}}$ o le $(m-1)^{\text{ple}}$ di interi $r_1, \ldots, r_{m-1}$ che rendono massima la P_n debbono soddisfare alle $m-1$ doppie diseguaglianze che si ottengono da (5) ponendo per i i numeri 1, 2,...., $m-1$. I punti interi che si cercano appartengono al parallelotopo Ω_{m-1} limitato dai $2(m-1)$ iperpiani

$$(\alpha_{m-1,i}) \qquad p_i(x_1 + \ldots + x_{i-1}) + (p_i + p_m)x_i + p_i(x_{i+1} + \ldots + x_{m-1}) = p_i n - p_m$$

$$(\beta_{m-1,i}) \qquad p_i(x_1 + \ldots + x_{i-1}) + (p_i + p_m)x_i + p_i(x_{i+1} + \ldots + x_{m-1}) = p_i(n+1)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Chiamiamo vertici del parellelotopo le 2^{m-1} intersezioni di k iperpiani $(\alpha_{m-1,i})$ e di $m-k-1$ iperpiani $(\beta_{m-1,i})$ in guisa che i secondi indici i di $(\alpha_{m-1,i})$, $(\beta_{m-1,i})$ formino una permutazione dei numeri 1, 2,...., $m-1$ e k prenda i valori 0, 1,...., $m-1$. Tenendo conto della (3) si vede che fra gli iperpiani isoclini condotti per i vertici del parallelotopo quello di minima norma è l'iperpiano mandato per il vertice A_{m-1} intersezione degli $m-1$ iperpiani $(\alpha_{m-1,i})$ e quello di massima norma è l'iperpiano mandato per il vertice B_{m-1} intersezione degli $m-1$ iperpiani $(\beta_{m-1,i})$. Le coordinate di A_{m-1} e B_{m-1} sono, per le (2), rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} \xi_{m-1,i} &= (n+m-1)p_i - 1 \\ \eta_{m-1,i} &= (n+1)p_i \end{aligned}\right\} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1)$$

e le norme degli iperpiani isoclini mandati per A_{m-1}, B_{m-1} sono, per le (3),

$$\sigma_{m-1} = n - (m+n-1)p_m, \qquad \sigma'_{m-1} = (n+1)(1-p_m).$$

Ne consegue che le norme degli iperpiani isoclini condotti per i punti del parallelotopo sono comprese fra σ_{m-1} e σ'_{m-1} e poichè $\sigma'_{m-1} - \sigma_{m-1} = 1 + (m-2)p_m < 2$, all'intervallo $\sigma_{m-1} \vdash\dashv \sigma'_{m-1}$ appartengono, al più, due numeri interi; ciò mostra

che due al più sono gli iperpiani isoclini contenenti punti in cui P_n diviene massima. C'è anche da osservare che mentre A_{m-1} appartiene sempre a Φ_{m-1}, B_{m-1} può essere esterno, ciò che accade se $p_m < \frac{1}{n+1}$; in questo caso all'intervallo $\sigma_{m-1} \vdash\dashv \sigma'_{m-1}$ si deve sostituire l'intervallo $\sigma_{m-1} \vdash\dashv n$.

Se A_{m-1} è punto intero è anche punto di massimo per P_n; si osservi poi che gli $m-1$ punti

$$(\xi_{m-1,1}, \xi_{m-1,2}, \ldots, \xi_{m-1,i-1}, \xi_{m-1,i}+1, \xi_{m-1,i+1}, \ldots, \xi_{m-1,m-1})$$
$$(i=1, 2, \ldots, m-1)$$

appartengono rispettivamente agli iperpiani $(\beta_{m-1,i})$ e al parallelotopo Ω_{m-1} perchè le ξ soddisfano le (5); d'altra parte nessun altro punto intero dell'iperpiano isoclino di norma $\sigma_{m-1}+1$ appartiene al parallelotopo e quindi gli m punti dianzi determinati sono tutti e soli i punti in cui P_n diviene massima.

Se B_{m-1} è intero e $\sigma'_{m-1} \leqslant n$, è B_{m-1} un punto di massimo per P_n e gli ulteriori punti di massimo sono

$$(\eta_{m-1,1}, \ldots, \eta_{m-1,i-1}, \eta_{m-1,i}-1, \eta_{m-1,i+1}, \ldots, \eta_{m-1,m-1})$$
$$(i=1, 2, \ldots, m-1).$$

Se B_{m-1} è intero e $\sigma'_{m-1} > n$ sono punti di massimo gli $m-1$ ultimi punti detti.

Se A_{m-1} non è punto intero, ma è intero σ_{m-1}, i punti interi del parallelotopo sono sull'iperpiano isoclino di norma $\sigma_{m-1}+1$, epperò

$$r_m = n-(\sigma_{m-1}+1) = (n+m-1)p_m - 1.$$

Se B_{m-1} non è punto intero, ma è intero σ'_{m-1}, i punti interi del parallelotopo sono sull'iperpiano isoclino di norma $\sigma'_{m-1}-1$, epperò

$$r_m = n-(\sigma'_{m-1}-1) = (n+1)p_m.$$

Se A_{m-1} e σ_{m-1} sono entrambi non interi e in $\sigma_{m-1} \vdash\dashv \sigma'_{m-1}$ cade un solo intero è

$$r_m = n - E(\sigma_{m-1}+1),$$

indicando con $E(z)$ il massimo intero contenuto in z; se nel detto intervallo cadono due interi, r_m ha i due valori

$$n-E(\sigma_{m-1}+1), \qquad n-E(\sigma_{m-1}+2).$$

In tutti i casi è determinato r_m.

4. - Se poniamo

$$r_{m-1} = n - r_m - (r_1 + \ldots + r_{m-2}),$$

la P_n può riguardarsi funzione di $r_1, r_2, \ldots, r_{m-2}$; essa è definita nei punti interi della porzione Φ_{m-2} dello spazio $\Sigma_{m-2}(x_1, \ldots, x_{m-2})$ in cui le coordinate sono nulle

o positive e la cui somma è minore od uguale a $n-r_m$. Il parallelotopo Ω_{m-2} a cui appartengono i punti interi in cui P_n diviene massima è limitato dai $2(m-2)$ iperpiani

$$(\alpha_{m-2,i})\quad p_i(x_1+\ldots.+x_{i-1})+(p_i+p_{m-1})x_i+p_i(x_{i+1}+\ldots.+x_{m-2})=(n-r_m)p_i-p_{m-1}$$
$$(\beta_{m-2,i})\quad p_i(x_1+\ldots.+x_{i-1})+(p_i+p_{m-1})x_i+p_i(x_{i+1}+\ldots.+x_{m-2})=(n-r_m+1)p_i$$
$$(i=1,2,\ldots.,m-2).$$

Gli iperpiani isoclini (paralleli cioè all'iperpiano $x_1+\ldots.+x_{m-2}=0$) per i punti di Ω_{m-2} hanno norme comprese fra i numeri

$$\sigma_{m-2}=n-r_m-(n+m-2-r_m)\frac{p_{m-1}}{1-p_m},$$
$$\sigma'_{m-2}=n+1-r_m-(n+1-r_m)\frac{p_{m-1}}{1-p_m},$$

essendo σ_{m-2} la norma dell'iperpiano isoclino condotto per il vertice A_{m-2} del parallelotopo, intersezione degli $m-2$ iperpiani $(\alpha_{m-2,i})$, e σ'_{m-2} la norma dell'iperpiano isoclino condotto per il vertice B_{m-2}, intersezione degli $m-2$ iperpiani $(\beta_{m-2,i})$. Il punto A_{m-2} appartiene sempre a Φ_{m-2}, mentre B_{m-2} non ci appartiene se $p_{m-1}<\frac{1-p_m}{n+1-r_m}$.

Se A_{m-2} o B_{m-2} sono punti interi, la ricerca si esaurisce come nello spazio Σ_{m-1}, essendo le coordinate di questi punti rispettivamente

$$\left.\begin{aligned}\xi_{m-2,i}&=(n+m-r_m-2)\frac{p_i}{1-p_m}-1\\ \eta_{m-2,i}&=(n-r_m+1)\frac{p_i}{1-p_m}\end{aligned}\right\}\qquad(i=1,2,\ldots.,m-2).$$

Negli altri casi si determina r_{m-1} con considerazioni del tutto analoghe a quelle con cui si è determinato r_m.

5. - Seguendo l'indicato procedimento supponiamo di essere giunti a determinare r_m, $r_{m-1},\ldots.$, r_{k+2} e quindi a dover cercare i punti interi $(r_1, r_2,\ldots., r_k)$ dello spazio a k dimensioni $\Sigma_k(x_1,\ldots., x_k)$ in cui diviene massima la probabilità P_n che ora è funzione di $r_1,\ldots., r_k$ $\left(\text{posto } r_{k+1}=n-\sum_{k+2}^{m}r_h-\sum_{1}^{k}r_h\right)$.

Gli iperpiani isoclini condotti per i punti del parallelotopo Ω_k hanno norme comprese fra i numeri

$$\sigma_k=n-\sum_{k+2}^{m}r_h-\left(n+k-\sum_{k+2}^{m}r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m}p_h},$$

$$\sigma_k'=n+1-\sum_{k+2}^{m}r_h-\left(n+1-\sum_{h+2}^{m}r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m}p_h},$$

essendo σ_k la norma dell'iperpiano isoclino condotto per il punto A_k di coordinate

$$\xi_{k,i}=\left(n-k-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_i}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h}-1 \qquad (i=1,\ldots,k)$$

e σ_k' quella dell'iperpiano isoclino mandato per il punto B_k di coordinate

$$\eta_{k,i}=\left(n+1-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_i}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h} \qquad (i=1,\ldots,k).$$

Si osservi che le formule che danno σ_k, σ_k' e le coordinate di A_k, B_k, valide per $k=2, 3,\ldots, m-2$, lo sono anche per $k=m-1$ se si dà il valore 0 ai simboli $\sum_{m+1}^{m} r_h$, $\sum_{m+1}^{m} p_h$.

Se σ_k è intero ed è intero il punto A_k, la P_n diviene massima in $(\xi_{k,1}, \xi_{k,2},\ldots, \xi_{k,k})$ e nei k punti $(\xi_{k,1},\ldots, \xi_{k,i}+1,\ldots, \xi_{k,k})$ $(i=1,\ldots, k)$: nel primo punto è

$$r_{k+1}=\left(n+k-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h}$$

e negli altri, r_{k+1} vale un'unità di meno.

Se σ_k' è intero e non maggiore di $n-\sum_{k+2}^{m} r_h$ e B_k è punto intero, la P_n diviene massima in B_k e nei k punti $(\eta_{k,1},\ldots, \eta_{k,i}-1,\ldots, \eta_{k,k})$ $(i=1,\ldots, k)$; in B_k è

$$r_{k+1}=\left(n+1-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h}$$

e negli altri punti r_{k+1} vale un'unità di più. Se σ_k' è intero e maggiore di $n-\sum_{k+2}^{m} r_h$ e B_k è intero, i punti di massimo sono solo gli ultimi k punti determinati.

Se σ_k è intero e non intero è A_k,

$$r_{k+1}=n-\sum_{k+2}^{m} r_h-\sigma_k-1=\left(n+k-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h}-1;$$

se σ_k' è intero e non intero è B_k, è

$$r_{k+1}=\left(n-k-\sum_{k+2}^{m} r_h\right)\frac{p_{k+1}}{1-\sum_{k+2}^{m} p_h}.$$

Se nè σ_k nè σ_k' sono interi e fra essi v'è il solo intero $E(\sigma_k+1)$, è

$$r_{k+1}=n-\sum_{k+2}^{m} r_h-E(\sigma_k+1);$$

se vi sono i due interi $E(\sigma_k+1)$, $E(\sigma_k+2)$, allora r_{k+1} ha il valore precedente e quello diminuito di un'unità.

Così procedendo si giunge a dover trovare r_1, r_2 che rendono massima la P_n divenuta funzione di r_1, r_2. Ora in luogo del parallelotopo si ha un segmento Ω_1 sull'asse x_1 di estremi A_1 e B_1, il primo dei quali ha la coordinata

$$\xi_{1,1}=n-\sum_{3}^{m} r_h-\left(n+1-\sum_{3}^{m} r_h\right)\frac{p_2}{p_1+p_2}=\sigma_1$$

ed il secondo

$$\eta_{1,1}=n+1-\sum_{3}^{m} r_h-\left(n+1-\sum_{3}^{m} r_h\right)\frac{p_2}{p_1+p_2}=\sigma_1' \ (^1).$$

Se $\xi_{1,1}$ è intero, r_1 ha i due valori $\xi_{1,1}$ e $\xi_{1,1}+1$ e corrispondentemente r_2 ha i valori

$$n-\sum_{3}^{m} r_h-\xi_{1,1}, \qquad n-1-\sum_{3}^{m} r_h-\xi_{1,1};$$

se $\xi_{1,1}$ non è intero,

$$r_1=E(\xi_{1,1}+1), \qquad r_2=n-\sum_{3}^{m} r_h-E(\xi_{1,1}+1).$$

6. - Nel caso frequente che le probabilità siano razionali, si può aggiungere un'osservazione degna di rilievo perchè semplifica notevolmente i calcoli. Le m probabilità, ridotte al minimo denominatore comune siano

$$p_i=\frac{a_i}{a} \qquad (i=1,\ldots,m).$$

Il presentarsi un numero piuttosto che un altro di punti di massimo per P_n dipende dal fatto di essere o no interi i numeri σ_{m-i}, σ'_{m-i} e dal trovarsi fra σ_{m-i} e σ'_{m-i} uno o due interi, cioè, in sostanza, dipende dalle differenze

$$\sigma_{m-i}-E(\sigma_{m-i}), \qquad \sigma'_{m-i}-E(\sigma'_{m-i}). \tag{6}$$

Orbene è da notarsi che se b è un intero minore di a, per tutti i numeri n di prove della forma $\lambda a+b$, con λ intero qualunque, le differenze (6) hanno lo stesso valore. Di più se nelle espressioni di σ_{m-1}, σ'_{m-1} si pone $n=\lambda a+b$, si vede che $r_m=\lambda a_m+c_m$ con c_m nullo o positivo non maggiore di a_m e dalle

---

(1) Le formule che danno σ_k, σ_k' e le coordinate di A_k, B_k valgono dunque anche per $k=1$.

espressioni di σ_{m-2}, σ'_{m-2} che $r_{m-1}=\lambda a_{m-1}+c_{m-1}$ con c_{m-1} nullo o positivo non maggiore di a_{m-1} e così via; ed ancora si rileva che i numeri c_m, c_{m-1},...., c_1 dipendono solo da b e dalle probabilità; allora per la determinazione dei numeri r_i, basta supporre $n=b$; col procedimento indicato nei paragrafi precedenti si ricavano i corrispondenti valori di r_i, cioè i numeri c_i, dopo di che per $n=\lambda a+b$ si ha $r_i=a_i+c_i$ $(i=1,...., m)$. Si vede poi immediatamente che se $n=\lambda a$, l'unico sistema di valori r_i è $r_i=\lambda a_i$.

D. ARANY (Budapest - Ungheria)

SUR LA GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE LA DURÉE DU JEU POUR TROIS JOUEURS

Le problème de la durée du jeu consiste — dans son énoncé le plus général et en cas de *deux* joueurs — dans la recherche de la probabilité de ce que de deux joueurs A et B, possédant respectivement a et b francs au commencement du jeu, A perde x francs en n parties.

Désignons cette probabilité pas le symbole $n_{x,-x}^{a,b}$. Désignons en outre par p et $q=1-p$ la probabilité du gain et de la perte d'un franc du joueur A à chaque partie.

Pour calculer la valeur de $n_{x,-x}^{a,b}$ on doit distinguer trois cas.

Premier cas. Les fortunes de chacun des deux joueurs sont illimitées.

Second cas. La fortune du joueur A est limitée et égale à a, tandis que la fortune du joueur B est illimitée.

Troisième cas. Les fortunes de chacun des deux joueurs sont limitées et égales à a et b francs respectivement.

Dans le premier cas nous désignerons la probabilité cherchée par le symbole $n_{x,-x}$. Sa valeur est donnée par l'équation suivante:

$$n_{x,-x}=\frac{n!}{i!\,j!}p^iq^j \tag{1}$$

où $2i=n-x$ et $2j=n+x$.

Dans le second cas nous désignerons la probabilité cherchée par le symbole $n_{x,-x}^{a}$. Sa valeur est donnée par l'équation suivante:

$$n_{x,-x}^{a}=n_{a-\alpha,-a+\alpha}-n_{a+\alpha,-a-\alpha} \tag{2}$$

où $\alpha=a-x$.

Dans le cas spécial où $a=x$, donc $\alpha=0$, la valeur de la probabilité $n_{x,-x}^{x}$ n'est plus représenté par l'équation (2). On doit faire usage dans ce cas de l'équation suivante:

$$n_{x,-x}^{x}=\frac{x}{n}\cdot n_{x,-x}. \tag{2a}$$

Dans le troisième cas la valeur de la probabilité cherchée est donnée par l'équation suivante:

$$\begin{aligned} n_{x,-x}^{a,b}=n_{x,-x}^{a} &- n_{x+2b,-x-2b}^{a+2b} \\ +n_{x+2b+2a,-x-2b-2a}^{a+2b+2a} &- n_{x+4b+2a,-x-4b-2a}^{a+4b+2a} \\ +n_{x+4b+4a,-x-4b-4a}^{a+4b+4a} &- n_{x+6b+4a,-x-6b-4a}^{a+6b+4a} \\ + \text{ etc.} &\quad - \text{ etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

Cette équation subsiste aussi dans le cas spécial où $a=x$.

La vérification des quatre formules énumérées ci dessus se trouve dans le *Calcul des Probabilités* de M. LOUIS BACHELIER (Paris, 1912, Librairie Gauthier-Villars).

***

On n'a pas réussi jusqu'ici à généraliser le problème de la durée du jeu, lequel est complètement résolu pour le cas de *deux* joueurs, au cas de *trois* joueurs.

M. LOUIS BACHELIER s'exprime sur le « cas où il y a plusieurs joueurs » dans ce qui suit: « Dans le cas où il y a trois joueurs possédant des fortunes limitées, les différents problèmes paraissent d'une tout autre difficulté que dans le cas de deux joueurs » (art. 203).

L'auteur de cette note a tâché, dans un mémoire-manuscrit, intitulé: *Considérations sur le problème de la durée du jeu*, à montrer une voie, laquelle conduit à la solution du problème généralisé, en appliquant à ce dernier un procédé employé par A. M. AMPÈRE dans son mémoire: *Considérations sur la théorie mathématique du jeu* [Lyon et Paris, An. 11, (1802)] pour résondre le problème dans le cas de deux joueurs.

La formule qui sert à calculer la valeur de $n_{x,-x}$ est la suivante:

$$\text{(I)} \qquad n^{x}_{x,-x}=n_{x,-x}-\sum_{\lambda=1}^{-1}(x+2\lambda)^{x}_{x,-x}\cdot(n-x-2\lambda)_{0,0}$$

laquelle coïncide — aux notations et de légères modifications près — avec celle présentée par M. AMPÈRE (p. 7, ligne 7, d'en haut).

AMPÈRE désigne par $A^{(x+2i)}$ la quantité, que je désigne par $n^{x}_{x,-x}$ (p. 6, ligne 4, d'en bas).

Pour calculer la valeur de $n^{x,b}_{x,-x}$, AMPÈRE fait usage de la formule suivante:

$$\text{(II)} \qquad n^{x,b}_{x,-x}=n^{x}_{x,-x}-\sum_{\lambda=0}(b+2\lambda)^{x,b}_{-b,b}\cdot(n-b-2\lambda)^{x+b}_{x+b,-x-b}$$

où μ est le plus grand nombre, pour lequel $n-b-2\mu$ est encore un nombre positif et en même temps plus grand ou égal à $x+b$.

AMPÈRE désigne par $B^{(x+2i)}$ la quantité $n^{x,b}_{x,-x}$ et par $C^{(b+2\lambda)}$ la quantité $(b+2\lambda)^{x,b}_{-b,b}$.

Avant d'appliquer les deux dernières formules au cas de trois joueurs, nous allons formuler d'abord le problème de la durée du jeu dans le cas de trois joueurs A, B, C possédant respectivement des fortunes de a, b, c francs au commencement du jeu et jouant aux conditions suivantes: Le joueur A reçoit deux (2) francs au cas qu'il gagne, — avec la probabilité p — et paie un (1) franc au cas qu'il perde, — avec la probabilité q — ou $r=1-p-q$, selon que B ou C gagne.

Le problème de la durée du jeu consiste — dans son énoncé le plus général et en cas de trois joueurs — dans la recherche de la probabilité de ce que A perde x francs et B y francs en n parties.

Désignons cette probabilité par le symbole $n_{x,y,z}^{a,b,c}$ où $z=-x-y$.

Pour calculer la valeur de $n_{x,y,z}^{a,b,c}$ on doit distinguer quatre cas.

Premier cas. Les fortunes de chacun des trois joueurs sont illimitées. Dans ce cas nous désignons la probabilité cherchée par $n_{x,y,z}$. Sa valeur est donnée par l'équation suivante:

$$(1') \qquad n_{x,y,z}=\frac{n!}{i!\,j!\,k!}\,p^i q^j r^k$$

où $3i=n-x$, $3j=n-y$, $3k=n-z$.

Second cas. La fortune du joueur A est limitée et égale à a francs, tandis que les fortunes des joueurs B et C sont illimitées. Dans ce cas nous désignons la probabilité cherchée par le symbole $n_{x,y,z}^{a}$. Sa valeur se calcule moyennant la formule suivante:

$$(III) \qquad n_{x,y,z}^{a}=n_{x,y,z}-\sum_{u=0}^{\lambda}\sum_{\eta=a+3u}^{-2a-3u}(a+3u)_{a,\eta,\zeta}^{a}(n-a-3u)_{x-a,y-\eta,z-\zeta}.$$

J'ai démontré dans mon mémoire-manuscrit cité plus haut, que cette dernière équation se réduit pour $a=x$ à la suivante:

$$(2a') \qquad n_{x,y,z}^{x}=\frac{x}{n}\cdot n_{x,y,z}.$$

Troisième cas. Les fortunes des joueurs A et B sont limitées et égales à a et b francs respectivement, tandis que la fortune du joueur C est illimitée. Dans ce cas, nous désignons la probabilité cherchée par $n_{x,y,z}^{a,b}$. Sa valeur se calcule moyennant la formule suivante:

$$(IV) \qquad n_{x,y,z}^{a,b}=n_{x,y,z}^{a}-\sum_{v=0}^{v=\lambda}\sum_{\xi=b+3v}^{-2b-3v}(b+3v)_{\xi,b,\zeta}^{a,b}(n-b-3v)_{x-\xi,y-b,z-\zeta}^{a-\xi}.$$

Quatrième cas. Les fortunes de chacun des trois joueurs sont limitées et égales à a, b, c francs respectivement. Dans ce cas la probabilité cherchée se calcule moyennant la formule

$$(V) \qquad n_{x,y,z}^{a,b,c}=n_{x,y,z}^{a,b}-\sum_{w=0}^{\lambda}\sum_{\xi=c+3w}^{-2c-3w}(c+3w)_{\xi,\eta,c}^{a,b,c}(n-c-3w)_{x-\xi,y-\eta,z-c}^{a-\xi,b-\eta}.$$

E. CAVALLI (Torino - Italia)

SULLA PROBABILITÀ DEGLI ERRORI

Voglio presentare ai cultori del Calcolo delle probabilità il metodo col quale nelle nostre Scuole d'Artiglieria viene esposta la teoria degli errori. Questo metodo, non nuovo ma poco conosciuto, riesce molto semplice e chiaro per la natura geometrica degli errori.

Si supponga di eseguire un numero indefinito di colpi con la stessa bocca da fuoco, nelle medesime precise condizioni, e si raccolgano i colpi sopra un piano perpendicolare alla direzione del tiro. I punti colpiti sul piano saranno dapprima irregolarmente dispersi, ma a mano a mano che si aumenta il numero di essi si vede che tendono a disporsi in un certo ordine, e se il numero dei colpi cresce indefinitamente la rosa dei colpi diventa completa e simmetrica rispetto a due assi ortogonali; il loro punto comune si dice il centro dei tiri.

Gli errori nel tiro sono le deviazioni di ciascun colpo rispetto ai due assi di simmetria.

Sia O il centro dei tiri, OX ed OY gli assi di simmetria; consideriamo le deviazioni rispetto ad uno degli assi, per esempio, ad OY.

Consideriamo infinite rette parallele ad OY ed equidistanti; due rette consecutive racchiudono una striscia entro la quale saranno caduti un certo numero di colpi, numero che sarà tanto più piccolo quanto più grande è la distanza

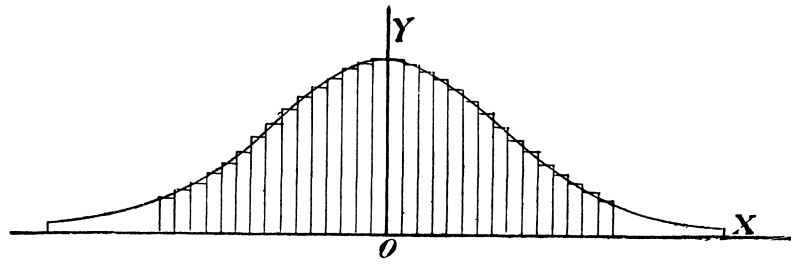


Fig. 1.

della striscia da O. Delimitiamo in ogni striscia un rettangoletto che abbia la base sull'asse OX ed un'altezza proporzionale al numero dei colpi caduti nella

striscia; si avranno così tanti rettangoletti la cui altezza andrà diminuendo simmetricamente allontanandosi dal punto O. Se ora s'immagina che le striscie siano di larghezza infinitesima dx la sommità dei rettangoletti tenderà a formare una curva continua, la quale avrà la massima ordinata sull'asse delle Y, e si estenderà simmetricamente dalle due parti dell'asse OY incontrando l'asse OX in due punti equidistanti da O della massima deviazione.

Questa curva è la curva degli errori. L'area di ciascun rettangolo è ydx ed è proporzionale al numero dei colpi che hanno avuta deviazione tra x ed $x+dx$ (è proporzionale cioè al numero degli errori compresi tra x ed $x+dx$) quindi l'integrale

$$A=\int_{-M}^{M} ydx$$

rappresentante l'area compresa fra la curva e l'asse delle X è proporzionale al numero totale dei colpi (proporzionale al numero totale degli errori o delle misure fatte), essendo M la massima deviazione. Allora la probabilità che in una prova l'errore sia x (o compreso fra x e $x+dx$) è rappresentata da

$$\frac{ydx}{A}$$

e la probabilità che l'errore sia numericamente inferiore ad ε (o compreso tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$) è dato da

$$p_\varepsilon=\frac{2}{A}\int_0^{\varepsilon} ydx.$$

L'errore medio, media aritmetica dei valori numerici di tutti gli errori, è

$$K=\frac{2}{A}\int_0^{M} xydx$$

il quadrato dell'errore quadratico medio è

$$k^2=\frac{2}{A}\int_0^{M} x^2ydx.$$

L'errore probabile ϱ, quello cioè cui corrisponde eguale probabilità di superarlo oppur no, è determinato dall'equazione

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{A}\int_0^{\varrho} ydx.$$

Avendosi l'equazione della curva degli errori si calcolano i precedenti integrali. Per esempio: Se la curva degli errori fosse costituita da due tratti rettilinei che

taglino l'asse delle Y ad altezza a e l'asse delle X alla distanza M, l'equazione di una delle rette è $y=a\left(1-\frac{x}{M}\right)$ e si trova

$$A=aM, \qquad K=\frac{1}{3}M, \qquad k^2=\frac{1}{6}M^2$$

$$\frac{k}{K}=\sqrt{\frac{3}{2}}=1.225 \text{ circa}$$

$$p_\varepsilon=\frac{\varepsilon}{M}\left(2-\frac{\varepsilon}{M}\right)=\frac{\varepsilon}{3K}\left(2-\frac{\varepsilon}{3K}\right)$$

$$\varrho=0{,}88K=0{,}29M, \qquad M=3{,}4\varrho.$$

Se la curva degli errori fosse un arco di parabola di equazione $y=1-\frac{x^2}{M^2}$ si troverebbe

$$A=\frac{4}{3}M, \qquad K=\frac{3}{8}M, \qquad k^2=\frac{M^2}{5}$$

$$\frac{k}{K}=\frac{8}{3\sqrt{5}}=1.19$$

$$p_\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{M}\left(3-\frac{\varepsilon^2}{M^2}\right)=\frac{1}{2}\frac{3\varepsilon}{8K}\left[3-\left(\frac{8\varepsilon}{3K}\right)^2\right]$$

$$\varrho=0{,}926K=0{,}35M, \qquad M=2{,}88\varrho.$$

Come si vede i numeri sono poco differenti da quelli dell'esempio precedente.

Com'è noto, nelle pratiche applicazioni si assume come equazione della curva degli errori l'equazione di Laplace

$$y=e^{-a^2x^2}$$

ove a è una costante detta *modulo* di *convergenza.*

La curva rappresentata da questa equazione ha ben i caratteri della curva degli errori: ha l'ordinata massima per $x=0$ e l'ordinata poi va abbassandosi simmetricamente dalle due parti. Veramente la y non si annulla che per $x=\infty$ sicchè sembrerebbe che la deviazione massima sia infinita. Ora ciò può parere inammissibile: ma il parametro a ha valori tali che quando x è superiore a 3 o 4 volte l'errore medio, la y diventa piccolissima e trascurabile.

Infatti per questa curva si trova:

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{a}$$

e poi

$$K=\frac{2a}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}x\,dx=\frac{1}{a\sqrt{\pi}}$$

onde

$$a^2=\frac{1}{\pi k^2} \quad \text{e} \quad a^2x^2=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{K}\right)^2.$$

Sicchè se $\frac{x}{K}>4$,

$$a^2x^2>\frac{16}{\pi} \quad \text{ed} \quad e^{-a^2x^2}<e^{-\frac{16}{\pi}}=0{,}00614....$$

cioè circa $\frac{6}{1000}$ dell'ordinata massima.

Si trova poi $k=\frac{1}{a\sqrt{2}}$ onde

$$\frac{k}{K}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}=1{,}25 \text{ circa}$$

come si vede anch'esso poco differente dai valori trovati per questo rapporto nei due esempi precedenti.

Per la probabilità di un errore compreso tra $-\varepsilon$ e $+\varepsilon$ si trova:

$$p_\varepsilon=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{a\varepsilon} e^{-t^2}dt$$

questa probabilità funzione solo di

$$a\varepsilon=\frac{\varepsilon}{K\sqrt{\pi}}$$

e quindi solo del rapporto $\frac{\varepsilon}{K}$ è data da una tavola a semplice entrata che ha per argomento una quantità proporzionale ad $\frac{\varepsilon}{K}$ ed è precisamente

$$f=\frac{\varepsilon}{\varrho}$$

essendosi trovato l'errore probabile

$$\varrho=0{,}845K;$$

f si chiama *fattore di probabilità.*

Con la curva degli errori adottata e con i valori qui calcolati si dimostra facilmente il teorema secondo il quale il valore più probabile di una quantità, della quale si siano fatte più misure egualmente attendibili, è la media aritmetica delle misure fatte.

Questo teorema è più comunemente conosciuto sotto il nome di postulato di Gauss, perchè Gauss ha dimostrato che partendo da quel teorema, ammesso vero a priori, si perviene alla curva degli errori che diremo di Laplace. Ma sta il fatto che si perviene alla curva di Laplace, indipendentemente dal postulato di Gauss, partendo dall'ipotesi che il numero degli errori o delle deviazioni sia infinitamente grande, come risulta dal teorema di Bernoulli.

Dalla stessa teoria si deduce che gli errori, medio, quadratico e probabile relativi agli errori di cui può essere affetta la media aritmetica di più misure fatte si ottengono da quelli ordinari sopra calcolati, dividendoli per $\sqrt{n}$, essendo n il numero delle misure. Sicchè le probabilità relative ad errori della media si

possono avere dalla stessa tavola alla quale si è accennato innanzi, purchè nel calcolare il fattore di probabilità f si sostituisca a ϱ; $\varrho_n = \frac{\varrho}{\sqrt{n}}$.

Infine il tiro d'artiglieria offre molti esempi semplici e più evidenti che quelli dedotti dalla Statistica, per illustrare ed applicare i principi del Calcolo delle probabilità: cioè i teoremi della probabilità composta, della probabilità totale, della probabilità delle ipotesi, della probabilità nelle prove ripetute ecc.

R. KUZMIN (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR UN PROBLÈME DE GAUSS

On trouve dans le X^e tome des œuvres de Gauss une lettre que ce dernier avait écrit à LAPLACE et dans laquelle il attirait, entre autres, l'attention du célèbre géomètre français sur une question qui l'intéressait depuis longtemps, mais qu'il n'avait pas réussi à résoudre d'une manière satisfaisante. Le problème était le suivant:

Une fraction proprement dite quelconque M étant convertie en fraction continue, déterminer la probabilité que le quotient complet n ait une partie fractionnaire comprise entre zéro et la fraction proprement dite x.

Dans ce cas, on sous-entend que toutes les valeurs de M sont ou également probables, ou plus ou moins probable selon la loi donnée.

Considérant toutes les valeurs de M comme également probables et désignant la probabilité cherchée par $P_n(x)$, Gauss a trouvé pour cette dernière la formule approchée, tout en supposant que le nombre n augmente à l'infini:

$$P_n(x) = \frac{\lg(1+x)}{\lg 2}.$$

Cependant Gauss n'a pas déterminé le degré d'exactitude de cette formule. Quant à la méthode qu'il a appliquée, elle nous est restée inconnue.

On ignore également si LAPLACE a trouvé une solution de ce problème. De même, les notes de l'éditeur du X^e volume des œuvres de Gauss nous permettent de conclure que le problème en question est demeuré jusqu'à présent sans solution complète.

L'article suivant donnera la solution de ce problème.

§ 1. - La définition de la probabilité et les propriétés les plus simples des fractions continues nous permettent aisément de trouver l'égalité suivante:

$$P_n(x) = \sum_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n = 1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\nu_1 + \cfrac{1}{\nu_2 + \ldots + \cfrac{1}{\nu_n + x}}} - \frac{1}{\nu_1 + \cfrac{1}{\nu_2 + \ldots + \cfrac{1}{\nu_n}}} \right)$$

qu'on peut écrire également:

$$P_n(x)=\sum_{\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{P_n+xP_{n-1}}{Q_n+xQ_{n-1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right),$$

où les nombres $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ et $\frac{P_n}{Q_n}$ sont les deux dernières fractions réduites qu'on obtient, en transformant la fraction continue:

$$\cfrac{1}{\nu_1+\cfrac{1}{\nu_2+\ldots.+\cfrac{1}{\nu_n}}}$$

en une fraction simple.

En posant dans cette égalité $x=1$, nous obtenons:

$$P_n(1)=1+\sum\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}.$$

(On obtient de même cette égalité en sommant, par exemple, d'après ν_n, puis d'après ν_{n-1}, etc.).

Il vaut mieux considérer non pas la fonction $P_n(x)$, mais sa dérivée que nous désignerons par $p_n(x)$.

En différentiant la dernière égalité nous obtenons que:

$$p_n(x)=\sum\frac{1}{(Q_n+xQ_{n-1})^2}.$$

La différentiation de la série est permise, parce que la série obtenue a comme majorante la série suivante:

$$\sum\frac{2}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$$

dont la somme est égale à 2.

Toutes les fonctions $p_n(x)$ peuvent être obtenues consécutivement en posant

$$p_0(x)=1,$$

et

$$p_n(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}p_{n-1}\left(\frac{1}{\nu+x}\right)\cdot\frac{1}{(\nu+x)^2}.$$

On le démontre aisément en substituant à la place de Q_n sa valeur

$$Q_{n-1}+\nu Q_{n-2}.$$

Remarquons que si on a $p_0(x)=\frac{a}{1+x}$, on a $p_n(x)=\frac{a}{1+x}$.

§ 2. - La question de déterminer l'expression asymptotique des fonctions $p_n(x)$ est un cas particulier de la question de la convergence de la suite de fonctions:

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\ldots.,$$

où $f_0(x)$ est une fonction quelconque et où les autres fonctions sont composées d'après le formule:

$$f_n(x)=\sum_{\nu_n=1}^{\infty} f_{n-1}\left(\frac{1}{\nu_n+x}\right)\cdot\frac{1}{(\nu_n+x)^2}.$$

Signalons quelques propriétés des fonctions de ce genre, qu'il importe de connaître pour ce qui doit suivre.

I. Si dans le cas $0\leqq x\leqq 1$, la fonction $f_{n-1}(x)$ satisfait aux inégalités:

$$\frac{m}{1+x}<f_{n-1}(x)<\frac{M}{1+x}$$

$f_n(x)$ satisfera également aux mêmes inégalités.

Il en sera par conséquent de même de toutes les fonctions qui la suivront.

Nous omettrons, pour abréger, les démonstrations simples de ces affirmations.

En particulier, si $f_0(x)=\frac{a}{1+x}$, nous aurons de même pour toutes les fonctions $f_n(x)$ l'égalité:

$$f_n(x)=\frac{a}{1+x}.$$

II.

$$f_n(x)=\sum f_0\left(\frac{P_n+xP_{n-1}}{Q_n+xQ_{n-1}}\right)\cdot\frac{1}{(Q_n+xQ_{n-1})^2}.$$

Cette égalité se démontre par raisonnement de n à $n+1$.

En posant ici $f_0(x)=1$, nous obtenons l'égalité indiquée plus haut:

$$p_n(x)=\sum\frac{1}{(Q_n+xQ_{n-1})^2}.$$

III. En intégrant terme à terme la série qui définit $f_n(x)$, nous obtenons:

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\sum_1^{\infty}\int_0^1 f_{n-1}\left(\frac{1}{\nu+x}\right)\cdot\frac{dx}{(\nu+x)^2}=\sum_1^{\infty}\int_{\nu}^{\nu+1} f_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u^2}=$$

$$=\int_1^{\infty} f_{n-1}\left(\frac{1}{u}\right)\frac{du}{u^2}=\int_0^1 f_{n-1}(x)dx.$$

D'où on conclut immédiatement:

$$\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f_0(x)dx.$$

Si la fonction $f_0(x)$ est bornée, la série pour $f_n(x)$, en vertu des propriétés de I, est de convergence uniforme et l'intégration terme à terme est permise.

IV. Appliquons l'inégalité facile à démontrer:

$$Q_n(Q_n+Q_{n-1})>2^n$$

et supposons l'existence des inégalités:

$$|f_0(x)|<M \qquad \text{et} \qquad |f_0'(x)|<\mu;$$

nous trouverons alors la limite supérieure pour $|f_n'(x)|$.

Pour cela, il suffit de différentier l'égalité II qui nous donne:

$$f_n'(x)=\sum f_0'(u)\,\frac{(-1)^{n-1}}{(Q_n+xQ_{n-1})^4}-2\sum f_0(u)\,\frac{Q_{n-1}}{(Q_n+xQ_{n-1})^3},$$

où nous avons écrit, pour abréger:

$$\frac{P_n+xP_{n-1}}{Q_n+xQ_{n-1}}=u.$$

En vertu des suppositions faites, on se convaincra aisément que la différentiation terme à terme est ici permise.

De l'égalité obtenue on déduit, à l'aide de considérations évidentes, que l'on a:

$$|f_n'(x)|<\frac{\mu}{2^{n-2}}+4M.$$

§ 3. - Au moyen de l'identité:

$$f_0(x)=\left[f_0(x)+\frac{a}{1+x}\right]-\frac{a}{1+x}$$

et, à l'aide de la propriété I, nous pouvons démontrer qu'en étudiant la convergence de la suite des fonctions:

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\ldots,$$

sans diminuer la généralité des résultats, nous pouvons nous arrêter au cas de la fonction initiale positive $f_0(x)$.

Soit, pour $0\leqq x\leqq 1$,

$$0\leqq\frac{m}{1+x}<f_0(x)<\frac{M}{1+x};\qquad\text{et}\qquad|f_0'(x)|<\mu.$$

Il est aisé de démontrer que pour les valeurs de n suffisamment grandes, on a:

$$\frac{m_1}{1+x}<f_n(x)<\frac{M_1}{1+x}$$

où

$$m\leqq m_1\leqq M_1\leqq M\qquad\text{et}\qquad M_1-m_1<M-m.$$

Considérons deux fonctions positives:

$$\varphi_0(x)=f_0(x)-\frac{m}{1+x}$$

et

$$\psi_0(x)=\frac{M}{1+x}-f_0(x).$$

En composant d'après la méthode indiquée la succession des fonctions:

$$\varphi_0(x),\quad\varphi_1(x),\quad\varphi_2(x),\ldots,$$

nous trouverons:

$$f_n(x)-\frac{m}{1+x}=\varphi_n(x)=\sum\varphi_0(u)\cdot\frac{1}{(Q_n+xQ_{n-1})^2}>\frac{1}{2}\sum\varphi_0(u)\cdot\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}.$$

Ici $u=\frac{P_n+xP_{n-1}}{Q_n+xQ_{n-1}}$ est le nombre compris entre les limites $\frac{P_n}{Q_n}$ et $\frac{P_n+P_{n-1}}{Q_n+Q_{n-1}}$ dans l'intervalle de la longueur $\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}$.

Retranchons l'égalité évidente:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(x)dx=\frac{1}{2}\sum\int_\alpha^\beta \varphi_0(x)dx=\frac{1}{2}\sum \varphi_0(u_1)\cdot\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})},$$

où α et β sont les extrêmes de l'intervalle indiqué, et u_1 un nombre quelconque de ce dernier.

En retranchant, nous obtenons:

$$\varphi_n(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(x)dx>\frac{1}{2}\sum[\varphi_0(u)-\varphi_0(u_1)]\cdot\frac{1}{Q_n(Q_n+Q_{n-1})}.$$

De là, à l'aide de la formule de Lagrange, nous voyons que:

$$\varphi_n(x)>\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(x)dx-\frac{\mu+m}{2^{n+1}}$$

où, en posant:

$$l=\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi_0(x)dx,$$

nous obtiendrons:

$$f_n(x)>\frac{m}{1+x}+l-\frac{\mu+m}{2^n}>\frac{m+l-2^{-n}(\mu+m)}{1+x}.$$

En faisant le même raisonnement, mais en partant de la fonction $\psi_0(x)$, nous aurons:

$$f_n(x)<\frac{M}{1+x}-l_1+\frac{\mu+M}{2^{n+1}}<\frac{M-l_1+2^{-n}(\mu+M)}{1+x},$$

où

$$l_1=\frac{1}{2}\int_0^1 \psi_0(x)dx.$$

Nous avons obtenu ainsi les égalités suivantes:

$$m_1=m+l-2^{-n}(\mu+m); \qquad M_1=M-l_1+2^{-n}(\mu+M).$$

Si $l>2^{-n}(\mu+m)$ ou $l_1>2^{-n}(\mu+M)$, les nombres correspondants: $2^{-n}(\mu+m)$ ou $2^{-n}(\mu+M)$ peuvent être supprimés dans les égalités obtenues, en vertu de I § 2.

De cette façon nous aurons dans tous les cas:

$$m\leqq m_1\leqq M_1\leqq M.$$

À l'aide de l'égalité évidente:

$$l+l_1=\frac{1}{2}\lg 2(M-m)$$

nous trouvons: $$M_1-m_1<(M-m)\cdot\delta+(\mu+M)\cdot 2^{-n+1},$$

où $\delta=1-\frac{\lg 2}{2}<1$.

§ 4. - En prenant comme fonction initiale non pas $f_0(x)$, mais:

$$f_n(x),\quad f_{2n}(x),\ldots,\quad f_{(n-1)n}(x),$$

nous obtiendrons une série d'inégalités analogues:

$$\frac{m_2}{1+x}<f_{2n}(x)<\frac{M_2}{1+x};\quad \frac{m_3}{1+x}<f_{3n}(x)<\frac{M_3}{1+x};\ldots\quad \frac{m_n}{1+x}<f_{n^2}(x)<\frac{M_n}{1+x}.$$

Dans ce cas:

$$M_2-m_2<(M_1+m_1)\delta+(\mu_1+M_1)\cdot 2^{-(n+1)}$$
$$M_3-m_3<(M_2-m_2)\delta+(\mu_2+M_2)\cdot 2^{-(n+1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$M_n-m_n<(M_{n-1}-m_{n-1})\delta+(\mu_{n-1}+M_{n-1})\cdot 2^{-(n+1)}.$$

Ces inégalités nous font trouver sans difficulté:

$$M_n-m_n<(M-m)\cdot\delta^n+2^{-(n+1)}[(\mu+M)\delta^{n-1}+(\mu_1+M_1)\delta^{n-2}+\ldots+(\mu_{n-1}+M_{n-1})].$$

À l'aide des inégalités I et IV § 2, la condition $2^{n-2}>\frac{\mu}{M}$ étant ajoutée, nous trouvons pour les quantités μ_i et M_i les inégalités suivantes:

$$\mu_i\leqq 5M;\qquad M_i\leqq M.$$

L'application de I § 2 nous montrera aisément que dans le cas de $n^2\leqq N<(n+1)^2$ on aura:

$$\frac{m_n}{1+x}<f_N(x)<\frac{M_n}{1+x}.$$

Si N augmente à l'infini, les nombres m_n et M_n tendent à la limite commune a, comprise évidemment entre ces dernières.

D'après III § 2, il est aisé de voir que:

$$a=\frac{1}{\lg 2}\int_0^1 f_0(x)dx.$$

Ce qui nous amène à trouver:

$$f_N(x)=\frac{a}{1+x}+\theta(M_n-m_n);\qquad |\theta|<1.$$

À l'aide de l'inégalité obtenue pour la valeur de la différence M_n-m_n, nous pouvons transcrire la formule précédente de la manière suivante:

$$f_N(x)=\frac{a}{1+x}+0(e^{-\alpha\sqrt{N}}).$$

où $\alpha>0$ est une constante facile à calculer.

Cette formule donne la résolution du problème de Gauss dans le cas où $f_0(x)$ est la dérivée de la probabilité que le nombre arbitraire soit compris entre les limites 0 et x.

Dans le cas le plus simple, où toutes les valeurs des nombres sont également probables, on a: $f_0(x)=1$ et:

$$p_n(x)=\frac{1}{(1+x)\lg 2}+0(e^{-a\sqrt{N}}).$$

Cette égalité étant intégrée, on obtient la formule de Gauss, rendue plus précise par l'adjonction du terme complèmentaire:

$$P_n(x)=\frac{\lg(1+x)}{\lg 2}+0(e^{-a\sqrt{N}}).$$

De l'examen attentif du raisonnement qui nous a amené à cette formule, il s'ensuit que l'existence de la dérivée de la fonction $f_0(x)$ n'est pas une condition essentielle.

Si $f_0(x)$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, l'égalité suivante:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{a}{1+x}$$

demeure.

Pour terminer nous ferons la remarque, que la conséquence immédiate des résultats obtenus est le théorème suivant: De toutes les fonctions intégrables au sens de Riemann, seules les fonctions de la forme: $\frac{a}{1+x}$ satisfont à l'équation fonctionnelle:

$$f(x)=\sum_1^\infty f\left(\frac{1}{\nu+x}\right)\cdot\frac{1}{(\nu+x)^2}.$$

A. GULDBERG (Oslo - Norvegia)

SUR LA FONCTION GAMMA

Le rôle important que la fonction Gamma joue dans la statistique mathématique, le calcul des probabilités et la science actuarielle est connu. C'est pourquoi je me permets dans notre section de présenter quelques remarques simples sur cette fonction.

Il s'agit surtout de l'établissement des théories fondamentales d'Euler, Legendre et Gauss de la fonction Gamma. Notre procédé montre que ces théorèmes découlent directement des zéros de la fonction réciproque $\frac{1}{\Gamma(x)}$.

La proposition qui sert de base est celle bien connue: que le quotient de deux fonctions entières $f(x)$ et $g(x)$, qui ont les mêmes zéros, est égal à $e^{h(x)}$, $h(x)$ étant une fonction entière. Dans le cas considéré $h(x)$ est linéaire, $f(x)$ et $g(x)$ étant de genre un.

Nous considérons la fonction réciproque de $\Gamma(x)$, $\frac{1}{\Gamma(x)}$ qui est une fonction entière avec les zéros: 0, -1, -2, -3,....

Etablissons d'abord le théorème d'Euler.

La fonction $\frac{1}{\Gamma(1+x)}$ a les zéros -1, -2, -3,....; la fonction $\frac{1}{\Gamma(1-x)}$ a les zéros 1, 2, 3,.... Le produit $\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$ a donc les zéros ± 1, ± 2, ± 3,.... La fonction $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ a les mêmes zéros. Nous aurons donc $\frac{\sin \pi x}{\pi x} = e^{ax+b} \frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$. La fonction $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$ ainsi que $\frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$ est une fonction paire, par conséquent $a=0$. Posons $x=0$ dans notre formule: on aura

$$1 = e^b.$$

Nous aurons donc la formule d'Euler

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \frac{1}{\Gamma(1+x)\Gamma(1-x)}$$

où

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\pi}{B(x, 1-x)}.$$

De même on a

$$\cos \pi x = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+x\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-x\right)} = \frac{\pi}{B\left(\frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}-x\right)}.$$

Par conséquent toutes les propositions qui s'appliquent aux fonctions trigonométriques sont valables pour les fonctions Gamma et Beta.

Établissons le théorème de Legendre.

La fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$ a les zéros $0, -1, -2, -3,\ldots$.

Partageons ces zéros en pairs et impairs. La fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)}$ a les zéros pairs $0, -2, -4,\ldots$; la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)}$ a les zéros impairs $-1, -3, -5,\ldots$. Par conséquent

$$\Gamma(x) = e^{ax+b}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

ou

$$\Gamma(1+x) = e^{ax+b}2\Gamma\left(1+\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Posons $x=0$, on a

$$1 = e^{b}2\sqrt{\pi},$$

d'où

$$\Gamma(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{ax}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right);$$

pour $x=1$, on a

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{a}\sqrt{\pi}$$

ou le théorème de Legendre

$$\Gamma(x) = \frac{2^{x-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{2}\right).$$

Considérons enfin le théorème de Gauss, dont la dérivation est absolument la même:

la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}$ a les zéros $0, -n, -2n,\ldots$.

la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+x}{n}\right)}$ a les zéros $-1, -(n+1), -(2n+1),\ldots$.

la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{2+x}{n}\right)}$ a les zéros $-2, -(n+2), -(2n+2),\ldots$.

la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{3+x}{n}\right)}$ a les zéros $-3, -(n+3), -(2n+3),\ldots$.

. . . . . .

la fonction $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1+x}{n}\right)}$ a les zéros $-(n-1), -(2n-1), -(3n-1),\ldots$.

Par conséquent

$$\Gamma(x) = e^{ax+b}\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2+x}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1+x}{n}\right),$$

ou

$$\Gamma(1+x)=e^{ax+b}n\Gamma\left(1+\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1+x}{n}\right);$$

pour $x=0$ on a

$$1=e^{b}n\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)=e^{b}n\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

ou

$$\Gamma(x)=\frac{e^{ax}}{\sqrt{n}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1+x}{n}\right).$$

Pour $x=1$, on trouve

$$1=\frac{e^{a}}{\pi},$$

et on a le théorème de Gauss

$$\Gamma(x)=\frac{n^{x-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{2\pi})^{n-1}}\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1+x}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1+x}{n}\right).$$

Une généralisation directe du théorème de Gauss est la formule

$$\frac{\prod_{1}^{n-1}s\left(px+\frac{s}{n}\right)}{\prod_{1}^{n}r\left(nx+\frac{r}{p}\right)}=\left(\frac{p}{n}\right)^{npx-\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-p}{2}}.$$

Si on pose pour x successivement $\frac{x}{n}$, $\frac{x}{n^2}$,...., $\frac{x}{n^{r-1}}$ dans la formule de Gauss et on multiplie les différentes formules, on trouve sans difficulté

$$\Gamma(1+x)=n^{\frac{n}{n-1}x\left(1-\frac{1}{n^r}\right)}\Gamma\left(1+\frac{x}{n^r}\right)\prod_{1}^{r}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n^s}+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{\frac{2}{n}\pi}}\prod^{r}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n^s}+\frac{2}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}}\ldots\prod_{1}^{r}\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n^s}+\frac{n-1}{n}\right)}{\sqrt{2\pi}},$$

qui pour $n=2$ donne la formule de Knar.

R. A. FISHER (Rothamsted-Herts - Inghilterra)

ON A PROPERTY CONNECTING THE χ^2 MEASURE OF DISCREPANCY WITH THE METHOD OF MAXIMUM LIKELIHOOD

1. - Introductory. — The measure of discrepancy, χ^2, between observation and hypothesis conforms to its well known series of distributions only in the limit when the number of observations tends to infinity; and in the theory of finite samples it is not obvious that this measure has any unique merit. In the theory of large samples it has been shown (1) that the test of Goodness of Fit based upon it is valid only if all statistics used in estimating adjustable parameters satisfy the criterion of efficiency, and further that all efficient statistics tend in large samples to equivalence. Recently, however (2), in the detailed investigation of a simple sampling problem arising in genetics the writer found that χ^2 is specially related to a particular type of efficient solution, namely to that obtained by the method of maximum likelihood. In view of the theoretical and practical importance of solutions obtained by this method in the exact theory of finite samples, it is of interest to trace how general the observed relationship may be, and to ascertain its bearing upon the interpretation of χ^2 derived from finite samples.

2. - A particular example. — In the particular case examined four types of offspring may occur, the expectations from a sample of n being

$$\frac{n}{4}(2+\theta,\ 1-\theta,\ 1-\theta,\ \theta)$$

in which θ is an adjustable parameter depending on the lineage between the two genetic factors concerned; if

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$$

are the numbers observed in the four classes, it is evident that the two expressions

$$x = a_1 + a_2 - 3(a_3 + a_4)$$
$$y = a_1 + a_3 - 3(a_2 + a_4)$$

(1) R. A. FISHER (1924): *The conditions under which χ^2 measures the discrepancy between observation and hypothesis.* Journal of the Royal Statistical Society, LXXXVII, pp. 442-449.

(2) R. A. FISHER (1928): *Statistical Methods for Research Workers.* Edinburgh, Oliver & Boyd, 2nd Edition, XI + 269 p.

have each an expectation zero for all values of θ, and that the random sampling distribution of each may be derived from the binomial expansion

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)^n$$

in entire independence of the value of θ.

In the comparison of four observed frequencies with a series of expectations amounting to the same total, three degrees of freedom will be available for discrepancies; if, however, the expectations have been calculated from the observations to which they are to be compared by the use of one adjustable parameter we may anticipate that the degrees of freedom left available for discrepancies will be reduced to two. We may identify these with x and y since these represent discrepancies which are not affected by modifications of the value of θ.

For any value of θ the value of χ^2 may be written

$$\chi^2=\frac{4}{n}\left\{\frac{a_1^2}{2+\theta}+\frac{a_2^2+a_3^2}{1-\theta}+\frac{a_4^2}{\theta}\right\}-n$$

which, for a given value of n, is a quadratic function of the frequencies; if, for our two chosen components x and y we form the quadratic expression

$$\frac{1}{1-\varrho^2}\left\{\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\varrho xy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right\} \tag{1}$$

and substitute for σ_1^2 and σ_2^2 the mean values of x^2 and y^2, and for $\varrho\sigma_1\sigma_2$ the mean value of xy, we obtain

$$Q^2=\frac{3}{8n(1-\theta)(1+2\theta)}\left\{x^2+y^2-\frac{2}{3}(4\theta-1)xy\right\}$$

which is also, for a given value of n, a quadratic function of the frequencies. On comparing the two expressions term by term it appears that

$$\chi^2-Q^2=\left\{\frac{a_1}{2+\theta}-\frac{a_2+a_3}{1-\theta}+\frac{a_4}{\theta}\right\}^2\frac{(1+2\theta)n}{2\theta(1-\theta)(2+\theta)}.$$

The value of χ^2-Q^2 is therefore always positive, except for the special value of θ for which

$$\frac{a_1}{2+\theta}-\frac{a_2+a_3}{1-\theta}+\frac{a_4}{\theta}=0$$

which is the equation for the estimate of θ provided by the method of maximum likelihood. For this method maximises

$$L=a_1\log(2+\theta)+(a_2+a_3)\log(1-\theta)+a_4\log\theta$$

whence

$$\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{a_1}{2+\theta}-\frac{a_2+a_3}{1-\theta}+\frac{a_4}{\theta}.$$

Moreover

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2}=-\left\{\frac{a_1}{(2+\theta)^2}+\frac{a_2+a_3}{(1-\theta)^2}+\frac{a_4}{\theta^2}\right\},$$

of which the mean value is $$-\frac{(1+2\theta)n}{2\theta(1-\theta)(2+\theta)},$$ which, with changed sign, is the quotient in our expression for χ^2-Q^2; or, otherwise interpreted, the quantity of information relative to θ which the data contain.

The use of χ^2 from finite samples is therefore exactly equivalent to the use of the bivariate expression (1) when the method of maximum likelihood is employed. The difference χ^2-Q^2 may be regarded as that part of the discrepancy between observation and hypothesis which is due to imperfect methods in the estimation of θ. This part will be large even in large samples if inefficient methods are used; but with efficient methods other than the method of maximum likelihood it may be expected to be sufficiently small for sufficiently large samples.

3. - The statistic defined by an equation linear in the frequencies, which is also efficient. — The particular instance examined is special in that the frequencies are expressible as linear functions of the unknown parameter. The connection between χ^2 and the maximum likelihood solution does not, however, flow from this fact, but from the fact, which is true in general, that the equation of maximum likelihood is linear in the frequencies. The maximum likelihood equation may indeed be derived from the conditions that it shall be linear in the frequencies, and efficient for all values of θ.

Consider any statistic T defined as the relevant root of an equation of the form

$$X=S(ka)=0$$

in which a stands for the frequency in any class, k for a coefficient, which is to be a functions of θ, and S for summation over all classes. Then the sampling variance of T from large samples may be equated to the sampling variance of X, for a given value of θ, divided by the square of the mean value of $\partial X/\partial\theta$.

But, if we let p denote the probability of any class,

$$V(X)=nS(pk^2);$$

and the mean value of $\partial X/\partial\theta$ is given by,

$$\partial\overline{X}/\partial\theta=nS\left(p\frac{\partial k}{\partial\theta}\right).$$

If now the statistic is consistent

$$S(kp)=0$$

for all values of θ, and hence

$$S\left(p\frac{\partial k}{\partial\theta}\right)+S\left(k\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)=0;$$

so we may write

$$V(T) = \frac{S(pk^2)}{nS^2\left(k\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)}.$$

If we minimise this for variations of k it appears that

$$\frac{kp}{S(pk^2)} = \frac{\partial p/\partial \theta}{S(k\partial p/\partial \theta)}$$

for each class, or

$$ka\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta}.$$

Using these functions we find

$$V(T) = 1 \div nS\left\{\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)^2\right\}$$

and the equation for T becomes

$$S\left(\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) = 0$$

which is in fact the equation of maximum likelihood.

4. - The resolution of χ^2 into its components. — In general with any number of parameters $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ to be estimated, the equations of maximum likelihood will be

$$S\left\{\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta_1}\right\} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S\left\{\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta_r}\right\} = 0.$$

Any linear function of the frequencies,

$$x_1 = S(ka),$$

will have a mean value zero provided that

$$S(kp) = 0;$$

and this mean will be stationary for variations of $\theta_1, \ldots, \theta_r$ provided the r conditions,

$$S\left(k\frac{\partial p}{\partial \theta}\right) = 0, \tag{2}$$

are fulfilled. If the number of classes is s it will then be possible to form $s-r-1$ quantities x fulfilling these conditions, and such that for any two of them x_c and x_d the condition

$$S(pk_c k_d) = 0 \tag{3}$$

shall also be satisfied.

Considering now the quantities

$$\xi = \frac{a - pn}{\sqrt{pn}}$$

as rectangular coordinates of a point in s dimensions. Since

$$x = S(k\xi\sqrt{pn})$$

it follows that

$$\frac{x}{\sqrt{S(npk^2)}} = S\left\{\frac{k}{\sqrt{S(k^2)}}\,\xi\right\}$$

the $s-r-1$ values of which represent the coordinates of the same point with respect to $s-r-1$ new axes, while the condition (3) shows that these new axes are mutually orthogonal and (2) shows that they lie in the surfaces

$$S\left\{\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right\} = 0,$$

and evidently also in

$$S(a) = n.$$

But

$$S(\xi^2) = \chi^2$$

is the square of the distance of the sample point from the origin, and

$$S\left\{\frac{x^2}{S(npk^2)}\right\}$$

which we may now write, Q^2, must represent the square of its distance from the generalised surface

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{s-r-1} = 0$$

and these quantities will necessarily be the same if the remaining r coordinates, which can be built up as linear functions of

$$S\left(\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right)$$

are all zero. In fact $\chi^2 - Q^2$ must always be a positive quantity expressible as a homogeneous quadratic function of the quantities

$$S\left(\frac{a}{p}\frac{\partial p}{\partial \theta}\right),$$

Q^2 being the sum of the squares of $s-r-1$ linear functions of the frequencies the mean value of each of which is stationary for variations of the parameters.

It follows that, in the theory of large samples, we may always speak of χ^2 as made up of two parts, one of which is due to errors of estimation, and vanishes when estimation is efficient, while the other is distributed in random samples as is the sum of the squares of $s-r-1$ quantities each normally distributed about zero with unit standard deviation. In the theory of finite samples the former

portion vanishes only when the adjustable parameters are estimated by the method of maximum likelihood, while the latter is the sum of the squares of quantities distributed, generally discontinuously, but each with unit standard deviation, and without mutual correlation for the particular set of parametric values arrived at by the method of maximum likelihood, and such that the mean of each is stationary at zero for variations of the parameters in the neighbourhood of these values.

V. ROMANOVSKY (Taškent - U. S. S. R.)

SUR LA COMPARAISON DES MOYENNES DES VARIABLES ALÉATOIRES DÉPENDANTES POUR LES ÉPREUVES INDÉPENDANTES

On rencontre un problème important dans la pratique agronomique qui concerne la comparaison des moyennes des résultats d'expériments agronomiques où les quantités comparées (les récoltes de deux sortes du coton, par exemple) sont en corrélation (1). On sait quelle utilité a la distribution de « Student » pour ce problème quand les quantités comparées sont indépendantes. Or cette distribution peut être appliquée aussi dans le cas des quantités liées par une corrélation normale, parce qu'on a la théorème suivant:

Soient x et y deux variables aléatoires soumises à la loi normale de distribution

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-x_0)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-x_0)(y-y_0)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-y_0)^2}{\sigma_y^2}\right]},$$

où x_0, y_0, σ_x^2 et σ_y^2 sont les espérences mathématiques de x, y, $(x-x_0)^2$ et $(y-y_0)^2$ et r — coefficient de correlation de x et y. Soient ensuite

$$\bar{x} = \frac{1}{s}\sum x_i, \qquad \bar{y} = \frac{1}{s}\sum y_i,$$

où x_i et y_i ($i=1, 2, \ldots, s$) sont les valeurs de x, y observées dans les s épreuves indépendantes.

Alors la loi de distribution de la quantité

$$\tau = \frac{\bar{x} - \bar{y} - (x_0 - y_0)}{\sqrt{\frac{1}{s}\sum [x_i - \bar{x} - (y_i - \bar{y})]^2}}$$

dans une suite infinie des séries de telles épreuves est

$$\psi(\tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)} (1+\tau^2)^{-\frac{s}{2}},$$

c'est-à-dire la loi de « Student ».

---

(1) Voir, par exemple, un travail bien intéressant sur ce sujet: F. L. ENGLEDOW and F. G. YULE: *The principles and practice of Yeld Trials,* Empire Cotton Growing Corporation, London, 1926.

Ce théorème se démontre à l'aide des théorèmes bien connus sur la distribution des moyennes et des moments empiriques du second ordre dans les épreuves avec les variables aléatoires normalement distribuées.

Il est à remarquer que la loi $\psi(\tau)$ ne dépend que de x_0 et y_0 et est valable pour s quelconque, par exemple petit, ce qui est important pour la pratique. Dans les applications agronomiques ou autres on peut supposer $x_0=y_0$ et alors la loi $\psi(\tau)$ nous donne le moyen d'établir dans quelle mésure nous pouvons accepter que la différence $\bar{x}-\bar{y}$ est du au hasard, sous condition, bien entendu, que les variables comparées puissent être regardées comme normalement distribuées dans l'ensemble général des épreuves pareilles à celles qu'on a effectuées.

V. ROMANOVSKY (Taškent - U. S. S. R.)

SUR LE CALCUL DES MOMENTS DES MOYENNES DES FONCTIONS DES VARIABLES ALÉATOIRES POUR LES ÉPREUVES INDÉPENDANTES

Soient

$$x, \quad y,\ldots, \quad z$$

k variables aléatoires dont la loi de distribution est définie par la condition que la probabitité des égalités simultanées

(1) $$x=x_g, \quad y=y_h,\ldots, \quad z=z_i$$

est $p_{gh\ldots i}$,

(2) $$x_g \ (g=\overline{1, n_x}), \quad y_h \ (h=\overline{1, n_y}),\ldots, \quad z_i \ (i=\overline{1, n_z})$$

étant les valeurs de x, y,..., z telles que

$$\sum_{g=1}^{n_x}\sum_{h=1}^{n_y}\ldots\sum_{i=1}^{n_z} p_{gh\ldots i}=1.$$

Soient ensuite données l fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2,\ldots, \quad \varphi_l$$

de x, y,..., z définies pour les valeurs (1). Considérons s épreuves indépendantes sur les variables x, y,..., z, en désignant par $a_{gh\ldots i}$ la fréquence du système (1) dans ces épreuves. Soient

$$\overline{\varphi}_j=\frac{1}{s}\sum_{g, h,\ldots, i} a_{gh\ldots i}\varphi_j(x_g, y_h,\ldots, z_i)$$

les moyennes des nos fonctions pour ces épreuves.

Alors, en supposant que la loi de distribution de x, y,..., z reste invariable dans nos épreuves et en désignant par $E(u)$ l'espérance mathématique (moment stochastique ou, simplement, moment) d'une variable aléatoire u quelconque, on aura les résultats suivants:

I. La génératrice des moments $E(\overline{\varphi}_1^{f_1}\ldots \overline{\varphi}_l^{f_l})$, f_j étant entiers positifs, est

$$U\equiv\left(\sum_{g, h,\ldots,} p_{gh\ldots i}\, e^{\frac{1}{s}\sum_j t_j\varphi_j(x_g, y_h,\ldots, z_i)}\right)^s,$$

de sorte que

$$E(\overline{\varphi}_1^{f_1}\ldots \overline{\varphi}_l^{f_l})=\left[\frac{\partial^{f_1+\ldots+f_l}U}{\partial t_1^{f_1}\ldots \partial t_l^{f_l}}\right]_{t_1=\ldots=t_l=0}.$$

On en déduit que

$$E(\overline{\varphi}_1^{f_1} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l}) = \sum \frac{f_1!}{(f_{11}!)^{\nu_1} \dots (f_{r1}!)^{\nu_r}} \dots \frac{f_l!}{(f_{1l}!)^{\nu_1} \dots (f_{rl}!)^{\nu_r}} \frac{s_\nu}{\nu_1! \dots \nu_r!} a^{\nu_1}_{f_{11} \dots f_{1l}} \dots a^{\nu_r}_{f_{r1} \dots f_{rl}},$$

où

$$a_{\lambda_1 \dots \lambda_l} = s^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_l)} E(\varphi_1^{\lambda_1} \dots \varphi_l^{\lambda_l}),$$
$$s_\nu = s(s-1) \dots (s-\nu+1),$$
$$\nu = \nu_1 + \dots + \nu_r, \qquad r \leqq s$$

et la somme est prise pour tous f et ν_i entiers positifs satisfaisant aux conditions

$$\nu_1 f_{1j} + \nu_2 f_{2j} + \dots + \nu_r f_{rj} = f_j \qquad (j = 1, 2, \dots, l)$$

et tels que les indices

$$f_{11} f_{12} \dots f_{1l}, \quad f_{21} f_{22} \dots f_{2l}, \dots, \quad f_{r1} f_{r2} \dots f_{rl}$$

des a soient tous différents.

III. On peut obtenir les moments $E(\overline{\varphi}_1^{f_1} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l})$ l'un après l'autre par les relations récurrentes

$$\begin{aligned} E(\overline{\varphi}_1^{f_1} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l}) &= O^{10 \dots 0}[E(\overline{\varphi}_1^{f_1 - 1} \overline{\varphi}_2^{f_2} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l})] \\ &= O^{01 \dots 0}[E(\overline{\varphi}_1^{f_1} \overline{\varphi}_2^{f_2 - 1} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l})] \\ &= \dots \dots \dots \dots \dots \\ &= O^{00 \dots 1}[E(\overline{\varphi}_1^{f_1} \overline{\varphi}_2^{f_2} \dots \overline{\varphi}_l^{f_l - 1})] \end{aligned}$$

et les formules initiales

$$E(\overline{\varphi}_1) = s_1 a_{10 \dots 0}, \quad E(\overline{\varphi}_2) = s_1 a_{01 \dots 0}, \dots, \quad E(\overline{\varphi}_l) = s_1 a_{00 \dots 1},$$

où $O^{10 \dots 0}$, $O^{01 \dots 0}$, ..., $O^{00 \dots 1}$ sont les signes des opérations définies par les conditions qui suivent:

a) ces opérations satisfont aux règles ordinaires de différentiation des sommes et des produits des fonctions, de sorte que, par exemple,

$$O(u+v-w) = O(u) + O(v) - O(w),$$
$$O(uvw) = wvO(u) + wuO(v) + uvO(w),$$

O étant l'une quelconque de ces opérations;

b) elles satisfont aux conditions spéciales:

$$(1) \qquad \begin{aligned} O^{10 \dots 0}(s_k) &= s_{k+1} a_{10 \dots 0}, \\ O^{01 \dots 0}(s_k) &= s_{k+1} a_{01 \dots 0}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

où $s_k = s(s-1) \dots (s-k+1)$, $s_1 = s$;

$$(2) \qquad \begin{aligned} O^{10 \dots 0}(a^{\nu}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l}) &= \nu a^{\nu-1}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l} a_{\lambda_1 + 1, \lambda_2, \dots, \lambda_l}, \\ O^{01 \dots 0}(a^{\nu}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l}) &= \nu a^{\nu-1}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l} a_{\lambda_1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_l}, \quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

ν et λ étant des entiers positifs quelconques;

$$(3) \qquad O^{10 \dots 0}(A) = O^{01 \dots 0}(A) = \dots \equiv 0,$$

A étant une constante numérique quelconque.

IV. La loi de distribution des moyennes $\bar{\varphi}_j$, pour s assez grand, peut être posée approximativement égale à

$$\frac{s^{\frac{l}{2}}}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}\sigma\varphi_1 \dots \sigma\varphi_l \sqrt{R}} e^{-\frac{s}{2R}\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l} R_{ij}\frac{(\bar{\varphi}_i-\varphi_i^0)(\bar{\varphi}_j-\varphi_j^0)}{\sigma\varphi_i\sigma\varphi_j}},$$

où

$$R=\begin{vmatrix} 1, & r_{12}, & r_{13},\dots, & r_{1l} \\ r_{21}, & 1, & r_{23},\dots, & r_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{l1}, & r_{l2}, & r_{l3},\dots, & 1 \end{vmatrix},$$

R_{ij} est le mineur de R correspondant à la ligne i et à la colonne j,

$$r_{ij}=\frac{E[(\varphi_i-\varphi_i^0)(\varphi_j-\varphi_j^0)]}{\sigma\varphi_i\sigma\varphi_j}, \qquad \sigma^2\varphi_i=E[(\varphi_i-\varphi_i^0)^2], \qquad \varphi_i^0=E(\varphi_i).$$

V. Dans les résultats I-III on peut substituer à la loi considérée de distribution de $x, y,\dots, z$, la loi la plus générale définie par la condition que la probabilité des inégalités simultanées

$$-\infty \leqq x \leqq X, \quad -\infty \leqq y \leqq Y,\dots, \quad -\infty \leqq z \leqq Z$$

est donnée pour $X, Y,\dots, Z$ réels quelconques par l'intégrale multiple de Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{X}\int_{-\infty}^{Y}\dots\int_{-\infty}^{Z} d^k f(x, y,\dots, z),$$

$f(x, y,\dots, z)$ étant la loi intégrale de distribution de $x, y,\dots, z$. La génératrice U est alors

$$U\equiv\left(\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{s}\sum t_j\varphi_j} d^k f(x, y,\dots, z)\right)^s$$

et les α sont définies par l'égalité

$$\alpha_{\lambda_1\dots\lambda_l}=\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{\lambda_1}\dots\varphi_l^{\lambda_l} d^k f(x, y,\dots, z).$$

On aura aussi le résultat IV sous certaines conditions que nous ommettons ici.

Les résultats exposés ont une grande importance pour la construction stochastique générale de la théorie de corrélation multiple ainsi que pour un grand nombre d'autres problèmes de statistique. Ils peuvent être étendus aux cas des épreuves indépendantes et telles que la loi de distribution de $x, y,\dots, z$ change pour chaque épreuve. Dans ce cas, aussi, les lois discrètes peuvent être remplacées par des lois quelconques.

V. ROMANOVSKY (Taškent - U. S. S. R.)

SUR LA GÉNÉRALISATION DES COURBES DE PEARSON

En 1924 (Biometrika, vol. XVI) j'ai publié certaine généralisation des courbes de Pearson des types I, II, III, analogue à la généralisation bien connue de Gram-Charlier du type VII (courbe normale). Maintenant je peux donner les généralisations pareilles pour tous les autres types des courbes de Pearson. C'est ce que je vais esquisser brièvement.

Dans toutes ces généralisations, on remplace l'équation de type considéré par un développement

$$y = A_0 u_0 + A_1 u_1 + A_2 u_2 + \ldots . \tag{1}$$

qui est fini ou infini et dont le membre premier $y = A_0 u_0$ nous fournit l'équation correspondante de Pearson. Dans tous les cas on a

$$u_h = u_0(x)\varphi_h(x) \qquad [h = 0, 1, 2, \ldots . ; \ \varphi_0(x) = 1]$$

où $\varphi_h(x)$ représentent des polynômes des degrés $h = 0, 1, 2, \ldots .$ et tels que

$$\begin{cases} \int u_0 \varphi_h \varphi_g dx = 0 & \text{pour} \quad h \neq g, \\ \neq 0 & \text{pour} \quad h = g, \end{cases} \tag{2}$$

l'intégration étant effectuée dans les limites convenables.

Si l'on ne retient que $k+1$ membres premiers de ce développement, on aura

$$y = A_0 u_0 + A_1 u_1 + \ldots . + A_k u_k ,$$

et l'approximation de cette série finie à la fonction qu'on cherche de représenter à son aide peut être jugée par la quantité

$$\delta_k^2 = \int u_0^{-1} y^2 dx - \sum_{h=0}^{k} A_h^2 \int u_0 \varphi_h^2 dx ,$$

qui est le minimum de l'expression

$$\int u_0^{-1} \left(y - \sum_{h=0}^{k} A_h u_h \right)^2 dx$$

atteint pour

$$A_h = \frac{\int y \varphi_h dx}{\int u_0 \varphi_h^2 dx} \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots . , k). \tag{3}$$

Nous considérerons maintenant les généralisations diverses des courbes de Pearson.

$$\text{Type IV: } y=y_0\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m} e^{-\nu \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}} \qquad (m>0).$$

Les moments

$$\mu_n'=\int_{-\infty}^{\infty} yx^n dx$$

restent finis pour ce type tant que $n<(2m-1)$ et il n'admet qu'un développement fini de la forme (1) et le nombre des termes de ce développement ne peut pas surpasser $\frac{2m-1}{2}$. On définit les fonction u_h pour ce type par les équations

$$u_h \equiv u_0\varphi_h(m, x)=D^h\left[(a^2+x^2)^{-m+h}e^{-\nu \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}}\right];$$

$$\varphi_{h+1}(m, x)=[2(h+1-m)x-\nu a]\varphi_h(m, x)+2h(h+1-m)(a^2+x^2)\varphi_{h-1}(m-1, x);$$

$$\varphi_h(m, x)=[2(1-m)x-\nu a]\varphi_{h-1}(m-1, x)+(a^2+x^2)\varphi'_{h-1}(m-1, x),$$

où $D^h=\frac{d^h}{dx^h}$.

On a aussi

$$D^h\varphi_h(m, x)=h(h-2m+1)D^{h-1}\varphi_{h-1}(m-1, x)$$

d'où

$$D^h\varphi_h(m, x)=h!\,(h-2m+1)(h-2m+2)\ldots\ldots(2h-2m).$$

On démontre aisément que les égalités (2) ont lieu tant que $h+g$ est moindre $2m-1$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0\varphi_h^2(m, x)dx=(-1)^h D^h\varphi_h(m, x)\int_{-\infty}^{\infty} u_0(a^2+x^2)^h dx$$

$$=h!\,(2m-h-1)(2m-h-2)\ldots\ldots(2m-2h)a^{2h-2m+1}F(2m-2h-2, \nu),$$

où

$$F(2m-2h-2, \nu)=e^{-\frac{1}{2}\nu\pi}\int_0^{\pi}\sin^{2m-2h-2}\varphi e^{\nu\varphi}d\varphi.$$

Les égalités (3) nous donnent ensuite les coefficients du développement (1). On aura $A_1=A_2=A_3=A_4=0$ si les constantes y_0, a, m, ν sont définies d'après Pearson.

$$\text{Type V: } y=y_0x^{-p}e^{-\gamma/z} \quad (p>1, \gamma>0).$$

Ce type admet deux manières de généralisation.

Première manière. - La fréquence relative des valeurs de x contenues dans un intervalle infinitésimal est pour ce type

$$dy=y_0x^{-p}e^{-\gamma/x}dx.$$

En posant ici $x=\frac{1}{z}$, on aura (pour $dy>0$, $dz>0$)

$$dy=y_0z^{p-2}e^{-\gamma z}dz.$$

On voit que les distributions de ce type peuvent être transformées dans celles du type III si l'on considère $\frac{1}{x}$ au lieu de x. Il découle de là qu'on peut représenter les distributions s'approchant à ce type par le développement (1) infini où φ_h seront des polynômes de z définis par les relations:

$$u_0\varphi_h(z)=D^h(u_0z^h) \qquad (k=0,1,2,\ldots.;\ u_0=z^{p-2}e^{-\gamma z};\ \varphi_0(z)=1);$$
$$\varphi_{h+1}(z)=(h+p-1-\gamma z)\varphi_h(z)-\gamma z\psi_h(z),$$
$$\psi_h(z)=h[\psi_{h-1}(z)+\varphi_{h-1}(z)]=h\varphi_{h-1}(z)+h(h-1)\varphi_{h-2}(z)+\ldots.+h!\,\varphi_0(z).$$

On a

$$\int_0^\infty u_0\varphi_h^2dz=h!\,\gamma^{1-p}(p+h-2)(p+h-3)\ldots.(p-1)\Gamma(p-1)$$

et le développement (1) sera de la forme

$$y=y_0x^{-p}e^{-\gamma/x}\left[1+\sum_{h=1}^{\infty}\beta_h\varphi_h\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$\beta_h=\frac{S_h}{h!\,(p+h-2)\ldots.(p-1)S_0}, \qquad S_h=\int_0^\infty y\varphi_h(z)dz,$$

y_0, p et γ étant définis d'après Pearson.

Seconde manière. - Les moments μ_n' ne sont finis pour le type V que pour $n<p-1$. Par cette cause, en posant

$$u_0=x^{-p}e^{-\gamma/x}, \qquad u_0\varphi_h(x)=D^h(u_0x^{2h}) \qquad (h=0,1,2,\ldots.)$$

on aura le développement (1) fini où l'indice des $\varphi_h(x)$ doit être $<\frac{p-1}{2}$. Pour de tels indices seront vérifiées les conditions (2) et l'on aura

$$\int_0^\infty u_0\varphi_h^2dx=\gamma^{2h-p+1}h!\,(p-2h)(p-2h+1)\ldots.(p-h-1).$$

En définissant les constantes y_0, p et γ d'après Pearson, on aura $A_1=A_2=A_3=0$.

Les polynômes $\varphi_h(x)$ vérifient les relations:

$$\varphi_{h+1}(p,x)=\gamma\varphi_h(p,x)+(2h+2-p)x\varphi_h(p-1,x);$$
$$\varphi_{h+1}(p,x)=[(2h+2-p)x+\gamma]\varphi_h(p,x)+h(2h+2-p)x^2\varphi_{h-1}(p-2,x);$$
$$\varphi_{h+1}(p,x)=[(2-p)x+\gamma]\varphi_h(p-2,x)+x^2\varphi_h'(p-2,x);$$
$$D^h\varphi_h(p,x)=h(2h-p)D^{h-1}\varphi_{h-1}(p-1,x).$$

Type VI: $y=y_0(x-a)^qx^{-p} \quad (a>0,\ q>-1,\ p>q+1).$

Ce type aussi peut être généralisé de deux manières.

Première manière. - En posant $\frac{x}{a}=\frac{1}{z}$, on transforme

$$dy=y_0(x-a)^qx^{-p}dx$$

en

$$dy=y_0a^{q-p+1}(1-z)^qz^rdz \qquad (r=p-q-2),$$

d'où on voit que les distributions s'approchant à ce type peuvent être représentées par le développement (1) infini où $\varphi_h(z)$ représentent les polynômes de Jacobi définis par les relations:

$$u_0=(1-z)^q z^r; \qquad u_0\varphi_h(q,r,z)=D^h[u_0(1-z)^h z^h] \quad (h=0,1,2,\ldots.);$$
$$\varphi_{h+1}(q,r,z)=[-(q+r+2h+2)z+r+h+1]\varphi_h(q,r,z)-$$
$$-h(q+r+2h+2)(1-z)z\varphi_{h-1}(q+1,r+1,z);$$
$$\varphi_{h+1}(q,r,z)=[-(q+r+2)z+r+1]\varphi_h(q+1,r+1,z)+$$
$$+(1-z)z\varphi_h'(q+1,r+1,z).$$

On a $$D^h\varphi_h(q,r,z)=h!\,(q+r+h+1)(q+r+h+2)\ldots.\,(q+r+2h)$$

et le développement (1) sera

$$y=y_0(x-a)^q x^{-p}\Big[1+\sum_{h=1}^{\infty}\beta_h\varphi_h\Big(q,r,\frac{a}{x}\Big)\Big],$$

où

$$\beta_h=\frac{S_h}{S_0}\,\frac{p+2h-1}{h!}\,\frac{p(p+1)\ldots.\,(p+h-2)}{(q+1)\ldots.\,(q+h)(p-q-1)(p-q)\ldots.\,(p-q+h-1)},$$

$$S_h=\int_0^1 y\varphi_h(q,r,z)\,dz.$$

Seconde manière. - Les moments μ_n' pour les distributions du type VI ne sont finis que pour $n<p-q-1$. De là les développements (1) finis suivant les fonctions u_h où l'indice h doit être $<\frac{p-q-1}{2}$, les u_h étant définies par les relations:

$$u_0=(x-a)^q x^{-p}; \qquad u_h=u_0\varphi_h(q,p,x)=D^h[u_0(x-a)^h x^h] \quad (h=0,1,2,\ldots.)$$
$$\varphi_{h+1}(q,p,x)=[(q-p+2h+2)x-a(h+1-p)]\varphi_h(q,p,x)+$$
$$+h(q-p+2h+2)(x-a)x\varphi_{h-1}(q+1,p-1,x);$$
$$\varphi_{h+1}(q,p,x)=[(q-p+2)x+a(p-1)]\varphi_h(q+1,p-1,x)+$$
$$+(x-a)x\varphi_h'(q+1,p-1,x).$$

Les conditions (2) se vérifient tant que $h+g<p-q-1$ et l'on a

$$\int_a^{\infty} u_0\varphi_h^2\,dx=(-1)^h h!\,(q-p+h+1)\ldots.\,(q-p+2h)\cdot$$
$$\cdot\,a^{q-p+2h+1}\,\frac{\Gamma(q+h+1)\Gamma(p-q-2h-1)}{\Gamma(p-h)}.$$

En définissant y_0, a, p, q comme le fait Pearson, on aura $A_1=A_2=A_3=A_4=0$.

Il est claire que les types restants des courbes de Pearson (VIII-XII) peuvent être généralisés comme les types que nous avons considérés.

On remarque encore que les types IV et V (seconde manière) nous donnent de nouveaux polynômes $\varphi_h(x)$ qui sont biorthogonaux avec les fonctions $u_h(x)$ correspondantes et qui sont pareils aux polynômes classiques de LEGENDRE, LAGUERRE, JACOBI et TCHEBYCHEFF-HERMITE.

E. SLUTSKY (Moskva - U. R. S. S.)

SUR LES FONCTIONS ÉVENTUELLES COMPACTES (1)

1. - Il y a beaucoup des phénomènes, dont le cours dépend à chaque moment, au moins partiellement, de causes nouvelles qui n'ont encore laissé aucune trace dans son histoire passée. Les fonctions empiriques de cette nature doivent être regardées comme des fonctions éventuelles et ne peuvent être étudiées que par les méthodes de la théorie des probabilités, du moins si elles ne perdent pas leur caractère éventuel après être réunies avec un nombre praticable de fonctions semblables.

Il me semble, cependant, qu'il existe une lacune dans les méthodes qui ont été appliquées à leur étude. Le schème de la suite des valeurs isolées dont on se sert ici exclusivement n'est pas adéquat aux phénomènes naturels qui se développent sans interruptions dans le temps.

2. - Envisageons maintenant le schème suivant.

Soit qu'à chaque point (t) dans un intervalle donné (a, b) corresponde une variable éventuelle X_t, exclusion faite, peut être, pour un ensemble de mesure nulle (2).

Soit que sur chacune de ces variables une épreuve soit faite, d'où pour chaque t il résultera une valeur définie x_t. On peut donner à l'ensemble de ces valeurs le nom de la *fonction éventuelle compacte.* Cette fonction sera *régulière,* par exemple, jusqu'à l'ordre 2, si tout ses moments de l'ordre 1 et de l'ordre 2 sont des fonctions continues de la variable indépendante t. Cette fonction sera *homogène* jusqu'au même ordre si les moments Ex_t et Ex_t^2 sont constants et le moment-produit $Ex_t x_{t+\tau}$ est la fonction seulement de la distance des ordonnées respectives (τ).

Si les déviations $(x_t - Ex_t)$ sont négligeables, on peut souvent étudier le phénomène respectif sans faire intervenir le calcul des probabilités. S'ils ne sont pas négligeables, ce qui a lieu, comme je crois, dans la météorologie, la géo-

(1) Voir les notes du même auteur dans les C. R. t. 187, séance du 13 août 1928, p. 370, t. 187, séance du 12 novembre 1928, p. 878, et t. 189, séance du 2 septembre 1929, p. 384.

(2) Ou, pour dire plus exactement, *de mesure stochastique nulle* (voir plus loin § 7).

graphie, dans les sciences économiques etc., il sera necessaire de considérer s'il n'est, peut être, pas possible d'admettre l'hypothèse de l'homogenéité ou au moins de la regularité. Si les faits de l'expérience contredisent cette dernière hypothèse, il ne sera pas possible en général de trouver les paramètres stochastiques de notre fonction empirique, parceque le nombre des inconnues depassera alors le nombre des équations.

3. - Je vais énoncer maintenant quelques propositions sur les fonctions éventuelles regulières jusqu'à l'ordre 2.

Nous avons:

Ex_t et Ex_t^2 sont les fonctions continues de t;

$Ex_t x_{t+\tau}$ est la fonction continue de t et de τ.

Alors il est aisé de montrer que les espérances mathématiques $E(x_{t+\tau}-x_t)$ et $E(x_{t+\tau}-x_t)^2$ convergent vers 0 avec τ, d'où il suit immédiatement par le raisonnement bien connu, que si la distance entre les ordonnées x_t et $x_{t+\tau}$ est assez petite, la probabilité que la valeur absolue de leur différence ne dépassera pas un nombre arbitrairement petit sera aussi près de l'unité qu'on veut.

C'est ce que j'appelle la *continuité stochastique.*

La continuité stochastique devient une chose triviale quand notre fonction est continue dans le sens ordinaire. Il est cependant intéressant qu'il est possible de construire un exemple d'une fonction éventuelle qui dans certaines suppositions est continue dans le sens ordinaire, et dans d'autres suppositions n'est continue que dans le sens stochastique. Dans le dernier cas nous pouvons faire varier les conditions de telle manière que notre fonction, en restant toujours stochastiquement continue, aura (et c'est avec la probabilité 1) les points de discontinuité dans le sens ordinaire dans chaque intervalle si petit qu'on veut.

4. - Pour ce qui suit, il est nécessaire d'introduire une lemme que j'appelle *le criterium de la convergence stochastique.*

Soit z_h une variable éventuelle dépendant d'un paramètre h. Soit $h>k>0$. Supposons que les espérances mathématiques $E(z_h-z_k)$ et $E(x_h-x_k)^2$ convergent uniformement vers 0 avec h. Dans ces conditions, l'existence d'une limite stochastique de notre variable éventuelle (z_h) est presque certaine. Autrement dit si, les valeurs ε et ϑ étant aussi petites qu'on veut et h étant suffisamment petit, nous écrivons l'inégalité

$$P\{|z_h-A|<\varepsilon\}>1-\vartheta$$

la probabilité de l'existence de A satisfaisant cette inégalité sera égale à 1.

5. - Revenons à notre fonction éventuelle regulière jusqu'à l'ordre 2 et construisons une somme que j'appelle *quasi-Riemannienne.* Décomposons un inter-

valle (a, b) en intervalles partiels h_1, h_2,...., h_n, avec la borne supérieure h. Soit t_i un point pris *au hasard* sur l'intervalle partiel avec le même indice (i), et soit x_i la valeur respective de x_t. Alors posons

$$S_h = \sum_{a,\,b} x_i h_i.$$

Soit S_k une autre somme analogue formée pour notre fonction dans le même intervalle avec la borne supérieure des intervalles partiels k. Nous supposons que $h > k > 0$.

Si les espérances mathématiques Ex_t, Ex_t^2, $Ex_t x_{t+\tau}$ sont des fonctions continues, alors il est aisé de montrer, que les espérances mathématiques $E(S_h - S_k)$ et $E(S_h - S_k)^2$ convergent uniformement vers 0 avec h.

Il existe par conséquent presque toujours un nombre qui est la limite stochastique de S_h, quand h devient si petit qu'on veut. Je propose de nommer cette limite *l'intégrale stochastique*. En symbolisant le mot « stochastique » par la lettre (S) et la limite stochastique ou bernoullienne par la lettre (B), j'écris

$$(S)\int_a^b x_t dt = \lim_B \sum_{a,\,b} x_i h_i.$$

6. - De la même manière, on peut introduire *la dérivée stochastique*:

$$(S)\ \frac{dx_t}{dt} = \lim_B \left(\frac{x_{t+\tau} - x_t}{\tau}\right),$$

dont l'existence, d'après le même critérium de la convergence, sera *presque certaine* si

$$\lim E(\varphi_\tau - \varphi_h) = 0 \quad \text{et} \quad \lim E(\varphi_\tau - \varphi_h)^2 = 0$$

où

$$\varphi_\tau = \frac{x_{t+\tau} - x_t}{\tau} \quad \text{et} \quad \varphi_h = \frac{x_{t+h} - x_t}{h}, \qquad (\tau > h > 0).$$

Supposons par exemple que Ex_t possède une dérivée, que $E(x_t - Ex_t)^2$ soit constant et que le coefficient de la correlation entre x_t et $x_{t+\tau}$, ne dépendant que de τ, possède deux premières dérivées finies et continues dans le point $\tau = 0$ (1). Alors il est aisé de montrer l'existence de la dérivée stochastique qui existera, par exemple, si $r_\tau = e^{-\tau^2/2g^2}$ et qui n'existera pas si $r_\tau = e^{-k|\tau|}$.

7. - Est-ce que nos fonctions sont au moins *presque* toujours mesurable (L)? Je n'ai pas réussi jusqu'à présent à donner une réponse exacte à cette question importante, quoique je présume qu'elle sera négative. Mais ce que nous savons déjà, c'est que nos fonctions sont intégrables dans un sens nouveau, ce qui veut

(1) Cette condition doit être substituée par une autre plus restreinte que j'ai donnée dans les C. R. t. 187, p. 878, séance du 12 novembre 1928.

dire qu'elles devront aussi être mesurables dans un sens conforme à la notion de l'intégrale stochastique.

Soit A un ensemble mesurable (L) dans l'intervalle $(a, a+l)$. Sa mesure étant μ_A, la probabilité qu'un point pris au hasard dans $(a, a+l)$ appartiendra à A sera $p_A=\frac{\mu_A}{l}$.

Soit A un ensemble qui n'est pas mesurable (L). Nous supposerons néanmoins que la probabilité p_A qu'un point pris au hasard dans $(a, a+l)$ appartiendra à A existe et nous définirons *la mesure stochastique* de A par l'équation $\mu_A=p_A l$.

Un point (t) est pris au hasard s'il est défini par un nombre t/l dont la réprésentation décimale est donnée par une série illimitée d'épreuves, chaque chiffre étant également probable dans chaque épreuve.

Voici un exemple d'un ensemble non mesurable (L) [1] qui est mesurable dans le sens stochastique.

Par une série de rotations φ^n, $(n=0, \pm 1, \pm 2....)$ d'une circonférence tous ses points seront distribués parmi les familles de points supperposables, chaque famille contenant un ensemble dénombrable des points et l'ensemble des familles étant de la puissance du continu. Les points de chaque ensemble étant numérotés $(.... -2, -1, 0, 1, 2,....)$ les points ayant le même indice (k) définiront un ensemble A_k. Tous A_k étant supperposables, il est aisé de voir qu'ils ne sont pas mesurables (L). Or les probabilités p_{A_k} ne peuvent être inégales. En effet, il est clair que la rotation qui transforme, par exemple, A_1 en A_2 est équivalente au changement des coordonnées. Mais il est évident que les probabilités respectives ne peuvent pas dépendre du choix arbitraire du point 0. Nous aurons donc $p_{A_k}=0$, d'où il suit que l'ensemble A_k est de mesure stochastique nulle.

8. - Revenons à notre fonction éventuelle. En posant $\tau>h>0$ et supposant la régularité jusqu'à l'ordre deux, il est aisé de prouver que

$$\lim_{\tau\to 0} E(y_{t+\tau}-y_{t+h})=0 \quad \text{et} \quad \lim_{\tau\to 0} E(y_{t+\tau}-y_{t+h})^2=0$$

et c'est uniformément par rapport à h. Nous concluons de là qu'il existe *presque certainement* une limite stochastique $\lim_B y_{t+0}$ (et également $\lim_B y_{t-0}$). Il est aisé de montrer aussi que la probabilité de l'équation

$$\lim_B y_{t-0}=\lim_B y_{t+0}=y_t$$

est égale à 1.

Que pouvons-nous dire de l'ensemble des points où cette égalité n'est pas vraie? Désignons la probabilité qu'un point donné sera un point exceptionnel par π_A.

---

[1] Voir F. HAUSDORFF: *Grundzüge der Mengenlehre*, 1914, p. 401.

La probabilité qu'un point pris au hasard dans un intervalle donné appartiendra à l'ensemble des points exceptionnels (A) soit désignée par p_A. Soit P_a la probabilité des cas où la fonction éventuelle sera de telle sorte que $p_A > a > 0$.

Il est évident que $\pi_A \geqq \pi_A' -$ la probabilité, qu'un point (t) est un A en même temps que $p_A > a$.

Or $p_A = z$ étant la probabilité conditionelle et dP_z la probabilité de la condition respective, nous aurons (en remarquant que P_z est une fonction non croissante de z)

$$\pi_A' = \int_a^1 z dP_z \geqq a \int_a^1 dP_z = aP_a,$$

d'où il suit à fortiori que $\pi_A \geqq aP_a$. Donc, π_A étant égal à 0, nous trouverons tout de suite que la probabilité P_a de $\{p_A > a > 0\}$ doit être aussi égale à 0. *La probabilité des cas où la mesure stochastique des points exceptionnels n'est pas nulle est égale à* 0 *et la probabilité des cas où la mesure stochastique des points exceptionnels est nulle est égale à* 1.

Je me contenterai de cet exemple d'application de la notion de la mesure stochastique. Je suis sûr qu'on peut en trouver beaucoup d'autres et j'espère bien que la mesure stochastique rendra un jour de bons services dans beaucoup de problèmes, quand les fondements axiomatiques de la théorie des probabilités seront dûment assurés.

U. Broggi (Milano - Italia)

SU DI UN PROBLEMA DI PEREQUAZIONE

Si perequa un sistema di valori osservati $p_0, p_1, \ldots, p_n$ (che nella prima parte del lavoro sono supposti corrispondere a valori equidistanti — i valori $0, 1, \ldots, n$ — della variabile x da cui dipendono) per dedurre da essi un sistema $y_0, y_1, \ldots, y_n$, che in complesso se ne scosti il meno possibile pure presentando una maggiore regolarità di variazione.

Ma mentre una qualunque delle due somme

$$\sum_{r=0}^{n+1} |y_r - p_r|, \qquad L = \sum_{r=0}^{n+1} (y_r - p_r)^2$$

misura evidentemente il grado di fedeltà col quale ci si attenne ai valori osservati, non appare ben chiaro di quale espressione ci si debba valere per misurare il grado di regolarità della poligonale (r, y_r). La variazione totale

$$|y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \ldots + |y_n - y_{n-1}|$$

e

$$M_1 = \sum_{r=0}^{n+1} (\Delta y_{r-1})^2$$

dipendono, oltre che dalla regolarità, da $|y_n - y_0|$. Ciò non accade invece ove si adotti una delle espressioni

$$M_k = \sum_{r=0}^{n+1-k} (\Delta^k y_r)^2$$

che corrispondono a $k > 1$ e intero, senza che nessuna fra esse appaia come privilegiata. Comunque è chiaro che assunta una funzione non negativa M di $y_0, \ldots, y_n$ come espressione della regolarità di questo sistema di valori e tale che ad una regolarità massima corrisponda un valore minimo di M, il problema della perequazione appare come un problema del tipo: determinare il sistema di valori $y_0, \ldots, y_n$ al quale corrisponda un valore minimo di

$$H = M + \lambda L$$

dove λ è una costante positiva ed arbitraria, il di cui valore rispecchia il peso

attribuito alle due esigenze antagoniche, che portano a correggere i dati $p_0,\ldots,p_n$, ed a correggerli il meno possibile.

Ad un problema di questo tipo conducono d'altronde pure considerazioni di calcolo delle probabilità (1).

1. - Il caso $k=1$ fu trattato dal BOHLMANN (2) e da me (3), che in conformità ad una osservazione già formulata suppongo gli estremi y_0, y_n fissi, il caso $k=2$ da me, il caso $k=3$ dal WHITTAKER (4). Ma il WHITTAKER ed il BOHLMANN si limitano a dare soluzioni particolari ed approssimate (λ è molto piccolo pel primo, molto grande pel secondo degli autori citati) di un problema che il calcolo delle differenze permette di risolvere in tutta la sua generalità, conducendo però, se $k>1$, ad espressioni poco facilmente maneggevoli.

Ove sia

$$H=(\Delta^k y_0)^2+\ldots.+(\Delta^k y_{n-k})^2+\lambda\sum_{r=0}^{n+1}(y_r-p_r)^2$$

le $n+1$ condizioni di minimo

$$\frac{\partial H}{\partial y_0}=\ldots.=\frac{\partial H}{\partial y_n}=0$$

sono, come si vede ricordando che

$$\Delta^s y_r=y_{r+s}-\binom{s}{1}y_{r+s-1}+\binom{s}{2}y_{r+s-2}+\ldots.+(-1)^s y_r$$

ed osservando che y_r figura in $\Delta^k y_{r-k}$, $\Delta^k y_{r-k+1},\ldots.$, $\Delta^k y_{r+k}$ con coefficienti rispettivamente uguali a

$$1,\quad -\binom{k}{1},\quad \binom{k}{2},\ldots.,\quad (-1)^k$$

della forma

$$\lambda(y_r-p_r)+(-1)^k\Delta^{2k}y_{r-k}=0 \tag{1}$$

meno le k prime e le k ultime. Lo sono tutte ove si ammette che sia

$$\Delta^k y_{-k}=\Delta^k y_{1-k}=\ldots.=\Delta^k y_{-1}=\Delta^k y_{n-k+1}=\ldots.=\Delta^k y_n=0. \tag{2}$$

La funzione y della variabile intera r, che si vuole determinare, è dunque la soluzione della equazione alle differenze lineare non omogenea di ordine $2k$ (1),

---

(1) E. T. WHITTAKER: *On a new method of graduation*, in Proceedings of the Edinburg Math. Soc., Vol. XVI, London, 1923, pag. 63.

(2) G. BOHLMANN: *Ein Ausgleichsproblem*, in Mitteilungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, 1899, 3.

(3) U. BROGGI: *Ueber mechanische Ausgleichung*, in Zeitschrift für angew. Math. und Mechanik., Bd. 5, Heft 3, 1925.

(4) Loc. cit.

che soddisfa le $2k$ condizioni (2). E la (1) non è se non l'equazione di EULERO-LAGRANGE che corrisponde a

$$H=\sum_{r=0}^{n+1}[(\Delta^k y_r)^2+\lambda(y_r-p_r)^2]=\text{Minimo}$$

giacchè

$$\frac{1}{2}\delta H=\sum_{r=0}^{n+1}[\Delta^k y_r\delta\Delta^k y_r+\lambda(y_r-p_r)\delta y_r]$$
$$=[\Delta^k y_r\delta\Delta^{k-1}y_r-\ldots.+(-1)^{k+1}\delta\Delta y_{r+k-1}\Delta^{2k-1}y_r]_0^n+$$
$$+\sum_{r=0}^{n+1}\delta y_r[(-1)^k\Delta^{2k}y_{r-k}+\lambda(y_r-p_r)].$$

È

$$\delta H=0$$

se y_r è soluzione della (1) e si annulla il primo dei due termini del secondo membro.

Corrisponde a $k=1'$ ed a $\delta y_0=\delta y_n=0$

$$\frac{1}{2}\delta H=\sum_{r=0}^{n+1}\delta y_r[\lambda(y_r-p_r)-\Delta^2 y_{r-1}].$$

La funzione y_r soluzione di

$$\lambda y_r-\Delta^2 y_{r-1}=\lambda p_r \tag{3}$$

uguale a y_0 ed a y_n se $r=0$, n corrisponde ad un minimo di H. Ove a_1 ed a_2 siano costanti arbitrarie, ed $\varepsilon>1$ e $\frac{1}{\varepsilon}$ siano le radici dell'equazione caratteristica a radici reciproche e positive

$$u^2-(2+\lambda)u+1=0$$

è

$$y_r=a_1\varepsilon^r+a_2\varepsilon^{-r}-\lambda\sum_{t=0}^{r}p_{t+1}\frac{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1}\varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^r\quad\varepsilon^{-r}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\varepsilon^{t+1}\varepsilon^{-t-1}\\ \varepsilon^{t+2}\varepsilon^{-t-2}\end{vmatrix}}$$

la soluzione generale della (3) e, se

$$y_0=a_1+a_2$$
$$y_n=a_1\varepsilon^n+a_2\varepsilon^{-n}-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\left[\varepsilon^n\sum_{t=0}^{n}p_{t+1}\varepsilon^{-t-1}-\varepsilon^{-n}\sum_{t=0}^{n}p_{t+1}\varepsilon^{t+1}\right]$$

la soluzione cercata. Ove n sia grande l'espressione di y_r si riduce praticamente a

$$y_r=\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}[p_r+\varepsilon^{-1}(p_{r-1}+p_{r+1})+\varepsilon^{-2}(p_{r-2}+p_{r+2})+\ldots.].$$

Ove solo si utilizzino i primi $s+1$ termini del secondo membro si dovrà sostituire il fattore $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$ coll'altro $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1-2\varepsilon^{-s}}$. In una qualsiasi formola di perequazione del tipo

$$y_r=a_0p_0+a_1(p_{r-1}+p_{r+1})+\ldots.+a_s(p_{r-s}+p_{r+s})$$

($a_k \geqslant 0$, $k=0,\ldots,s$) dev'essere evidente

$$a_0+2(a_1+\ldots+a_s)=1$$

ed è appunto

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1+2\varepsilon^{-s}}[1+2(\varepsilon^{-1}+\varepsilon^{-2}+\ldots+\varepsilon^{-s})]=1.$$

2. - Non meno interessante, e non credo considerato mai, mi pare il caso di valori non equidistanti della variabile. Le differenze Δy_r, $\Delta^2 y_r$, dovranno in esso venire sostituite colle differenze divise

$$[x_r x_{r+1}]=\frac{y(x_{r+1})-y(x_r)}{x_{r+1}-x_r}=\frac{y_{r+1}-y_r}{x_{r+1}-x_r},\ldots,$$

$$[x_r x_{r+1}\ldots x_{r+k}]=\frac{[x_{r+1}\ldots x_{r+k}]-[x_r\ldots x_{r+k-1}]}{x_{r+k}-x_r}.$$

A $p_r=p(x_r)$ ed al problema

$$H=\sum_{r=1}^{r=n}[x_r x_{r+1}]^2+\lambda\sum_{r=1}^{r=n+1}(y_r-p_r)^2=\text{Minimo},$$

che ragioni di semplicità rendono particolarmente interessante, corrispondono le n condizioni

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}=\ldots=\frac{\partial H}{\partial y_n}=0 \tag{4}$$

dalle quali si deduce

$$\sum_{r=1}^{n+1}y_r=\sum_{r=1}^{n+1}p_r$$

$$\sum_{r=1}^{n+1}x_r y_r=\sum_{r=1}^{n+1}x_r p_r-\frac{1}{\lambda}(y_n-y_1) \tag{5}$$

Ai valori osservati ed ai perequati corrispondono momenti di ordine 0 uguali e momenti di ordine 1 che differiscono tanto meno quanto maggiore è λ e minore è $|y_n-y_1|$. È degno di nota il fatto che mentre il principio di minimo tende, se $k=1$, a ridurre il valore di $|y_n-y_1|$, ciò non si verifica senza che si riduca a un tempo il valore numerico della differenza che i momenti di ordine 1 dei valori osservati e perequati. Senza, cioè, che aumenti un indice della coincidenza dei due sistemi di valori. Ove si postuli $y_0=y_1$, $y_n=y_{n+1}$ le n equazioni (4) sono della forma

$$\lambda(y_r-p_r)-(x_{r+1}-x_r)[x_{r-1}x_r x_{r+1}]=0. \tag{6}$$

Il problema di integrare l'equazione alle differenze divise (6) — di determinare cioè la funzione più generale y di x, che la soddisfa — si trasforma nell'altro di determinare la funzione y di r, che soddisfa l'equazione alle differenze ordinarie lineare non omogenea con coefficienti funzioni di r

$$\Delta^2 y_{r-1}-(x_{r+1}-x_r)\left\{\frac{x_{r-1}+x_{r+1}}{(x_r-x_{r-1})(x_{r+1}-x_r)}+\lambda\right\}y_r-\lambda(x_{r+1}-x_r)y_{r-1}=\lambda(x_r-x_{r+1})p_r$$

giacchè

$$\frac{1}{x_r - x_{r-1}} = \frac{1}{x_{r+1} - x_{r-1}} + \frac{x_{r+1} + x_{r-1}}{(x_r - x_{r-1})(x_{r+1} - x_r)}.$$

Si tratta di un problema che solo sapremmo risolvere in casi particolari, corrispondenti a speciali leggi di formazione dei sistemi di valori x_1, x_2,....

Ma si deduce dalle prime $n-1$ (4), se $d_{mn} = x_n - x_m$

$$y_2 = y_1 + \lambda d_{12}(y_1 - p_1)$$

e se per ogni valore dell'indice $\geqslant 1$, $\leqslant r$

$$\begin{aligned} (7) \qquad y_r &= y_1 + \lambda[d_{1r}(y_1 - p_1) + d_{2r}(y_2 - p_2) + \ldots + d_{r-1,r}(y_{r-1} - p_{r-1}) \\ y_{r+1} &= y_1 + \lambda[d_{1,r+1}(y_1 - p_1) + d_{2,r+1}(y_2 - p_2) + \ldots + d_{r,r+1}(y_r - p_r) \end{aligned}$$

poichè

$$y_{r+1} = \frac{d_{r-1,r+1}}{d_{r-1,r}} y_r - \frac{d_{r,r+1}}{d_{r-1,r}} y_{r-1} + \lambda d_{r,r+1}(y_r - p_r) =$$

$$= y_1 + \lambda \sum_{s=1}^{r} (y_s - p_s) \left\{ \frac{d_{r-1,r+1}}{d_{r-1,r}} d_{sr} - \frac{d_{r,r+1}}{d_{r-1,r}} d_{s,r-1} \right\} + \lambda d_{r,r+1}(y_r - p_r)$$

mentre

$$d_{r-1,r+1} d_{sr} - d_{r,r+1} d_{s,r-1} = d_{r-1,r} d_{s,r+1}.$$

La (7) valida per $r = 1, 2$ lo è per ogni valore di r. Se ne deduce la possibilità di esprimere le y linearmente in funzione di y_1, e, se

$$y_r = A_r y_1 + B_r$$

$$\begin{aligned} A_r &= 1 + \lambda[d_{1r}A_1 + d_{2r}A_2 + \ldots + d_{r-1,r}A_{r-1}] \\ &= 1 + \lambda \sum_{s=1}^{r} d_{sr} + \lambda^2 \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{t>s}^{r} d_{st} d_{tr} + \ldots + \lambda^{r-1} d_{12} d_{23} \ldots d_{r-1,r} \\ &= 1 + \lambda P_{r1} + \lambda^2 P_{r2} + \ldots + \lambda^{r-1} P_{r,r-1} \\ B_r &= \lambda[d_{1r}B_1 + d_{2r}B_2 + \ldots + a_{r-1,r}B_{r-1}] - (d_{1r}p_1 + d_{2r}p_2 + \ldots + d_{r-1,r}p_{r-1}) \\ &= -\lambda Q_{r1} - \lambda^2 Q_{r2} - \ldots - \lambda^{r-1} Q_{r-1,r} \end{aligned}$$

dove P_{rk} esprime la somma di tutti i possibili prodotti di k d, di indici compresi fra 1 ed r, i limiti inclusi, e della forma $d_{st} d_{tu} \ldots d_{vw} d_{wr}$, dove

$$s < t < u < \ldots < v < w < r,$$

Q_{rk} indica la somma dei prodotti dei sommandi delle P_{rk} per il p_s di indice uguale all'indice minimo s delle d di ogni sommando.

Se ne ha finalmente, per la (5)

$$(8) \qquad (n + \lambda \sum_{r=1}^{n+1} P_{r1} + \lambda^2 \sum_{r=2}^{n+2} P_{r2} + \ldots + \lambda^{n-1} P_{n,n-1}) y_1 = \sum_{r=1}^{n+1} p_r + \lambda \sum_{r=1}^{n+1} Q_{r1} + \lambda^2 \sum_{r=2}^{n+1} Q_{r2} + \ldots + \lambda^{n-1} Q_{n,n-1}.$$

La (7) e la (8) costituiscono la soluzione particolare della (6), definita dalle condizioni ai limiti $[x_0x_1]=[x_nx_{n+1}]=0$.

Ove gli estremi siano fissi, il sistema (4) si riduce alle $n-2$ equazioni, che se ne ottengono trascurando la prima e l'ultima e che, sommate membro a membro, danno

$$[x_1x_2]-[x_{n-1}x_n]+\lambda\sum_{r=2}^{n}y_r=\lambda\sum_{r=2}^{n}p_r. \tag{9}$$

Le prime $n-3$ delle $n-2$ equazioni di minimo permettono di esprimere y_3, y_4,...., y_{n-1} linearmente in funzione di y_2 e, colla (9), di formare la soluzione corrispondente alle condizioni ai limiti $y=y_1$, y_n se $x=x_1$, x_n.

L. GALVANI (Roma - Italia)

ESTENSIONE DEL CONCETTO DI MEDIA ED APPLICAZIONE ALLO STUDIO DELLA VARIABILITÀ DI UNA SERIE STATISTICA

1. - La variabilità dell'aggregato costituito dai valori che un certo carattere ha assunto in una serie di osservazioni, — variabilità che può essere in più modi misurata, mediante lo scostamento medio semplice o quadratico dalla media, la differenza media semplice e con ripetizione, ecc. — può essere presa in esame per tre scopi diversi: *a*) o come fine a se stessa, ad es. nel caso in cui interessi conoscere senz'altro la variabilità degli indici dei prezzi successivamente assunti da una data merce nei giorni di un certo mese, per caratterizzare con un numero solo il grado di stabilità del mercato di quella merce in quel periodo di tempo; *b*) o come mezzo per dedurre dall'indice di variabilità calcolato su quel certo aggregato di valori (variabilità *concreta*) il valore probabile della variabilità di un aggregato infinito di cui quello dato possa considerarsi come un campione (variabilità *limite*): tale è, p. es., il caso che si presenta quando, volendo studiare, in ordine alla variabilità dei prezzi, l'andamento generale di un mercato, che effettivamente comprende un grandissimo numero di merci, si sceglie un campione di 10, 20, 100.... merci, e si considera la variabilità dell'aggregato costituito dagli indici dei prezzi di quel campione per dedurne la variabilità limite che si verificherebbe qualora il numero delle merci tendesse all'infinito (ossia fosse praticamente grandissimo); *c*) o infine per paragonarla con la variabilità di un altro aggregato, omogeneo al primo, ma diversamente numeroso: questo caso si presenterebbe, ad es., qualora si volesse paragonare la variabilità degli indici dei prezzi di un gruppo di 10 merci con quella di un gruppo di 50 merci dello stesso mercato.

2. - Il caso *a*) è quello che più frequentemente ricorre nella pratica; il caso *b*) è anch'esso stato considerato [1]. Quanto al caso *c*), è evidente l'importanza che esso può avere nella pratica. Non è, difatti, la stessa cosa il dire che su 100 individui estratti da una totalità un certo carattere somatico ha uno scostamento quadratico medio σ, e che su 1000 individui estratti dalla medesima totalità, il medesimo carattere ha ancora quello scostamento quadratico medio σ. Se si considerano

[1] C. GINI: *Variabilità e Mutabilità*. Bologna, 1912, § 30.

quei due aggregati come parte di un tutto, finito o infinito che sia, i due valori di σ, come espressioni approssimate della variabilità di questo tutto, avranno un diverso grado di attendibilità del quale sarà necessario tener conto nel procedere al loro paragone. La stessa cosa si dica se quei due aggregati si considerano parti di altri due aggregati ugualmente numerosi.

Similmente, dovendo paragonare gli scostamenti quadratici medî di due gruppi, costituiti rispettivamente dagli indici dei prezzi di dieci merci e di venti merci (in pari condizioni di ambiente e di tempo perchè gli indici siano omogenei); oppure se si vorranno confrontare gli scostamenti quadratici medî di due serie di indici mensili dei prezzi di una stessa merce, l'una comprendente dieci mesi e l'altra venti, non sarà lecito lasciare senza peso la circostanza della diversa numerosità dei due aggregati che si esaminano.

Sembra dunque necessario fissare il concetto che, allo stesso modo che si considera la variabilità non soltanto assoluta, ma anche relativa al valore medio del carattere (variabilità percentuale), si possa e sia anzi opportuno *considerare la variabilità di un'aggregato in relazione alla sua numerosità, quando si voglia paragonarla con la variabilità di un altro aggregato diversamente numeroso, ma omogeneo al primo.*

3. - La via per ottenere l'intento ci è tracciata da alcune tra le considerazioni che fa il GINI a proposito degli indici di variabilità dei caratteri nel caso di seriazioni parziali (1). E precisamente, il confronto fra gli indici di variabilità dei due aggregati E_1 ed E_2, si potrà effettuare attraverso i valori medî degli indici di variabilità di due aggregati T e T' ugualmente numerosi, e tali: *a*) che quelli dati E_1 ed E_2 se ne possano supporre di far parte come campioni parziali estratti a sorte senza ripetizione; oppure tali: *b*) che gli stessi T e T' siano dei campioni estratti a sorte senza ripetizione, rispettivamente da E_1 e da E_2. Naturalmente in *a*) la numerosità di T e di T' è per lo meno uguale alla maggiore fra quelle di E_1 ed E_2; in *b*) è al più uguale alla minore fra quelle di E_1 ed E_2.

Si considerano in questo paragrafo i due soli indici di variabilità costituiti dallo scostamento quadratico medio e dalla differenza media con ripetizione.

Caso *a*). Siano m_1 ed m_2 i numeri delle unità di E_1 e di E_2, e k quello di T e di T, $k \geqslant \mathrm{Max}(m_1, m_2)$; ${}^2S(m_1)$, ${}^2S(m_2)$ gli scostamenti quadratici medî di E_1 e E_2 rispetto alle corrispondenti medie; ${}^2S(k)$ ed ${}^2S'(k)$ i valori medî degli scostamenti quadratici medî di T e T' rispetto alle loro medie. Si sa allora che (2):

$$ {}^2S^2(m_1) = \frac{m_1 - 1}{m_1} \frac{k}{k-1} {}^2S^2(k) \qquad {}^2S^2(m_2) = \frac{m_2 - 1}{m_2} \frac{k}{k-1} {}^2S'^2(k) $$

(1) L. c., § 26-29.

(2) V. p. es. GINI, l. c. Si noti bene che in ognuno degli aggregati S_1 e T (e similmente in S_2 e T') lo scostamento quadratico medio è calcolato rispetto alla corrispondente media

e perciò

$$\frac{{}^2S^2(k)}{{}^2S'^2(k)} = \frac{\frac{m_1}{m_1-1}\,{}^2S^2(m_1)}{\frac{m_2}{m_2-1}\,{}^2S^2(m_2)}, \tag{1}$$

relazione la quale vale anche per k tendente all'infinito.

Siano ora $\Delta_R(m_1)$, $\Delta_R(m_2)$, $\Delta_R(k)$, $\Delta'_R(k)$ le differenze medie con ripetizione di E_1, E_2, T, T'. Poichè

$$\Delta_R(m_1) = \frac{m_1-1}{m_1}\,\frac{k}{k-1}\,\Delta_R(k) \qquad \Delta_R(m_2) = \frac{m_2-1}{m_2}\,\frac{k}{k-1}\,\Delta'_R(k)$$

risulta:

$$\frac{\Delta_R(k)}{\Delta'_R(k)} = \frac{\frac{m_1}{m_1-1}\,\Delta_R(m_1)}{\frac{m_2}{m_2-1}\,\Delta_R(m_2)}. \tag{2}$$

Caso *b*). Con le stesse notazioni del caso *a*), e con la sola differenza che sarà $k \leqslant \mathrm{Min}\,(m_1, m_2)$, cioè che T e T' saranno campioni ugualmente numerosi estratti da E_1 ed E_2, si avrà

$${}^2S^2(k) = \frac{k-1}{k}\,\frac{m_1}{m_1-1}\,{}^2S^2(m_1) \qquad {}^2S'^2(k) = \frac{k-1}{k}\,\frac{m_2}{m_2-1}\,{}^2S^2(m_2)$$

onde

$$\frac{{}^2S^2(k)}{{}^2S'^2(k)} = \frac{\frac{m_1}{m_1-1}\,{}^2S^2(m_1)}{\frac{m_2}{m_2-1}\,{}^2S^2(m_2)}. \tag{1'}$$

E similmente

$$\Delta_R(k) = \frac{k-1}{k}\,\frac{m_1}{m_1-1}\,\Delta_R(m_1) \qquad \Delta'_R(k) = \frac{k-1}{k}\,\frac{m_2}{m_2-1}\,\Delta_R(m_2)$$

da cui

$$\frac{\Delta_R(k)}{\Delta'_R(k)} = \frac{\frac{m_1}{m_1-1}\,\Delta_R(m_1)}{\frac{m_2}{m_2-1}\,\Delta_R(m_2)}. \tag{2'}$$

Le (1), (1'), (2), (2'), significano che, *agli effetti del paragone dei quadrati degli scostamenti quadratici medî e delle differenze con ripetizione di due aggregati* E_1 *ed* E_2 *di* m_1 *ed* m_2 *termini rispettivamente è la stessa cosa sostituire a tali aggregati altri due* T *e* T′ *più numerosi o meno numerosi, purchè questi siano aggregati ugualmente numerosi, dei quali* S_1 *ed* S_2 *costituiscano due campioni, o tali invece che* T *e* T′ *siano due campioni di* S_1 *ed* S_2.

---

aritmetica. Se invece lo scostamento quadratico medio dell'aggregato parziale si calcolasse rispetto alla media dell'aggregato totale, sarebbe necessario tener presenti le considerazioni fatte p. es. in: CASTELNUOVO: *Calcolo delle probabilità*, vol. I, § 29.

Esse significano anche che, *agli effetti del loro confronto, le correzioni da applicare ai quadrati degli scostamenti quadratici medî e alle differenze medie con ripetizione osservate in* S_1 *ed* S_2 *sono* $\frac{m_1}{m_1 - 1}$ *e rispettivamente* $\frac{m_2}{m_2 - 1}$.

In questo senso si può dire che se ${}^2S(m_1)$ e $\Delta_R(m_1)$ sono lo scostamento quadratico medio e la differenza media *assoluti* di un aggregato di m_1 termini,

$$(3) \qquad {}^2S(m_1) \cdot \sqrt{\frac{m_1}{m_1 - 1}} \quad \text{e} \quad \Delta_R(m_1) \cdot \frac{m_1}{m_1 - 1}$$

saranno lo scostamento quadratico medio e la differenza media con ripetizione *relativi alla numerosità del campione, che si dovranno utilizzare nel confrontare le variabilità di aggregati diversamente numerosi* (ma, naturalmente, omogenei).

4. - Si tratta, ora, di vedere come dai due aggregati E_1 e E_2 di m_1 e di m_2 termini, si possano *dedurre* in più modi (e precisamente in tanti quanto è il minore dei due numeri m_1 ed m_2 diminuito dell'unità) due aggregati ugualmente numerosi le cui variabilità misurate mediante lo scostamento quadratico medio (e quindi anche mediante la differenza quadratica media, che ne dipende in modo assai semplice) abbiano appunto valori uguali ai valori medî degli scostamenti quadratici medî di due aggregati, ugualmente numerosi, estratti a sorte senza ripetizione dai dati, cioè a quei valori che si è detto doversi utilizzare nell'eventuale paragone delle variabilità di E_1 ed E_2.

In altri termini, si dimostrerà come possano costruirsi due aggregati sostituibili ad E_1 ed E_2, agli effetti del confronto che si vuole fra questi istituire.

È necessario perciò riferirsi ad una precedente nota (1) per ricordare come il concetto di media aritmetica di più numeri reali $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (che si supporranno disposti in ordine non decrescente) si possa estendere considerando non già quell'unico valore A rispetto al quale sia nulla la somma algebrica degli scostamenti dei numeri dati, ma più in generale quei valori X pei quali sia nulla la somma algebrica dei prodotti degli scostamenti da uno di tali valori, combinati a k a k in tutti i modi possibili. L'annullarsi della più semplice fra le funzioni simmetriche elementari che si possono formare con gli scostamenti dei numeri dati da un valore X fornisce la media aritmetica di tali numeri; e così l'annullarsi delle altre funzioni simmetriche elementari fornirà altri valori di X che si potranno riguardare come « medie aritmetiche generalizzate » degli stessi numeri.

(1) L. GALVANI: *Dei limiti a cui tendono alcune medie*, « Bollettino dell'Unione Matematica Italiana », Anno VI, Ottobre 1927.

Vi è pertanto luogo a considerare l'equazione

$$\sum (X-a_{p_1})(X-a_{p_2}) \dots (X-a_{p_k})=0$$

che si può scrivere

$$(4)\quad \binom{n}{k} X^k - \binom{n-1}{k-1} \sum a_i X^{k-1} + \binom{n-2}{k-2} \sum a_i a_j X^{k-2} + \dots + (-1)^k \sum a_{p_1} a_{p_2} \dots a_{p_k} = 0$$

e di cui le radici X_{k1}, X_{k2},...., X_{kk} si potranno dire « medie aritmetiche di ordine k » dei numeri proposti $a_1 a_2 \dots a_n$.

Le medie aritmetiche di ordine n^o sono n e coincidono coi numeri dati; la media aritmetica di 1° ordine è la media aritmetica nel senso consueto.

È evidente che il primo membro della (4) coincide, tranne che pel fattore $(n-k)!$, con $D^{n-k}f(X)$, avendo posto

$$(5)\qquad f(X)=\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)$$

e che perciò quelle che si sono dette « medie » di 1°, 2°,...., k^o, ordine dei numeri a_i non sono altro che le radici delle derivate $n-1^a$, $n-2^a$,...., $n-k^a$,.... della (5).

Ne segue che le medie aritmetiche di ordine qualunque dei dati numeri sono tutte reali; e che se gli a_i sono tutti distinti, le medie di $n-1^o$ ordine separano tali numeri, le medie di $n-2^o$ ordine separano quelle di $n-1^o$ ordine, etc. In tutti i casi i valori X_{k1}, X_{k2},...., X_{kk} sono effettivamente delle medie dei numeri dati nel senso di essere tutte comprese fra il minimo e il massimo di questi.

Se gli a_i non sono tutti distinti ed è

$$a_{r+1}=a_{r+2}=\dots=a_{r+p}=a, \quad a_r<a, \quad a_{r+p+1}>a$$

il numero a costituisce una media dei numeri dati in ciascuno degli ordini $n-1^o$, $n-2^o$,...., $n-p+1^o$.

Inoltre, quando sia $n>h>k$, le medie di ordine k dei numeri dati sono anche le medie di ordine k delle medie di ordine h degli stessi numeri; ossia, disponendo le medie considerate in modo da formare il prospetto

$$\begin{array}{llll} X_{11} & & & \\ X_{21} & X_{22} & & \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots & X_{kk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{array}$$

si potrà dire che gli elementi di ciascuna linea, p. es. della k^a costituiscono le medie aritmetiche di k^o ordine degli elementi di ciascuna delle linee seguenti, e che, in particolare, X_{11} è la media aritmetica consueta degli elementi stessi.

5. - È evidente che le medie degli ordini $n-1^o$, $n-2^o$,...., 2°, 1°, si possono assumere, ordine per ordine, a dare una espressione sempre più sintetica del sistema dei numeri a_i, fino a pervenire alla loro media aritmetica, che si prende

appunto, per consuetudine, a sintetizzare la totalità dei numeri stessi. Perciò i diversi indici di variabilità dei successivi ordini di medie si potranno anche riguardare come indici di variabilità degli a_i; e, in particolare, anche prescindendo dalla effettiva risoluzione della (4), sarà agevole considerare quegli indici tali che essi o i loro quadrati siano funzioni simmetriche delle medie di ordine k perchè, per tale simmetria, essi o i loro quadrati saranno esprimibili mediante funzioni razionali dei coefficienti della (4) stessa e quindi, in ultima analisi, mediante funzioni razionali dei numeri dati a_i. In particolare si potrebbe assumere come indice di variabilità del sistema dato $a_1 a_2 \ldots a_n$ la differenza assoluta delle medie di 2° ordine X_{21}, X_{22} e si troverebbe come valore di questa differenza

$$V_2 = X_{22} - X_{21} = \frac{2\sqrt{(n-1)^2 S_1^2 - n(n-1)(S_1^2 - S_2)}}{n(n-1)} = \frac{2}{\sqrt{n-1}} \sqrt{\frac{S_2}{n} - \left(\frac{S_1}{n}\right)^2} = \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}},$$

avendo posto $\sum a_i = S_1$, $\sum a_i^2 = S_2$ ed avendo, come di consueto, indicato con σ lo scostamento quadratico medio del sistema dato a_i (dalla sua media aritmetica). Ma poichè la differenza assoluta di due numeri è caso particolare della differenza quadratica media senza ripetizione di più numeri, si potrà, più in generale, assumere come indice di variabilità della data successione di numeri la differenza quadratica media senza ripetizione, V_k delle medie aritmetiche di ordine k, X_{k1}, X_{k2},...., X_{kk} dei numeri $a_1 a_2 \ldots a_n$. Si dirà, anche qui, S_1 ed S_2 la somma e la somma dei quadrati degli a_i; $\bar{S}_1$, $\bar{S}_2$ la somma e la somma dei quadrati delle X_{kj} $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Risulterà allora:

$$\binom{k}{2} V_k^2 = (X_{k1} - X_{k2})^2 + (X_{k1} - X_{k3})^2 + \ldots + (X_{k,k-1} - X_{kk})^2 =$$
$$= (k-1)\bar{S}_2 - 2\sum X_{ki} X_{kj} = (k-1)\bar{S}_2 + \bar{S}_2 - \bar{S}_1^2 = k\bar{S}_2 - \bar{S}_1^2.$$

Ma

$$\bar{S}_1 = \binom{n-1}{k-1} S_1 \Big/ \binom{n}{k} = \frac{k}{n} S_1;$$

$$\bar{S}_2 = \bar{S}_1^2 - 2\sum X_{ki} X_{kj} = \frac{k^2}{n^2} S_1^2 - 2\binom{n-2}{k-2} \sum a_i a_j \Big/ \binom{n}{k} =$$
$$= \frac{k^2}{n^2} S_1^2 - 2\frac{k(k-1)}{n(n-1)} \sum a_i a_j = \frac{k^2}{n^2} S_1^2 - \frac{k(k-1)}{n(n-1)} (S_1^2 - S_2) = \frac{k(n-k)}{n^2(n-1)} S_1^2 + \frac{k(k-1)}{n(n-1)} S_2;$$

e perciò

$$\binom{k}{2} V_k^2 = \frac{k^2(n-k)}{n^2(n-1)} S_1^2 + \frac{k^2(k-1)}{n(n-1)} S_2 - \frac{k^2}{n^2} S_1^2 = \frac{k^2(k-1)}{n-1} \left\{ \frac{S_2}{n} - \left(\frac{S_1}{n}\right)^2 \right\} = \frac{k^2(k-1)}{n-1} \sigma$$

Si concluderà quindi che

$$V_k = \sqrt{\frac{2k}{n-1}}\, \sigma \tag{6}$$

essendo σ, come prima, lo scostamento quadratico medio delle a_i. Come caso particolare, se $k = n$ si ritrova la nota relazione [1]

$$V_n = {}^2\Delta = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\, \sigma. \tag{6'}$$

---

[1] Cfr. GINI, l. c., p. 37.

Le differenze quadratiche medie dei successivi sistemi di medie aritmetiche dei numeri $a_1 a_2 \ldots a_n$, incominciando dalle medie aritmetiche di 2° ordine, sono dunque:

$$V_2 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma, \quad V_3 = \sqrt{3}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma, \ldots, \quad V_k = \sqrt{k}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma, \ldots, \quad V_n = \sqrt{n}\sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma.$$

Si potranno pure facilmente calcolare gli scostamenti quadratici medî di quei medesimi sistemi. Difatti, sapendo che la differenza quadratica media delle medie di k^o ordine è

$$V_k = \sqrt{\frac{2k}{n-1}}\,\sigma$$

e notando che per la (6') si potrà anche scrivere

$$V_k = \sqrt{\frac{2k}{k-1}}\,\sigma_k$$

essendo σ_k lo scostamento quadratico medio del sistema di medie $X_{k1}, X_{k2}, \ldots, X_{kk}$ della rispettiva media, si concluderà che

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{k-1}{n-1}}\,\sigma. \tag{7}$$

Dunque gli scostamenti quadratici medî dalla media, dei successivi sistemi di medie aritmetiche dei numeri $a_1 a_2 \ldots a_n$, si possono tutti esprimere mediante lo scostamento quadratico medio σ degli $a_1 a_2 \ldots a_n$, e, incominciando dalle medie aritmetiche di 2° ordine, sono:

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1}}\,\sigma, \quad \sigma_3 = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\,\sigma, \ldots, \quad \sigma_k = \sqrt{\frac{k-1}{n-1}}\,\sigma, \ldots, \quad \sigma_n = \sigma.$$

6. - Paragoniamo il sistema delle medie di k^o ordine dei numeri a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ con uno degli $\binom{n}{k}$ sistemi di k termini estratti a caso senza ripetizione fra gli a_i.

È facile vedere che se ${}^2\Delta_n$ è la differenza quadratica media del sistema totale di n termini, il valore medio della differenza quadratica media di un sistema parziale di k termini sarà:

$${}^2\Delta_k = {}^2\Delta_n \ (^1). \tag{8}$$

Perciò, ricordando che

$${}^2\Delta_n = V_n = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\,\sigma,$$

sarà

$${}^2\Delta_k = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\,\sigma;$$

d'altra parte si sa che la differenza quadratica media delle medie di k^o ordine è

$$V_k = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\,\sigma;$$

---

(1) Cfr., per analogia, GINI, l. c., p. 43.

dunque

$$9) \qquad \frac{V_k}{{}^2\Delta_k} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}.$$

Si sa pure (1) che il valore medio dello scostamento quadratico medio di quel medesimo sistema parziale dalla rispettiva media è

$$\overline{\sigma_k} = \sqrt{\frac{n}{k}} \sqrt{\frac{k-1}{n-1}}\, \sigma,$$

mentre il sistema delle medie di k^o ordine ha come scostamento quadratico medio l'espressione (7), cioè

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{k-1}{n-1}}\, \sigma,$$

e perciò

$$(10) \qquad \frac{\sigma_k}{\overline{\sigma_k}} = \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{n}}.$$

Se, infine, al sistema delle k medie X_{k1}, X_{k2},...., X_{kk} (la cui media aritmetica è, come si sa, X_{11}) si sostituisce il sistema X'_{k1}, X'_{k2},...., X'_{kk} che se ne ottiene per omotetia rispetto ad X_{11} assumendo come rapporto di omotetia $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}$, *la differenza quadratica media e lo scostamento quadratico medio del nuovo sistema* (la cui media aritmetica è ancora X_{11} cioè la media dell'insieme dato a_i) *diverranno*

$$(V_k)' = \sqrt{\frac{n}{k}} \sqrt{\frac{2k}{n-1}}\, \sigma = \sqrt{\frac{2n}{n-1}}\, \sigma$$

$$(\sigma_k)' = \sqrt{\frac{n}{k}} \sqrt{\frac{k-1}{n-1}}\, \sigma,$$

cioè coincideranno col valore medio della differenza quadratica media e dello scostamento quadratico medio di un sistema parziale di k *termini estratti a caso senza ripetizione dal sistema totale degli* a_i.

Lo scopo che ci si era proposto è dunque raggiunto; perchè, avendo da paragonare le variabilità di due sistemi E_1 ed E_2 di m_1 ed m_2 termini, si potranno anzitutto considerare i sistemi delle medie di k^o ordine $[k < \mathrm{Min}\,(m_1, m_2)]$, e cioè

$$X_{k1} \ldots X_{kk} \qquad Y_{k1} \ldots Y_{kk}$$

poi sostituire a questi i loro omotetici, assumendo come centri le rispettive medie aritmetiche X_{11}, Y_{11} e come rapporti di omotetia

$$\sqrt{\frac{m_1}{k}} \qquad \sqrt{\frac{m_2}{k}}.$$

I sistemi così ottenuti

$$X'_{k1} \ldots X'_{kk} \qquad Y'_{k1} \ldots Y'_{kk}$$

---

(1) Cfr. GINI, l. c., p. 42.

saranno, **per qualunque** k, due sistemi sostituibili ai dati quando si vogliano di questi paragonare le variabilità.

Nel modo più elementare, il paragone potrà essere effettuato sostituendo ai dati sistemi le rispettive medie di 2° ordine $X_{21}X_{22}$, $Y_{21}Y_{22}$ ed a queste i sistemi omotetici $X'_{21}X'_{22}$, $Y'_{21}Y'_{22}$ aventi i centri e i rapporti detti.

In conclusione, dovendo paragonare, mediante gli scostamenti quadratici medî (o mediante le differenze quadratiche medie) le variabilità di due aggregati diversamente numerosi, si potranno assai semplicemente concretare due modelli ugualmente numerosi da sostituire agli aggregati dati agli effetti di quel paragone. Naturalmente, anche indipendentemente da tale rappresentazione concreta, il confronto delle variabilità mediante lo scostamento quadratico medio e mediante la differenza media con ripetizione potrà pure essere eseguito applicando agli indici di variabilità osservati il coefficiente di correzione di cui al n. 8.

L. MARCH (Paris - Francia)

NOTE SUR LA CORRÉLATION (1)

Dans l'application de la méthode statistique on ne tient pas toujours un compte suffisant de l'ordre dans lequel apparaissent les faits dont on analyse les relations numériques, notamment les faits qui se correspondent par quelque trait commun.

Lorsque les éléments de deux ensembles se correspondent d'après un caractère quelconque, de sorte que, l'un étant fixé, certains de ceux de l'autre ensemble sont également fixés, la question se pose de savoir si cette correspondance implique ou n'implique pas de liaison entre les éléments qu'elle met en présence.

Dans un laboratoire de physique, on opère généralement sur des grandeurs que l'on peut faire varier d'aussi peu qu'on le veut et d'une manière réversible. Par exemple on compare la dilatation d'un métal à la température d'un milieu dans lequel il est plongé. Les observations des deux espèces se correspondent en raison de leur simultanéité. Elles mettent en évidence la formule qui relie ces observations et elles déterminent la grandeur d'un élément d'une espèce d'après la grandeur de l'élément correspondant de l'autre.

Hors du laboratoire d'expériences physiques, on n'obtient pas de relations exprimables aussi simplement par la seule considération des éléments correspondants. On ne peut faire varier les phénomènes d'aussi peu qu'on le veut, d'une manière continue, pour ainsi dire, et réversible. On doit se contenter d'observations spontanées, sporadiques, suivant une évolution imposée. Pour pouvoir juger s'il existe ou s'il n'existe pas de relation entre les manifestations de deux phénomènes, et se faire une idée de l'importance de la relation, il faut tenir compte de toutes les observations. La grandeur qui caractérise l'un des phénomènes ne peut généralement être déterminée par la seule connaissance de la grandeur correspondante de l'autre phénomène.

Dans nos jugements, nous sommes guidés par des coïncidences plus ou moins fréquentes qu'il faut seulement associer et peser avec méthode. Comment distinguer les coïncidences exceptionnelles et sans valeur de celles qui impliquent des relations quasi permanentes ? D'abord par le dénombrement des cas qui les laissent

(1) Journal de la Société de Statistique de Paris, numéro de février, 1928.

apparaître et de ceux qui ne les présentent pas, sans omettre aucun de ceux qui sont accessibles. En second lieu, il convient de soumettre les cas observés à un examen critique attentif, d'après les connaissances acquises sur les faits analogues ou voisins.

La statistique, que LÉON SAY appelait avec une juste simplicité la science des dénombrements, a la charge de cette méthode. Avant qu'elle fût constituée d'ailleurs, les esprits justes avaient compris que des observations nombreuses pouvaient seules justifier de sérieuses conjectures, qu'il était bon de tracer des courbes, d'en constater le parallélisme ou l'indifférence, ce qui revient à appliquer le principe de logique auquel STUART MILL a donné le nom de principe des variations concomitantes (1). Encore convient-il d'appliquer ce principe tel que son auteur l'a formulé: « Un phénomène qui varie d'une certaine manière *toutes les fois* qu'un autre phénomène varie de la même manière est une cause ou un effet de ce phénomène ou bien y est lié par quelque fait de causation ».

Les derniers mots s'appliquent au cas de corrélation entre deux phénomènes, sans que l'un soit antécédent de l'autre. Sous réserve des vérifications que MILL lui-même a recommandées, sa formule résume les moyens que l'on a employés de tout temps, avec plus ou moins de sagacité et de scrupules, pour découvrir les relations des choses. Mais il importe de ne point perdre de vue les mots « toutes les fois ». Un lien de causalité entre deux phénomènes ne saurait être admis que si l'accord des variations existe pour toutes les variations, tout au moins pour toutes les variations observables distinctement.

Cette remarque est surtout importante quand on se propose, non point d'établir la corrélation parfaite de deux séries de grandeurs — corrélation parfaite qui équivaut à l'identité numérique par l'intermédiaire d'une formule — mais de mesurer un certain degré de corrélation. On essaie alors d'exprimer numériquement l'impression que laisse une représentation graphique des phénomènes comparés.

Prenons un exemple de corrélation à peu près parfaite, par exemple celle qui existe entre la pression d'un poids donné de gaz et son volume à température constante.

On peut traduire le résultat sur un tableau graphique de deux manières, suivant que les observations sont classées dans l'ordre même de leur achèvement, ou bien suivant qu'elles sont classées, indépendamment de cet ordre, d'après la grandeur de l'un des éléments mesurés.

Dans le premier système, on tracera la courbe de la pression, puis la courbe du volume, soit aux instants successifs des observations faites au même lieu, soit aux divers endroits d'observations simultanées, soit d'après quelque qualité des observateurs. Les deux courbes, tracées sur le même axe horizontal de base,

---

(1) *Système de logique*, livre III, ch. VIII, cinquième canon.

d'après des échelles judicieusement fixées, se présentent en sens inverse. Mais en faisant tourner l'une d'elles autour de l'axe commun, on constate, après la rotation, un certain parallélisme. En fait les courbes ne sont point parallèles. Or, la relation est presque rigoureuse, à tel point que si l'on transforme les ordonnées de l'une des courbes au moyen d'une formule simple uniforme, les deux courbes deviennent alors presque rigoureusement parallèles.

Ainsi l'examen des courbes nous a bien révélé la liaison qui existe entre les changements des deux phénomènes pression et volume, mais il ne nous a pas permis de déterminer directement le degré de la liaison.

Remarquons d'ailleurs que, si les courbes sont suffisamment régulières, c'est-à-dire si la succession des pressions et des volumes correspondants n'est pas désordonnée, elles permettent de comparer aussi bien les variations d'un point au suivant, que d'un point à un autre plus éloigné, ou que des différents points à partir de l'axe de base. Elles permettent en somme d'apprécier d'un coup d'œil toutes les variations concomitantes. Mais l'impression est souvent confuse; il est nécessaire de la préciser.

Dans le second système de représentation, le plus employé en physique, les éléments numériques de l'une des séries, par exemple de la série des volumes, sont classés par ordre de grandeur et représentés par des longueurs portées sur un axe horizontal à partir d'une certaine origine. Les éléments correspondants de l'autre série (pression) sont représentés sur des verticales dont les extrémités dessinent une courbe et cette courbe représente la loi du phénomène.

Ici les éléments correspondants sont classés de façon à faire apparaître seulement les variations à partir de l'origine des mesures, sans aucun souci de l'ordre dans lequel les variations se sont produites effectivement ni par conséquent des variations qui dépendent de cet ordre.

Rappelons maintenant sommairement comment les deux systèmes ont reçu application dans les recherches statistiques (1).

Covariation différentielle.

Pour apprécier la dépendance de deux phénomènes, le psycho-physicien allemand FECHNER effectuait le dénombrement des variations concomitantes d'une observation à la suivante (2), c'est-à-dire des variations différentielles. La règle des signes fournit un moyen commode de faire le compte des concordances et des discordances, puisque les variations de même sens (positives ou négatives)

---

(1) Pour plus de détails, voir: *Les représentations graphiques et la statistique comparative*, Journal de la Société de Statistique, numéros d'août et septembre 1905, notamment page 270.

(2) *Kollektivmasslehre*, herausgegeben von C. LIPPS, 1897.

donnent un produit positif, les variations de sens contraires un produit négatif. La balance des produits qui s'écrit $I=\Sigma v \times v'$ donne ainsi une mesure du parallélisme des deux courbes (les unités des quantités v et v' étant convenablement choisies).

Si l'un des phénomènes comparés ne change pas, tandis que l'autre se modifie, on en conclut que le premier est indifférent aux variations du second, alors la balance des produits est nulle.

Cependant le parallélisme des courbes, comme on l'a dit tout à l'heure, ne justifie pas nécessairement l'existence d'une corrélation des faits représentés; il ne permet pas toujours de mesurer le degré de cette corrélation. Un autre exemple est celui de la roue qui avance en tournant. L'avance et la rotation sont étroitement liées; cependant les deux lignes qui représentent, soit l'avance, soit la hauteur, d'un point de la roue après une révolution sont indifférentes; le coefficient I est nul, même si les variations des lignes sont prises entre deux points distants d'un intervalle quelconque (1).

En dehors des mouvements périodiques, qui donnent lieu à d'autres singularités, l'étude du parallélisme des courbes fournit cependant le seul moyen dont nous disposions pour caractériser l'accord ou le désaccord des variations de deux phénomènes. Encore convient-il de ne point s'en tenir aux variations différentielles de premier intervalle, c'est-à-dire entre éléments contigus, mais de considérer aussi les variations entre éléments distants d'intervalles plus ou moins étendus. Ainsi l'on se rapproche des conditions d'application de la méthode expérimentale.

Dans ces conditions, le coefficient I ne saurait indiquer que la covariation différentielle.

Covariation tendancielle.

Cherchons maintenant à généraliser ce coefficient quel que soit l'intervalle entre lequel se détermine la variation dans chaque série.

Désignons par x l'ordonnée de l'une des courbes, par y l'ordonnée correspondante de l'autre. Si v et v' désignent cette fois des variations entre éléments séparés par un intervalle quelconque:

$$\Sigma vv' = \Sigma(y_{i+h} - y_i)(x_{i+h} - x_i).$$

Or on démontre aisément que le second membre est égal à $\Sigma xy - SxSy$ en désignant par Sx et Sy respectivement les sommes des ordonnées x ou y.

Supposons que les ordonnées de chaque espèce soient mesurées à partir de leur moyenne. Alors $Sx=Sy=0$, de sorte que l'expression caractéristique de l'accord ou du désaccord de toutes les variations que l'on peut observer entre deux

(1) Voir Metron, tome I, fasc. 1, p. 47.

points quelconques de l'une des courbes et les deux points correspondants de l'autre est donnée par la somme algébrique des produits des ordonnées correspondantes, mesurées à partir de leurs moyennes; c'est-à-dire par l'expression Σxy.

D'après ce qui précède, cette somme n'exprime pas autre chose que la balance des concordances et des discordances des variations concomitantes, lorsque l'on considère *toutes les variations* différentielles possibles. Elle caractérise, par sa valeur, la *tendance* générale des variations, d'une part entre éléments d'une série, d'autre part entre leurs correspondants dans l'autre, à un certain accord. Pour cette raison, on peut la regarder comme indiquant un état de *covariation tendancielle* dans la conjugaison des deux séries d'éléments.

Pour obtenir un coefficient variant entre les limites 0 et 1, ce qui est commode, on remarquera que la covariation la plus parfaite existe naturellement quand les éléments x et les éléments y correspondants sont égaux, auquel cas la somme Σxy devient égale à Σx^2 ou à Σy^2 ou à $\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}$. Le coefficient de covariation tendancielle mis sous la forme

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma y^2}}$$

ne peut être supérieur à 1 et il peut descendre jusqu'à la valeur 0.

De même le coefficient de covariation différentielle prendra la forme

$$j = \frac{\Sigma \delta x \delta y}{\sqrt{\Sigma \delta x^2}\sqrt{\Sigma \delta y^2}}$$

δx et δy exprimant les variations différentielles désignées plus haut par les lettres v et v'.

Utilité des deux coefficients de covariation.

Voyons maintenant comment on peut obtenir une représentation graphique du coefficient r.

Le coefficient r exprime en somme la balance des concordances et discordances des variations tendancielles, c'est-à-dire comptées à partir d'un axe moyen. On peut lui attribuer une autre signification, d'après l'égalité :

$$\sum_1^n (x-y)^2 = \Sigma x^2 + \Sigma y^2 - 2\Sigma xy = \Sigma x^2 + \Sigma y^2 - 2r\sqrt{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}$$

d'où

$$r = \frac{1}{2}\left[\frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} - \frac{\Sigma (x-y)^2}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}\right] = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}\left[\Sigma (x+y)^2 - \Sigma (x-y)^2\right]$$

r est nul quand $\Sigma (x-y)^2$ atteint sa plus grande valeur qui est $\Sigma x^2 + \Sigma y^2$ ou $\Sigma (x+y)^2$; il atteint sa plus grande valeur positive quand $\Sigma (x-y)^2$ est nul, auquel cas

$$r = \frac{\Sigma (x+y)^2}{4\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}} = 1$$

puisque, dans ce cas, $x=y$ constamment, et sa plus grande valeur négative quand $\Sigma(x+y)^2$ est nul, auquel cas y est constamment égal à $-x$.

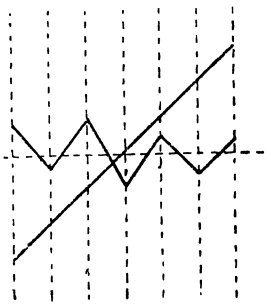


Fig. 1.

$\Sigma(x-y)^2$ est un indice de l'écartement des deux courbes en x ou en y; r est égal à 1 quand les deux courbes coïncident et à -1 quand les deux courbes sont écartées à tel point que les ordonnées correspondantes soient toujours de signe contraire.

Si les deux courbes coïncident, leur parallélisme est évidemment parfait. La corrélation des deux phénomènes qu'elles représentent est parfaite. Mais dès que les deux courbes ne coïncident plus, si peu que ce soit, elles peuvent ne présenter aucun parallélisme, c'est-à-dire qu'elle ne satisfont en aucune façon au principe des variations concomitantes.

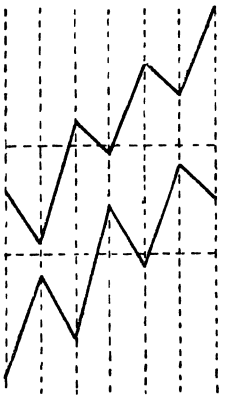


Fig. 2.

D'autre part, les deux courbes peuvent présenter à la fois un parallélisme évident et un écartement considérable. Les figures 1 à 4 représentent des cas assez différents: figure 1, les deux coefficients de covariation sont nuls ou à peu près nuls et cependant la corrélation peut être parfaite (cas de la roue); figure 2, le coefficient de covariation tendancielle est voisin de 1 et positif, le coefficient de covariation différentielle est voisin de 1 et négatif; figure 3, les deux courbes sont très voisines, le coefficient de covariation différentielle à peu près nul, le coefficient de covariation tendancielle voisin de l'unité; figure 4, les deux courbes (tracées cette fois en gradins) sont écartées au maximum, le coefficient de covariation tendancielle est égal à -1, le coefficient de covariation différentielle également. Si l'une des courbes se réduisait à l'axe de base, les deux coefficients seraient nuls.

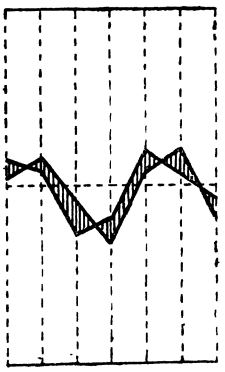


Fig. 3.

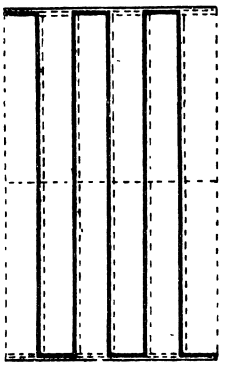


Fig. 4.

Par contre, si les deux courbes sont rapprochées et qu'en même temps leurs mouvements s'orientent dans les mêmes sens, auquel cas les deux coefficients j et r ont une valeur assez élevée, il semble que les variations différentielles à intervalles supérieurs donneraient également des concordances plus nombreuses que les discordances.

Ainsi un seul des deux coefficients ne suffit pas pour suggérer la corréla-

tion; mais si les deux coefficients ont une valeur assez grande, supérieure à $\frac{1}{2}$ par exemple, la corrélation est généralement établie.

Cas particuliers d'accord entre les coefficients de covariation.

D'ailleurs, en statistique, il peut être également intéressant d'établir entre deux phénomènes une relation qui n'a lieu que pour des variations de faible amplitude, ou bien au contraire une relation qui, n'apparaissant pas entre mouvements peu étendus, se manifeste quand on fait abstraction des changements à court intervalle pour ne considérer que des mouvements d'ensemble ou inversement. Dans le premier cas, il convient de porter l'attention sur les variations différentielles, dans le second il y a lieu de faire disparaître ces variations en opérant sur des moyennes.

En substituant à des points successifs de l'une et de l'autre courbe un point moyen et en substituant aux courbes primitives deux courbes tracées par ces points moyens, les courbes nouvelles ne présentent plus de petites sinuosités. Leur forme est adoucie, leur allure uniforme: alors les variations différentielles ont très généralement le même sens que les variations tendancielles. Les deux coefficients j et r donnent des valeurs qui concordent suffisamment; comme exemple je rappellerai une communication antérieure sur la relation qui existe entre les mouvements des prix à longue période observés depuis le début du XIX^{e} siècle et le taux d'accroissement du stock des métaux précieux. Cette relation n'apparaît pas quand on compare les variations à courte période; elle ressort de la comparaison de moyennes calculées sur un certain nombre d'années (1).

Ainsi, dans le cas de courbes à allure régulière, les deux coefficients de covariation ont à peu près la même signification; on peut employer l'un ou l'autre pour établir la corrélation.

Dans un autre cas particulier, qui présente un grand intérêt pour les observations physiques, en même temps pour l'histoire de la théorie de la corrélation, le calcul du coefficient de covariation tendancielle suffit aussi pour établir la corrélation. Il convient d'en chercher la raison.

Lorsque FECHNER reconnaissait la dépendance de deux phénomènes en comparant leurs variations d'un moment de l'observation au suivant, — ce qui revient à comparer les courbes du point de vue du parallélisme — il employait un procédé empirique: il constatait des concordances ou des discordances sans chercher la forme de la liaison qui expliquait ces rapports.

Un autre savant, l'anthropologiste anglais FR. GALTON, a abordé le même problème d'un autre point de vue. Étudiant l'hérédité des caractères, il cherchait

---

(1) Journal de la Société de Statistique, mars 1912, p. 111.

sous quelle forme se manifeste cette hérédité (1). Considérant la taille, par exemple, il représentait par un point d'un plan le couple formé par la taille d'un individu et la taille moyenne de ses parents. L'observation de 928 iudividus lui permit de dresser une table à double entrée dont les rangées correspondaient aux divisions de taille des parents, les colonnes aux degrés de taille des enfants. Dans chaque case, à la rencontre d'une rangée et d'une colonne, s'inscrit le nombre des individus dont la taille correspond au degré indiqué par l'entête de la colonne et dont les parents ont la taille moyenne indiquée par l'entête de la rangée. Dans chaque rangée GALTON détermina la taille moyenne des enfants issus de parents dont la taille correspond à la rangée et il représenta les données de sa table par un graphique disposé comme suit.

Dans le plan, supposé divisé en quatre quadrants par deux axes rectangulaires, sur l'axe horizontal OX on porte les tailles des enfants, sur l'axe vertical OY les tailles de parents. Ces tailles sont supposées mesurées à partir de leurs moyennes respectives, de sorte que l'origine des coordonnées est au point qui représente un couple formé l'individu moyen et le parent moyen.

Une rangée de la table est représentée par une bande parallèle à l'axe horizontal, une colonne par une bande parallèle à l'axe vertical.

Si la taille de l'enfant à l'âge adulte était indépendante de celle de ses parents, les points représentatifs des couples: parent et enfant, se répartiraient indifféremment d'un côté ou de l'autre de l'axe vertical, quelle que soit la taille parentale. Tous les points moyens déterminés pour les bandes horizontales successives se trouveraient au moins à peu près, sur la verticale Oy.

Si la taille de l'enfant parvenu à l'âge adulte était égale à celle de ses parents, tous les points représentatifs des couples seraient situés sur la bissectrice de l'angle des axes. S'il n'en est pas constamment ainsi, mais si néanmoins cette égalité existe *en moyenne*, les points qui représentent la taille moyenne des enfants dans chaque rangée seront sur la bissectrice.

GALTON constata que, d'après sa table, les points moyens de bandes horizontales étaient bien à peu près sur une ligne droite passant par le centre des coordonnées, mais cette droite était moins inclinée sur la verticale que la bissectrice. Elle *régressait* vers l'axe sur lequel toutes les moyennes se fussent rassemblées si les âges des fils n'avaient généralement eu aucun rapport avec les âges des parents. C'est la loi de retour au type moyen.

L'observation de son tableau a révélé à GALTON un autre fait intéressant, c'est que les cases qui contiennent à peu près le même nombre de couples semblent se distribuer sur des ellipses concentriques dont les axes principaux sont inclinés sur les axes des coordonnées, ce qui lui faisait pressentir une certaine loi de distribution des points représentatifs dans leur plan.

---

(1) *Natural inheritance*, London, 1889.

GALTON était un grand naturaliste ; il n'était pas mathématicien. Il ignorait qu'une quarantaine d'années auparavant le physicien français BRAVAIS avait obtenu des résultats analogues en étudiant la répartition des erreurs de situation d'un point soit dans un plan soit dans l'espace (1). Ainsi la loi d'évolution des tailles présente quelque analogie avec la loi de distribution des points de chute d'un projectile, par exemple. C'est ainsi que BRAVAIS a déterminé l'orientation des points au moyen du rapport $\frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ ou $\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma y^2}} \times \frac{\sqrt{\Sigma x^2}}{\sqrt{\Sigma y^2}}$ et qu'il a déterminé la surface dont les sections horizontales sont des ellipses analogues à celles qu'a trouvées GALTON.

Voyons maintenant comment dans le cas particulier qu'ont considéré, indépendamment l'un de l'autre, BRAVAIS et GALTON, les deux coefficients de covariation donnent des indications concordantes.

L'un des caractères communs des deux espèces de grandeurs dont ils se sont occupés c'est que, dans chaque rangée horizontale, les points se distribuent à peu près symétriquement autour de leur moyenne. Il en est de même dans chaque colonne verticale.

Supposons d'abord que la distribution soit la même dans les deux directions ; il est facile de voir qu'elle est encore la même dans une direction quelconque. De sorte que, quelle que soit la loi commune de distribution des points, les îlots de même surface qui contiennent un même nombre de points sont situés sur une circonférence de cercle tracée du centre O des coordonnées (fig. 5). Cela suppose que les coordonnées des points soient mesurées avec la même unité.

Si les ordonnées sont mesurées avec une autre unité que les abscisses, par exemple avec une unité plus grande égale à K fois l'unité d'abscisse la distribution des points se modifie, les ordonnées sont réduites dans le rapport de 1 à K. Les îlots de points également nombreux, qui étaient également nombreux sur la circonférence, se trouveront après la réduction également nombreux sur une ellipse dont les axes principaux coïncident avec les axes de coordonnées. Supposons que OA soit l'unité de mesure des abscisses, les diamètres principaux de l'ellipse sont, l'un égal à OA, l'autre $OB = \frac{OA}{K}$.

Considérons maintenant une parallèle quelconque à l'axe Ox. Sur cette parallèle, les îlots de points également nombreux se répartissent symétriquement par rapport à l'axe Ox ; les nombres changent quand on passe de l'une à l'autre des ellipses concentriques. S'il en est ainsi pour toutes les parallèles à Ox, il n'existe aucune concordance entre les ordonnées et les abscisses des points ni entre leurs variations puisque, pour chaque valeur de y, les points sont aussi nombreux d'un

(1) *Mémoires de l'Institut*, tome IX. Analyse mathématique sur les erreurs de situation d'un point.

côté que de l'autre : les concordances entre coordonnées de même signe sont aussi nombreuses que les discordances entre ordonnées de signe contraire.

Tel sera à peu près le cas si, par exemple, on compare les tailles de nombreux individus d'âge donné, ou bien les sexes d'enfants nouveaux-nés, suivant les rangs qu'occupent dans l'alphabet les initiales de leurs noms de famille.

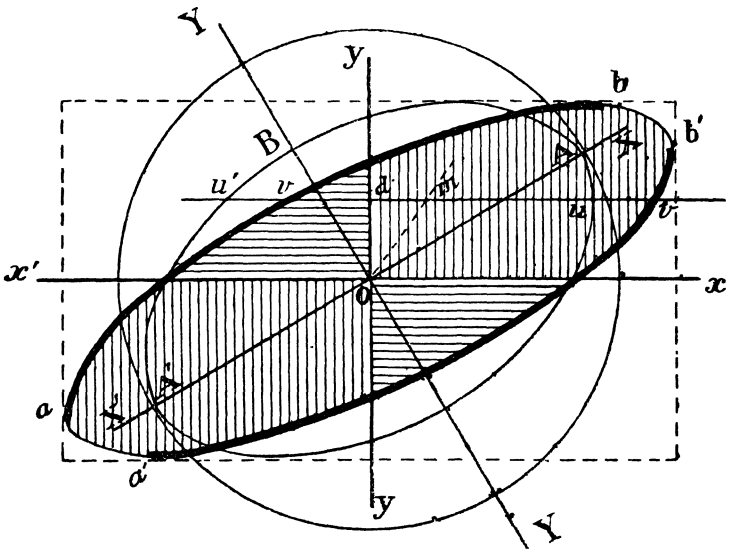


Fig. 5.

Cependant il arrive souvent que les variations des deux éléments d'un couple ne sont point indépendantes : par exemple, la taille du père et celle du fils, l'âge du mari et celui de la femme, la production et le prix d'un objet, etc.

Lorsqu'il en est ainsi, les points représentatifs des couples d'éléments numériques ne sont plus symétriquement placés sur les parallèles à *Ox*. Ils sont déviés, le point moyen étant à une distance de l'axe *Oy* d'autant plus grande que la parallèle est plus éloignée de *Ox*. Dans la table dressée par GALTON, plus la taille des parents augmente, plus la taille moyenne des enfants s'éloigne de la moyenne générale. Dans ce cas les deux éléments du couple, *taille parentale*, *taille filiale* varient à peu près proportionnellement. Supposons parfaite la proportionnalité, autrement dit, admettons que la régression soit linéaire.

Pour représenter cette situation nouvelle, nous emploierons un système d'axes rectangulaires *Ox*, *Oy* qui d'abord coïncide avec le précédent *OX*, *OY* puis tourne autour du centre *O* jusqu'à la position *OX*, *OY*.

Une parallèle à *Ox* coupe l'ellipse *ABA'* en deux points où les îlots sont également nombreux mais qui ne sont pas symétriquement placés par rapport à *Oy*. Pour que ces îlots soient représentés symétriquement il faut les dévier

parallèlement à Ox d'une quantité égale à la distance du point moyen à l'axe Oy. Par exemple, on a $uv = u'v' = dm$.

La figure obtenue au moyen des déviations analogues pour toutes les parallèles à Ox est encore une ellipse. Celle-ci et l'ellipse primitive ABA' ont mêmes tangentes parallèles à Ox.

La série des ellipses concentriques telles que ABA' est ainsi remplacée par une série d'ellipses concentriques déviées parallèlement à Ox.

On obtient, d'ailleurs, une autre série d'ellipses analogues à la précédente en déviant l'ellipse primitive parallèlement à Oy. Les diamètres conjugués des tangentes qui sont parallèles à Ox dans la première série, parallèles à Oy dans la seconde, sont les droites de régression de GALTON.

L'une des ellipses de la première série, par exemple, coïncidait avec l'ellipse ABA' avant la rotation et elle avait pour axes principaux OX, OY. Alors, dans les quadrants opposés compris entre les deux directions, soit positives, soit négatives, des axes, chaque ordonnée d'un point pris dans un îlot à la circonférence de l'ellipse a le même signe que l'abscisse : le produit des deux coordonnées est donc toujours positif. Dans les deux autres quadrants le produit est toujours négatif. Et comme l'ellipse est symétrique par rapport aux deux axes, comme les îlots sont également nombreux sur tout le parcours de l'ellipse, la balance des produits négatifs et des produits positifs est nulle.

Or, dans les quadrants où les coordonnées des points sur la circonférence de l'ellipse ont le même signe, les variations de ces coordonnées entre deux points ont des signes contraires, quelle que soit l'amplitude de la variation. L'inverse a lieu dans les autres quadrants.

Il en résulte, pour la même raison de symétrie que tout à l'heure, que la balance des produits positifs et des produits négatifs est nulle aussi bien pour les variations des coordonnées que pour les coordonnées elles-mêmes. Entre points situés dans des quadrants différents, le même équilibre existe, attendu qu'à tout segment de droite unissant deux points, correspond un segment identique et symétriquement placé par rapport à Ox.

Entre des points a et b situés sur des ellipses différentes, on peut passer d'abord d'une ellipse à l'autre sur un même rayon. Dans ce trajet la balance des concordances des coordonnées reste de même sens que la balance des variations. Puis le cheminement sur la seconde ellipse laisse encore aux deux balances le même sens. Dans le cas particulier de l'ellipse ABA', ces deux balances restent nulles.

Supposons maintenant qu'il existe une relation entre les faits que représentent les deux coordonnées d'un même point représentatif. C'est ainsi qu'en déterminant la position d'un point par des mesures indirectes, les écarts de la position vraie, soit dans le sens Ox, soit dans le sens Oy, varient dans le même sens ; il en est de même des écarts des points de chute d'un projectile, d'autant plus

prononcés dans le sens perpendiculaire à la trajectoire que le point de chute est plus éloigné.

Or, la représentation des couples d'éléments ainsi, liés, au moyen de points qui se répartissent également sur des ellipses concentriques, nous permet d'apercevoir la raison pour laquelle les variations des coordonnées donnent des concordances généralement de même sens que les coordonnées elles-mêmes.

En effet, la rotation des axes Ox, Oy transforme, avons-nous vu, l'ellipse ABA' en une ellipse dont les axes principaux sont inclinés sur les axes de référence. Cette ellipse est inscrite dans un rectangle formé par des tangentes parallèles à ces axes de référence, de même que l'ellipse ABA'. Mais, tandis que pour cette dernière les quatre points de contact partageaient la circonférence de l'ellipse en quatre parties égales, à mesure que l'ellipse s'aplatit et tourne avec les axes Ox, Oy les arcs compris entre les points de contact deviennent de plus en plus inégaux. Les arcs ab, $a'b'$ sont de plus en plus longs, les arcs aa', bb' de plus en plus courts.

Supposons la relation entre les coordonnées telle que les points moyens sur les parallèles à Ox s'orientent dans les quadrants à coordonnées de même sens xOy, $x'Oy'$, suivant l'apparence que donne la figure. Dans la partie hachurée parallèlement à Oy, les coordonnées sont de même sens; elles sont de sens contraire dans la partie hachurée parallèlement à Ox. Mais cette fois il est visible que les portions d'ellipse à coordonnées de même sens sont plus grandes que les autres. Le nombre des concordances dépasse certainement celui des discordances.

D'autre part, entre deux points de contact a, b situés sur l'arc de la circonférence de l'ellipse, l'ordonnée varie dans le même sens que l'abscisse, de même pour les points sur $a'b'$, tandis que les variations sont de sens contraire pour les points des arcs aa', bb'. Les premiers arcs étant plus longs que les seconds, la balance des variations est donc aussi en faveur des concordances.

Pour ce qui est de points situés sur des arcs différents ou sur des ellipses différentes, on peut répéter ce qui a été dit plus haut à propos de l'ellipse ABA' et des points dont les coordonnées sont indépendantes.

En résumé, lorsque les éléments correspondants de deux séries sont tels qu'à un petit groupe d'éléments de l'une, ayant à peu près la même valeur, correspondent des éléments de l'autre qui soient répartis symétriquement autour de leur moyenne et que cette moyenne varie proportionnellement à l'élément correspondant de la première série, les variations tendancielles des éléments autour de leurs moyennes et les variations différentielles d'intervalle quelconque donnent des balances, entre concordances et discordances, qui ont le même signe. Et ainsi l'une des deux balances suffit pour affirmer la corrélation des deux séries, soit que les éléments de l'une dépendent directement des éléments de l'autre, soit que tous deux dépendent de quelque autre série ou de plusieurs autres séries. La

distinction des deux cas résulte de la comparaison des deux séries corrélatives après décalage de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Lorsque la distribution des éléments de chaque série n'est pas symétrique, la répartition des moyennes des éléments de l'une, pour chaque valeur de l'élément correspondant dans l'autre, n'a plus lieu suivant une ligne droite. La ligne est plus ou moins compliquée et les propositions précédentes ne sont plus vraies. La corrélation ne peut guère être établie qu'en considérant successivement les variations tendancielles et les variations différentielles, au moins celles de première amplitude, ce double examen semblant devoir suffire dans la généralité des cas.

Cas particulier de variations ordonnées.

Il reste cependant un point à éclaircir, c'est celui des relations qui naissent d'un mouvement périodique ou oscillatoire, tel que dans l'exemple donné plus haut, le déplacement d'une roue. Considérons un point de la roue et notons ses positions au-dessous ou au-dessus du plan de l'essieu, ainsi que l'avancement de la roue, à chaque quart de tour.

Les points représentatifs des couples formés par la hauteur du point et le chemin que parcourt l'essieu en même temps se disposent dans un plan de la façon suivante. Portons sur Oy les hauteurs du point de la roue, nous obtenons trois points p', Op tels que $Op = Op'$: ce sont les seules représentations de la hauteur. A mesure que la roue avance, la projection verticale du point représentatif des couples de grandeurs va de O en p puis revient en O, ensuite en p', retourne en O et ainsi de suite. Quant aux abscisses des points, à chaque fois que l'ordonnée repasse par la même valeur elle augmente d'une quantité égale à la longueur d'un quart de circonférence de la roue.

Les points représentatifs sont donc symétriques par rapport aux axes de coordonnées, les points moyens sur des parallèles à Oy sont situés sur l'axe Oy. Cette représentation semble confirmer la remarque faite plus haut à l'aide de la représentation par deux courbes. Les deux grandeurs : hauteur d'un point de la roue et déplacement de cette roue ne semblent avoir entre elles aucune relation puisqu'un changement de la hauteur donne des déplacements indifféremment situés au-dessus ou au-dessous de la moyenne, et de même, à un déplacement donné de la roue, correspondent des hauteurs indifféremment au delà ou en deça de la moyenne.

Et cependant il n'est pas douteux que les mouvements sont corrélatifs. D'où vient cette contradiction ?

Remarquons d'abord que l'analyse de BRAVAIS suppose autre chose que la simple symétrie des points. Elle suppose une distribution conforme à la loi des erreurs.

Cependant, dans ce qui précède, nous n'avons point eu besoin de faire inter-

venir cette loi qui exprime simplement la distribution, dans le plan ou dans l'espace, des erreurs de situation.

Il est vrai que, dans la représentation du mouvement d'un point de la roue, les déplacements de celle-ci s'échelonnent à intervalles fixes, bien loin de se concentrer autour de leur moyenne comme des observations de visée. Mais on peut imaginer qu'au lieu de rester fixe par rapport à la roue, le point considéré soit mis en mouvement, indépendamment du mouvement de la roue, de façon que les déplacements de celle-ci correspondent à des hauteurs différentes déterminées mécaniquement, les déplacements observés étant plus fréquents pour de petites hauteurs que pour des grandes.

Les points représentatifs sembleraient alors distribués comme ceux qui représentent des erreurs dans le plan. Seulement, tandis que si l'on numérote les erreurs successives, les numéros ne manifestent aucun ordre, le numérotage des points représentatifs des positions de la roue ferait apparaître au contraire la succession régulière due à l'appareil mécanique.

Le calcul des coefficients de covariation des deux espèces et leur confrontation ne dispensent donc pas d'examiner les conditions des phénomènes comparés, de suivre leur évolution. Les observations précédentes engagent surtout à multiplier et à fractionner les observations de façon à observer les concordances à intervalles plus ou moins rapprochés.

L'exemple de la roue suggère une remarque générale. Nous savons que les écarts accidentels, tels que ceux que l'on constate sur une cible, suivent la loi de concentration bien connue, à laquelle toute expérience se conforme. Que l'on nous présente une cible sur laquelle les points d'impact sont distribués conformément à cette loi, en conclurons-nous que les écarts sont accidentels, imputables au hasard? Sans doute, mais à la condition toutefois que, les points étant numérotés d'après l'ordre de tir, les numéros ne se suivent pas régulièrement. S'ils se suivent dans un ordre évident, nous serons convaincus que le tir a été effectué par un appareil mécanique, bien combiné au moyen de leviers et de cames.

Les résultats de l'expérience doivent être interprétés avant que l'on apprécie, d'après eux et d'après les éléments numériques qui en découlent, les relations de cause à effet ou même de simples probabilités (1). Dans les faits complexes qu'étudie la statistique il est toujours prudent de prendre garde aux liaisons cachées.

Les difficultés, les applications douteuses, les contradictions même, que fait apparaître une théorie incomplète de la corrélation, ont frappé de nombreux esprits.

Après avoir étudié des relations de faits de toute nature avec une précision

---

(1) Sur une connaissance imparfaite des causes on peut fonder des paris, mais on n'a pas le droit de calculer des probabilités (COURNOT, *Théorie des chances*, p. 161).

que la matière ne comporte pas (1), on a parfois reconnu qu'il y avait de fausses corrélations (2). D'autres fois on a jugé sans signification des corrélations indirectes qui, sans avoir la signification causale des corrélations directes, peuvent parfois suggérer l'étude de causes jusque-là ignorées ou mal connues. On a dit aussi qu'il y avait une différence fondamentale entre l'étude des séries dont les éléments se correspondent à un moment donné et l'étude des séries chronologiques (3).

Il semble qu'une théorie complète de la corrélation comprend, sous un même cadre logique, tous les cas suggérés par l'expérience. Mais l'on ne doit pas négliger d'analyser les faits complexes dans leurs qualités et propriétés en même temps qu'on les saisit numériquement par des indices assez nombreux et suffisamment variés. Ceux-ci sont plus ou moins instructifs suivant l'interprétation qu'autorise l'analyse des particularités dont on connaît les analogies avec des éléments déjà étudiés.

---

(1) Voir une communication de GULDBERG dans Skandin. Actuarietidskrift sur l'écart probable du coefficient de corrélation.

(2) Différentes études de KARL PEARSON sur les « spurious correlation ».

(3) Études de TSCHUPROW (*Grundbegriffe der Korrelationstheorie*), de YULE (Journal of the Royal, Statistical Society, janvier 1926), de CRUM et PERSONS dans The Review of economie statistics, n.° d'avril 1927, de ZINN dans le même revue en octobre 1927, de SLUTSKY dans le Bulletin économique de l'Institut russe de conjoncture, vol. III, n.° 1, 1927.

G. DARMOIS (Nancy - Francia)

ANALYSE ET COMPARAISON DES SÉRIES STATISTIQUES QUE SE DÉVELOPPENT DANS LE TEMPS

(THE TIME CORRELATION PROBLEM)

Une, deux, plusieurs grandeurs ou phénomènes statistiques possèdent une valeur déterminée à chacun de divers instants successifs. Ce seront de véritables fonctions du temps que l'observation révèle, mais il peut exister ou non des relations objectives, soit entre l'une des grandeurs et le temps, soit entre plusieurs grandeurs.

Le mot de corrélation est souvent utilisé en pareil cas. Il présente de multiples inconvénients ; confusion de sens avec la théorie des probabilités, jugement prématuré sur un lien qui peut ne pas exister.

Peut-être conviendrait-il d'employer en ce sens restreint, le mot de covariation de L. MARCH.

Si l'on a des raisons d'expliquer cette covariation par un lien véritable, c'est la recherche d'une loi par induction ; on tentera de renforcer par l'observation et le raisonnement, les raisons a priori qui nous poussent à croire à une relation. La loi peut être du type fonctionnel, du type statistique. La théorie qui l'accompagne sera plus ou moins fragmentaire.

Si l'on n'a pas de raisons de croire à une relation, on peut encore, pour des raisons pratiques, faire servir les mathématiques à la description des covariations. On rencontre alors, pour exprimer la précision de cette description à l'aide de fonctions simples, une série d'indices. Le premier, qu'on appelle souvent coefficient de corrélation, est un indice de covariation linéaire. Le fait qu'un de ces indices soit très voisin de l'unité exprime qu'on obtient une bonne description par des combinaisons linéaires de ces fonctions simples.

Mais une description, si précise soit elle, n'a pas le pouvoir, à elle seule, de nous pousser vers une induction dont notre raison nous écarte. On peut d'ailleurs toujours, en ajoutant des termes, obtenir une description aussi précise qu'on le désire.

* * *

Les composantes aléatoires et la méthode des différences. - Si l'on se propose d'étudier un phénomène dont l'évolution régulière soit tantôt favorisée, tantôt contrariée par des causes aléatoires, on est amené à distinguer les deux compo-

santes, dont la première peut obéir à des lois du type fonctionnel, l'autre obéissant à des lois du type statistique.

La méthode des différences parait apte à éliminer dans des cas étendus la composante d'évolution régulière, ne laissant subsister que la série des différences de la composante aléatoire (1).

Le problème est alors, faisant certaines hypothèses sur les liaisons de probabilité de la série primitive, de trouver les lois qui valent pour la série des différences, et d'utiliser les relations ainsi démontrées pour remonter des liens de la série des différences aux liens de la série primitive.

Dés résultats absolument généraux peuvent être obtenus dans cette voie par la considération des fonctions caractéristiques représentant les lois de probabilité.

La fonction caractéristique Φ d'une loi de probabilité à n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ est, comme on sait, l'espérance mathématique de l'exponentielle $e^{i\lambda}$:

$$\lambda = u_1 x_1 + u_2 x_2 + ... + u_n x_n$$

u_1, u_2,..., u_n étant n variables. Cette fonction caractéristique détermine entièrement la loi de probabilité. On peut la considérer également comme determinée par le logarithme de Φ, soct Ψ. Si, maintenant, par une opération quelconque, on déduit des variables x_i d'autres variables qui en soient des combinaisons linéaires, soient y_k, la combinaison

$$\mu = v_1 y_1 + v_2 y_2 + ... + v_p y_p$$

étant linéaire en x, la fonction caractéristique des y se déduit de la fonction caractéristique des x en remplaçant les u_i par certaines fonctions linéaires des v_k.

Cette remarque générale, valable pour les différences d'ordre quelconque de la série des x, donne la clé des propriétés rencontrées jusqu'ici et dont quelques unes peuvent être généralisées.

Dans le cas où les séries primitives sont sans liaison, les variables aléatoires x_i étant indépendantes, ainsi que les y_i et la liaison n'existant qu'entre termes de même indice $x_i y_i$, la fonction caractéristique de deux séries au plus des différences permet le calcul complet de la fonction caractéristique primitive, les groupes homogènes des deux fonctions Ψ étant proportionnels.

l'on se borne aux groupes du second degré, c'est le resultat de « Student ».

Si les séries sont à liaison interne, les résultats sont plus complexes. Il faut, pour remonter de la série des différences par des moyens simples, faire des hypothèses.

Nous avons étudié les cas où la liaison au lieu de se faire sur une colonne

---

(1) HOOKER, J. R. S. S., Vol. 64, 1901; Vol. 68, 1905. - STUDENT, Biom., Vol. 10, 1914. - G. UDNY YULE, J. R. S. S., Vol. 84, 1921; Vol. 89, 1926. - EGON S. PEARSON, K. PEARSON, ANDERSON, Biom., Vol. 10, 11, 14, 15, 18, 19.

de variables de même indice, porte sur deux colonnes seulement ou trois colonnes, etc.

Ces séries ainsi liées que, suivant le mot de MARKOFF, nous appelons des chaînes, sont d'une grande importance. Du point de vue théorique, comme l'a montré J. HADAMARD (1) poursuivant une idée de POINCARÉ, elles s'introduisent dans les principes de la théorie des probabilités et de la théorie cinétique. Du point de vue des sciences d'observation, elles avaient été rencontrées par EGON S. PEARSON et K. PEARSON. Leur signification générale apparait clairement.

Dans l'hypothèse spéciale des régressions linéaires, on peut, se bornant au calcul des coefficients de corrélation, arriver à des lois simples d'interliaison et de décroissance, qui permettent la solution pratique du problème, suivant les lignes de pensée et les formules de K. PEARSON et ANDERSON.

---

(1) J. HADAMARD, C. R. Ac. S., Paris, T. 185, p. 5; T. 186, p. 189. - B. HOSTINSKY, C. R. Ac. S., Paris, T. 186, p. 59; T. 186, p. 487.

E. ŻYLIŃSKI (Lwów - Polonia)

NUMBERS OF FIBONACCI IN BIOLOGICAL STATISTICS

The scope of this communication is to give a simple biological interpretation of numbers of Fibonacci: 2, 3, 5, 8, 13,.... These numbers and their 2^k multiples are, as is well known in biology, the most probable values of numbers of rays in heads of flowers, of numbers of rays by animals with a radial symmetrie (as Coelenterata and Echinodermata) etc.

The following scheme is purely hypothetical and abstract and shows only by which simple genetic conditions the numbers of Fibonacci can arise. This scheme can be perhaps utilysed as starting point for adequate biological investigations (1).

Let us consider an ideal specimen A_0 with following two presupposed proprietys:

I. - In equal time intervals τ, it is at $t=t_1$, t_2,.... where $t_{i+1}-t_i=\tau$ $(i=1, 2,,...)$, the specimen A_0 generates new specimens A_1, A_2,....: A_1 at t_1, A_2 at t_2 and so on.

II. - Each specimen A_1, A_2,.... 2τ after his birth becomes « ripe » and begins to generate new specimens in equal time intervals τ like A_0. The « maturation period » μ of whatsoever new generation is equal to 2τ.

Let us denote by s_n the number of specimens which are generated at the same time t_n.

It is easy to see, that

$$s_n=s_{n-1}+s_{n-2} \qquad (n\geqslant 3),$$

s_{n-1} beeing the number of ripe, active specimens at the foregoing generational moment t_{n-1}, and s_{n-2} the number of specimens generated at $t_{n-2}=t_n-2\tau$ and therefore the number of specimens just entering in activity.

But $s_1=s_2=1$; thus the numbers s_1, s_2, s_3,.... are numbers of Fibonacci

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ldots.\ (2).$$

---

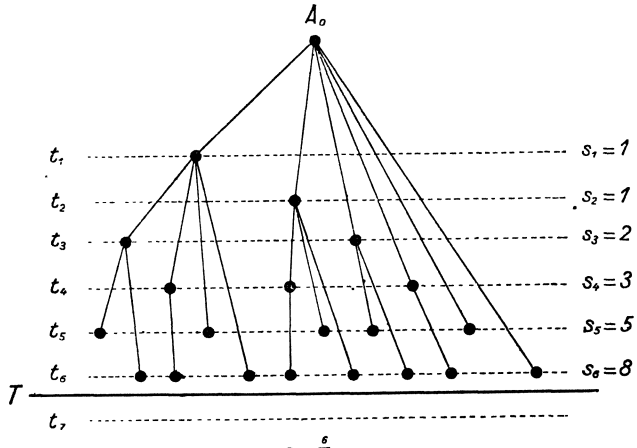
(1) By construction of this scheme I was induced by the original « Rabbits problem » of Fibonacci.

(2) The numbers of Fibonacci are mathematicaly defined by the propertys:

1°) $s_1=s_2=1$;

2°) for each $n\geqslant 3$ it is $s_n=s_{n-1}+s_{n-2}$.

The « genealogical tree » of the posterity of A_0 is represented on the table a, in the manner that the marks of specimens generated at the same time t_n are



$$\mu = 2 \ , \ S = \sum_{i=0}^{6} s_i = s_8 = 21$$

Table a.

situated on the same horizontal line, the mark for the specimen A_0 beeing placed above the first line.

Let us now denote $s_0 = 1$ and

$$\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} s_i \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

It is evident that σ_n by $n \geqslant 1$ represents the total number of specimens derived from A_0 (including A_0 itself) if the process of generation described by I. and II. would be canceled in a moment T satisfying the inequalitys

$$t_n < T < t_{n+1}.$$

The numbers σ_0, σ_1, σ_2,.... are also numbers of Fibonacci:

$$\sigma_n = s_{n+2} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots.) \ (^1).$$

(^{1}) *Demonstration.* - By direct computation we have

$$\sigma_0 = 1, \qquad \sigma_1 = 2, \qquad \sigma_2 = 3,$$

and therefore

$$\sigma_2 = \sigma_0 + \sigma_1.$$

We have further

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \sigma_{n-1}$$

if only

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}.$$

In fact,

$$\sigma_m = \sum_{i=0}^{m} s_i = \sum_{i=0}^{m-1} s_i + s_m = \sigma_{m-1} + s_m \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots.),$$

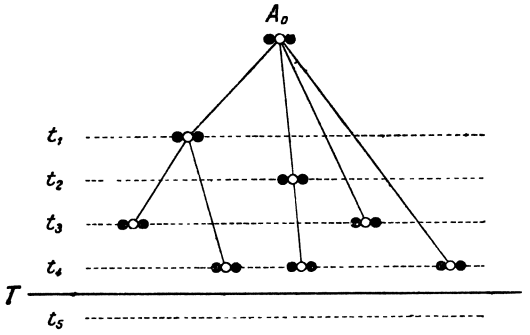
We shall indicate now a more general scheme leading to numbers of the type

$$2^k \cdot s_n,$$

where s_n is a number of Fibonacci and k is an arbitrary natural number.

We obtain this new scheme by adding to I. and II. a third assumption:

III. - The process of generation described by I. and II. is checked at a moment situated between t_n and t_{n+1} and substituted by a process of consecu-



$$\mu=2\,,\quad S=2\sum_{i=0}^{4} s_i = 2s_5 = 2\cdot 8 = 16$$

Table β.

tive, simultaneous for all specimens, symmetrical cleaving of each specimen in two new specimens.

Let us denote by t_1', t_2',.... the respective consecutive moments of the occurences of the symmetrical cleaving of specimens decribed in III. The number of all specimens in a moment T' situated between t_k' and t_{k+1}' $(t_k' < T' < t'_{k+1})$ is evidently

$$2^k \cdot \sigma_n = 2^k \cdot s_{n+2}.$$

On the table β, we have e. g. a genealogical tree of a family of

$$2^4 \cdot \sigma_4 = 2 \cdot 8 = 16$$

---

and consequently

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + s_{n+1} = (\sigma_{n-1} + \sigma_{n-2}) + (s_n + s_{n-1}) = (\sigma_{n-1} + s_n) + (\sigma_{n-2} + s_{n-1}) = \sigma_n + \sigma_{n-1}.$$

We infer now by mathematical induction that the formula (2) is valid for every $n \geqslant 2$.

Finaly again by mathematical induction we see that the two sequences of numbers

$$\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,....$$

and

$$s_2,\ s_3,\ s_4,....$$

are identical, because we have

$$\sigma_0 = s_2, \qquad \sigma_1 = s_3$$

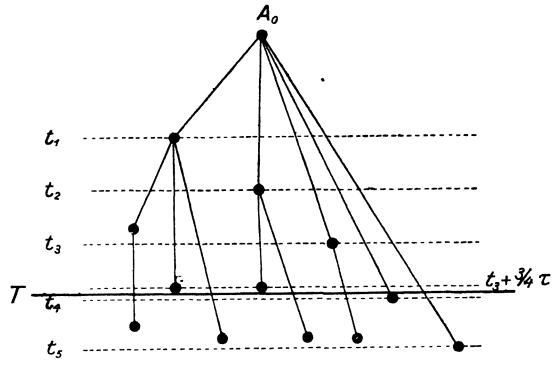
and for $n \geqslant 2$ simultaneously

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} \quad \text{and} \quad s_{n+2} = s_n + s_{n-1}.$$

specimens. The resulting specimens, generated at the moment t_1' are marked in black.

Remark. - The foregoing scheme (I, II) is able of generalisation also in such a way that we assume in II. the « maturation period » μ not exactely but aproximatively equal to 2τ.

It is quite obvious that also by such an assumption we shall « most probably » obtain as number of generated specimens a number of Fibonacci if only



$\mu=1\frac{3}{4}\tau$, $t_3+\frac{3}{4}\tau<T<t_4$, $S=7$

Table γ.

the moment T, when the process is canceled, occur rather soon (T excel t_n only with sufficiently small n) and μ only in a little differs from 2τ.

Nevertheless this generalisation of the scheme (I, II) dont exclude allready numbers which are different from numbers of Fibonacci.

E. g. let us put $\mu=1^3/_4\tau$ (table γ). If the process stops in a moment T satisfying the inequalitys

$$t_3+{}^3/_4\tau<T<t_4,$$

the number of generated specimens is 7 which is not a number of Fibonacci.

C. JORDAN (Budapest - Ungheria)

SUR UNE FORMULE D'INTERPOLATION

§ 1. - Étant donnés $M+1$ points correspondant aux abscisses $x=0, 1, \ldots, M$, l'équation de la parabole de degré M passant par ces points peut être exprimée par la formule de NEWTON:

$$f(x)=f(0)+\binom{x}{1}\Delta f(0)+\ldots+\binom{x}{M}\Delta^M f(0),$$

lorsqu'on s'arrête à la différence $n^{\text{ième}}$, on a une parabole passant par les $n+1$ points correspondant à $x=0, 1, 2, \ldots, n$.

Dans la pratique on procède par approximations successives en prenant $n=1$, 2, 3,.... jusqu'à ce que la précision demandée soit atteinte. Si $a<x<a+1$ (où a est un entier), les abscisses des points correspondant aux approximations successives ne sont pas symétriques par rapport à x; il en résulte que ces approximations auront peu de signification pratique.

Il y a donc intérêt à utiliser une formule d'interpolation telle que les abscisses des points correspondant aux approximations successives soient symétriques par rapport à x, c'est-à-dire que la première approximation soit donnée par la droite passant par les points de coordonnées a, $f(a)$ et $a+1$, $f(a+1)$; la seconde approximation par une parabole passant par les points d'abscisses $a-1$, a, $a+1$, $a+2$; enfin la $\nu^{\text{ième}}$ approximation par $x=a-\nu+1, \ldots, a, a+1, \ldots, a+\nu$. On connaît de telles formules, dont la plus importante est celle d'EVERETT.

La formule d'interpolation de NEWTON suppose la connaissance des n premières différences de la fonction $f(x)$. Il est rare que les tables de $f(x)$, dont on dispose, contiennent ces différences jusqu'à une valeur suffisante de n; et dans ce cas ces tables sont volumineuses, difficilement maniables, et leur impression est coûteuse. Si l'on ne dispose pas de telles tables, il faut commencer par calculer ces différences, ce qui rend l'emploi de la formule de NEWTON laborieuse.

La formule d'EVERETT possède, outre la symétrie mentionnée, un autre avantage sur celle de NEWTON; elle ne nécessite que la connaissance des différences d'ordre pair, ce qui permet de réduire les tables presque de moitié. Connaissant ces différences, l'emploi de la formule est tout aussi simple que celle de NEWTON. Le calcul des différences d'ordre 2, 4,...., 2ν est un peu plus simple que celui des différences d'ordre 1, 2,...., $2\nu+1$, donnant une précision équivalente.

La formule d'interpolation de LAGRANGE serait une formule idéale, si les calculs qu'elle comporte était moins compliqués; en effet on peut à l'aide de cette formule procéder par approximations successives satisfaisant à la symétrie mentionnée; de plus la connaissance des différences de $f(x)$ n'est pas alors nécessaire et les intervalles des abscisses peuvent être inégaux.

Dans ce mémoire, nous établirons une formule d'interpolation symétrique utilisable dans le cas des intervalles égaux, ne nécessitant que des calculs aussi simples que celle d'EVERETT, mais permettant comme la formule de LAGRANGE, de se passer de toutes les différences.

§ 2. - Étant données les grandeurs $x_0, x_1, \ldots, x_M$ quelconques, et les valeurs y_i correspondant aux grandeurs x_i; la parabole de degré M passant par les $M+1$ points de coordonnées $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots, x_M, y_M$ est donnée par la formule d'interpolation connue des différences divisées

$$y=f(x)=y_0+\sum_{s=1}^{M}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{s-1})\mathfrak{D}^s y_0 \tag{1}$$

où

$$\mathfrak{D}^s y_0=\sum_{i=0}^{s}\frac{y_i}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_s)}.$$

Le facteur (x_i-x_i) ne figure pas dans le dénominateur.

En arrêtant le développement précédent au terme en $\mathfrak{D}^n$, on obtient une courbe passant par les $n+1$ points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Comme on sait, on peut exprimer $\mathfrak{D}^n y_0$ par des déterminants de VANDERMONDE:

$$\mathfrak{D}^n y_0=\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^{n-1} & y_0 \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & y_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

§ 3. - Considérons le cas particulier suivant:

$$x_0=0,\quad x_1=1,\quad x_2=-1,\quad x_3=2,\quad x_4=-2,\ldots,\quad x_{2k-1}=k,\quad x_{2k}=-k,\ldots$$

Dans ce cas, les différences divisées d'ordre pair seront:

$$\mathfrak{D}^{2s}y_0=\sum_{i=1}^{s}\frac{y_{2i-1}+y_{2i}}{i(i-1)(i+1)\ldots(i-s)(i+s)}.$$

En effet, en changeant les signes des $2s$ facteurs du dénominateur de y_{2i} ce dénominateur devient égal à celui de y_{2i-1}. On peut le mettre encore sous la forme

$$(i+s)(i+s-1)\ldots i(i-1)\ldots 2\cdot 1\cdot(-1)(-2)\ldots(-s+i)=(-1)^{s-i}(i+s)!\,(s-i)!$$

de manière que l'on aura

$$\mathfrak{D}^{2s}y_0=\frac{(-1)^s}{(2s)!}\binom{2s}{s}y_0+\sum_{i=1}^{s}\frac{(-1)^{s-i}}{(2s)!}\binom{2s}{s-i}(y_{2i+1}+y_{2i}); \tag{2}$$

par le même procédé on obtient

$$\mathfrak{D}^{2s+1}y_0=\sum_{i=0}^{s+1}\frac{(-1)^{s-i+1}}{(2s+1)!}\binom{2s+1}{s+i+1}(y_{2i+1}-y_{2i}). \tag{3}$$

Introduisons le symbole ∇ défini par les équations

$$\nabla^s\varphi(x)=\varphi(x+s)\quad\text{et}\quad\nabla^{-s}\varphi(x)=\varphi(x-s)$$

et écrivons

$$y_{2i-1}=f(x_{2i-1})=f(i)=\nabla^i f(0)$$
$$y_{2i}=f(x_{2i})=f(-i)=\nabla^{-i}f(0).$$

En remarquant que le symbole ∇ se comporte au point de vue de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division comme une quantité algébrique, on peut transformer les relations (2) et (3). Si nous mettons $\frac{1}{(2s)!\,\nabla^s}$ en facteur dans le second membre de l'équation (2), nous trouvons sans difficulté

$$\mathfrak{D}^{2s}f(0)=\frac{(\nabla-1)^{2s}}{(2s)!\,\nabla^s}f(0),$$

et d'une manière semblable on obtiendrait de (3)

$$\mathfrak{D}^{2s+1}f(0)=\frac{(\nabla-1)^{2s+1}}{(2s+1)!\,\nabla^{s+1}}f(0).$$

Il en résulte que, dans le cas particulier considéré, on peut donner à la formule d'interpolation (1) des différences divisées du paragraphe précédent la forme suivante:

$$f(x)=f(0)+x(\nabla-1)f(0)+\sum_{s=1}^{n}\left[\binom{x+s-1}{2s}\frac{(\nabla-1)^{2s}}{\nabla^s}+\binom{x+s}{2s+1}\frac{(\nabla-1)^{2s+1}}{\nabla^s}\right]f(0). \tag{4}$$

En effet dans ce cas le facteur de $\mathfrak{D}^{2s}f(0)$ est

$$(x-x_0)\ldots(x-x_{2s-1})=x(x-1)(x+1)\ldots(x+s-1)(x-s)=(x+s-1)!/(x-s-1)!$$

ce qui devient, en divisant par $(2s)!$, égal au facteur du binome ci-dessus; on a une relation analogue pour le facteur de $\mathfrak{D}^{2s+1}f(0)$.

Remarquons, qu'en introduisant les symboles des différences centrales, de la formule (4) on obtient la formule d'interpolation d'EVERETT.

§ 4. - En ordonnant les termes de la somme qui figurent dans la formule (4) suivant les puissances de ∇, elle devient

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{2s+1}\left[\binom{x+s}{2s+1}\binom{2s+1}{\nu}-\binom{x+s-1}{2s}\binom{2s}{\nu-1}\right](-1)^{\nu}\nabla^{s+1-\nu}f(0)=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{2s+1}(-1)^{\nu}\binom{x+s-1}{2s}\binom{2s+1}{\nu}\frac{x+s-\nu}{2s+1}\nabla^{s+1-\nu}f(0).$$

Si nous posons $s+1-\nu=k$, l'expression précédente est égale à

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=-s}^{s+1}(-1)^{s+1+k}\binom{x+s-1}{2s}\binom{2s-1}{s+k}\frac{x+k-1}{2s+1}\nabla^{k}f(0).$$

Déterminons le terme contenant ∇^{-k+1}

$$(-1)^{s+k}\binom{x+s-1}{2s}\binom{2s+1}{s+k}\frac{x-k}{2s+1}\nabla^{-k+1}f(0),$$

puis groupons ensemble les termes ∇^{k} et ∇^{-k+1}, et soit pour abréger

$$5)\qquad \frac{1}{2k-1}\left[(x+k-1)\nabla^{k}+(k-x)\nabla^{-k+1}\right]f(0)=I_k;$$

alors

$$(6)\qquad f(x)=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}\binom{x+s-1}{2s}\sum_{k=1}^{s+1}(-1)^{k+1}\binom{2s+1}{s+k}\frac{2k-1}{2s+1}I_k.$$

Remarquons que I_1 est la valeur approchée de $f(x)$ obtenue par interpolation linéaire entre $f(1)$ et $f(0)$; et d'une manière générale I_k est la valeur approchée de $f(x)$ obtenue en interpolant linéairement entre $f(k)$ et $f(-k+1)$. On peut calculer très rapidement ces grandeurs surtout en se servant des machines à alculer modernes.

a formule d'interpolation (6) est très pratique, elle donne les mêmes résultats que la formule correspondante d'EVERETT sans nécessiter l'emploi des différences, et on arrive au résultat avec un peu moins de calculs que par la formule d'EVERETT. Comme la formule ne s'appuie pas sur les différences, elle rend les tables plus économiques et plus maniables.

Il est vrai que THOMPSON [1] a construit des tables réduisant au minimum les calculs d'interpolation à l'aide de la formule d'EVERETT. Pour rendre l'emploi de la formule (6) tout aussi facile, j'ai calculé dans le même but des tables permettant d'effectuer les calculs tout aussi rapidement que par la formule d'EVERETT

---

[1] Tracts for Computers n° 5. A. J. THOMPSON: *Table of the Coefficients of Everett's Central-Difference Interpolation Formula.* Cambridge University Press, 1921.

et les tables de THOMPSON, jusqu'à une précision qui tient compte de I_4 c'est-à-dire des neuvièmes différences, donc plus étendues que celles de THOMPSON qui ne vont que jusqu'aux septièmes différences.

On ne demande presque jamais une précision qui exigerait qu'on tînt compte des différences au delà du neuvième ordre.

Pour abréger l'écriture, posons

$$C_s(x)=(-1)^s\binom{x+s-1}{2s}. \tag{7}$$

A la fin de ce travail on trouve des tables à dix décimales de $C_s(x)$ pour $s=1, 2, 3, 4$, et pour $x=0{,}001,\ 0{,}002,\ldots,\ 0{,}500$.

Comme on a $C_s(x)=C_s(1-x)$, ces tables sont utilisables de $x=0{,}000$ à $x=1{,}000$.

Pour les autres intervalles, on calculera assez rapidement les valeurs de $C_s(x)$ en partant de $C_0(x)=1$ et en utilisant la formule:

$$C_s(x)=\frac{x+s-1}{2s}\cdot\frac{s-x}{2s-1}\cdot C_{s-1}(x). \tag{8}$$

Le coefficient de I_k dans (6) que nous désignerons par B_{sk} peut être mis sous la forme:

$$B_{sk}=(-1)^{k+1}\binom{2s+1}{s+k}\frac{2k-1}{2s+1}=(-1)^{k+1}\left[\binom{2s}{s-k+1}-\binom{2s}{s-k}\right]. \tag{9}$$

Comme s et k sont petits, le calcul est rapide; du reste, la table suivante les donne jusqu'à $s=5$.

Table de B_{sk}.

s \ k	1	2	3	4	5	6
0	1					
1	1	−1				
2	2	−3	1			
3	5	−9	5	−1		
4	14	−28	20	−7	1	
5	42	−90	75	−35	9	−1

On peut montrer que l'on a

$$\sum_{k=1}^{s+1}B_{sk}=0 \quad\text{et}\quad \sum_{k=1}^{s+1}|B_{sk}|=\binom{2s}{s} \quad\text{pour}\quad s>0.$$

La formule d'interpolation peut donc s'écrire

$$f(x)=\sum_{s=0}^{n}C_s(x)\sum_{k=1}^{s+1}B_{sk}I_k. \tag{10}$$

Comme $C_n(x)$ est du degré $2n$ en x, et comme I_k est du premier degré, la courbe (10) est une parabole du $2n+1^{\text{ième}}$ degré; elle passe par les $2n+2$ points $x=k$, $y=f(k)$ où k varie de $-n$ à $n+1$. Lorsque $2n+1=9$, on a

$$(11)\quad f(x)=I_1-\binom{x}{2}(I_1-I_2)+\binom{x+1}{4}(2I_1-3I_2+I_3)-$$
$$-\binom{x+2}{6}(5I_1-9I_2+5I_3-I_4)+\binom{x+3}{8}(14I_1-28I_2+20I_3-7I_4+I_5).$$

§ 5. - Étant donnée une suite croissante de grandeurs équidistantes

$$\xi_0,\ \xi_1,\ldots,\ \xi_m,\ \xi_{m+1},\ldots,\ \xi_M;\quad \xi_{m+1}-\xi_m=h$$

ainsi que les valeurs correspondantes $F(\xi_i)$, supposons qu'il s'agisse de déterminer la valeur $F(\xi)$ déduite de la parabole de degré $2n+1$ passant par $2n+2$ des points de coordonnées ξ_i et $F(\xi_i)$; évidemment on doit avoir $M\geqq 2n+2$. Soit $\xi_m<\xi<\xi_{m+1}$.

A) Supposons d'abord que l'on ait $M-m\geqq n+1$ et $m\geqq n$; c'est-à-dire que le point ξ, $F(\xi)$ se trouve dans la partie centrale de la table; il y a au mois $n+1$ points de chaque côté du point cherché. On peut donc faire passer la parabole par $n+1$ points à gauche et par $n+1$ points à droite correspondant a $i=m-n$, $m-n+1,\ldots,\ m,\ m+1,\ldots,\ m+n+1$. La formule d'interpolation sera donc symétrique.

On posera $x=(\xi-\xi_m)/h$ et $F(\xi)=f(x)$; il résulte $f(0)=F(\xi_m)$ et l'on pourra utiliser la formule (10) pour déterminer $f(x)$. Dans ce cas on aura $0<x<1$. Puis on calculera les valeurs de $I_1,\ I_2,\ldots,\ I_{n+1}$ en interpolant linéairement; dans le cas de I_s, entre les points de coordonnées $-s+1$, $f(-s+1)$ et s, $f(s)$. Comme x est compris entre zéro et l'unité, on pourra utiliser les tables donnant $C_s(x)$; ainsi les calculs seront très rapides. La formule (10) sera dans ce cas une « *mid-panel formula* » de PEARSON.

B) Lorsque $m<n$, c'est-à-dire si le point cherché se trouve au commencement de la table, il n'y a pas $n+1$ points donnés avant le point ξ, $F(\xi)$; on est réduit à faire passer la parabole par les $2n+2$ points ξ_i, $F(\xi_i)$ correspondant à $i=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ m,\ldots,\ 2n+1$. La formule d'interpolation ne sera plus symétrique. On posera $x=(\xi-\xi_n)/h$, et $F(\xi)=f(x)$, il résulte $f(0)=F(\xi_n)$. On utilisera encore la formule (10), en déterminant comme tout à l'heure les grandeurs $I_1,\ I_2,\ldots,\ I_{n+1}$; mais comme dans ce cas $m-n<x<m-n+1\leqq 0$ on ne pourra plus utiliser les tables de $C_s(x)$, on les calculera par la formule (8). La formule (10) est dans ce cas une « $m+1^{\text{th}}$ *panel formula* » de PEARSON [1].

---

[1] K. PEARSON: *On the Construction of Tables and Interpolation*, p. 13; $m=0$ donne le *first-panel formula*, $m=1$ le *second-panel formula* et ainsi suite. Tracts for Computers n° 2. Cambridge University Press, 1920.

C) Lorsque $M-m<n+1$, c'est-à-dire lorsque le point demandé se trouve vers la fin de la table, il n'y a pas $n+1$ point après le point ξ, $F(\xi)$; on est réduit à faire passer la parabole par les $2n+2$ points ξ_i, $F(\xi_i)$ correspondant à $i=M-2n-1$, $M-2n$,...., m,...., M. La formule d'interpolation ne sera pas symétrique. On posera $x=(\xi-\xi_{M-n-1})/h$ et $f(x)=F(\xi)$; dans ce cas on aura $f(0)=F(\xi_{M-n-1})$ et $1\leqq m-M+n+1<x<m-M+n+2$. On utilisera la formule (10) en calculant les grandeurs $C_s(x)$ par la formule (8). La formule d'interpolation obtenue sera une « *end-panel formula* » de PEARSON.

Mentionnons encore le cas particulier de $x=\frac{1}{2}$, la formule (10) devient alors une « *mid-point formula* » de PEARSON. Les grandeurs $C_s\left(\frac{1}{2}\right)$ sont les suivantes:

$$C_1\left(\frac{1}{2}\right)=1/8=0{,}125,$$
$$C_2\left(\frac{1}{2}\right)=3/128=0{,}0234375,$$
$$C_3\left(\frac{1}{2}\right)=5/1024=0{,}0048828125,$$
$$C_4\left(\frac{1}{2}\right)=35/32768=0{,}001068115234375.$$

§ 6. - Lorsque, au lieu de fixer le degré de la courbe, on prescrit la précision, on calculera successivement les termes pour $n=0$, $n=1$, $n=2$, etc. et l'on s'arrêtera quand la précision demandée sera atteinte.

Le plus souvent les deux premiers termes seront suffisants. La formule (10) est alors particulièrement simple

$$f(x)=I_1+\frac{1}{2}x(1-x)(I_1-I_2)=I_1+C_1(x)(I_1-I_2).$$

Nous avons mentionnée que cette formule tient compte des trois premières différences: généralement cela suffit.

EXEMPLE I. - Choisissons comme exemple celui donné dans les tables de la fonction Γ de LEGENDRE (1).

Soit à déterminer $\log\Gamma(\xi)$ à douze décimales près pour $\xi=1{,}0783649$. Posons $x=(\xi-1{,}078)1000$ et $\log\Gamma(\xi)=f(\xi)$; dans le cas considéré on a $x=0{,}3649$. Des tables de LEGENDRE on tire:

$$f(-2)=\log\Gamma(1{,}076)=9{,}982938\ 662977$$
$$f(-1)=\log\Gamma(1{,}077)=9{,}982739\ 772819$$
$$f(0)\ \ =\log\Gamma(1{,}078)=9{,}982541\ 524262$$
$$f(1)\ \ =\log\Gamma(1{,}079)=9{,}982343\ 916451$$
$$f(2)\ \ =\log\Gamma(1{,}080)=9{,}982146\ 948534$$
$$f(3)\ \ =\log\Gamma(1{,}081)=9{,}981950\ 619660.$$

(1) *Tracts for Computers*, n° 4. Cambridge University Press.

De la formule (5) on obtient:

$$I_1 = 9{,}982469\ 417171\ 766$$
$$I_2 = 9{,}982470\ 057530\ 135$$
$$I_3 = 9{,}982471\ 338248\ 925$$

et de (8) il résulte

$$C_1(x) = 0{,}115873\ 9950$$
$$C_2(x) = 0{,}021550\ 1296$$

par suite

$$\begin{aligned} I_1 &= \ \ 9{,}982469\ 417171\ 766 \\ C_1(x)(I_1 - I_2) &= -0{,}000000\ 074200\ 822 \\ C_2(x)(2I_1 - 3I_2 + I_3) &= \ \ 0{,}000000\ 000014\ 836 \\ \log \Gamma(1{,}0783649) &= \ \ 9{,}982469\ 342986 \end{aligned}$$

Comme les termes suivants n'ont plus d'influence sur les premières douze décimales, le résultat sera exact à douze décimales, par contre en s'arrêtant au terme en $C_1(x)$, correspondant aux troisièmes différences, on a encore une erreur de -15 unités de la douzième décimale. Comme les quatrièmes différences ne figurent pas dans les tables de LEGENDRE en employant la formule d'EVERETT, il faudrait encore calculer ces différences pour obtenir la précision demandée. Par contre la formule (10) rend superflue l'impression de 19000 chiffres dans les 10 pages de la table de LEGENDRE.

En effectuant les calculs à l'aide d'une machine à calculer le résultat précédent s'obtient très rapidement.

EXEMPLE II. - Soit à déterminer

$$\Theta(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

pour $\gamma = 0{,}34125$, à sept décimales près en se servant des tables de $\Theta(\gamma)$ de CZUBER [1].

On pose $x = 100(\gamma - 0{,}34)$ et $f(x) = \Theta(\gamma)$. Des tables de CZUBER on tire:

$$f(-1) = \Theta(0{,}33) = 0{,}3592\ 785$$
$$f(0) \ \ = \Theta(0{,}34) = 0{,}3693\ 644$$
$$f(1) \ \ = \Theta(0{,}35) = 0{,}3793\ 819$$
$$f(2) \ \ = \Theta(0{,}36) = 0{,}3893\ 296.$$

Comme $x = 0{,}125$ on trouve dans nos tables $C_1(x) = 0{,}0546875$. On détermine I_1 et I_2 à l'aide de (5)

$$I_2 = 0{,}37054\ 76625$$
$$I_1 = 0{,}37061\ 65875$$
$$C_1(x)(I_1 - I_2) = 0{,}00000\ 37693$$
$$\Theta(0{,}34125) = 0{,}37062\ 04$$

---

[1] E. CZUBER: *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, II, 1924.

Tables de $C_s(x)$.

Les valeurs suivantes de $C_s(x)$ ont été calculées en utilisant la formule (8) à l'aide d'une machine à calculer « *Nova-Brunsviga* » permettant de multiplier 10 chiffres par dix chiffres et donnant un résultat de 18 chiffres. Cette machine permet, sans nouvelle mise au point, de continuer les opérations sur le résultat obtenu.

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,001	0,0004995	0,0000832916	0,0000166611	0,0000035705
0,002	0,0009980	0,0001664993	0,0000333109	0,0000071392
0,003	0,0014955	0,0002496228	0,0000499494	0,0000107061
0,004	0,0019920	0,0003326613	0,0000665764	0,0000142711
0,005	0,0024875	0,0004156146	0,0000831918	0,0000178342
0,006	0,0029820	0,0004984821	0,0000997955	0,0000213954
0,007	0,0034755	0,0005812632	0,0001163873	0,0000249546
0,008	0,0039680	0,0006639575	0,0001329671	0,0000285118
0,009	0,0044595	0,0007465645	0,0001495349	0,0000320670
0,010	0,0049500	0,0008290838	0,0001660903	0,0000356202
0,011	0,0054395	0,0009115147	0,0001826335	0,0000391712
0,012	0,0059280	0,0009938569	0,0001991641	0,0000427202
0,013	0,0064155	0,0010761098	0,0002156822	0,0000462703
0,014	0,0069020	0,0011582729	0,0002321875	0,0000498117
0,015	0,0073875	0,0012403459	0,0002486800	0,0000533542
0,016	0,0078720	0,0013223281	0,0002651596	0,0000568945
0,017	0,0083555	0,0014042191	0,0002816260	0,0000604325
0,018	0,0088380	0,0014860184	0,0002980792	0,0000639682
0,019	0,0093195	0,0015677255	0,0003145191	0,0000675016
0,020	0,0098000	0,0016493400	0,0003309456	0,0000710327
0,021	0,0102795	0,0017308614	0,0003473584	0,0000745615
0,022	0,0107580	0,0018122891	0,0003637576	0,0000780878
0,023	0,0112355	0,0018936227	0,0003801429	0,0000816117
0,024	0,0117120	0,0019748618	0,0003965143	0,0000851332
0,025	0,0121875	0,0020560059	0,0004128717	0,0000886522
0,026	0,0126620	0,0021370544	0,0004292148	0,0000921687
0,027	0,0131355	0,0022180069	0,0004455437	0,0000956827
0,028	0,0136080	0,0022988629	0,0004618581	0,0000991941
0,029	0,0140795	0,0023796221	0,0004781580	0,0001027029
0,030	0,0145500	0,0024602838	0,0004944432	0,0001062091
0,031	0,0150195	0,0025408476	0,0005107137	0,0001097126
0,032	0,0154880	0,0026213130	0,0005269692	0,0001132135

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,033	0,0159555	0,0027016797	0,0005432097	0,0001167116
0,034	0,0164220	0,0027819470	0,0005594351	0,0001202071
0,035	0,0168875	0,0028621146	0,0005756452	0,0001236997
0,036	0,0173520	0,0029421820	0,0005918399	0,0001271896
0,037	0,0178155	0,0030221487	0,0006080191	0,0001306767
0,038	0,0182780	0,0031020142	0,0006241828	0,0001341609
0,039	0,0187395	0,0031817781	0,0006403306	0,0001376423
0,040	0,0192000	0,0032614400	0,0006564626	0,0001411207
0,041	0,0196595	0,0033409993	0,0006725787	0,0001445962
0,042	0,0201180	0,0034204557	0,0006886786	0,0001480688
0,043	0,0205755	0,0034998085	0,0007047624	0,0001515384
0,044	0,0210320	0,0035790575	0,0007208298	0,0001550050
0,045	0,0214875	0,0036582021	0,0007368808	0,0001584685
0,046	0,0219420	0,0037372419	0,0007529152	0,0001619290
0,047	0,0223955	0,0038161764	0,0007689330	0,0001653864
0,048	0,0228480	0,0038950052	0,0007849339	0,0001688406
0,049	0,0232995	0,0039737278	0,0008009179	0,0001722917
0,050	0,0237500	0,0040523438	0,0008168850	0,0001757397
0,051	0,0241995	0,0041308526	0,0008328348	0,0001791844
0,052	0,0246480	0,0042092540	0,0008487674	0,0001826259
0,053	0,0250955	0,0042875474	0,0008646827	0,0001860641
0,054	0,0255420	0,0043657323	0,0008805804	0,0001894991
0,055	0,0259875	0,0044438084	0,0008964606	0,0001929307
0,056	0,0264320	0,0045217751	0,0009123230	0,0001963590
0,057	0,0268755	0,0045996321	0,0009281676	0,0001997839
0,058	0,0273180	0,0046773789	0,0009439942	0,0002032055
0,059	0,0277595	0,0047550150	0,0009598028	0,0002066236
0,060	0,0282000	0,0048325400	0,0009755932	0,0002100382
0,061	0,0286395	0,0049099535	0,0009913653	0,0002134494
0,062	0,0290780	0,0049872550	0,0010071190	0,0002168571
0,063	0,0295155	0,0050644441	0,0010228541	0,0002202612
0,064	0,0299520	0,0051415204	0,0010385707	0,0002236618
0,065	0,0303875	0,0052184834	0,0010542684	0,0002270588
0,066	0,0308220	0,0052953326	0,0010699474	0,0002304522
0,067	0,0312555	0,0053720677	0,0010856073	0,0002338420
0,068	0,0316880	0,0054486882	0,0011012482	0,0002372281
0,069	0,0321195	0,0055251937	0,0011168698	0,0002406104
0,070	0,0325500	0,0056015838	0,0011324722	0,0002439891
0,071	0,0329795	0,0056778579	0,0011480551	0,0002473640
0,072	0,0334080	0,0057540157	0,0011636185	0,0002507352

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,073	0,0338355	0,0058300568	0,0011791622	0,0002541025
0,074	0,0342620	0,0059059808	0,0011946862	0,0002574661
0,075	0,0346875	0,0059817871	0,0012101903	0,0002608257
0,076	0,0351120	0,0060574754	0,0012256744	0,0002641815
0,077	0,0355355	0,0061330453	0,0012411384	0,0002675334
0,078	0,0359580	0,0062084963	0,0012565823	0,0002708813
0,079	0,0363795	0,0062838280	0,0012720058	0,0002742253
0,080	0,0368000	0,0063590400	0,0012874088	0,0002775653
0,081	0,0372195	0,0064341319	0,0013027914	0,0002809013
0,082	0,0376380	0,0065091032	0,0013181533	0,0002842333
0,083	0,0380555	0,0065839535	0,0013334944	0,0002875612
0,084	0,0384720	0,0066586825	0,0013488147	0,0002908850
0,085	0,0388875	0,0067332896	0,0013641140	0,0002942047
0,086	0,0393020	0,0068077745	0,0013793922	0,0002975202
0,087	0,0397155	0,0068821368	0,0013946492	0,0003008316
0,088	0,0401280	0,0069563761	0,0014098849	0,0003041388
0,089	0,0405395	0,0070304918	0,0014250992	0,0003074417
0,090	0,0409500	0,0071044838	0,0014402920	0,0003107404
0,091	0,0413595	0,0071783514	0,0014554631	0,0003140349
0,092	0,0417680	0,0072520943	0,0014706126	0,0003173250
0,093	0,0421755	0,0073257121	0,0014857401	0,0003206108
0,094	0,0425820	0,0073992044	0,0015008458	0,0003238923
0,095	0,0429875	0,0074725709	0,0015159293	0,0003271694
0,096	0,0433920	0,0075458109	0,0015309907	0,0003304420
0,097	0,0437955	0,0076189243	0,0015460298	0,0003337103
0,098	0,0441980	0,0076919105	0,0015610466	0,0003369741
0,099	0,0445995	0,0077647692	0,0015760408	0,0003402334
0,100	0,0450000	0,0078750000	0,0015910125	0,0003434882
0,101	0,0453995	0,0079101024	0,0016059615	0,0003467385
0,102	0,0457980	0,0079825761	0,0016208876	0,0003499843
0,103	0,0461955	0,0080549207	0,0016357909	0,0003532254
0,104	0,0465920	0,0081271357	0,0016506711	0,0003564620
0,105	0,0469875	0,0081992209	0,0016655282	0,0003596939
0,106	0,0473820	0,0082711757	0,0016803621	0,0003629211
0,107	0,0477755	0,0083429997	0,0016951727	0,0003661437
0,108	0,0481680	0,0084146927	0,0017099598	0,0003693616
0,109	0,0485595	0,0084862542	0,0017247234	0,0003725747
0,110	0,0489500	0,0085576838	0,0017394633	0,0003757831
0,111	0,0493395	0,0086289810	0,0017541795	0,0003789867
0,112	0,0497280	0,0087001457	0,0017688719	0,0003821855

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,113	0,0501155	0,0087711772	0,0017835402	0,0003853794
0,114	0,0505020	0,0088420753	0,0017981846	0,0003885685
0,115	0,0508875	0,0089128396	0,0018128047	0,0003917528
0,116	0,0512720	0,0089834697	0,0018274006	0,0003949321
0,117	0,0516555	0,0090539651	0,0018419722	0,0003981065
0,118	0,0520380	0,0091243256	0,0018565192	0,0004012759
0,119	0,0524195	0,0091945507	0,0018710417	0,0004044403
0,120	0,0528000	0,0092646400	0,0018853395	0,0004075980
0,121	0,0531795	0,0093345932	0,0019000126	0,0004107542
0,122	0,0535580	0,0094044099	0,0019144607	0,0004139035
0,123	0,0539355	0,0094740897	0,0019288839	0,0004170478
0,124	0,0543120	0,0095436322	0,0019432820	0,0004201870
0,125	0,0546875	0,0096130371	0,0019576550	0,0004233210
0,126	0,0550620	0,0096823040	0,0019720026	0,0004264499
0,127	0,0554355	0,0097514324	0,0019863249	0,0004295736
0,128	0,0558080	0,0098204221	0,0020006216	0,0004326922
0,129	0,0561795	0,0098892727	0,0020148928	0,0004358055
0,130	0,0565500	0,0099579838	0,0020291383	0,0004389135
0,131	0,0569195	0,0100265549	0,0020433581	0,0004420163
0,132	0,0572880	0,0100949858	0,0020575519	0,0004451137
0,133	0,0576555	0,0101632761	0,0020717198	0,0004482059
0,134	0,0580220	0,0102314254	0,0020858616	0,0004512927
0,135	0,0583875	0,0102994334	0,0020999772	0,0004543741
0,136	0,0587520	0,0103672996	0,0021140666	0,0004574502
0,137	0,0591155	0,0104350237	0,0021281295	0,0004605208
0,138	0,0594780	0,0105026054	0,0021421660	0,0004635860
0,139	0,0598395	0,0105700443	0,0021561759	0,0004666457
0,140	0,0602000	0,0106373400	0,0021701592	0,0004697000
0,141	0,0605595	0,0107044922	0,0021841157	0,0004727487
0,142	0,0609180	0,0107715005	0,0021980453	0,0004757919
0,143	0,0612755	0,0108383645	0,0022119480	0,0004788295
0,144	0,0616320	0,0109050839	0,0022258236	0,0004818616
0,145	0,0619875	0,0109716584	0,0022396721	0,0004848880
0,146	0,0623420	0,0110380875	0,0022534933	0,0004879088
0,147	0,0626955	0,0111043710	0,0022672871	0,0004909240
0,148	0,0630480	0,0111705084	0,0022810536	0,0004939335
0,149	0,0633995	0,0112364994	0,0022947924	0,0004969373
0,150	0,0637500	0,0113023438	0,0023085037	0,0004999353
0,151	0,0640995	0,0113680410	0,0023221872	0,0005029277
0,152	0,0644480	0,0114335908	0,0023358429	0,0005059142

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,153	0,0647955	0,0114989928	0,0023494708	0,0005088950
0,154	0,0651420	0,0115642467	0,0023630705	0,0005118699
0,155	0,0654875	0,0116293352	0,0023766422	0,0005148391
0,156	0,0658320	0,0116430870	0,0023901857	0,0005178023
0,157	0,0661755	0,0117591161	0,0024037009	0,0005207597
0,158	0,0665180	0,0118237741	0,0024171877	0,0005237112
0,159	0,0668595	0,0118882821	0,0024306461	0,0005266567
0,160	0,0672000	0,0119526400	0,0024440758	0,0005295963
0,161	0,0675395	0,0120168473	0,0024574769	0,0005325299
0,162	0,0678780	0,0120809038	0,0024708493	0,0005354576
0,163	0,0682155	0,0121448091	0,0024841928	0,0005383792
0,164	0,0685520	0,0122085628	0,0024975073	0,0005412948
0,165	0,0688875	0,0122621646	0,0025107928	0,0005442043
0,166	0,0692220	0,0123356142	0,0025240492	0,0005471077
0,167	0,0695555	0,0123989113	0,0025372764	0,0005500050
0,168	0,0698880	0,0124620554	0,0025504743	0,0005528962
0,169	0,0702195	0,0125250464	0,0025636428	0,0005557812
0,170	0,0705500	0,0125878838	0,0025767818	0,0005586601
0,171	0,0708795	0,0126505673	0,0025898912	0,0005615328
0,172	0,0712080	0,0127130965	0,0026029709	0,0005643992
0,173	0,0715355	0,0127754713	0,0026160209	0,0005672594
0,174	0,0718620	0,0128376912	0,0026290410	0,0005701134
0,175	0,0721875	0,0128997559	0,0026420312	0,0005729610
0,176	0,0725120	0,0129616650	0,0026549914	0,0005758024
0,177	0,0728355	0,0130234183	0,0026679215	0,0005786374
0,178	0,0731580	0,0130850155	0,0026808213	0,0005814661
0,179	0,0734795	0,0131464562	0,0026936909	0,0005842884
0,180	0,0738000	0,0132077400	0,0027065301	0,0005871044
0,181	0,0741195	0,0132688667	0,0027193388	0,0005899139
0,182	0,0744380	0,0133298360	0,0027321169	0,0005927170
0,183	0,0747555	0,0133906475	0,0027448645	0,0005955136
0,184	0,0750720	0,0134513009	0,0027575812	0,0005983037
0,185	0,0753875	0,0135117959	0,0027702672	0,0006010874
0,186	0,0757020	0,0135721321	0,0027829223	0,0006038645
0,187	0,0760155	0,0136323094	0,0027955463	0,0006066351
0,188	0,0763280	0,0136923273	0,0028081393	0,0006093991
0,189	0,0766395	0,0137521855	0,0028207011	0,0006121566
0,190	0,0769500	0,0138118838	0,0028332317	0,0006149074
0,191	0,0772595	0,0138714217	0,0028457310	0,0006176516
0,192	0,0775680	0,0139307991	0,0028581988	0,0006203892

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,193	0,0778755	0,0139900156	0,0028706351	0,0006231201
0,194	0,0781820	0,0140490709	0,0028830398	0,0006258443
0,195	0,0784875	0,0141079646	0,0028954128	0,0006285618
0,196	0,0787920	0,0141666965	0,0029077541	0,0006312726
0,197	0,0790955	0,0142252664	0,0029200636	0,0006339766
0,198	0,0793980	0,0142836737	0,0029323411	0,0006366739
0,199	0,0796995	0,0143419184	0,0029445866	0,0006393643
0,200	0,0800000	0,0144000000	0,0029568000	0,0006420480
0,201	0,0802995	0,0144579183	0,0029689812	0,0006447248
0,202	0,0805980	0,0145156729	0,0029811302	0,0006473948
0,203	0,0808955	0,0145732637	0,0029932468	0,0006500579
0,204	0,0811920	0,0146306901	0,0030053310	0,0006527141
0,205	0,0814875	0,0146879521	0,0030173827	0,0006553634
0,206	0,0817820	0,0147450493	0,0030294018	0,0006580058
0,207	0,0820755	0,0148019813	0,0030413883	0,0006606412
0,208	0,0823680	0,0148587479	0,0030533419	0,0006632696
0,209	0,0826595	0,0149153488	0,0030652628	0,0006658911
0,210	0,0829500	0,0149717838	0,0030771507	0,0006685055
0,211	0,0832395	0,0150280524	0,0030890056	0,0006711129
0,212	0,0835280	0,0150841545	0,0031008275	0,0006737132
0,213	0,0838155	0,0151400897	0,0031126162	0,0006763065
0,214	0,0841020	0,0151958578	0,0031243717	0,0006788927
0,215	0,0843875	0,0152514584	0,0031360938	0,0006814718
0,216	0,0846720	0,0153068913	0,0031477826	0,0006840437
0,217	0,0849555	0,0153621562	0,0031594379	0,0006866085
0,218	0,0852380	0,0154172528	0,0031710596	0,0006891662
0,219	0,0855195	0,0154721808	0,0031826477	0,0006917166
0,220	0,0858000	0,0155269400	0,0031942021	0,0006942598
0,221	0,0860795	0,0155815301	0,0032057227	0,0006967958
0,222	0,0863580	0,0156359507	0,0032172094	0,0006993246
0,223	0,0866355	0,0156902016	0,0032286622	0,0007018461
0,224	0,0869120	0,0157442826	0,0032400810	0,0007043603
0,225	0,0871875	0,0157981934	0,0032514657	0,0007068672
0,226	0,0874620	0,0158519336	0,0032628162	0,0007093668
0,227	0,0877355	0,0159055030	0,0032741324	0,0007118590
0,228	0,0880080	0,0159589013	0,0032854143	0,0007143439
0,229	0,0882795	0,0160121284	0,0032966618	0,0007168214
0,230	0,0885500	0,0160651838	0,0033078749	0,0007192915
0,231	0,0888195	0,0161180673	0,0033190534	0,0007217542
0,232	0,0890880	0,0161707786	0,0033301972	0,0007242094

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,233	0,0893555	0,0162233176	0,0033413064	0,0007266572
0,234	0,0896220	0,0162756838	0,0033523807	0,0007290975
0,235	0,0898875	0,0163278771	0,0033634202	0,0007315304
0,236	0,0901520	0,0163798972	0,0033744248	0,0007339557
0,237	0,0904155	0,0164317438	0,0033853944	0,0007363735
0,238	0,0906780	0,0164834166	0,0033963289	0,0007387838
0,239	0,0909395	0,0165349154	0,0034072282	0,0007411865
0,240	0,0912000	0,0165862400	0,0034180923	0,0007435816
0,241	0,0914595	0,0166373900	0,0034289212	0,0007459691
0,242	0,0917180	0,0166883653	0,0034397146	0,0007483490
0,243	0,0919755	0,0167391654	0,0034504726	0,0007507212
0,244	0,0922320	0,0167897903	0,0034611951	0,0007530858
0,245	0,0924875	0,0168402396	0,0034718820	0,0007554428
0,246	0,0927420	0,0168905131	0,0034825333	0,0007577920
0,247	0,0929955	0,0169406105	0,0034931488	0,0007601336
0,248	0,0932480	0,0169905316	0,0035037285	0,0007624674
0,249	0,0934995	0,0170402761	0,0035142724	0,0007647935
0,250	0,0937500	0,0170898438	0,0035247803	0,0007671118
0,251	0,0939995	0,0171392343	0,0035352522	0,0007694223
0,252	0,0942480	0,0171884476	0,0035456880	0,0007717251
0,253	0,0944955	0,0172374833	0,0035560876	0,0007740200
0,254	0,0947420	0,0172863411	0,0035664511	0,0007763071
0,255	0,0949875	0,0173350209	0,0035767782	0,0007785864
0,256	0,0952320	0,0173835223	0,0035870690	0,0007808578
0,257	0,0954755	0,0174318452	0,0035973233	0,0007831213
0,258	0,0957180	0,0174799893	0,0036075412	0,0007853769
0,259	0,0959595	0,0175279543	0,0036177224	0,0007876246
0,260	0,0962000	0,0175757400	0,0036278671	0,0007898644
0,261	0,0964395	0,0176233462	0,0036379750	0,0007920962
0,262	0,0966780	0,0176707726	0,0036480462	0,0007943201
0,263	0,0969155	0,0177180190	0,0036580805	0,0007965360
0,264	0,0971520	0,0177650852	0,0036680779	0,0007987439
0,265	0,0973875	0,0178119709	0,0036780384	0,0008009438
0,266	0,0976220	0,0178586758	0,0036879618	0,0008031356
0,267	0,0978555	0,0179051998	0,0036978481	0,0008053194
0,268	0,0980880	0,0179515426	0,0037076973	0,0008074951
0,269	0,0983195	0,0179977040	0,0037175092	0,0008096628
0,270	0,0985500	0,0180436838	0,0037272838	0,0008118224
0,271	0,0987795	0,0180894816	0,0037370210	0,0008139738
0,272	0,0990080	0,0181350973	0,0037467208	0,0008161171

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,273	0,0992355	0,0181805307	0,0037563831	0,0008182523
0,274	0,0994620	0,0182257816	0,0037660078	0,0008203793
0,275	0,0996875	0,0182708496	0,0037755949	0,0008224982
0,276	0,0999120	0,0183157346	0,0037851444	0,0008246088
0,277	0,1001355	0,0183604364	0,0037946560	0,0008267113
0,278	0,1003580	0,0184049547	0,0038041299	0,0008288055
0,279	0,1005795	0,0184492893	0,0038135659	0,0008308915
0,280	0,1008000	0,0184934400	0,0038229639	0,0008329692
0,281	0,1010195	0,0185374066	0,0038323239	0,0008350387
0,282	0,1012380	0,0185811888	0,0038416459	0,0008370999
0,283	0,1014555	0,0186247864	0,0038509298	0,0008391527
0,284	0,1016720	0,0186681993	0,0038601754	0,0008411973
0,285	0,1018875	0,0187114271	0,0038693828	0,0008432335
0,286	0,1021020	0,0187544697	0,0038785519	0,0008452614
0,287	0,1023155	0,0187973269	0,0038876826	0,0008472809
0,288	0,1025280	0,0188399985	0,0038967749	0,0008492921
0,289	0,1027395	0,0188824841	0,0039058286	0,0008512948
0,290	0,1029500	0,0189247838	0,0039148438	0,0008532892
0,291	0,1031595	0,0189668971	0,0039238205	0,0008552751
0,292	0,1033680	0,0190088239	0,0039327584	0,0008572526
0,293	0,1035755	0,0190505640	0,0039416576	0,0008592216
0,294	0,1037820	0,0190921173	0,0039505180	0,0008611822
0,295	0,1039875	0,0191334834	0,0039593395	0,0008631343
0,296	0,1041920	0,0191746621	0,0039681222	0,0008650778
0,297	0,1043955	0,0192156534	0,0039768659	0,0008670129
0,298	0,1045980	0,0192564569	0,0039855705	0,0008689395
0,299	0,1047995	0,0192970725	0,0039942361	0,0008708575
0,300	0,1050000	0,0193375000	0,0040028625	0,0008727670
0,301	0,1051995	0,0193777391	0,0040114497	0,0008746679
0,302	0,1053980	0,0194177897	0,0040199977	0,0008765602
0,303	0,1055955	0,0194576516	0,0040285064	0,0008784439
0,304	0,1057920	0,0194973245	0,0040369756	0,0008803191
0,305	0,1059875	0,0195368084	0,0040454055	0,0008821856
0,306	0,1061820	0,0195761028	0,0040537959	0,0008840434
0,307	0,1063755	0,0196152078	0,0040621467	0,0008858926
0,308	0,1065680	0,0196541231	0,0040704580	0,0008877332
0,309	0,1067595	0,0196928485	0,0040787296	0,0008895650
0,310	0,1069500	0,0197313838	0,0040869615	0,0008913882
0,311	0,1071395	0,0197697287	0,0040951537	0,0008932027
0,312	0,1073280	0,0198078833	0,0041033060	0,0008950084

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,313	0,1075155	0,0198458471	0,0041114185	0,0008968054
0,314	0,1077020	0,0198836201	0,0041194911	0,0008985937
0,315	0,1078875	0,0199212021	0,0041275237	0,0009003732
0,316	0,1080720	0,0199585929	0,0041355162	0,0009021440
0,317	0,1082555	0,0199957922	0,0041434687	0,0009039059
0,318	0,1084380	0,0200328000	0,0041513811	0,0009056591
0,319	0,1086195	0,0200696160	0,0041592533	0,0009074034
0,320	0,1088000	0,0201062400	0,0041670853	0,0009091389
0,321	0,1089795	0,0201426719	0,0041748769	0,0009108656
0,322	0,1091580	0,0201789115	0,0041826283	0,0009125835
0,323	0,1093355	0,0202149586	0,0041903392	0,0009142924
0,324	0,1095120	0,0202508130	0,0041980097	0,0009159925
0,325	0,1096875	0,0202864746	0,0042056398	0,0009176837
0,326	0,1098620	0,0203219432	0,0042132293	0,0009193660
0,327	0,1100355	0,0203572185	0,0042207782	0,0009210394
0,328	0,1102080	0,0203923005	0,0042282864	0,0009227039
0,329	0,1103795	0,0204271890	0,0042357540	0,0009243594
0,330	0,1105500	0,0204618838	0,0042431808	0,0009260060
0,331	0,1107195	0,0204963846	0,0042505669	0,0009276436
0,332	0,1108880	0,0205306914	0,0042579121	0,0009292723
0,333	0,1110555	0,0205648040	0,0042652164	0,0009308919
0,334	0,1112220	0,0205987222	0,0042724798	0,0009325026
0,335	0,1113875	0,0206324459	0,0042797023	0,0009341042
0,336	0,1115520	0,0206659748	0,0042868837	0,0009356969
0,337	0,1117155	0,0206993088	0,0042940240	0,0009372805
0,338	0,1118780	0,0207324478	0,0043011232	0,0009388550
0,339	0,1120395	0,0207653916	0,0043081813	0,0009404205
0,340	0,1122000	0,0207981400	0,0043151981	0,0009419769
0,341	0,1123595	0,0208306929	0,0043221737	0,0009435243
0,342	0,1125180	0,0208630501	0,0043291079	0,0009450625
0,343	0,1126755	0,0208952114	0,0043360008	0,0009465916
0,344	0,1128320	0,0209271767	0,0043428524	0,0009481117
0,345	0,1129875	0,0209589459	0,0043496624	0,0009496226
0,346	0,1131420	0,0209905187	0,0043564310	0,0009511243
0,347	0,1132955	0,0210218951	0,0043631581	0,0009526170
0,348	0,1134480	0,0210530748	0,0043698436	0,0009541004
0,349	0,1135995	0,0210840577	0,0043764874	0,0009555747
0,350	0,1137500	0,0211148438	0,0043830896	0,0009570398
0,351	0,1138995	0,0211454327	0,0043896502	0,0009584957
0,352	0,1140480	0,0211758244	0,0043961689	0,0009699424

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,353	0,1141955	0,0212060187	0,0044026459	0,0009613799
0,354	0,1143420	0,0212360155	0,0044090810	0,0009628082
0,355	0,1144875	0,0212658146	0,0044154743	0,0009642272
0,356	0,1146320	0,0212954159	0,0044218256	0,0009656370
0,357	0,1147755	0,0213248192	0,0044281350	0,0009670375
0,358	0,1149180	0,0213540245	0,0044344023	0,0009684288
0,359	0,1150595	0,0213830314	0,0044406277	0,0009698108
0,360	0,1152000	0,0214118400	0,0044468109	0,0009711835
0,361	0,1153395	0,0214404500	0,0044529521	0,0009725469
0,362	0,1154780	0,0214688614	0,0044590510	0,0009739010
0,363	0,1156155	0,0214970740	0,0044651078	0,0009752458
0,364	0,1157520	0,0215250876	0,0044711223	0,0009765813
0,365	0,1158875	0,0215529021	0,0044770946	0,0009779074
0,366	0,1160220	0,0215805174	0,0044830245	0,0009792242
0,367	0,1161555	0,0216079334	0,0044889120	0,0009805316
0,368	0,1162880	0,0216351498	0,0044947572	0,0009818296
0,369	0,1164195	0,0216621667	0,0045005599	0,0009831183
0,370	0,1165500	0,0216889838	0,0045063202	0,0009843976
0,371	0,1166795	0,0217156010	0,0045120379	0,0009856675
0,372	0,1168080	0,0217420181	0,0045177131	0,0009869280
0,373	0,1169355	0,0217682352	0,0045233457	0,0009881791
0,374	0,1170620	0,0217942520	0,0045289356	0,0009894207
0,375	0,1171875	0,0218200684	0,0045344830	0,0009906529
0,376	0,1173120	0,0218456842	0,0045399876	0,0009918757
0,377	0,1174355	0,0218710994	0,0045454495	0,0009930891
0,378	0,1175580	0,0218963139	0,0045508686	0,0009942929
0,379	0,1176795	0,0219213275	0,0045562449	0,0009954874
0,380	0,1178000	0,0219461400	0,0045615784	0,0009966723
0,381	0,1179195	0,0219707514	0,0045668690	0,0009978477
0,382	0,1180380	0,0219951616	0,0045721166	0,0009990137
0,383	0,1181555	0,0220193704	0,0045773214	0,0010001701
0,384	0,1182720	0,0220433777	0,0045824832	0,0010013171
0,385	0,1183875	0,0220671834	0,0045876019	0,0010024545
0,386	0,1185020	0,0220907873	0,0045926776	0,0010035824
0,387	0,1186155	0,0221141895	0,0045977103	0,0010047008
0,388	0,1187280	0,0221373897	0,0046026998	0,0010058096
0,389	0,1188395	0,0221603878	0,0046076462	0,0010069088
0,390	0,1189500	0,0221831838	0,0046125494	0,0010079985
0,391	0,1190595	0,0222057774	0,0046174094	0,0010090787
0,392	0,1191680	0,0222281687	0,0046222262	0,0010101492

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,393	0,1192755	0,0222503575	0,0046269997	0,0010112102
0,394	0,1193820	0,0222723437	0,0046317299	0,0010122616
0,395	0,1194875	0,0222941271	0,0046364167	0,0010133034
0,396	0,1195920	0,0223157077	0,0046410602	0,0010143355
0,397	0,1196955	0,0223370855	0,0046456603	0,0010153581
0,398	0,1197980	0,0223582601	0,0046502170	0,0010163710
0,399	0,1198995	0,0223792317	0,0046547302	0,0010173743
0,400	0,1200000	0,0224000000	0,0046592000	0,0010183680
0,401	0,1200995	0,0224205650	0,0046636262	0,0010193520
0,402	0,1201980	0,0224409265	0,0046680089	0,0010203264
0,403	0,1202955	0,0224610846	0,0046723481	0,0010212911
0,404	0,1203920	0,0224810389	0,0046766436	0,0010222461
0,405	0,1204875	0,0225007896	0,0046808955	0,0010231915
0,406	0,1205820	0,0225203364	0,0046851038	0,0010241272
0,407	0,1206755	0,0225396794	0,0046892683	0,0010250532
0,408	0,1207680	0,0225588183	0,0046933892	0,0010259695
0,409	0,1208595	0,0225777531	0,0046974664	0,0010268761
0,410	0,1209500	0,0225964838	0,0047014997	0,0010277730
0,411	0,1210395	0,0226150101	0,0047054893	0,0010286602
0,412	0,1211280	0,0226333321	0,0047094351	0,0010295377
0,413	0,1212155	0,0226514496	0,0047133370	0,0010304054
0,414	0,1213020	0,0226693625	0,0047171951	0,0010312634
0,415	0,1213875	0,0226870709	0,0047210093	0,0010321117
0,416	0,1214720	0,0227045745	0,0047247796	0,0010329502
0,417	0,1215555	0,0227218733	0,0047285059	0,0010337790
0,418	0,1216380	0,0227389672	0,0047321883	0,0010345980
0,419	0,1217195	0,0227558561	0,0047358267	0,0010354072
0,420	0,1218000	0,0227725400	0,0047394210	0,0010362067
0,421	0,1218795	0,0227890188	0,0047429714	0,0010369964
0,422	0,1219580	0,0228052923	0,0047464776	0,0010377763
0,423	0,1220355	0,0228213605	0,0047499398	0,0010385464
0,424	0,1221120	0,0228372234	0,0047533580	0,0010393068
0,425	0,1221875	0,0228528809	0,0047567319	0,0010400573
0,426	0,1222620	0,0228683328	0,0047600618	0,0010407980
0,427	0,1223355	0,0228835791	0,0047633474	0,0010415290
0,428	0,1224080	0,0228986197	0,0047665889	0,0010422501
0,429	0,1224795	0,0229134546	0,0047697862	0,0010429614
0,430	0,1225500	0,0229280838	0,0047729392	0,0010436628
0,431	0,1226195	0,0229425070	0,0047760480	0,0010443544
0,432	0,1226880	0,0229567242	0,0047791125	0,0010450362

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,433	0,1227555	0,0229707355	0,0047821327	0,0010457082
0,434	0,1228220	0,0229845406	0,0047851086	0,0010463703
0,435	0,1228875	0,0229981396	0,0047880402	0,0010470225
0,436	0,1229520	0,0230115324	0,0047909274	0,0010476649
0,437	0,1230155	0,0230247189	0,0047937703	0,0010482975
0,438	0,1230780	0,0230376990	0,0047965687	0,0010489202
0,439	0,1231395	0,0230504727	0,0047993228	0,0010495330
0,440	0,1232000	0,0230630400	0,0048020324	0,0010501359
0,441	0,1232595	0,0230754007	0,0048046976	0,0010507289
0,442	0,1233180	0,0230875548	0,0048073184	0,0010513121
0,443	0,1233755	0,0230995023	0,0048098946	0,0010518854
0,444	0,1234320	0,0231112431	0,0048124264	0,0010524488
0,445	0,1234875	0,0231227771	0,0048149137	0,0010530023
0,446	0,1235420	0,0231341043	0,0048173564	0,0010535459
0,447	0,1235955	0,0231452246	0,0048197546	0,0010540796
0,448	0,1236480	0,0231561380	0,0048221083	0,0010546033
0,449	0,1236995	0,0231668444	0,0048244173	0,0010551172
0,450	0,1237500	0,0231773438	0,0048266818	0,0010556212
0,451	0,1237995	0,0231876360	0,0048289017	0,0010561152
0,452	0,1238480	0,0231977212	0,0048310770	0,0010565993
0,453	0,1238955	0,0232075992	0,0048332076	0,0010570735
0,454	0,1239420	0,0232172699	0,0048352936	0,0010575378
0,455	0,1239875	0,0232267334	0,0048373350	0,0010579921
0,456	0,1240320	0,0232359895	0,0048393316	0,0010584365
0,457	0,1240755	0,0232450383	0,0048412836	0,0010588709
0,458	0,1241180	0,0232538796	0,0048431909	0,0010592955
0,459	0,1241595	0,0232625136	0,0048450535	0,0010597100
0,460	0,1242000	0,0232709400	0,0048468714	0,0010601146
0,461	0,1242395	0,0232791589	0,0048486445	0,0010605093
0,462	0,1242780	0,0232871702	0,0048503729	0,0010608940
0,463	0,1243155	0,0232949739	0,0048520565	0,0010612688
0,464	0,1243520	0,0233025700	0,0048536954	0,0010616335
0,465	0,1243875	0,0233099584	0,0048552895	0,0010619884
0,466	0,1244220	0,0233171390	0,0048568388	0,0010623332
0,467	0,1244555	0,0233241119	0,0048583433	0,0010626681
0,468	0,1244880	0,0233308770	0,0048598030	0,0010629930
0,469	0,1245195	0,0233374343	0,0048612179	0,0010633080
0,470	0,1245500	0,0233437838	0,0048625880	0,0010636130
0,471	0,1245795	0,0233499253	0,0048639132	0,0010639080
0,472	0,1246080	0,0233558589	0,0048651936	0,0010641930

x	$C_1(x)$	$C_2(x)$	$C_3(x)$	$C_4(x)$
0,473	0,1246355	0,0233615846	0,0048664291	0,0010644680
0,474	0,1246620	0,0233671024	0,0048676198	0,0010647331
0,475	0,1246875	0,0233724121	0,0048687656	0,0010649881
0,476	0,1247120	0,0233775138	0,0048698665	0,0010652332
0,477	0,1247355	0,0233824075	0,0048709226	0,0010654683
0,478	0,1247580	0,0233870931	0,0048719337	0,0010656934
0,479	0,1247795	0,0233915706	0,0048729000	0,0010659085
0,480	0,1248000	0,0233958400	0,0048738214	0,0010661136
0,481	0,1248195	0,0233999013	0,0048746978	0,0010663087
0,482	0,1248380	0,0234037544	0,0048755294	0,0010664938
0,483	0,1248555	0,0234073993	0,0048763160	0,0010666690
0,484	0,1248720	0,0234108361	0,0048770577	0,0010668341
0,485	0,1248875	0,0234140646	0,0048777545	0,0010669892
0,486	0,1249020	0,0234170849	0,0048784064	0,0010671343
0,487	0,1249155	0,0234198970	0,0048790133	0,0010672694
0,488	0,1249280	0,0234225009	0,0048795753	0,0010673945
0,489	0,1249395	0,0234248964	0,0048800923	0,0010675096
0,490	0,1249500	0,0234270838	0,0048805644	0,0010676147
0,491	0,1249595	0,0234290628	0,0048809915	0,0010677098
0,492	0,1249680	0,0234308335	0,0048813737	0,0010677949
0,493	0,1249755	0,0234323959	0,0048817109	0,0010678700
0,494	0,1249820	0,0234337500	0,0048820031	0,0010679350
0,495	0,1249875	0,0234348959	0,0048822504	0,0010679901
0,496	0,1249920	0,0234358333	0,0048824528	0,0010680352
0,497	0,1249955	0,0234365625	0,0048826102	0,0010680702
0,498	0,1249980	0,0234370833	0,0048827226	0,0010680952
0,499	0,1249995	0,0234373958	0,0048827900	0,0010681102
0,500	0,1250000	0,0234375000	0,0048828125	0,0010681152

B. DE FINETTI (Roma - Italia)

FUNZIONE CARATTERISTICA DI UN FENOMENO ALEATORIO

§ 1. - Scopo di questa comunicazione è di mostrare come il metodo della funzione caratteristica (1), già così vantaggiosamente introdotto nella teoria delle variabili casuali, si presti pure assai utilmente allo studio dei fenomeni aleatori. Mostreremo quindi, in primo luogo, come si possa individuare completamente un fenomeno aleatorio mediante la sua funzione caratteristica, e accenneremo poi alle operazioni che ne fanno un potente strumento di calcolo. Un'esposizione completa si troverà in una memoria che sarà presentata quanto prima alla R. Accademia dei Lincei (2).

§ 2. - Un fenomeno di cui si può fare (o quanto meno si può concepire) un numero qualunque di prove lo diremo *fenomeno aleatorio* quando l'ordine in cui le prove favorevoli e sfavorevoli si alternano sia da attribuirsi al caso. Si esige cioè che tutte le $\binom{n}{h}$ successioni di n prove di cui h favorevoli, successioni che differiscono tra loro solo per l'ordine, abbiano uguale probabilità. Questa, in termini precisi, la proprietà caratteristica di quelli che abbiamo convenuto di definire fenomeni aleatori.

Sarà bene vedere con qualche esempio la portata di tale restrizione, e avere così un'idea chiara del campo di questa ricerca. Se si ha una moneta o un dado, e lo si lancia sempre allo stesso modo, non ci sarà nessun motivo, d'indole causale, nemmeno se della perfezione del pezzo non siamo sicuri, che possa influire sull'ordine in cui si alternano le prove favorevoli e sfavorevoli: l'ordine sarà dovuto al caso, e si ha quindi un fenomeno aleatorio, secondo la data definizione. Lo stesso si dica per il problema della roulette, per le estrazioni da un'urna scelta a sorte in una collezione nota, e tutti i casi consimili. Se invece si considera una successione di tiri al bersaglio di uno stesso tiratore, o la successione delle giornate piovose e non piovose, o delle giornate in cui il signore di rimpetto si rade la barba, tale condizione non si potrà ragionevolmente rite-

(1) V. i Trattati di *Calcolo delle Probabilità* di G. CASTELNUOVO e di P. LÉVY.

(2) Memorie della R. Acc. Naz. dei Lincei, S. 6ª, vol. IV, fasc. V.

nere verificata, perchè nel primo caso si può prevedere dapprima un progressivo addestramento del tiratore, e poi il sopravvenire della stanchezza, ciò che rende probabile un addensamento delle prove favorevoli nel periodo di forma migliore, perchè i giorni piovosi saranno riuniti in periodi di piovosità più o meno lunghi, senza parlare poi della periodicità stagionale, e perchè il signore di rimpetto si raderà sempre a intervalli più o meno regolari.

Per decidere, in pratica, se un certo fenomeno si possa considerare fenomeno aleatorio, oppure no, basta pensare se un'eventuale regolarità o altra singolarità riscontrata nell'ordine della successione si attribuirebbe al caso (e allora si ha un fenomeno aleatorio) o si potrebbe ritenere dovuta a qualche circostanza connessa al fenomeno, in modo da far pensare che anche in un'altra uguale serie di prove sia probabile si rinnovi.

§ 3. - Se di un certo fenomeno aleatorio si fanno n prove, il numero di quelle che risultano favorevoli è ovviamente una variabile casuale x_n capace di assumere soltanto i valori 0, 1,...., n; se indichiamo $\omega_h^{(n)}$ la probabilità che il fenomeno considerato si verifichi h volte su n prove, la variabile casuale x_n è caratterizzata dalle probabilità $\omega_0^{(n)}$, $\omega_1^{(n)}$,...., $\omega_n^{(n)}$ colle quali può assumere i diversi valori possibili. Nel caso particolare e ben noto in cui il fenomeno abbia una probabilità costante p nota a priori, si sa che $\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h}$, ma nel caso generale di cui ci occupiamo le $\omega_h^{(n)}$ potranno essere qualunque (a parte delle limitazioni imposte dalla natura stessa del problema, e che troveremo in seguito).

Un fenomeno aleatorio ci definirà dunque una successione di variabili casuali x_1, x_2,...., x_n,...., che è chiaro debbano risultare tra loro interdipendenti. Tale interdipendenza si traduce analiticamente in una relazione differenziale ricorrente che lega le loro funzioni caratteristiche ψ_1, ψ_2,...., ψ_n,...., e che costituisce la base di questa ricerca.

Si dimostra che al crescere di n la funzione

$$\psi_n\left(\frac{t}{n}\right) = \sum_0^n {}_h \omega_h^{(n)} e^{i\frac{h}{n}t}$$

tende uniformemente in ogni regione finita alla funzione intera

$$\psi(t) = \sum_0^\infty {}_h \omega_h^{(h)} \frac{i^h t^h}{h!},$$

che è quella appunto che si dirà per definizione « *funzione caratteristica del fenomeno aleatorio* ». Nota la ψ si ricavano tutte le ψ_n e di conseguenza tutte le $\omega_h^{(n)}$, e ciò giustifica bene la denominazione.

L'integrale da $-\infty$ a $+\infty$ della funzione $\dfrac{e^{it} - e^{-i\xi t}}{it} \psi(t)$ esiste sempre per ogni valore di ξ, ed è uguale rispettivamente a 0 e 2π per $\xi < 0$ e $\xi > 1$; di

conseguenza esiste una variabile casuale di cui $\psi(t)$ è la funzione caratteristica, la corrispondente funzione di ripartizione è

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{it}-e^{-i\xi t}}{it}\psi(t)dt,$$

ed è $\Phi(\xi)=0$ per $\xi<0$ e $\Phi(\xi)=1$ per $\xi>1$.

Da tali risultati scendono due teoremi importanti:

I. La probabilità che la frequenza su n prove sia compresa entro limiti assegnati ξ_1 e ξ_2 tende a $\Phi(\xi_2)-\Phi(\xi_1)$ al crescere di n;

II. La probabilità che tutte le frequenze dopo l'n^{ma} siano comprese fra limiti assegnati ξ_1 e ξ_2 tende a

$$\operatorname*{limd}_{\xi=\xi_2}\Phi(\xi)-\operatorname*{lims}_{\xi=\xi_1}\Phi(\xi)$$

al crescere di n.

Perchè, assegnata una $\psi(t)$, possa esistere un fenomeno aleatorio di cui essa sia funzione caratteristica occorre e basta che la corrispondente funzione di ripartizione $\Phi(\xi)$ (naturalmente reale e mai decrescente) sia nulla per $\xi<0$ e $=1$ per $\xi>1$.

§ 4. - Esponiamo succintamente i calcoli.

Tra le $\omega_h^{(n)}$ dovrà sussistere la relazione

$$\omega_k^{(m)}=\sum_k{}_h\,\omega_h^{(n)}\frac{\binom{h}{k}\binom{n-h}{m-k}}{\binom{n}{m}} \tag{1}$$

perchè $\binom{h}{k}\binom{n-h}{m-k}:\binom{n}{m}$ è la probabilità che su m prove, prese tra n di cui h favorevoli, le favorevoli siano k, quando tutte le combinazioni sono ugualmente probabili. In particolare (per $m=n-1$):

$$n\omega_k^{(n-1)}=(n-k)\omega_k^{(n)}+(k+1)\omega_{k+1}^{(n)} \tag{2}$$

e ponendo

$$\Omega_n(z)=\sum_0^n{}_h\,\omega_h^{(n)}z^h \tag{3}$$

tutte le (2) per $k=0, 1,\ldots, n-1$ si riassumono nella relazione differenziale ricorrente

$$n\Omega_{n-1}(z)=n\Omega_n(z)+(1-z)D\Omega_n(z). \tag{4}$$

Derivando la (4) e ricavandone i valori delle successive derivate per $z=1$ si ha

$$\Omega_n(1+z)=\sum_0^n{}_h\binom{n}{h}\omega_h^{(h)}z^h \tag{5}$$

e si trova che $\Omega_n\left(1+\frac{z}{n}\right)$, quando $n\to\infty$, tende uniformemente a

$$\Omega(1+z)=\sum_0^\infty{}_h\,\omega_h^{(h)}\frac{z^h}{h!}. \tag{6}$$

La funzione caratteristica ψ_n è

$$\psi_n(t)=\Omega_n(e^{it}), \tag{7}$$

si dimostra che $\Omega\left(e^{\frac{t}{n}}\right)$ tende pure a $\Omega(1+t)$, e quindi la funzione caratteristica del fenomeno aleatorio (funzione limite cui tende uniformemente $\psi_n\left(\frac{t}{n}\right)$) è

$$\psi(t)=\Omega(1+it). \tag{8}$$

§ 5. - Una prima conseguenza notevole: come mostrano le (8), (6), per n indefinitamente crescente, il momento m^{mo} di $\frac{x_n}{n}$, ossia il valor-probabile-limite della potenza m^{ma} della frequenza per un numero indefinitamente crescente di prove, tende a $\omega_m^{(m)}$, cioè al valore della probabilità che m prove siano tutte favorevoli.

Ai teoremi enunciati nel § 3 si arriva traducendo i risultati ottenuti per le funzioni caratteristiche in quelli corrispondenti per le funzioni di ripartizione: indicando $\Phi_n(x)$ la funzione di ripartizione di x_n, si ha

$$\lim_{n=\infty}\Phi_n(n\xi)=\Phi(\xi). \tag{9}$$

L'altro teorema, relativo alla probabilità che tutte le frequenze da un certo n in poi appartengano a un dato intervallo, si può considerare come l'estensione al caso di un qualunque fenomeno aleatorio del teorema relativo alle prove ripetute indipendenti e con probabilità costante, che è un caso particolare del noto teorema di CANTELLI (1). Anche la dimostrazione si può ricondurre a quella del caso trattato da CANTELLI.

§ 6. - Le (6), (5), (7) provano chiaramente l'asserto che la ψ basta a determinare completamente tutte le ψ_n. Altrettanto si potrà dire della Φ, perchè da essa si ha

$$\psi(t)=\int_0^1 e^{it\xi}d\Phi=e^{it}-it\int_0^1 e^{it\xi}\Phi(\xi)d\xi \tag{10}$$

$$\Omega_n(1+z)=\int_0^1(1+z\xi)^n d\Phi=(1+z)^n-nz\int_0^1(1+z\xi)^{n-1}\Phi(\xi)d\xi \tag{11}$$

$$\omega_h^{(n)}=\binom{n}{h}\int_0^1\xi^h(1-\xi)^{n-h}d\Phi=\binom{n}{h}\int_0^1(h-n\xi)\xi^{n-1}(1-\xi)^{n-h-1}\Phi(\xi)d\xi. \tag{12}$$

---

(1) F. P. CANTELLI: *Sulla probabilità come limite della frequenza.* Rend. R. Acc. dei Lincei, serie V, vol. XXVI, gennaio 1917.

§ 7. - Consideriamo due casi di particolare importanza, che serviranno anche utilmente come esempi.

Nel caso ben noto in cui la probabilità di un fenomeno è nota a priori e uguale a p,

$$\omega_h^{(n)} = \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h}, \qquad \omega_h^{(h)} = p^h,$$

$$\Omega_n(1+z) = (1+pz)^n, \qquad \Omega(1+z) = \lim_{n=\infty} \left(1+\frac{pz}{n}\right)^n = e^{pz},$$

$$\psi(t) = e^{ipt},$$

o anche direttamente (dalla (7))

$$\psi(t) = \sum_0^\infty {}_h\, p^h \frac{i^h t^h}{h!} = e^{ipt}, \qquad \Phi(\xi) = 0,\ {}^1/_2,\ 1, \text{ a seconda che } \xi < p,\ \xi = p,\ \xi > p.$$

Al crescere di n la probabilità che la frequenza sia compresa in un intorno $p \pm \varepsilon$ di p tende all'unità; inversamente da tale ipotesi scende che $\psi(t) = e^{ipt}$, e cioè che il fenomeno ha probabilità costante e uguale a p in tutte le prove. Come casi particolari, per $p=0$, $p=1$, si ha $\psi(t)=1$, $\psi(t)=e^{it}$.

Nel caso in cui tutte le frequenze siano ugualmente probabili si avrà

$$\omega_0^{(n)} = \omega_1^{(n)} = \ldots = \omega_n^{(n)} = \frac{1}{n+1}, \qquad \omega_h^{(h)} = \frac{1}{h+1},$$

$$\Omega_n(z) = \frac{1}{n+1}(1+z+z^2+\ldots+z^n) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-z^{n+1}}{1-z},$$

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1-e^{it(n+1)}}{1-e^{it}},$$

$$\Omega(1+z) = \lim_{n-\infty} \frac{1}{n+1} \cdot \frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^{n+1} - 1}{\frac{z}{n}} = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$\psi(t) = \frac{e^{it}-1}{it} = \sum_0^\infty {}_h\, \frac{t^h}{(h+1)!},$$

$$\Phi_n(h) = \frac{h+{}^1/_2}{n+1} \quad (h = 0, 1, \ldots, n), \qquad \Phi(\xi) = \lim_{n=\infty} \Phi_n(n\xi) = \xi.$$

Al crescere di n la probabilità che la frequenza sia compresa in un intervallo ξ_1, ξ_2 tende a $\xi_2 - \xi_1$; inversamente da tale ipotesi scende

$$\psi(t) = \int_0^1 e^{it\xi} d\xi = \left[\frac{e^{it\xi}}{it}\right]_0^1 = \frac{e^{it}-1}{it}, \qquad \omega_h^{(n)} = \frac{1}{n+1},$$

e il fenomeno ha quindi ugualmente probabili tutte le diverse frequenze su n prove.

§ 8. - Passiamo alle operazioni sulle funzioni caratteristiche.

Come osservazione generale possiamo dire che tutte le operazioni che incontreremo sono distributive, a meno (ove occorra) di un fattore moltiplicativo che fa assumere il valore 1 alla $\psi(t)$ per $t=0$, come necessariamente deve aversi.

Introducendo l'operatore U:

$$Uf(t)=\frac{f(t)}{f(0)}$$

possiamo dire che le operazioni che ci si presenteranno sono prodotti del tipo UF con F distributiva.

Poichè la funzione di ripartizione $\Phi(\xi)$ è funzione lineare biunivoca della funzione caratteristica $\psi(t)$, ad ogni operazione distributiva sulla ψ corrisponderà la trasformata che opera su Φ.

Due operazioni utili per semplificare le notazioni sono $\mathbf{P}_n$ (leggere: « *polinomio ennesimo* ») che applicato a ψ produce Ω_n [1], e $\begin{bmatrix} h \\ n \end{bmatrix}$ che applicato a ψ produce $\omega_h^{(n)}$. Si possono definire in generale ponendo: se

$$f(t)=\sum_0^\infty{}_h a_h \frac{i^h t^h}{h!},$$

$$\mathbf{P}_n f(t)=\sum_0^n{}_h \binom{n}{h} a_h t^h=\sum_0^n{}_h (1+t)^h \left\{\begin{matrix} h \\ n \end{matrix}\right\} f\Big\}. \tag{13}$$

Si osservi in particolare che $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} f=a_n$, e che la $\psi_n(t)$ è $\mathbf{P}_n\psi(e^{it}-1)$.

§ 9. - Sia $\psi(t)$ la funzione caratteristica di un certo fenomeno aleatorio. La funzione caratteristica del fenomeno contrario è

$$K\psi(t)=e^{it}\psi(-t). \tag{14}$$

Infatti dire che su n prove quelle favorevoli sono h, equivale a dire che sono $n-h$ quelle favorevoli all'evento contrario, ciò che si esprime

$$\begin{bmatrix} h \\ n \end{bmatrix} K=\begin{bmatrix} n-h \\ n \end{bmatrix}, \tag{15}$$

e dà $\left(\text{scrivendo } \omega_h^{(n)}=\begin{bmatrix} n \\ h \end{bmatrix}\psi\right)$:

$$\mathbf{P}_n K\psi(z-1)=\omega_n^{(n)}+\omega_{n-1}^{(n)}z+\ldots.+\omega_0^{(n)}z^n=$$

$$=z^n\left\{\omega_0^{(n)}+\omega_1^{(n)}\frac{1}{z}+\ldots.+\omega_n^{(n)}\frac{1}{z^n}\right\}=z^n\mathbf{P}_n\psi\left(\frac{1}{z}-1\right),$$

$$\mathbf{P}_n K\psi(e^{it}-1)=e^{nit}\mathbf{P}_n\psi(e^{-it}-1)$$

e

$$K\psi(t)=\lim_{n=\infty}\mathbf{P}_n K\psi\left(e^{i\frac{t}{n}}-1\right)=\lim_{n=\infty}\left(e^{i\frac{t}{n}}\right)^n\lim_{n=\infty}\mathbf{P}_n\psi\left(e^{-i\frac{t}{n}}-1\right)=e^{it}\psi(-t).$$

Essendo in particolare $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} K=\begin{bmatrix} 0 \\ n \end{bmatrix}$:

$$K\psi(t)=1+\omega_0^{(1)}it-\omega_0^{(2)}\frac{t^2}{2!}-\omega_0^{(3)}i\frac{t^3}{3!}+\ldots.+\omega_0^{(n)}i^n\frac{t^n}{n!}+\ldots. \tag{16}$$

---

[1] Precisamente la funzione $\Omega_n(1+z)$, non la $\Omega_n(z)$.

Se Φ è la funzione di ripartizione corrispondente a ψ, si trova che la funzione di ripartizione $K_\Phi\Phi$ corrispondente a $K\psi$ è

$$K_\Phi\Phi(\xi)=1-\Phi(1-\xi) \tag{17}$$

come era del resto intuitivo: la probabilità che al limite la frequenza d'un evento sia inferiore a ξ è uguale a quella che la frequenza dell'evento contrario sia superiore a $1-\xi$.

K è operazione distributiva reversibile involutoria:

$$K(\psi'+\psi'')=K\psi'+K\psi'', \qquad KK\psi=\psi, \qquad K^{-1}\psi=K\psi.$$

§ 10. - La funzione caratteristica nell'ipotesi che la prima prova sia favorevole è

$$R\psi=UD\psi, \tag{18}$$

nell'ipotesi che la prima prova sia sfavorevole è

$$S\psi=U(i-D)\psi, \tag{19}$$

più in generale, dopo r prove favorevoli ed s sfavorevoli diviene

$$R^rS^s\psi=UD^r(1-D)^s\psi. \tag{20}$$

La probabilità $\omega_n^{(n)}$ che le prime n prove siano tutte favorevoli è infatti uguale al prodotto della probabilità $\omega_1^{(1)}$ che la prima prova sia favorevole per la probabilità che, verificata quest'ipotesi, lo siano le prime $n-1$ prove successive, probabilità che è $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} R\psi$. Il coefficente n^{mo} dello sviluppo di $R\psi$ è quindi il coefficente $(n+1)^{\text{mo}}$, $\omega_{n+1}^{(n+1)}$, dello sviluppo di ψ diviso per il primo,

$$\omega_1^{(1)}=-iD\psi(0),$$

e quindi

$$R\psi(t)=\frac{1}{\omega_1^{(1)}}\left\{\omega_1^{(1)}+\omega_2^{(2)}\frac{it}{1!}-\omega_3^{(3)}\frac{t^2}{2!}+\ldots.+\omega_{n+1}^{(n+1)}\frac{i^nt^n}{n!}+\ldots.\right\}=\frac{-iD\psi(t)}{-iD\psi(0)}=UD\psi(t).$$

Per dimostrare che $S=U(i-D)$ conviene partire dall'osservazione che S è ovviamente la trasformata di R mediante K: $S=KRK$. Dalla (14):

$$DK\psi(t)=e^{it}[i\psi(-t)-D\psi(-t)];$$

$$KDK\psi(t)=e^{it}\{e^{-it}[i\psi(t)-D\psi(t)]\}=(i-D)\psi(t); \qquad KDK=i-D;$$

e per facili proprietà di U:

$$S=KRK=UKDK=U(i-D),$$

da cui

$$S\psi(t)=\frac{i\psi(t)-D\psi(t)}{i-D\psi(0)}=\frac{1}{1-\omega_1^{(1)}}\sum_0^\infty{}_h(\omega_h^{(h)}-\omega_{h+1}^{(h+1)})\frac{i^ht^h}{h!}.$$

Le operazioni R ed S sono permutabili:

$$RS = SR,$$

e quindi

$$R^r S^s = S^s R^r = S^{s_1} R^{r_1} S^{s_2} R^{r_2} \ldots \quad (s_1 + s_2 + \ldots = s,\ r_1 + r_2 + \ldots = r).$$

Ciò prova che dopo r prove favorevoli ed s sfavorevoli, indipendentemente dall'ordine in cui esse si alternano, la funzione caratteristica diviene $R^r S^s \psi$.

La probabilità che un fenomeno aleatorio che ha la funzione caratteristica ψ si verifichi h volte su n prove successive nell'ipotesi che delle prime $r+1$ prove quelle favorevoli siano r e s le sfavorevoli è data dalla formula

$$(21) \qquad \begin{bmatrix} h \\ n \end{bmatrix} R^r S^s \psi = \frac{\binom{h+r}{r}\binom{n-h+s}{s}}{\binom{n+r+s}{n}} \cdot \frac{\begin{bmatrix} h+r \\ n+r+s \end{bmatrix} \psi}{\begin{bmatrix} r \\ r+s \end{bmatrix} \psi}.$$

§ 11. - Indichiamo R_Φ, S_Φ, le operazioni che trasformano la funzione di ripartizione corrispondente a ψ in quella corrispondente a $R\psi$ o a $S\psi$.

Partendo dall'espressione di $D\psi(t)$ che si ottiene derivando la (10) si ricava

$$(22) \qquad R_\Phi \Phi(\xi) = \frac{\xi\Phi(\xi) - \int_0^\xi \Phi(\lambda)\,d\lambda}{1 - \int_0^1 \Phi(\lambda)\,d\lambda} = \frac{\int_0^{\Phi(\xi)} \xi\,d\Phi}{\int_0^1 \xi\,d\Phi};$$

analogamente si trova

$$(23) \qquad S_\Phi \Phi(\xi) = \frac{\int_0^{\Phi(\xi)} (1-\xi)\,d\Phi}{\int_0^1 (1-\xi)\,d\Phi},$$

e in generale

$$(24) \qquad R_\Phi^r S_\Phi^s \Phi(\xi) = \frac{\int_0^{\Phi\xi} \xi^r (1-\xi)^s\,d\Phi}{\int_0^1 \xi^r (1-\xi)^s\,d\Phi}.$$

A tali risultati possiamo dare una forma più espressiva. Pel teorema della media:

$$(25) \qquad [R_\Phi^r S_\Phi^s \Phi]_{\xi_1}^{\xi_2} = \frac{\bar{\xi}^r (1-\bar{\xi})^s}{\int_0^1 \xi^r (1-\xi)^s\,d\Phi} [\Phi]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

con $\xi_1 \leqslant \bar{\xi} \leqslant \xi_2$ e indicando $[\Phi]_{\xi_1}^{\xi_2} = \Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)$.

Si deduce da questa formula un teorema asintotico assai notevole nel campo delle relazioni fra probabilità e frequenza. Se la frequenza su un numero suffi-

centemente grande di prove è f, la funzione caratteristica tende a quella stessa che varrebbe se il fenomeno avesse probabilità nota a priori uguale ad f, a meno che in un intorno di f la Φ sia costante. In termini precisi: se per nessun $\varepsilon>0$ è

$$\Phi\left(\frac{r}{r+s}-\varepsilon\right)=\Phi\left(\frac{r}{r+s}+\varepsilon\right), \quad \text{è} \quad \lim_{n=\infty}(R_\Phi^r S_\Phi^s)^n\Phi(\xi)=0,\ {}^1/_2,\ 1$$

a seconda che $\xi<f$, $\xi=f$, $\xi>f$, e conseguentemente

$$\lim_{n=\infty}(R^rS^s)^n\psi(t)=e^{ift}, \tag{26}$$

e la tendenza al limite è uniforme in ogni regione finita (CASTELNUOVO, Op. cit., vol. II, p. 198).

Quindi, qualunque sia la natura di un fenomeno aleatorio (purchè la sua Φ soddisfaccia la detta restrizione), la probabilità che, nell'ipotesi che sulle prime n prove la frequenza osservata sia f, in quelle successive la frequenza tenda a un limite che differisca da f per più di un dato ε può rendersi piccola quanto si vuole pur di prendere n sufficentemente grande.

§ 12. - Come esercizio, applichiamo i risultati trovati alle funzioni caratteristiche considerate nel § 8.

Se $\psi(t)=e^{ipt}$, si ha

$$K\psi(t)=e^{i(1-p)t}, \qquad R\psi(t)=S\psi(t)=R^rS^s\psi(t)=e^{ipt}.$$

Non si hanno altre funzioni caratteristiche che rimangono invariate conoscendo l'esito di una prova: se $R\psi=\psi$ o $S\psi=\psi$ scende che $\psi(t)=e^{ipt}$ $(0\leqslant p\leqslant 1)$.

Se $\psi(t)=\dfrac{e^{it}-1}{it}$:

$$K\psi(t)=\psi(t)=\frac{e^{it}-1}{it};$$

$$R\psi(t)=\frac{2}{t^2}(e^{it}-ite^{it}-1); \qquad S\psi(t)=\frac{2}{t^2}(1+it-e^{it});$$

$$\begin{bmatrix}h\\n\end{bmatrix}R^rS^s\psi=\frac{\binom{h+r}{r}\binom{n-h+s}{s}}{\binom{n+r+s}{n}}\cdot\frac{n+r+s+1}{r+s+1}. \tag{27}$$

In particolare la probabilità che l'$(r+s+1)^{\text{ma}}$ prova sia favorevole, dopo r prove favorevoli ed s sfavorevoli è

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}R^rS^s\psi=\frac{r+1}{r+s+2}. \tag{28}$$

È questa la formula di cui si fece uso e anche abuso nella teoria della probabilità a posteriori. Essa è rigorosamente esatta quando sia $\psi(t)=\dfrac{e^{it}-1}{it}$, ma è valida solo in questo caso specialissimo.

§ 13. - Due altri problemi meritano un cenno.

Se si hanno due fenomeni (analogamente per tre o più), indipendenti tra loro, le cui funzioni caratteristiche sono

$$\psi'(t)=\sum_0^\infty{}_h a_h \frac{i^h t^h}{h!}, \qquad \psi''(t)=\sum_0^\infty{}_h b_h \frac{i^h t^h}{h!},$$

il loro coverificarsi è un fenomeno aleatorio la cui funzione caratteristica è

$$\psi(t)=\sum_0^\infty{}_h a_h b_h \frac{i^h t^h}{h!}. \tag{29}$$

Infatti a_h è la probabilità che il primo fenomeno si verifichi sempre su h prove, b_h l'analoga per il secondo, e di conseguenza $a_h b_h$ è la probabilità che su h prove si verifichino sempre entrambi.

In particolare se $\psi''(t)=e^{ipt}$ (fenomeno a probabilità nota p) si ha $\psi(t)=\psi'(pt)$; se

$$\psi''(t)=\frac{e^{it}-1}{it}$$

è

$$\psi(t)=\frac{1}{t}\int_0^t \psi'(t)dt.$$

Ad esempio per

$$\psi'(t)=e^{ipt}, \qquad \psi''(t)=\frac{e^{it}-1}{it}: \qquad \psi(t)=\frac{e^{ipt}-1}{ipt}.$$

§ 14. - Se un fenomeno può dipendere da diverse cause (incompatibili) che hanno rispettivamente le probabilità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, e nelle diverse ipotesi il fenomeno ha rispettivamente le funzioni caratteristiche $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \ldots, \psi^{(m)}(t)$, la funzione caratteristica del fenomeno aleatorio è

$$\psi(t)=\lambda_1\psi^{(1)}(t)+\lambda_2\psi^{(2)}(t)+\ldots+\lambda_m\psi^{(m)}(t). \tag{30}$$

Su questo teorema si può fondare in modo formalmente impeccabile la teoria delle probabilità delle ipotesi. L'esempio classico cui si applica tale risultato è quello delle estrazioni da un'urna che è stata scelta a caso in una collezione nota. Se sappiamo che le percentuali di palle nere possono essere $p_1, p_2, \ldots, p_m$ colle probabilità $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, la funzione caratteristica sarà

$$\psi(t)=\lambda_1 e^{ip_1 t}+\lambda_2 e^{ip_2 t}+\ldots+\lambda_m e^{i\lambda_m t}.$$

Un esempio che, pur riferendosi, per fissare le idee, alle estrazioni da un'urna, meglio si avvicina al tipo dei problemi che si possono presentare in pratica, è quest'altro. Abbiamo un'urna A contenente n palle tra bianche e nere, che vi sono state immerse da un individuo il quale aveva a sua disposizione $N=cn$ palle (c intero maggiore di 1), di cui $H=ch$ bianche e $K=ck$ nere ($H+K=N$, ossia $h+k=n$). Di tutte le ipotesi possibili riteniamo che soltanto le due seguenti

possano essersi verificate: *a*) le n palle sono state scelte a caso fra le N disponibili; *b*) l'individuo che preparò l'urna ebbe cura di scegliere le n palle in modo da conservare le percentuali di palle bianche e nere (e quindi prendendo h palle bianche e k nere). Conosciamo ancora la probabilità che hanno queste due ipotesi: siano α e β. Il fenomeno consistente nell'estrazione di una palla bianca dall'urna A ha la funzione caratteristica

$$\psi(t)=\alpha\cdot\psi^{(\alpha)}(t)+\beta\cdot\psi^{(\beta)}(t)$$

ove

$$\psi^{(\beta)}(t)=e^{i\frac{h}{n}t},$$

e

$$\psi^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_0^n{}_l\binom{H}{l}\binom{N-H}{n-l}e^{i\frac{l}{n}t}$$

(essendo $\binom{H}{l}\binom{N-H}{n-l}:\binom{N}{n}$ la probabilità che delle n palle estratte a sorte e immesse nell'urna l siano bianche). Dopo $r+s$ estrazioni di cui r diedero palle bianche, la funzione caratteristica è

$$R^rS^s\psi(t)=\frac{1}{\left[\begin{matrix}r\\r+s\end{matrix}\right]\psi}\left\{\alpha\cdot\left[\begin{matrix}r\\r+s\end{matrix}\right]\psi^{(\alpha)}\cdot R^rS^s\psi^{(\alpha)}(t)+\beta\cdot\left[\begin{matrix}r\\r+s\end{matrix}\right]\psi^{(\beta)}\cdot R^rS^s\psi^{(\beta)}(t)\right\}.$$

Derivando si ha, per $t=0$, la probabilità di ottenere, all'$(r+s+1)^{\text{ma}}$ estrazione, una palla bianca (determinazione di una probabilità a posteriori); la probabilità che le palle siano state scelte a caso (ipotesi *a*) dopo r estrazioni di palle bianche e s di palle nere è

$$\alpha\cdot\frac{\left[\begin{matrix}r\\r+s\end{matrix}\right]\psi^{(\alpha)}}{\left[\begin{matrix}r\\r+s\end{matrix}\right]\psi}$$

(determinazione di una probabilità delle ipotesi).

Per fare un'applicazione numerica: se l'urna contiene 6 palle scelte fra 12 che si avevano a disposizione, di cui 4 bianche e 8 nere, e si ritiene $\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$:

$$\psi^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{33}\left\{1+8e^{\frac{it}{6}}+15e^{\frac{it}{3}}+8e^{\frac{it}{}}+e^{\frac{2it}{3}}\right\},\qquad \psi^{(\beta)}(t)=e^{\frac{it}{3}},$$

$$\psi(t)=\frac{1}{99}\left\{2+16e^{\frac{it}{6}}+63e^{\frac{it}{3}}+16e^{\frac{it}{2}}+2e^{\frac{2it}{3}}\right\}.$$

Dopo $r+s$ estrazioni, di cui r diedero palle bianche, la probabilità dell'ipotesi *b*) (scelta non a caso) è

$$\frac{33.2^r.4^s}{16.5^s+63.2^r.4^s+16.3^{r+s}+2.4^r.2^s}.$$

Dopo 6 estrazioni l'ipotesi *b*) ha le probabilità 0,088.353 se si ebbero $r=6$ palle bianche, 0,176.707 se $r=5$, 0,279.365 se $r=4$, 0,359.918 se $r=3$, 0,389.812 se $r=2$, 0,353.947 se $r=1$, e finalmente 0,260,018 se $r=0$, ossia se si estrassero solo palle nere. Al crescere del numero delle prove, la probabilità dell'ipo-

tesi *b*) tende rispettivamente a $\frac{33}{63}=0{,}523.810$, $\frac{33}{79}=0{,}517.722$, o a zero, a seconda che la frequenza è compresa fra

$$(\log {}^5/_4)/(\log {}^5/_2)=0{,}243.529 \quad \text{e} \quad (\log {}^4/_3)/(\log 2)=0{,}415.037,$$

è uguale a uno di questi due limiti, o è esterna.

§ 15. - Il problema delle probabilità a posteriori consiste nel cercare di determinare la probabilità di un fenomeno aleatorio in base all'osservazione della frequenza effettivamente constatata in un certo numero di prove. In base a quanto s'è visto: *un problema di probabilità a posteriori è pienamente determinato se e solo se si riferisce a un fenomeno noto* (di cui è nota la funzione caratteristica).

Il problema delle probabilità delle ipotesi consiste nel ricercare la probabilità di un'ipotesi o *causa* cui un fenomeno aleatorio si possa far risalire, in base sempre all'osservazione della frequenza con cui il fenomeno s'è verificato in un certo numero di prove. E possiamo concludere: *un problema di probabilità delle ipotesi è pienamente determinato quando e solo quando è noto il fenomeno* (è data la sua funzione caratteristica), *è nota la precisa influenza dell'ipotesi* (è data la funzione caratteristica del fenomeno subordinatamente all'ipotesi), *e è nota la probabilità a priori dell'ipotesi stessa.*

Altrimenti questi due problemi non hanno senso.

Il teorema del § 11 contiene tutto quello che vi può essere di preciso in un tentativo d'inversione del teorema asintotico di Bernoulli. Dopo un numero indefinitamente crescente di prove, la probabilità di un fenomeno aleatorio tende a divenire uguale alla frequenza (colla restrizione detta a suo luogo). Ma la convergenza non è uniforme per tutte le funzioni caratteristiche, e quindi, per quanto grande sia il numero delle prove già eseguite, non è possibile dedurre che la probabilità sia anche approssimativamente uguale alla frequenza senza conoscere quale fosse a priori la funzione caratteristica del fenomeno. Possiamo dire però che col crescere del numero delle prove divengono sempre meno restrittive le condizioni che si debbono supporre verificate dalla funzione caratteristica del fenomeno aleatorio perchè ne consegua che l'uguaglianza approssimativa tra probabilità e frequenza sussista.

Queste conclusioni e questi esempi possono chiarire — in modo preciso nei due casi trattati delle probabilità a posteriori e delle probabilità delle cause, come spirito anche nel caso generale — l'influenza che sulla valutazione di una probabilità esercitano i dati dell'esperienza [1].

---

[1] Per una discussione più esauriente rimando a *Probabilismo. Saggio critico sulla teoria delle probabilità e sul valore della scienza.* Biblioteca di Filosofia diretta da A. ALIOTTA, Perrella ed., Napoli, 1931 (L. 5); cfr. specialmente il n.° 22.

H. KOEPPLER (Berlin - Germania)

DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES NORMALEN VERTEILUNGSGESETZES DER BETRACHTETEN EIGENSCHAFTEN BEI EINER HINREICHEND GROSSEN ANZAHL VON VERTRETERN EINER GATTUNG

Bei der Untersuchung zweier verschiedenen Eigenschaften eines Kollektivgegenstandes pflegt man die Differenzen zwischen den einzelnen Messungen und ihren Mittelwerten zu bilden und gelangt dabei in Erkenntnis der bestehenden Verwandtschaft der Fehler von Messungen und ihres Wahrscheinlichkeitsgesetzes zu dem normalen Verteilungsgesetz der untersuchten Eigenschaften eines Kollektivgegenstandes oder auch zu dem Gesetze der normalen Verteilungsfläche oder der Korrelationsfläche. Bisher hat man aber wohl noch nicht die Differentialgleichung des normalen Verteilungsgesetzes aufgestellt, die in Anlehnung an die Darstellungen, die BACHELIER (1) über kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten gegeben hat, leicht gefunden werden kann. Die Untersuchungen, die BERGER (2) unter Anwendung von Integralgleichungen angestellt hat, sollen hier nicht berührt werden, zumal diese nicht zu den Formen führen, die allein nur zum Thema dieses Aufsatzes gewählt sind. Die hier gegebene Darstellung der Differentialgleichung zeigt einige Abweichungen von der Bachelierschen Entwicklungsweise und scheint für den vorliegenden Zweck verständlicher und klarer zu sein. Die Lösung der partiellen Differentialgleichungen, deren Weg BACHELIER nicht beschreibt, erfolgt nach einem Verfahren, das als eine Erweiterung der Bernoullischen Methode zur Lösung einfacher Differentialgleichungen angesehen werden kann. Der Verfasser dieses Aufsatzes hat trotz Heranziehung einer umfangreichen Litteratur bisher keine Anweisung oder Besprechung über die unmittelbare Lösung dieser Gleichungen ermitteln können und daher dieses Verfahren ersonnen.

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Kollektivgesetz zweier Eigenschaften.

Bei Zunahme um Δs des Beobachtungsumfangs von s_1 bis s ändere sich die Abweichung der einen Eigenschaft (Ex) von ihrem Mittelwert Mx um $x-\xi$ und

(1) *Calcul des probabilités.* Par LOUIS BACHELIER, Paris, 1912.

(2) *Über die Reihnentwicklungen der Kollektivmasslehre.* Von ALFRED BERGER in Wien. Monatshefte für Mathematik und Physik., XXVI, Jahrgang, Wien, 1915.

die Abweichung der anderen Eigenschaft (Ey) von ihrem Mittelwert My um $y-\eta$. Die Wahrscheinlichkeit dieser Änderung mag durch eine Funktion

$$f(\Delta s, x-\xi, y-\eta)$$

darstellbar sein, wobei f nicht allein von s_1 oder allein von s, sondern von der Veränderlichkeit der Differenz $\Delta s=s-s_1$ abhängig ist.

Sodann mag die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Beobachtungsumfang s_1 die Abweichung der Eigenschaft Ex von ihrem Mittelwert Mx « ξ » und die Abweichung der Eigenschaft Ey von ihrem Mittelwert My « η » betrage, durch eine Funktion

$$F(s_1, \xi, \eta)$$

und die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem Beobachtungsumfang s die Abweichung der Eigenschaft Ex von dem Mittelwert Mx « x » und die Abweichung der Eigenschaft Ey von ihrem Mittelwert My « y » betrage, durch eine Funktion

$$F(s, x, y)$$

darstellbar sein.

Die Wahrsheinlichkeit, dass die Eigenschaften Ex und Ey von ihren Mittelwerten Mx und My bei dem Beobachtungsumfang s_1 die Abweichungen ξ und η und bei Zunahme des Beobachtungsumfangs um Δs die Abweichungen x und y aufweisen, ist offenbar gleich der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit

$$F(s_1, \xi, \eta) \cdot f(\Delta s, x-\xi, y-\eta).$$

Aus diesem Ausdruck erhält man die Wahrscheinlichkeit $F(s, x, y)$, dass bei dem Beobachtungsumfang s die Abweichungen x und y bestehen, indem man die Variablen ξ und η alle nur möglichen Werte durchlaufen lässt. Man gelangt, Urvariabilität der Abweichungen annehmend und voraussetzend, dass man die Grenzen der Abweichungen bis $\mp\infty$ ausdehnen darf, zu der Gleichung

$$F(s, x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s_1, \xi, \eta) f(\Delta s, x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

die man, indem man

$$s_1=s-\Delta s$$
$$x-\xi=u, \quad \text{also bei festem } x: \quad d\xi=-du$$
$$y-\eta=v, \quad \text{also bei festem } y: \quad d\eta=-dv$$

setzend, auch umformen kann in

$$F(s, x, y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s-\Delta s, x-u, y-v) f(\Delta s, u, v)\, du\, dv.$$

Entwickelt man nun die Funktion $F(s-\Delta s, x-u, y-v)$ nach dem Taylorschen

Satz in die nach Potenzen von u und v fortschreitende Reihe

$$F(s-\Delta s, x, y)-u\frac{\partial F}{\partial x}-v\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{2}u^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+uv\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\ldots.$$

und vernachlässigt die höheren Potenzen von u und v von der zweiten ab, so ergibt sich

$$\begin{aligned}F(s,x,y)=F(s-\Delta s,x,y)&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)dudv\\&-\frac{\partial F}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)ududv-\frac{\partial F}{\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)vdudv\\&+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)u^2dudv+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)v^2dudv\\&+\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)uvdudv.\end{aligned}$$

Die Funktion $f(\Delta s, u, v)$ muss erstlich der Bedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)dudv=1$$

unterliegen, weil je einer der möglichen Werte von u und v eintreten muss. Setzen wir ferner gleichförmige und symmetrische Beschaffenheit der Funktion $f(\Delta s, u, v)$ voraus, so werden wir setzen können:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)ududv=0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)vdudv=0.$$

Unter Berücksichtigung der von der Funktion $f(\Delta s, u, v)$ vorausgesetzen Eigenschaft erhalten wir aber ausserdem:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)u^2dudv&=g_{11}(\Delta s)\\\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)v^2dudv&=g_{22}(\Delta s)\\\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\Delta s,u,v)uvdudv&=g_{12}(\Delta s),\end{aligned}$$

wobei g_{11}, g_{22} und g_{12} zunächst unbekannte Funktionen von Δs seien, die mit Δs

zugleich verschwinden müssen, weil das Vorhandensein der Werte u und v das Bestehen des Intervalls Δs voraussetzt. Die Entwicklung der Funktionen $g_{i,k}$ in Taylorsche Reihen, bezw. in Reihen, die nach Potenzen von Δs fortschreiten, muss daher unter der Voraussetzung des Fehlens eines absoluten Gliedes erfolgen. Die aufgestellte Gleichung hat jetzt die genäherte Form angenommen:

$$F(s, x, y) = F(s-\Delta s, x, y) + \frac{1}{2} g_{11}(\Delta s) \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial x^2} + g_{12}(\Delta s) \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} g_{22}(\Delta s) \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial y^2}.$$

Wir setzen nunmehr

$$g_{11}(\Delta s) = A_{11} \cdot \Delta s + R_{11}(\Delta s)$$
$$g_{12}(\Delta s) = A_{12} \cdot \Delta s + R_{12}(\Delta s)$$
$$g_{22}(\Delta s) = A_{22} \cdot \Delta s + R_{22}(\Delta s),$$

wobei A_{11}, A_{12} und A_{22} noch unbekannte Konstanten und $R_{11}(\Delta s)$, $R_{12}(\Delta s)$ und $R_{22}(\Delta s)$ Potenzreihen von Δs sind, deren erstes Glied das Intervall Δs in der zweiten Potenz enthält. Die Gleichung lässt sich daher weiter umformen in

$$\frac{F(s, x, y) - F(s-\Delta s, x, y)}{\Delta s} = \frac{1}{2} A_{11} \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} A_{22} \frac{\partial^2 F(s-\Delta s, x, y)}{\partial y^2} + \Omega(\Delta s).$$

Den gegebenen Erklärungen entsprechend enthält dabei $\Omega(\Delta s)$ kein absolutes Glied. Lässt man nun Δs gegen Null konvergieren, so muss $\Omega(\Delta s)$ verschwinden. Links vom Gleichheitszeichen erscheint der erste Differentialquotient nach s, sodass die Gleichung die Form annimmt:

$$\frac{\partial F(s, x, y)}{\partial s} = \frac{1}{2} A_{11} \frac{\partial^2 F(s, x, y)}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 F(s, x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} A_{22} \frac{\partial^2 F(s, x, y)}{\partial y^2}.$$

In dieser setzen wir zur Vereinfachung noch

$$F(s, x, y) = F, \qquad A_{11} = 2a_{11}, \qquad A_{12} = 2a_{12}, \qquad A_{22} = 2a_{22}$$

und versuchen die so entstehende Gleichung

$$\frac{dF}{ds} = a_{11} \frac{d^2F}{dx^2} + 2a_{12} \frac{d^2F}{dx\,dy} + a_{22} \frac{d^2F}{dy^2}$$

dadurch zu lösen, dass wir

$$F = \varphi(x, s)\psi(x, y, s)$$

setzen. Es wird dann:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\psi + \varphi \frac{d\psi}{ds}$$
$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\psi + \varphi \frac{d\psi}{dx}$$
$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2}\psi + 2\frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{d\psi}{dx} + \varphi \frac{d^2\psi}{dx^2}$$

$$\frac{d^2F}{dx\,dy}=\frac{d\varphi}{dx}\cdot\frac{d\psi}{dy}+\varphi\frac{d^2\psi}{dx\,dy}$$
$$\frac{dF}{dy}=\varphi\frac{d\psi}{dy},\qquad\frac{d^2F}{dy^2}=\varphi\frac{d^2\psi}{dy^2}.$$

Setzen wir diese Werte in die vorgelegte Gleichung ein, so folgt

$$\psi\frac{d\varphi}{ds}+\varphi\frac{d\psi}{ds}=\psi a_{11}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\varphi\left(a_{11}\frac{d^2\psi}{dx^2}+2a_{12}\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dy^2}\right)$$
$$2\frac{d\varphi}{dx}\left(a_{11}\frac{d\psi}{dx}+a_{12}\frac{d\psi}{dy}\right).$$

Die Hilfsfunktionen φ und ψ werden der Gleichung genügen, wenn sie die Gleichungen

(I) $$\frac{d\varphi}{ds}=a_{11}\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

(II) $$\frac{d\psi}{ds}=a_{11}\frac{d^2\psi}{dx^2}+2a_{12}\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dy^2}$$

(III) $$a_{11}\frac{d\psi}{dx}+a_{12}\frac{d\psi}{dy}=0$$

befriedigen. Der letzten dieser Gleichungen geben wir die Form

$$\frac{d\psi}{dx}=-\frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{d\psi}{dy}$$

und nehmen an, dass $\psi=\chi(s,\lambda x+y)$ eine Lösung dieser Gleichung ist. Dann folgt $\frac{d\psi}{dx}=\chi'\cdot\lambda$ und $\frac{d\psi}{dy}=1$. Werden diese Werte in die Gleichung eingesetzt, erhalten wir $\lambda=-\frac{a_{12}}{a_{11}}$ und damit $\psi=\chi\left(s,y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x\right)$. Wir wissen aber, dass dieser Ausdruck eine partikuläre Lösung der Gleichung darstellt. Mit Hilfe dieses Ausdrucks ermitteln wir die Differentialquotienten

$$\frac{d\psi}{dx}=-\chi'\left(s,y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x\right)\frac{a_{12}}{a_{11}}$$
$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\chi''\left(s,y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x\right)\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)^2$$
$$\frac{d^2\psi}{dx\,dy}=-\chi''\left(s,y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x\right)\frac{a_{12}}{a_{11}}$$
$$\frac{d^2\psi}{dy^2}=\chi''\left(s,y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x\right).$$

Führen wir nun diese Werte in die Gleichung (II) ein, so ergibt sich, wenn wir noch $y-\frac{a_{12}}{a_{11}}x=z$ und $a_{11}a_{22}-a_{12}^2=A$ setzen,

(IV) $$\frac{d\chi}{ds}=\frac{A}{a_{11}}\cdot\frac{d^2\chi}{dz^2}.$$

Eine Lösung der Gleichung (I) ist bekanntlich

(V) $$\varphi=\frac{1}{2\sqrt{\pi a_{11}s}}e^{-\frac{x^2}{4a_{11}s}},$$

eine Lösung der Gleichung (IV) bekanntlich

$$\chi = \frac{\sqrt{a_{11}}}{2\sqrt{\pi A s}}\, e^{-\frac{a_{11}x^2}{4As}}. \tag{VIa}$$

Aus der letzteren können wir aber folgern, dass

$$\psi = \frac{\sqrt{a_{11}}}{2\sqrt{\pi A s}}\, e^{-\frac{(a_{11}y - a_{12}x)^2}{4Aa_{11}s}}. \tag{VI}$$

Wir erhalten somit die Lösung der vorgelegten Gleichung in der bekannten Form des sogenannten Bravais'schen Gesetzes, das sich aber schon bei LAPLACE [1] vorfindet, und zwar heisst dieses Gesetz

$$F(s,x,y) = \varphi \cdot \psi = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}}\, e^{-\frac{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)x^2+(a_{11}^2y^2-2a_{11}a_{12}yx+a_{12}^2x^2)}{4Aa_{11}s}} = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}}\, e^{-\frac{a_{22}x^2-2a_{12}xy+a_{11}y^2}{4As}}. \tag{VII}$$

Zwei weitere Lösungen unserer Differentialgleichung stellen die Doppelintegrale dar:

$$P_1(s,x,y) = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{4a_{11}s}}\, dx \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(a_{11}y-a_{12}x)^2}{4Aa_{11}s}}\, dy = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{a_{22}x^2-2a_{12}xy+a_{11}y^2}{4As}}\, dxdy$$

und

$$P_2(s,x,y) = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}} \int_{x}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{4a_{11}s}}\, dx \int_{y}^{\infty} e^{-\frac{(a_{11}y-a_{12}x)^2}{4Aa_{11}s}}\, dy = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}} \int_{x}^{\infty}\int_{y}^{\infty} e^{-\frac{a_{22}x^2-2a_{12}xy+a_{11}y^2}{4As}}\, dxdy.$$

Bei Einführung der in der Korrelationstheorie gebräuchlichen Bezeichnungen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y)x^2\,dxdy = 2sa_{11} = \frac{S(x^2)}{s} = \sigma_x^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y)y^2\,dxdy = 2sa_{22} = \frac{S(y^2)}{s} = \sigma_y^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y)xy\,dxdy = 2sa_{12} = \frac{S(xy)}{s}\ [= \sigma(x,y)]$$

---

[1] *Théorie analytique des probabilités.* Par M. le comte LAPLACE, Paris, 1814.

und des sogenannten Korrelationsfaktors

$$r = \frac{S(x,y)}{s \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{S(x,y)}{\sqrt{S(x^2)\,S(y^2)}},$$

sowie der aus diesem folgenden Beziehung

$$S(x,y) = s \cdot r \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$$

nehmen die Funktionen (V), (VI) und (VII) die in der Korrelationstheorie auftretenden Formen an

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{\left(y - r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x\right)^2}{2\sigma_y^2(1-r^2)}}$$

und

$$F(s,x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{x^2}{\sigma_x^2} - 2\frac{r}{\sigma_x\sigma_y}xy + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right\}}.$$

Führt man die Bezeichnungen

$$\sigma_{x,y}^2 = \sigma_x^2(1-r^2)$$

und

$$\sigma_{y,x}^2 = \sigma_y^2(1-r^2)$$

ein, so kann man auch noch die andere Form

$$F(s,x,y) = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2\pi\sigma_{x,y}\cdot\sigma_{y,x}} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{\sigma_{x,y}^2} - 2\frac{r}{\sigma_{x,y}\cdot\sigma_{y,x}}xy + \frac{y^2}{\sigma_{y,x}^2}\right\}}$$

angeben. Auf die Konstante lassen sich übrigens auch noch die Beziehungen

$$\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2} = \sigma_x \cdot \sigma_{y,x} = \sigma_{x,y} \cdot \sigma_y$$

anwenden.

* * *

Bei Betrachtung dreier Eigenschaften eines Kollektivgegenstandes gelangt man zu der partiellen Differentialgleichung von vier Variablen

$$\frac{dF}{ds} = a_{11}\frac{d^2F}{dx^2} + a_{22}\frac{d^2F}{dy^2} + a_{33}\frac{d^2F}{dz^2} + 2a_{12}\frac{d^2F}{dx\,dy} + 2a_{13}\frac{d^2F}{dx\,dz} + 2a_{23}\frac{d^2F}{dy\,dz},$$

zwecks deren Lösung wir

$$F = \varphi(s,x,y) \cdot \psi(s,x,y,z)$$

zetzen wollen. Die Differentialquotienten der Funktion F erhalten dadurch die Formen

$$\frac{dF}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}\psi + \frac{d\psi}{ds}\varphi$$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{d\varphi}{dx}\psi + \frac{d\psi}{dx}\varphi$$

$$\frac{d^2F}{dx^2}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}\psi+\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx}+\frac{d^2\psi}{dx^2}\varphi+\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}$$
$$\frac{d^2F}{dx\,dy}=\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\psi+\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dy}+\frac{d^2\psi}{dx\,dy}\varphi+\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}$$
$$\frac{d^2F}{dx\,dz}=\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dz}+\frac{d^2\psi}{dx\,dz}\varphi$$
$$\frac{dF}{dy}=\frac{d\varphi}{dy}\psi+\frac{d\psi}{dy}\varphi$$
$$\frac{d^2F}{dy^2}=\frac{d^2\varphi}{dy^2}\psi+\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy}+\frac{d^2\psi}{dy^2}\varphi+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dy}$$
$$\frac{d^2F}{dy\,dz}=\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dz}+\frac{d^2\psi}{dy\,dz}\varphi$$
$$\frac{d^2F}{dz^2}=\varphi\frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

Durch Einführung dieser Differentialquotienten in die vorgelegte Gleichung nimmt diese nach einigen Umformungen die Gestalt an

$$\begin{aligned}\psi\frac{d\varphi}{ds}+\varphi\frac{d\psi}{ds}=&\psi\left(a_{11}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2a_{12}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+a_{22}\frac{d^2\varphi}{dy^2}\right)\\&+\varphi\left(a_{11}\frac{d^2\psi}{dx^2}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dy^2}+a_{33}\frac{d^2\psi}{dz^2}+2a_{12}\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+2a_{13}\frac{d^2\psi}{dx\,dz}\right.\\&\left.+2a_{23}\frac{d^2\psi}{dy\,dz}\right)+2\frac{d\varphi}{dx}\left(a_{11}\frac{d\psi}{dx}+a_{12}\frac{d\psi}{dy}+a_{13}\frac{d\psi}{dz}\right)\\&+2\frac{d\varphi}{dy}\left(a_{22}\frac{d\psi}{dy}+a_{12}\frac{d\psi}{dx}+a_{23}\frac{d\psi}{dz}\right).\end{aligned}$$

Die Funktionen φ und ψ genügen hiernach offenbar der ursprünglichen Gleichung, wenn die Gleichungen

$$\frac{d\varphi}{ds}=a_{11}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2a_{12}\frac{d^2\varphi}{dx\,dy}+a_{22}\frac{d^2\varphi}{dy^2}$$
$$\frac{d\psi}{ds}=a_{11}\frac{d^2\psi}{dx^2}+a_{22}\frac{d^2\psi}{dy^2}+a_{33}\frac{d^2\psi}{dz^2}+2a_{12}\frac{d^2\psi}{dx\,dy}+2a_{13}\frac{d^2\psi}{dx\,dz}+2a_{23}\frac{d^2\psi}{dy\,dz}$$

und

$$\begin{cases}a_{11}\dfrac{d\psi}{dx}+a_{12}\dfrac{d\psi}{dy}+a_{13}\dfrac{d\psi}{dz}=0\\ a_{12}\dfrac{d\psi}{dx}+a_{22}\dfrac{d\psi}{dy}+a_{23}\dfrac{d\psi}{dz}=0\end{cases}$$

befriedigt werden. Die letzteren formen wir um in:

$$\frac{a_{11}}{a_{13}}\cdot\frac{d\psi}{dx}+\frac{a_{12}}{a_{13}}\cdot\frac{d\psi}{dy}=-\frac{d\psi}{dz}$$
$$\frac{a_{12}}{a_{23}}\cdot\frac{d\psi}{dx}+\frac{a_{22}}{a_{23}}\cdot\frac{d\psi}{dy}=-\frac{d\psi}{dz}$$

und nehmen an, dass

$$\psi=\chi(s,\lambda_1x+\lambda_2y+z)$$

eine Lösung dieser Gleichung ist, dann ist nämlich

$$\frac{d\psi}{dx}=\chi'\cdot\lambda_1,\qquad\frac{d\psi}{dy}=\chi'\cdot\lambda_2,\qquad\frac{d\psi}{dz}=\chi',$$

und es ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\frac{a_{11}}{a_{13}}\lambda_1+\frac{a_{12}}{a_{13}}\lambda_2=-1$$
$$\frac{a_{11}}{a_{23}}\lambda_1+\frac{a_{22}}{a_{23}}\lambda_2=-1,$$

aus welchem folgt

$$\lambda_1=-\frac{a_{13}a_{22}-a_{13}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

und

$$\lambda_2=-\frac{a_{13}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}.$$

Bei Anwendung dieser Werte gelangt man zu den Ausdrücken

$$\psi=\chi\left(s,\ z-\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}x-\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}y\right)=\chi(s,u).$$

$$\frac{d\psi}{dx}=-\chi'\cdot\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\qquad \frac{d\psi}{dy}=-\chi'\cdot\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\qquad \frac{d\psi}{dz}=\chi'$$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}=\chi''\cdot\left(\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)^2,\qquad \frac{d^2\psi}{dx\,dy}=\chi''\cdot\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\cdot\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2}=\chi''\cdot\left(\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\right)^2,\qquad \frac{d^2\psi}{dx\,dz}=-\chi''\cdot\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$\frac{d^2\psi}{dy\,dz}=-\chi''\cdot\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\qquad \frac{d^2\psi}{dz^2}=\chi''.$$

Werden diese Ausdrücke für die partiellen Differentialquotienten in die Gleichung für ψ eingesetzt, so bekommt man nach mehreren Umformungen

$$\frac{d\chi}{ds}=\frac{\Delta}{A}\cdot\frac{d^2\chi}{du^2},$$

worin zur Abkürzung

$$A=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

und

$$\Delta=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}^2-a_{22}a_{13}^2-a_{33}a_{12}^2+2a_{12}a_{13}a_{23}$$

gesetzt wurde.

Bekanntlich ist

(VIII)
$$\chi=\psi=\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{\pi\Delta s}}e^{-\frac{Au^2}{4\Delta s}}$$

eine Lösung der χ=Gleichung. Das Quadrat

$$u^2=\left(z-\frac{a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}x-\frac{a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}y\right)^2$$

kann noch umgeformt werden in

$$\frac{1}{A^2}\left[(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23})^2x^2+(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})^2y^2+(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^2z^2\right.$$
$$+2(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23})(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})xy-2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23})xz$$
$$\left.-2(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})yz\right]=\frac{1}{A^2}\cdot f(x,y,z),$$

so dass sich ψ noch umgestaltet in

$$\psi = \frac{A}{2\sqrt{\pi \Delta s}} e^{-\frac{f(x,y,z)}{4A\Delta s}}.$$

Die partielle Differentialgleichung der Hilfsfunktion φ liefert die im ersten Teile behandelte Lösung

$$\varphi = \frac{1}{4\pi s\sqrt{A}} e^{-\frac{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}{4As}},$$

so dass sich schliesslich nach mehreren Umformungen für F die Lösung

$$\text{(IX)} \qquad F(s,x,y,z) = \varphi \cdot \psi = \frac{1}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta}} e^{-\frac{\Omega(x,y,z)}{4\Delta s}}$$

ergibt, in der

$$\text{(X)} \quad \Omega = \{(a_{22}a_{33} - a_{23}^2)x^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2)y^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)z^2 - 2(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{23})xy - 2(a_{13}a_{22} - a_{12}a_{23})xz - 2(a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13})yz\}$$

ist.

Es leuchtet sogleich ein, dass auch

$$P_1(x,y,z) = \frac{1}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}{4As}} dxdy \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{Au^2}{4\Delta s}} du$$

$$= \frac{1}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta}} \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{\Omega(x,y,z)}{4\Delta s}} dxdydz$$

und

$$P_2(x,y,z) = \frac{1}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta}} \int_{x}^{\infty}\int_{y}^{\infty} e^{-\frac{a_{22}x^2 - 2a_{12}xy + a_{11}y^2}{4As}} dxdy \int_{z}^{\infty} e^{-\frac{Au^2}{4\Delta s}} du$$

$$= \frac{1}{2^3\pi^{\frac{3}{2}}s^{\frac{3}{2}}\sqrt{\Delta}} \int_{x}^{\infty}\int_{y}^{\infty}\int_{z}^{\infty} e^{-\frac{\Omega(x,y,z)}{4\Delta s}} dxdydz$$

zwei weitere Lösungen der Differentialgleichung darstellen.

Führen wir wieder die in der Korrelationstheorie üblichen Bezeichnungen ein

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)x^2 dxdydz = 2sa_{11} = \frac{S(x^2)}{s} = \sigma_x^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)y^2 dxdydz = 2sa_{22} = \frac{S(y^2)}{s} = \sigma_y^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)z^2 dxdydz = 2sa_{33} = \frac{S(z^2)}{s} = \sigma_z^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)xy\, dxdydz = 2sa_{12} = \frac{S(x,y)}{s} \; [= \sigma(x,y)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)xz\,dx\,dy\,dz = 2sa_{13} = \frac{S(x,z)}{s}\ [=\sigma(x,z)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(s,x,y,z)yz\,dx\,dy\,dz = 2sa_{23} = \frac{S(y,z)}{s}\ [=\sigma(y,z)]$$

und bilden die Korrelationskoeffizienten

$$r_{x,y} = \frac{S(x,y)}{s\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y} = \frac{S(x,y)}{\sqrt{S(x^2)\,S(y^2)}}$$

$$r_{x,z} = \frac{S(x,z)}{s\cdot\sigma_x\cdot\sigma_z} = \frac{S(x,z)}{\sqrt{S(x^2)\,S(z^2)}}$$

$$r_{y,z} = \frac{S(y,z)}{s\cdot\sigma_y\cdot\sigma_z} = \frac{S(y,z)}{\sqrt{S(y^2)\,S(z^2)}}$$

und mittels dieser die Beziehungen

$$S(x,y) = s\cdot r_{x,y}\cdot\sigma_x\cdot\sigma_y, \qquad S(x,z) = s\cdot r_{x,z}\cdot\sigma_x\cdot\sigma_z,$$
$$S(y,z) = s\cdot r_{y,z}\cdot\sigma_y\cdot\sigma_z,$$

so ergibt sich $A = \frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2}{(2s)^2}(1-r_{x,y}^2)$ und

$$\Delta = \frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2\cdot\sigma_z^2}{(2s)^3}[1-r_{x,y}^2-r_{x,z}^2-r_{y,z}^2+2r_{x,y}r_{x,z}r_{y,z}] = \frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2\cdot\sigma_z^2}{(2s)^3}R,$$

folglich ist

$$\frac{A}{4\Delta s} = \frac{1-r_{x,y}^2}{2\sigma_z^2(1-r_{x,y}^2-r_{x,z}^2-r_{y,z}^2+2r_{x,y}r_{x,z}r_{y,z})} = \frac{h^2}{\sigma_z^2}.$$

Ferner erhalten wir

$$u = \sigma_z\left[\frac{z}{\sigma_z} - \frac{r_{x,z}-r_{x,y}r_{y,z}}{1-r_{x,y}^2}\frac{x}{\sigma_x} - \frac{r_{y,z}-r_{x,y}r_{x,z}}{1-r_{x,y}^2}\frac{y}{\sigma_y}\right] = \sigma_z\cdot v,$$

so dass wir der Hilfsfunktion ψ auch die Form

$$\psi = \frac{h}{\sigma_z\sqrt{\pi}}\,e^{-h^2v^2}$$

geben können, in der h und v die oben ermittelten Gebilde darstellen.

Die in der Lösung (IX) auftretende Funktion $\Omega(x,y,z)$ lässt sich umformen in

$$\frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2\cdot\sigma_z^2}{(2s)^2}\Big\{(1-r_{y,z}^2)\frac{x^2}{\sigma_x^2}+(1-r_{x,z}^2)\frac{y^2}{\sigma_y^2}+(1-r_{x,y}^2)\frac{z^2}{\sigma_z^2}$$
$$-2(r_{x,y}-r_{x,z}r_{y,z})\frac{x}{\sigma_x}\frac{y}{\sigma_y}-2(r_{x,z}-r_{x,y}r_{y,z})\frac{x}{\sigma_x}\frac{z}{\sigma_z}$$
$$-2(r_{y,z}-r_{x,y}r_{x,z})\frac{y}{\sigma_y}\frac{z}{\sigma_z}\Big\} = \frac{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2\cdot\sigma_z^2}{(2s)^2}\Phi(x,y,z),$$

so dass man für diese Lösung noch die Form erhält:

$$F(s,x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z\sqrt{R}}\,e^{-\frac{\Phi(x,y,z)}{2R}}.$$

Bekannt sind ferner die vielfachen Korrelationskoeffizienten

$$r_{xy,z} = \frac{r_{x,y} - r_{x,z}r_{y,z}}{(1-r_{x,z}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{y,z}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{xz,y} = \frac{r_{x,z} - r_{x,y}r_{y,z}}{(1-r_{x,y}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{y,z}^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$r_{yz,x} = \frac{r_{y,z} - r_{x,y}r_{x,z}}{(1-r_{x,y}^2)^{\frac{1}{2}}(1-r_{x,z}^2)^{\frac{1}{2}}},$$

vermöge derer man die Beziehungen

$$(1-r_{xy,z}^2)(1-r_{x,z}^2)(1-r_{y,z}^2) = R$$
$$(1-r_{xz,y}^2)(1-r_{x,y}^2)(1-r_{y,z}^2) = R$$
$$(1-r_{yz,x}^2)(1-r_{x,y}^2)(1-r_{x,z}^2) = R,$$

sowie auf Grund der letzteren wiederum die Proportionen

$$\frac{1-r_{xy,z}^2}{1-r_{xz,y}^2} = \frac{1-r_{x,y}^2}{1-r_{x,z}^2}, \qquad \frac{1-r_{xz,y}^2}{1-r_{yz,x}^2} = \frac{1-r_{x,z}^2}{1-r_{y,z}^2}, \qquad \frac{1-r_{xy,z}^2}{1-r_{yz,x}^2} = \frac{1-r_{x,y}^2}{1-r_{y,z}^2}$$

herleiten kann. Aus den in der Korrelationstheorie bekannten Beziehungen

$$\sigma_{x,yz}^2 = \sigma_x^2(1-r_{x,y}^2)(1-r_{xz,y}^2)$$
$$\sigma_{y,xz}^2 = \sigma_y^2(1-r_{y,z}^2)(1-r_{xy,z}^2)$$
$$\sigma_{z,xy}^2 = \sigma_z^2(1-r_{x,z}^2)(1-r_{yz,x}^2)$$

leite man durch Anwendung der vorstehenden Beziehungen die Ausdrücke her:

$$1-r_{y,z}^2 = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_{x,yz}^2}R, \qquad r_{x,y} - r_{x,z}r_{y,z} = r_{xy,z} \cdot \frac{\sigma_{x,z} \cdot \sigma_y}{\sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{y,xz}}R,$$

$$1-r_{x,z}^2 = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_{y,xz}^2}R, \qquad r_{x,z} - r_{x,y}r_{y,z} = r_{xz,y} \cdot \frac{\sigma_{x,y} \cdot \sigma_z}{\sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{z,xy}}R,$$

$$1-r_{x,y}^2 = \frac{\sigma_z^2}{\sigma_{z,xy}^2}R, \qquad r_{y,z} - r_{x,y}r_{x,z} = r_{yz,x} \cdot \frac{\sigma_y \cdot \sigma_z}{\sigma_{y,xz} \cdot \sigma_{z,xy}}R,$$

sowie ferner noch

$$\sigma_x^2\sigma_y^2\sigma_z^2 = \frac{\sigma_{x,yz}^2 \cdot \sigma_{y,xz}^2 \cdot \sigma_{z,xy}^2}{R^3(1-r_{x,y}^2)(1-r_{x,z}^2)(1-r_{y,z}^2)}.$$

Führt man diese Werte in die Exponentialfunktion $F(s, x, y, z)$ ein, so ergibt sich für diese auch noch die Form

$$F(s,x,y,z) = \frac{R[(1-r_{x,y}^2)(1-r_{x,z}^2)(1-r_{y,z}^2)]^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \cdot \sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{y,xz} \cdot \sigma_{z,xy}} e^{-\frac{1}{2}\Omega(x,y,z)},$$

in welcher ist

$$\Omega(x,y,z) = \frac{x^2}{\sigma_{x,yz}^2} + \frac{y^2}{\sigma_{y,xz}^2} + \frac{z^2}{\sigma_{z,xy}^2} - \frac{2r_{xy,z}}{\sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{y,xz}}xy - \frac{2r_{xz,y}}{\sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{z,xy}}xz - \frac{2r_{yz,x}}{\sigma_{y,xz} \cdot \sigma_{z,xy}}yz.$$

Bei Anwendung der schon früher benutzten Formeln

$$\sigma^2_{y,x} = \sigma^2_y (1 - r^2_{x.y})$$

und

$$\sigma^2_{x.y} = \sigma^2_x (1 - r^2_{x,y})$$

kann man in der Konstanten auch

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z \cdot \sqrt{R} = \sigma_x \cdot \sigma_{y,x} \cdot \sigma_{z,xy} = \sigma_{x,y} \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{z,xy}$$

setzen.

Bei Anwendung der Formeln

$$\sigma^2_{x.z} = \sigma^2_x (1 - r^2_{x.z})$$

und

$$\sigma^2_{z.x} = \sigma^2_z (1 - r^2_{x.z})$$

folgt ferner

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z \cdot \sqrt{R} = \sigma_x \cdot \sigma_{y,xz} \cdot \sigma_{z,x} = \sigma_{x,z} \cdot \sigma_{y,xz} \cdot \sigma_z$$

und bei Anwendung der Formeln

$$\sigma^2_{y.z} = \sigma^2_y (1 - r^2_{y.z})$$

und

$$\sigma^2_{z.y} = \sigma^2_z (1 - r^2_{y.z})$$

ergibt sich noch

$$\sigma_x \cdot \sigma_y \cdot \sigma_z \cdot \sqrt{R} = \sigma_x \cdot \sigma_{x,yz} \cdot \sigma_{y,z} = \sigma_{x,yz} \cdot \sigma_y \cdot \sigma_{z,y}.$$

Einen weiteren Ausblick auf die Korrelationstheorie zu geben, dürfte sich im Hinblick auf die umfangreiche, vorbildliche Literatur erübrigen. Der Verfasser hat von dieser benutzt:

ZITIERTE LITERATUR

P. RIEBESELL: *Die mathematischen Grundlagen der Variations- und Vererbungslehre.* Leipzig 1916.

W. BETZ: *Über Korrelation.* Leipzig 1911.

P. RIEBESELL: *Biometrik und Variationsstatistik* (im Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden). Berlin 1925.

Wilhelm WIRTH: *Spezielle psychologische Massmethoden* (im Handbuch der biologischen Arbeitsmethoden). Berlin 1920.

Prof. Dr. Emanuel CZUBER: *Die statistischen Forschungsmethoden.* Wien 1921.

Prof. Dr. A. A. TSCHUPROW: *Grundbegriffe und Grundprobleme der Korrelationstheorie.* Leipzig-Berlin 1925.

Prof. C. V. L. CHARLIER: *Vorlesungen über die Grundzüge der mathematischen Statistik.* Lund-Hamburg 1920.

Prof. C. V. L. CHARLIER: *Contributions to the mathematical theory of statistics* (6. The correlation function of type *A*). Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik. Uppsala & Stockholm 1914.

S. D. WICKSELL: *On logarithmic correlation.* Svenska Aktuarieföreningens Tidskrift. Uppsala 1917, Häft 4.

Prof. Alf GULDBERG: *A remark on correlation.* Skandinavisk Aktuarietidskrift. Uppsala 1919, Häft 4.

K. G. HAGSTRÖM: *Bemerkungen zur Theorie der statistichen Funktion.* Skandinavisk Aktuarietidskrift. Uppsala 1919, Häft 4.

Prof. Alf GULDBERG: *On the theory of frequency distribution.* Skandinavisk Aktuarietidskrift. Uppsala 1919, Häft 4.

G. Udny JULE: *An introduction to the theory of statistics.* Eighth edition. London 1927.

W. Palin ELDERTON: *Frequency curves and correlations.* Second edition. London 1927.

C. H. FORSYTH: *An introduction to the mathematical Analysis of statistics.* New York-London 1924.

R. W. BURGESS: *Introduction to the mathematics of statistics.* New York 1927.

Charles JORDAN: *Statistique mathématique.* Paris 1927.

G. DARMOIS: *Statistique mathématique.* Paris 1928.

Guido CASTELNUOVO: *Calcolo delle probabilità.* Vol. II. Bologna 1928.

Nachträglich ist dem Verfasser n. A. noch das wertvolle Referat von Dr. Karl E. RANKE: *Die Theorie der Korrelation,* im Archiv für Anthropologie (Heft 2-3, Braunschwig, 1906) bekannt geworden.

E. C. MOLINA (New York - U. S. A)

APPLICATION TO THE BINOMIAL SUMMATION OF A LAPLACIAN METHOD FOR THE EVALUATION OF DEFINITE INTEGRALS

Introduction.

The numerical evaluation of the incomplete Binomial Summation, a problem of major importance for many statistical and engineering applications of the Theory of Probability, is a question for which a satisfactory solution has not as yet been obtained. Several approximation formulas have been presented (1), each of which gives good results for some limited range of values of the variables involved; but a formula of wide applicability is still a desideratum.

The purpose of this paper is to submit for consideration an approximation formula which seems to meet the situation to a measurable extent. The writer derived it by applying to the equation

$$\sum_{x=c}^{x=n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\int_0^p x^{c-1}(1-x)^{n-c}\,dx}{\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{n-c}\,dx}, \tag{1}$$

a method which is peculiarly efficacious for approximately evaluating definite integrals when the integrands contain factors raised to high powers.

The method used constitutes the subject matter of Chapter I, Part II, Book I of Laplace's, *Théorie Analytique des Probabilités.* POISSON applied the method to the integrals in the equation

$$\sum_{x=c}^{x=n} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \frac{\int_{(1-p)/p}^{\infty} x^{n-c}/(1+x)^{n+1}\,dx}{\int_0^{\infty} x^{n-c}/(1+x)^{n+1}\,dx} \tag{2}$$

and published a first approximation, together with its derivation, in his *Recherches sur la Probabilité des Jugements.* Poisson's approximation seems

(1) For an excellent resumé of some well-known formulas, together with a discussion of their limitations, reference may be had to C. JORDAN: *Statistique Mathématique*, articles 37 and 38.

never to have been used and was less fortunate than his famous limit to the binomial expansion which also was lost sight of until it reappeared under the caption « law of small numbers ».

While the integrals in equations (1) and (2) are well known equivalent forms for the complete and incomplete Beta functions, the equations themselves are not so familiar although one or the other will be found in LAPLACE, POISSON, BOOLE (Differential Equations) and at least two other places.

Approximate Formula.

The approximate formula derived from equation (1) and submitted herewith for consideration la

$$\sum_{x=c}^{x=n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T}e^{-t^2}dt-\frac{S_ie^{-T^2}}{2\sqrt{\pi}}, \tag{3}$$

where S_i is the i^{th} approximation to the infinite series

$$\frac{\sum_{s=1}R_sT^{s-1}[1+(s-1)T_1^{-2}+(s-1)(s-3)T_1^{-4}....]}{1+\sum_{s=1}R_{2s}[1\cdot 3\cdot 5....(2s-1)]2^{-s}}, \tag{4}$$

$$T_1=T\sqrt{2},$$

$$T^2=(n-1)\log\frac{n}{n-1}+(c-1)\log\frac{c-1}{a}+(n-c)\log\frac{n-c}{n-a}, \tag{5}$$

and $a=np$; T to be taken negative when $a<(c-1)n/(n-1)$.

The first, second and third approximations to the infinite series S are

$$S_1=R_1,\qquad S_2=\frac{R_1+R_2T}{1+R_2/2},\qquad S_3=\frac{R_1+R_2T+R_3(1+T^2)}{1+R_2/2},$$

where

$$R_1=4[(n-c)-(c-1)]/3\sqrt{2(n-1)(n-c)(c-1)},$$
$$R_2=(1/6)[1/(n-c)+1/(c-1)-13/(n-1)],$$
$$R_3=-(4/15)R_1[R_2+6/(n-1)].$$

It will be noted that R_2, $|R_1|$ and $|R_3|$ are symmetric functions of $(n-c)$ and $(c-1)$.

For the limiting case (Poisson's Exponential Binomial Limit) where $n=\infty$, $p=0$ but $np=a$, we have

$$T^2=1+(c-1)\log(c-1)/a+(a-c).$$
$$R_1=4/3\sqrt{2(c-1)},$$
$$R_2=1/6(c-1),$$
$$R_3=-(4/15)R_1R_2.$$

Numerical Results.

Since it is easy to compute the binomial summation directly when either c or $n-c$ is small, the practical value of an approximate formula depends on its efficiency for large values of these quantities.

The analysis given below under the beading « Derivation of the Approximate Formula » indicates that the successive R_s's in the series for S decrease when $\sqrt{c-1}$ and $\sqrt{n-c}$ increase. Therefore, when these two quantities are large, a few terms of the approximate formula (3) may be expected to give satisfactory results. As a matter of fact, the formula gives good results when $\sqrt{c-1}$ and $\sqrt{n-c}$ are not large. To confirm this statement the Tables [1] given at the end of this paper are submitted. In the 4th column of each table are given 10^6 times the true values of

$$P=\sum_{x=c}^{x=n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

In the columns headed Δ_1, Δ_2 and Δ_3 are given 10^6 times the differences between the true values and those obtained by applying formula (3) with the first, second and third approximations to S respectively. Table I in Czuber's, *Wahrscheinlichkeitsrechnung*, was used for evaluating the probability integral in equation (3).

The range of values of P covered by the tables is such that at the lower end of each section $P \geqslant .0005$ while at the upper end $P \leqslant .9995$, except where this latter condition would call for a value of $c<2$. Of course, a larger or smaller range might have been given. The decision as to this question was based on the fact that several writers on the theory of statistics, when dealing with the normal law of errors, speak of an error exceeding 3 or 4 times the standard deviation as being a very improbable event. In order to keep the number of pages required for the tables within reasonable bounds computations were made only for even values of c.

The values of $a=np$ used are such that each of the values $p=1/2$, $p=1/10$ and $p=1/20$ occurs twice; likewise each of the values $n=100$, $n=50$ and $n=30$ occurs twice.

A greater degree of accuracy than that indicated by the tables can, of course, be obtained by working out and using R_4, R_5,....; for this purpose, recourse should be had to equation (12) below and the details immediately following it. The only practical limitation to the use of formula (3) would appear to be the number of places given by the existing tables for the probability integral.

---

[1] I am greatly indebted to Miss NELLIEMAE Z. PEARSON of the Department of Development and Research both for supervising the work of my computers and contributing personally several sections of the tables.

However, this difficulty is encountered only when P, or $(1-P)$, is small, in which case T is large and the integral

$$\int_{-\infty}^{T} e^{-t^2}dt$$

may be readily evaluated by computing the first few terms of the series

$$[e^{-T^2}/2T\sqrt{\pi}][1-T_1^{-2}+(1\cdot 3)T_1^{-4}-(1\cdot 3\cdot 5)T_1^{-6}....],$$

where, as above, $T_1=T\sqrt{2}$.

When P is very small, the difference $c-a=c-np$ is relatively large compared to a, and for this latter case recourse may be had to the approximate formula published by the writer in the *American Mathematical Monthly* for June, 1913.

Derivation of the Approximate Formula.

Following LAPLACE closely, let us set

$$y(x)=Ye^{-t^2}, \tag{6}$$

where $Y=y(x_0)$ is the maximum value of $y(x)$. Then

$$\int_0^p y\,dx=Y\int_{-\infty}^{T} e^{-t^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)dt, \tag{7}$$

the upper limit T being given by the equation

$$y(p)=y(x_0)e^{-T^2}. \tag{8}$$

Assuming dx/dt expanded in powers of t so that

$$dx/dt=\sum_{s=0} D_{s+1}t^s \tag{9}$$

and setting $R_s=D_{s+1}/D_1$, equation (7) reduces to

$$\int_0^p y\,dx=YD_1\sum_{s=0} R_s\int_{-\infty}^{T} t^s e^{-t^2}dt.$$

Our fundamental equation (1) may now be written

$$\sum_{x=e}^{x=n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\frac{\sum_{s=0} R_s\int_{-\infty}^{T} t^s e^{-t^2}dt}{\sum_{s=0} R_s\int_{-\infty}^{\infty} t^s e^{-t^2}dt}. \tag{10}$$

Integrating by parts and separating the terms involving

$$\int e^{-t^2}dt$$

from the terms containing e^{-t^2}, we obtain equations (3) and (4).

To determine $R_s=D_{s+1}/D_1$, note that equation (6) gives $t=(\log Y-\log y)^{1/2}$ and set $v(x)=(x-x_0)/(\log Y-\log y)^{1/2}$ so that x may be written in the form

$$x=x_0+v(x)t.$$

This form for x gives the expansion (Lagrange's Theorem for the simple case where $f(x)=x$; see *Modern Analysis* by WHITTAKER and WATSON)

$$x=\sum_{s=0}\frac{t^s}{s!}\left(\frac{d^{s-1}v^s}{dx^{s-1}}\right)_{x=x_0}.$$

Comparing this expansion for x with the previous expansion (9) for dx/dt, we obtain

$$D_1=v(x_0)$$

and

$$\frac{D_{s+1}}{D_1}=R_s=\left(\frac{1}{s!\,v(x)}\cdot\frac{d^sv^{s+1}}{dx^s}\right)_{x=x_0}.$$

Up to this point no particular form has been attributed to the function $y(x)$. From now on we deal with the function which constitutes the integrand of the integrals in equation (1).

The function

$$y(x)=x^{c-1}(1-x)^{n-c}$$

gives the expansion

$$(\log Y-\log y)=(x-x_0)^2[A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2....],$$

where

$$x_0=(c-1)/(n-1)$$

is the value of x for which $y(x)$ is a maximum and

$$A_s=\frac{1}{(s+2)!}\left[\frac{d^{s+2}(\log Y-\log y)}{dx^{s+2}}\right]_{x=x_0}$$

or

(11)
$$A_s=\frac{(n-1)^{s+2}}{s+2}\left[\left(\frac{1}{n-c}\right)^{s+1}+(-1)^s\left(\frac{1}{c-1}\right)^{s+1}\right].$$

We are now prepared to evaluate R_s. Set

$$g=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2....$$

and

$$g_s=d^sg/dx^s.$$

Then

$$v=g^{-1/2},$$

$$\frac{dv^2}{dx}=-g^{-2}g_1,$$

$$\frac{d^2v^3}{dx^2}=(3/2)g^{-7/2}[(5/2)g_1^2-g_2g],$$

$$\frac{d^3v^4}{dx^3}=-2g^{-5}[g_3g^2-9g_2g_1g+12g_1^3].$$

Therefore, since $g_s = s!\,A_s$ when $x = x_0$,

$$R_1 = -A_0^{-3/2}A_1,$$
$$R_2 = (3/2)A_0^{-3}[(5/4)A_1^2 - A_0A_2],$$
$$R_3 = -2A_0^{-9/2}[A_3A_0^2 - 3A_2A_1A_0 + 2A_1^3].$$

Substituting for A_0, A_1, A_2 and A_3 the expressions derived by giving s the values 0, 1, 2 and 3 respectively in equation (11), we obtain for R_1, R_2 and R_3 the functions of n and c given on page 206.

For values of s greater than 3 the direct evaluation of $d^s v^{s+1}/dx^s$ by successive differentiation becomes very tedious. It will be found much more practical to use the following procedure (1), where D is a symbol of operation, $A = A_0$, and $b = A_1$

$$A_0^{-1/2}R_s = (1/s!)\left(\frac{d^s g^{-(s+1)/2}}{dx^s}\right) = \left[\frac{dA^{-(s+1)/2}}{1!\,dA}\right]D^{s-1}b +$$
$$+ \left[\frac{d^2A^{-(s+1)/2}}{2!\,dA^2}\right]D^{s-2}b^2 + \ldots + \left[\frac{d^{s-1}A^{-(s+1)/2}}{(s-1)!\,dA^{s-1}}\right]Db^{s-1} + \left[\frac{d^sA^{-(s+1)/2}}{s!\,dA^s}\right]b^s$$

or

$$R_s = A_0^{1/2}\sum_{m=1}^{m=s}\left[\frac{d^mA^{-(s+1)/2}}{m!\,dA^m}\right](D^{s-m}b^m). \tag{12}$$

The following equations give the details requisite for the formation of R_s to R_8 inclusive; A_s can be computed from equation (11).

$$Db = A_2, \quad D^2b = A_3, \quad D^3b = A_4, \quad D^4b = A_5,$$
$$D^5b = A_6, \quad D^6b = A_7, \quad D^7b = A_8,$$
$$Db^2 = 2A_1A_2,$$
$$D^2b^2 = 2A_1A_3 + A_2^2,$$
$$D^3b^2 = 2A_1A_4 + 2A_2A_3,$$
$$D^4b^2 = 2A_1A_5 + 2A_2A_4 + A_3^2,$$
$$D^5b^2 = 2A_1A_6 + 2A_2A_5 + 2A_3A_4,$$
$$D^6b^2 = 2A_1A_7 + 2A_2A_6 + 2A_3A_5 + A_4^2,$$
$$Db^3 = 3A_1^2A_2,$$
$$D^2b^3 = 3A_1^2A^3 + 3A_1A_2^2,$$
$$D^3b^3 = 3A_1^2A_4 + 6A_1A_2A_3 + A_2^3,$$
$$D^4b^3 = 3A_1^2A_5 + 6A_1A_2A_4 + 3A_1A_3^2 + 3A_2^2A_3,$$
$$D^5b^3 = 3A_1^2A_6 + 6A_1A_2A_5 + 6A_1A_3A_4 + 3A_2^2A_4 + 3A_2A_3^2,$$
$$Db^4 = 4A_1^3A_2,$$

---

(1) See De Morgan's: *Differential and Integral Calculus*, (1842) page 328, art. 214.

$$D^2b^4=4A_1^3A_3+6A_1^2A_2^2,$$
$$D^3b^4=4A_1^3A_4+12A_1^2A_2A_3+4A_1A_2^3,$$
$$D^4b^4=4A_1^3A_5+12A_1^2A_2A_4+6A_1^2A_3^2+12A_1A_2^2A_3+A_2^4,$$
$$Db^5=5A_1^4A_2,$$
$$D^2b^5=5A_1^4A_3+10A_1^3A_2^2,$$
$$D^3b^5=5A_1^4A_4+20A_1^3A_2A_3+10A_1^2A_2^3,$$
$$Db^6=6A_1^5A_2,$$
$$D^2b^6=6A_1^5A_3+15A_1^4A_2^2,$$
$$Db^7=7A_1^6A_2.$$

To illustrate the use of the procedure given above, let us evaluate R_4. We have

$$A_0^{-1/2}R_4=\left(\frac{dA^{-5/2}}{1!\,dA}\right)D^3b+\left(\frac{d^2A^{-5/2}}{2!\,dA^2}\right)D^2b^2+\left(\frac{d^3A^{-5/2}}{3!\,dA^3}\right)Db^3+\left(\frac{d^4A^{-5/2}}{4!\,dA^4}\right)b^4$$
$$=-(5/2)A_0^{-7/2}(A_4)+(1/2)(5/2)(7/2)A_0^{-9/2}(2A_1A_3+A_2^2)$$
$$-(1/6)(5/2)(7/2)(9/2)A_0^{-11/2}(3A_1^2A_2)$$
$$+(1/24)(5/2)(7/2)(9/2)(11/2)A_0^{-13/2}A_1^4$$

or

$$R_4=(5/2)A_0^{-6}[-A_0^3A_4+(7/2)A_0^2(A_1A_3+A_2^2/2)$$
$$-(1/2)(7/2)(9/2)A_0A_1^2A_2+(1/24)(7/2)(9/2)(11/2)A_1^4].$$

Tables Indicating Degree of Accuracy Obtainable by Use of Formula (3) for Evaluating.

$$P=\sum_{x=c}^{x=n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}.$$

P_1=1st approximation, $\Delta_1=(P-P_1)10^6$,

P_2=2d approximation, $\Delta_2=(P-P_2)10^6$,

P_3=3d approximation, $\Delta_3=(P-P_3)10^6$,

$$a=np,$$

$$T^2=(n-1)\log\frac{n}{n-1}+(c-1)\log\frac{c-1}{a}+(n-c)\log\frac{n-c}{n-a},$$

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{T}e^{-t^2}dt.$$

TABLE I.

c	T	$I(10^6)$	$P(10^6)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
			$a=1.5;\ n=\infty;\ p=0$			
2	+ .3074653	668154	442174	15991	9518	— 1348
4	— .7612106	140849	65643	10816	1989	30
4	— 1.5874105	12386	4456	1641	303	8
6	— 2.2985028	577	170	103	20	0
			$a=1.5;\ n=30;\ p=.05$			
2	+ .2865166	657333	446458	21266	17382	— 2083
4	— .8219430	122536	60772	3684	5617	— 97
6	— 1.6966449	8211	3282	— 113	914	40
8	— 2.4640017	246	85	— 24	50	7

TABLE II.

c	T	$I(10^6)$	$P(10^6)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
			$a=5;\ n=\infty;\ p=0$			
2	1.5461442	985613	959576	— 1681	2590	— 798
4	.6837566	833222	734978	— 2036	1897	— 138
6	.0000000	500000	384044	2986	1036	— 4
8	— .5960752	199621	133376	4219	616	17
10	— 1.1358169	54105	31832	2128	286	13
12	— 1.6349406	10385	5452	604	123	2
14	— 2.1027717	1471	692	107	11	— 5
16	— 2.5454242	159	68	14	1	— 1
			$a=5;\ n=100;\ p=.05$			
2	1.5596227	986295	962920	— 373	3331	— 732*
4	.6839234	833281	742162	639	3248	— 141
6	— .0162780	490817	384001	2889	2108	— 38
8	— .6310024	186097	127961	1989	1431	— 8
10	— 1.1912234	46029	28188	566	703	1
12	— 1.7124507	7723	4274	75	208	2
14	— 2.2138799	914	463	2	38	0
16	— 2.6715388	79	37	— 1	5	0
			$a=5;\ n=50;\ p=.1$			
2	1.5742756	987005	966214	830	3962	— 724
4	.6844600	833471	749706	3289	4437	— 212
6	— .0335708	481067	388877	2599	3022	— 62
8	— .6689826	172053	122145	— 334	2076	31
10	— 1.2524740	38258	24538	— 789	954	51
12	— 1.7994619	5467	3220	— 278	244	24
14	— 2.3191412	520	285	— 48	36	6
16	— 2.8175965	34	17	— 5	3	0

* $|P-P_3|>|P-P_1|$.

TABLE III.

c	T	$I(10^6)$	$P(10^6)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
			$a=10;\quad n=\infty;\quad p=0$			
2	2.5879363	999874	999499	— 47	67	— 37
4	1.8406742	995381	989662	— 533	275	— 53
6	1.2386541	960089	932912	— 1532	518	— 50
8	.7094191	842135	779778	— 1585	547	— 27
10	.2274981	626172	542069	79	425	— 8
12	— .2200272	377838	303223	1786	322	1
14	— .6408864	182375	135535	2077	239	4
16	— 1.0401811	70640	48740	1374	146	4
18	— 1.4215063	22199	14277	628	68	0
20	— 1.7875189	5737	3454	216	25	1
22	— 2.1402533	1236	699	58	7	0
24	— 2.4813121	225	119	12	1	— 1
			$a=10;\quad n=100;\quad p=.1$			
2	2.6528972	999912	999679	— 3	71	— 24*
4	1.8917619	996268	992164	— 15	432	— 39*
6	1.2715533	963931	942424	278	1070	— 45
8	.7213308	846163	793949	997	1349	— 36
10	.2161911	620099	548710	1213	1179	— 19
12	— .2564838	358406	296967	503	982	— 2
14	— .7042404	159638	123877	— 222	771	10
16	— 1.1320595	54691	39891	— 376	470	13
18	— 1.5434535	14526	10007	— 222	206	9
20	— 1.9410214	3025	1979	— 80	66	4
22	— 2.3267578	500	312	— 20	15	1
24	— 2.7022383	66	40	— 4	2	0

* $|P-P_3|>|P-P_1|$.

TABLE IV.

c	T	$I(10^6)$	$P(10^6)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
			$a=15;\quad n=\infty;\quad p=0$			
4	2.6780004	999924	999788	— 18	10	— 4
6	2.1229551	998660	997207	— 141	54	— 9
8	1.6324888	989520	981998	— 525	146	— 14
10	1.1843012	953019	930147	— 1066	242	— 15
12	.7670044	860975	815249	— 1198	274	— 10
14	.3737500	701445	636783	— 515	245	— 4
16	.0000000	500000	431911	582	203	0
18	— .3574541	306598	251141	1311	168	2
20	— .7009899	160758	124781	1351	132	2
22	— 1.0324325	72134	53106	961	89	2
24	— 1.3532229	27826	19464	523	49	1
26	— 1.6645241	9287	6184	228	22	0
28	— 1.9672925	2700	1715	82	8	— 1
30	— 2.2623270	689	418	25	2	0

TABLE IV. (*Continued*)

$a=15$; $n=30$; $p=.5$

6	2.6019552	999883	999837	52	24	— 12
8	2.0184138	997845	997388	559	152	— 77
10	1.4626537	980704	978613	2676	411	— 239
12	.9237039	904277	899756	5946	488	— 343
14	.3942720	711436	707667	5025	227	— 205
16	— .1313195	426335	427768	— 1916	— 73	72
18	— .6581761	175978	180797	— 6392	— 382	301
20	— 1.1915875	45979	49369	— 4405	— 497	316
22	— 1.7378702	6991	8062	— 1346	— 278	149
24	— 2.3057782	555	715	— 191	— 69	32
26	— 2.9097701	10	30	— 11	— 7	3

TABLE V.

c	T	$I(10^6)$	$P(10^6)$	Δ_1	Δ_2	Δ_3
			$a=25$; $n=\infty$; $p=0$			
10	2.6086661	999888	999778	— 11	3	— 1
12	2.2291734	999191	998583	— 51	11	— 2
14	1.8705496	995920	993531	— 159	30	— 4
16	1.5289263	984700	977705	— 364	59	— 6
18	1.2015564	955365	939522	— 617	90	— 7
20	.8863972	894998	866422	— 765	109	— 7
22	.5818753	794717	752697	— 651	110	— 7
24	.2867455	657452	606120	— 253	101	— 6
26	.0000000	500000	447076	268	92	— 3
28	— .2791919	346482	299814	678	84	1
30	— .5515253	217703	182105	837	75	2
32	— .8175896	123790	100070	761	62	3
34	— 1.0778902	63708	49782	561	45	3
36	— 1.3328647	29718	22460	350	29	2
38	— 1.5828952	12593	9212	189	17	2
40	— 1.8283181	4860	3445	90	9	2
42	— 2.0694313	1713	1178	38	4	1
44	— 2.3065005	553	370	15	2	1
			$a=25$; $n=50$; $p=.5$			
14	2.3698187	999598	999531	80	16	— 9
16	1.9447371	997023	996699	404	57	— 32
18	1.5274793	984621	983580	1329	126	— 74
20	1.1159208	942735	940539	2844	170	— 113
22	.7083182	841759	838881	3763	140	— 109
24	.3031406	665931	664094	2415	60	— 56
26	— .1010188	443200	443862	— 873	— 20	19
28	— .5055162	237333	239944	— 3426	— 102	87
30	— .9117246	98634	101319	— 3499	— 166	117
32	— 1.3211006	30859	32454	— 2056	— 157	95
34	— 1.7352770	7063	7673	— 774	— 91	50
36	— 2.1561545	1147	1301	— 191	— 33	17
38	— 2.5860897	128	153	— 31	— 8	4

P. MASSÉ (Paris - Francia)

APPLICATION DES FONCTIONS DE LIGNES À L'ÉTUDE DES PHÉNOMÉNES MONÉTAIRES

Les phénomènes monétaires sont des phénomènes *héréditaires* au sens de la théorie des fonctions de lignes, parceque les valeurs des variables monétaires à un instant donné « t », dépendent des manières d'agir collectives qui sont influencées par le développement antérieur du phénomène. Il est donc indiqué d'introduire les fonctions de lignes dans l'étude des phénomènes monétaires, et en particulier dans celle de la « *fuite devant la monnaie* » où les influences psychologiques présentent un maximum d'intensité.

Le point de départ de l'étude est l'équation d'échange d'YRVING FISHER, qui affirme l'identité entre le total des paiements effectués pendant l'unité de temps, et le prix total des marchandises et services obtenus en échange, et qui s'écrit:

$$MV+M'V'=PQ, \tag{1}$$

M et M' représentant les montants en circulation sous forme de monnaie et de crédits en banque, V et V' les rapidités de circulation respectives de ces deux formes de pouvoir d'achat, P l'indice général des prix, et Q un coefficient caractéristique de l'activité des transactions.

En vue de l'application que nous nous proposons, nous écrivons l'équation d'échange sous la forme:

$$M=PW \tag{2}$$

le facteur monétaire W ayant pour expression:

$$W=\frac{Q}{V+\frac{M'}{M}V'}. \tag{3}$$

Nous supposerons d'autre part l'intensité des émissions *constante* en valeur réelle, c'est-à-dire nominalement proportionnelle au niveau des prix et nous écrirons:

$$dM=\lambda P dt. \tag{4}$$

Cette *loi d'émission* correspond au cas d'un État qui comble par des émissions de papier monnaie un déficit budgétaire constant en valeur réelle.

Elle s'est trouvée approximativement réalisée pendant l'inflation allemande, ce qui permet de confronter les déductions de la théorie avec les résultats de l'observation.

* * *

Les théories que l'on peut appeler *mécaniques* de la monnaie reposent sur l'axiome de la constance du facteur monétaire. Elles justifient cet axiome (IRVING FISHER) en faisant observer que les divers éléments qui entrent dans l'expression (3) de W dépendent de nos besoins et de nos habitudes et présentent comme ceux-ci une certaine permanence. Pour ne prendre qu'un exemple, la rapidité de la circulation de la monnaie doit être pratiquement constante, parceque nous avons des besoins à satisfaire selon un échelonnement a peu près invariable.

De cet axiome, rapproché de l'équation d'échange et de la loi d'émission, les théories mécaniques tirent des conclusions parmi lesquelles on peut citer à titre d'exemple: la proportionnalité du niveau des prix au montant de la circulation monétaire (IRVING FISHER) et l'allure exponentielle de la dépréciation (1) lorsque l'intensité des émissions est constante (J. RUEFF).

* * *

Les théories mécaniques ne peuvent être admises qu'en première approximation, car il n'est pas permis de considérer W comme constant en toute circonstance. On sait par exemple que la continuité de la dépréciation monétaire finit par engendrer la fuite devant la monnaie, c'est-à-dire l'accroissement des rapidités de circulation V et V', et par voie de conséquence l'abaissement de W au dessous de son niveau normal (F. DIVISIA). On constate dans les mêmes circonstances (inflation allemande), que la courbe réelle des prix quitte l'exponentielle théorique et s'élève rapidement au dessus d'elle.

Il est ainsi nécessaire de constituer une théorie psychologique, ou théorie héréditaire de la monnaie, dans laquelle on cherchera à assigner une forme aux influences psychologiques et à déterminer leurs effets.

Il ne s'agit pas ici des influences psychologiques les plus générales qui sont à la merci d'évènements fortuits et imprévisibles comme la mort d'un homme d'état ou la chute d'un gouvernement, mais uniquement de celles qui naissent des variations monétaires elles-mêmes et dont l'effet est d'amplifier les mouvements d'origine économique qui leur ont donné naissance. En période de dépréciation par exemple, les emprunts, les transactions, les rapidités de circulation de la monnaie et des crédits sont suscités, et le facteur W devient une fonction du rythme de dépréciation (rythme et non degré, car c'est l'allure dynamique et non l'aspect statique du phénomène qui commande les réactions collectives).

---

(1) $P = P_0 e^{\frac{\lambda}{w} t}$.

L'élément déterminant des influences psychologiques est ainsi ce que nous appellerons la vitesse de dépréciation de la monnaie : (vitesse de variation *relative* de son pouvoir d'achat)

$$x = \frac{1}{P}\frac{dP}{dt}. \tag{5}$$

Dans le cas d'une vitesse de dépréciation stationnaire, la relation entre W et x s'écrit simplement :

$$W = \varphi(x) \tag{6}$$

φ étant une fonction constamment décroissante qui tend vers zéro quand x augmente indéfiniment par valeurs positives, et vers une valeur finie quand x augmente indéfiniment par valeurs négatives, et qui caractérise en quelque manière l'intensité des influences psychologiques.

Dans le cas général où la vitesse de dépréciation varie d'une façon quelconque, W devient une fonction de toutes les valeurs antérieures de x

$$W = \int_{-\infty}^{t} K(t, \theta)\varphi[x(\theta)]d\theta. \tag{7}$$

La fonction $K(t, \theta)$, coefficient d'influence de l'époque θ sur l'époque t, caractérise la *rapidité* des influences psychologiques.

Théorie de la fuite devant la monnaie.

Le rapprochement de l'équation d'échange (2) et de la loi d'émission (4) conduit à la relation :

$$xW + \frac{dW}{dt} = \lambda. \tag{8}$$

Si on porte dans cette équation l'expression (7) de W et celle qu'on en déduit par dérivation pour $\frac{dW}{dt}$, et si on suppose le développement du phénomène connu jusqu'à une certaine époque (prise pour origine des temps), le développement ultérieur est défini par *une équation intégrale à limites variables non linéaire.*

Particularisation.

Posons :

$$K(t, \theta) = ke^{-k(t-\theta)}. \tag{9}$$

Cette particularisation laisse au coefficient d'influence $K(t, \theta)$ une forme assez générale dépendant d'un paramètre k dont les valeurs élevées correspondent à une hérédité violente et brève, et les faibles valeurs à une hérédité lente et prolongée. Elle permet la discussion du problème en fonction de la valeur de k' c'est-à-dire de la rapidité des influences psychologiques.

En portant la valeur (9) de $K(t, \theta)$ dans l'expression (7) de W, et en dérivant, on obtient:

$$\frac{dW}{dt} = k[\varphi(x) - W] \tag{10}$$

c'est-à-dire une seconde relation entre les valeurs de x, W et $\frac{dW}{dt}$ à l'instant « t », et l'équation intégrale dégénère ainsi en équation différentielle.

L'étude *complète* du système différentiel (8-10) conduit à des résultats qu'on ne peut utiliser dans leur ensemble, pour la raison essentielle que la constance de k ne correspond pas, comme nous l'indiquerons plus loin, au développement du phénomène réel.

Nous nous bornerons à nous poser la question suivante: Supposons qu'après une *courte* période de transition, un régime héréditaire de dépréciation succède au régime mécanique étudié par M. J. RUEFF. La courbe des prix s'élève au dessus de l'exponentielle théorique, mais va-t-elle rejoindre une nouvelle exponentielle plus ascendante ou croître plus rapidement que n'importe quelle exponentielle? Nous chercherons la condition nécessaire et suffisante pour que la première alternative se réalise, c'est-à-dire pour qu'il y ait une vitesse de dépréciation limite x_1, ou ce qui revient au même, pour que W tende vers une limite W_1, *différente de zéro.*

Si x_1 et W_1 existent, les équations (8) et (10) deviennent:

$$x_1 W_1 = \lambda \tag{11}$$

$$W_1 = \varphi(x_1) \tag{12}$$

x_1 et W_1 sont donc les racines respectives des deux équations:

$$x\varphi(x) = \lambda \tag{13}$$

$$W = \varphi\left\{\frac{\lambda}{W}\right\}. \tag{14}$$

Une première condition est que ces équations aient une racine réelle. Il faut et il suffit pour celà, en se plaçant sur le terrain pratique, c'est-à-dire en faisant abstraction des singularités que pourrait présenter la fonction φ la plus générale, que:

$$\lim_{x=+\infty} x\varphi(x) > \lambda$$

$$\frac{1}{\varphi(x)} < \frac{x}{\lambda} \tag{15}$$

pour les grandes valeurs de x.

La vérification de cette inégalité est liée au mode de croissance de la fonction $\frac{1}{\varphi(x)}$, qu'on peut considérer comme le mode d'accélération de la fuite devant la monnaie quand la vitesse de dépréciation devient très grande.

L'inégalité est vérifiée si ce mode de croissance est moins que linéaire, ou si, ce mode de croissance étant linéaire, l'intensité des émissions est inférieure à une certaine limite. Elle n'est pas vérifiée dans les cas contraires.

La condition nécessaire (15) n'est pas suffisante. En effet de (8) et (10) on tire:

$$(x-k)W+k\varphi(x)-\lambda=0. \tag{16}$$

D'où

$$W=\frac{\lambda-k\varphi(x)}{x-k} \tag{17}$$

et

$$dt=\frac{\{k(x-k)\varphi'(x)+\lambda-k\varphi(x)\}\,dx}{k(x-k)[\lambda-x\varphi(x)]}. \tag{18}$$

Pour que x tende vers la racine x_1 de $\lambda-x\varphi(x)$, il est nécessaire que $\frac{dx}{dt}$ soit positif lorsque x est au voisinage et au dessous de x_1. D'où une seconde condition où intervient cette fois le coefficient de rapidité k des influences psychologiques; k doit être inférieur à une certaine valeur critique, qui n'est autre que x_1

$$k<x_1. \tag{19}$$

Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une vitesse de dépréciation asymptotique x_1, est constituée par l'ensemble des deux inégalités (15) et (19), où interviennent d'une part l'intensité et d'autre part la rapidité des influences psychologiques.

La vitesse de dépréciation limite x_1 est d'ailleurs indépendante de k.

Application au développement de la dépréciation.

Ainsi que nous l'avons indiqué, k ne peut être considéré comme constant que pendant une fraction du développement de la dépréciation. Les influences psychologiques s'rxercent en effet lentement tout d'abord, et ensuite de plus en plus vite. Pour commencer, on fait des comparaisons de prix de trimestre en trimestre, puis de mois en mois et de semaine en semaine. Enfin, lorsque le phénomène devient aigu, on regarde les cours de change heure par heure et l'influence héréditaire ne s'exerce plus pratiquement que sur un jour ou une fraction de jour.

Ainsi, au début de la fuite devant la monnaie, k est petit et certainement inférieur à la valeur critique. D'autre part, pour des raisons d'ordre logique et d'ordre expérimental, la condition (15) est certainement remplie. La vitesse de dépréciation x s'élève au dessus de x_0 et tend vers x_1.

Pendant ce temps, k augmente progressivement mais l'allure du phénomène n'en est pratiquement pas affectée; x_1 *étant indépendant de* k, la courbe des prix reste voisine de l'exponentielle

$$P\equiv P_1 e^{x_1 t}.$$

Toutefois, le moment vient où k dépasse la valeur critique x_1; la vitesse de dépréciation augmente de nouveau, sans qu'il y ait cette fois de régime exponentiel limite.

On est ainsi conduit à distinguer trois phases dans le développement de la

dépréciation: la phase du régime exponentiel mécanique (J. RUEFF), celle du régime psychologique quasi-exponentiel, et celle de destruction de la monnaie. Cette distinction apparait d'une manière particulièrement nette sur un diagramme des prix tracé à l'échelle logarithmique: on obtient une partie rectiligne (I), une partie quasi rectiligne (II), et une courbe très ascendante (III).

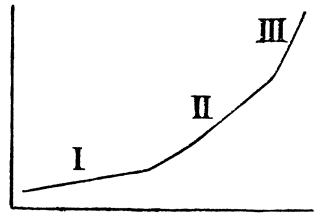


Fig. 1.

L'expérience la plus complète et en quelque sorte la plus précise de l'inflation, celle de l'Allemagne, est en accord avec les conclusions de la théorie.

Si l'on prend comme unité de temps le mois, comme unité monétaire le milliard de marks, et comme unité de prix l'indice de 1913, on obtient pour λ, de 1920 à 1923, les valeurs moyennes annuelles suivantes: 0,15, 0,16, 0,22, 0,41. Si l'on observe que les valeurs ainsi calculées sont les quotients de nombres ΔM et P qui ont varié respectivement de 0 à 397 quatrillions, et de 12 unités à 1261 milliards, il est permis sans aucun doute, de considérer λ comme ayant été pratiquement constant pendant cette période, et par suite d'appliquer à l'expérience allemande les résultats de notre analyse. Cette confrontation est satisfaisante car, compte tenu d'un décrochement dû à une intervention prolongée de la Reichsbank sur le marché des devises au début de 1923, on constate que la courbe réelle de Log. P a exactement l'allure de la courbe théorique, et présente en particulier les trois phases que prévoit la théorie.

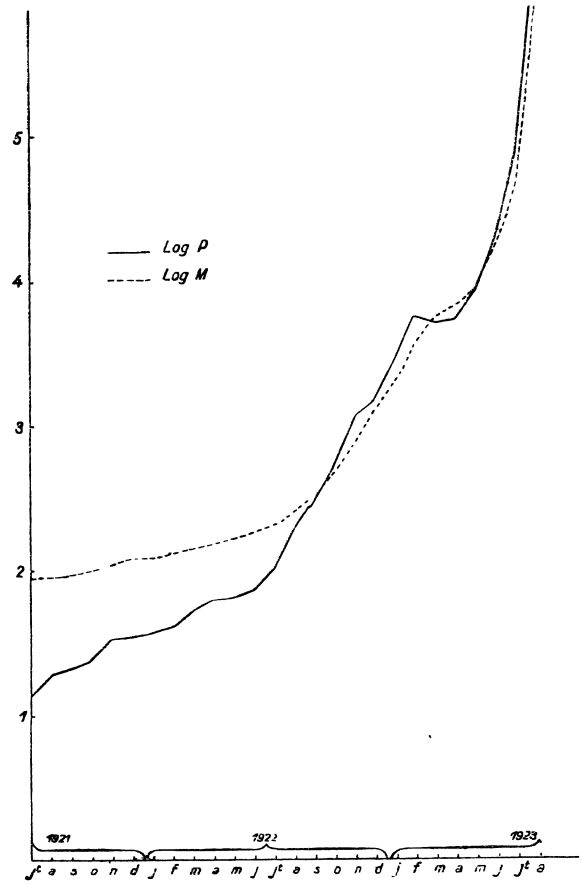


Fig. 2.

Conclusion.

L'étude ci-dessus de la fuite devant la monnaie n'est évidemment qu'un premier pas.

Il reste à reprendre l'analyse dans le cas où le coefficient d'influence $K(t, \theta)$ présente la forme la plus générale, et à l'étendre à d'autres catégories de phénomènes économiques et monétaires ; on peut espérer que dans cette voie, l'économie politique parviendra, à l'exemple des autres sciences, à passer progressivement de la notion qualitative de *tendance*, à la considération quantitative de *régime*.

L'EXPERIENCE ALLEMANDE

	M milliards de marks	ΔM	P (1913 = 1)	Log M	Log P	θ : $\left(\frac{M}{P}\right)$	λ $\left(\frac{\Delta M}{P}\right)$
1920							
Janvier . .	51,0	0,8	12,6	1,71	1,10	4,1	0,06
Février . .	54,4	3,4	16,8	1,74	1,22	3,3	0,20
Mars . . .	59,6	5,2	17,1	1,78	1,23	3,6	0,30
Avril . . .	62,4	2,8	15,7	1,80	1,20	4,0	0,18
Mai	64,3	1,9	15,1	1,81	1,18	4,3	0,12
Juin . . .	68,3	4,0	13,8	1,83	1,14	4,9	0,28
Juillet . . .	69,7	1,5	13,7	1,84	1,14	5,0	0,11
Août . . .	72,4	2,6	14,5	1,86	1,16	5,0	0,18
Septembre .	75,8	3,4	15,0	1,88	1,18	5,0	0,23
Octobre . .	77,4	1,6	14,7	1,89	1,17	5,2	0,11
Novembre .	77,4	0,0	15,1	1,89	1,18	5,1	0,—
Décembre . .	78,1	0,7	14,4	1,89	1,16	5,4	0,05
1921							
Janvier . .	78,8	0,7	14,4	1,90	1,16	5,5	0,05
Février . .	80,0	1,2	13,8	1,90	1,14	5,8	0,09
Mars . . .	80,4	0,4	13,4	1,91	1,13	6,0	0,03
Avril . . .	81,2	0,8	13,3	1,91	1,12	6,2	0,06
Mai	81,7	0,5	13,1	1,91	1,12	6,2	0,04
Juin . . .	84,8	3,2	13,7	1,93	1,14	6,2	0,23
Juillet . . .	86,7	1,8	14,3	1,94	1,15	6,2	0,12
Août . . .	88,8	2,1	19,1	1,95	1,28	4,7	0,10
Septembre .	94,9	6,1	20,7	1,98	1,32	4,6	0,30
Octobre . .	99,8	4,9	24,6	2,—	1,39	4,1	0,20
Novembre .	109,3	9,5	34,2	2,04	1,53	3,2	0,28
Décembre . .	123,0	13,7	34,9	2,09	1,54	3,5	0,39

L'EXPERIENCE ALLEMANDE

	M milliards de marks	ΔM	P (1913 = 1)	Log M	Log P	θ: $\left(\frac{M}{P}\right)$	λ $\left(\frac{\Delta M}{P}\right)$
1922							
Janvier . .	124,4	1,4	36,7	2,09	1,56	3,4	0,03
Février . .	129,0	4,6	41,0	2,11	1,61	3,2	0,11
Mars . . .	140,5	11,5	54,3	2,15	1.73	2,6	0,20
Avril . . .	150,8	10,3	63,5	2,18	1,80	2,4	0,16
Mai	162,5	11,7	64,6	2,21	1,81	2,5	0,18
Juin . . .	180,8	18,3	70,3	2,26	1,85	2,6	0,26
Juillet . . .	203,2	22,4	100,6	2,31	2,—	2,0	0,22
Août . . .	252,9	48,3	192	2,40	2,28	1,3	0,25
Septembre .	332,6	59,7	287	2,52	2,46	1,1	0,21
Octobre . .	484,7	148,1	566	2,68	2,75	0,85	0,26
Novembre .	769,5	284,8	1154	2,89	3,06	0,67	0,25
Décembre . .	1295,2	525,7	1475	3,11	3,17	0,87	0,36
1923							
Janvier . .	2000	705	2785	3,30	3,44	0,72	0,25
Février . .	3536	1536	5585	3,55	3,75	0,63	0,27
Mars . . .	5543	2007	4888	3,74	3,69	1,1	0,41
Avril . . .	6604	1061	5212	3,82	3,72	1,3	0,20
Mai	8644	2050	8170	3,94	3,91	1,1	0,25
Juin . . .	17393	8749	19385	4,24	4,29	0,89	0,45
Juillet . . .	42893	25500	74787	4,63	4,87	0,58	0,34
Août . . .	668798	625905	944041	5,82	5,97	0,71	0,66
Septembre .	28 quatr.	27 quatr.	23 millions	7,45	7,36	1,2	1,17
Octobre . .	2505 quatr.	2477 quatr.	7094 millions	9,40	9,85	0,35	0,35
Novembre .	400338 quatr.	397833 quatr.	725700 millions	11,60	11,86	0,55	0,55
Décembre . .	496585 quatr.	96247 quatr.	1261600 millions	11,70	12,10	0,40	0,08

Sezione Quinta

G. SUPINO (Bologna - Italia)

UN CRITERIO DI SCELTA TRA SOLUZIONI ELASTICHE A RISULTANTI EGUALI (1)

1. - Si consideri un solido elastico limitato dalla superficie σ. Se dividiamo σ in due zone complementari σ_1 e σ_2 e supponiamo dati sull'una la distribuzione delle forze o degli spostamenti, sull'altra la risultante e il momento risultante delle forze si sa che la sollecitazione elastica non è univocamente determinata.

Ma in molti casi non si possono conoscere con maggiore precisione le forze (specialmente quando si tratti di reazioni dovute al terreno o agli appoggi); in che modo potremo allora scegliere la soluzione preferibile tra le infinite soluzioni che soddisfano alle condizioni poste?

Quando la zona σ_1 su cui sono date le sole risultanti, sia abbastanza piccola la scelta può dipendere da considerazioni puramente analitiche, perchè applicando il postulato di Saint-Venant, si può poi affermare che le sollecitazioni provocate divengono a breve distanza da σ_1 sensibilmente indipendenti dalla soluzione scelta, ma se σ_1 non sia trascurabile in confronto a σ_2 mi sembra preferibile fissare un criterio di scelta fondato su considerazioni fisiche: nel presente lavoro scelgo come soluzione *fondamentale* quella che soddisfacendo alle risultanti assegnate e alle altre condizioni poste ai limiti renda minimo il lavoro di deformazione.

Questo criterio, che può essere inquadrato nella teoria dell'elasticità come una estensione del teorema di Menabrea, si collega in parte a lavori e idee recentemente espresse; e mi riferisco con ciò alla memoria del prof. PUPPINI: *Il principio della conservazione delle sezioni piane in relazione col principio del minimo lavoro* (2) nella quale è mostrato come la ricerca di una distribuzione di tensioni normali che, soddisfacendo alla legge di Bach ($\sigma = \varepsilon^k$, $k = \text{cost}$) renda minimo il lavoro di deformazione porta a quella soluzione che conserva le sezioni piane. Anche il prof. SIGNORINI mi ha comunicato di essere partito da concetti analoghi a questi per ritrovare la soluzione del Saint-Venant nella trave; il suo risultato è però ancora inedito.

In questa comunicazione, riferendomi al concetto stabilito più sopra di soluzione fondamentale e a giustificazione di esso indicherò (insieme a criteri gene-

(1) Il testo di questa comunicazione è pervenuto nel dicembre 1929.

(2) Monitore Tecnico, 1915.

rali di ricerca) qualche esempio di soluzioni fondamentali; considero quindi il caso in cui si ponga qualche limitazione alle forze agenti su σ_1 (soluzioni minimanti condizionate) e dimostrerò a questo proposito che la soluzione del Saint-Venant nella trave e quella del Prandtl per la flessione degli archi sono soluzioni minimanti quando sulle basi agiscano solo forze normali o quando le forze tangenziali siano antisimmetriche rispetto alla mezzaria della trave.

Criterii di ricerca. Soluzioni fondamentali in senso completo.

2. - I metodi che seguo nello studio della soluzione fondamentale sono sostanzialmente due. Il primo di essi si fonda sull'ipotesi della esistenza di questa soluzione; allora, con procedimenti di simmetrizzazione assai semplici, si giunge rapidamente alla dimostrazione voluta. Il secondo procede per mezzo di una verifica; assunta cioè una soluzione nota come soluzione fondamentale si aggiunge a questa una seconda soluzione che dia luogo a risultanti nulle in σ_1 a forze nulle in σ_2 e si mostra quindi che il potenziale elastico totale Φ dovuto alla somma delle due soluzioni è maggiore del potenziale elastico Φ' corrispondente alla sola prima soluzione che risulta così essere effettivamente fondamentale.

Ora, indicando con un accento le quantità appartenenti alla soluzione data, con due accenti quelle appartenenti alla soluzione aggiunta, è

$$\Phi=\Phi'+\Phi''+\frac{1}{2}\int_\sigma(u'P_x''+v'P_y''+w'P_z'')d\sigma+\frac{1}{2}\int_\sigma(u''P_x'+v''P_y'+w''P_z')d\sigma+$$
$$+\frac{1}{2}\int_\tau(F_x'u''+F_y'v''+F_z'w'')d\tau \qquad [F_x',\ F_y',\ F_z' \text{ forze di massa}]$$

e quando su σ_2 siano date le forze, potremo scrivere, tenendo conto della reciprocità)

$$\Phi=\Phi'+\Phi''+\int_{\sigma_1}(u'P_x''+v'P_y''+w'P_z'')d\sigma_1. \tag{1}$$

Ma l'intensità del sistema di forze $\mathbf{P}''(P_x'', P_y'', P_z'')$ è arbitraria e Φ'' dipende in modo quadratico dalla intensità delle forze stesse, affinchè dunque per ogni intensità del sistema $\mathbf{P}''$, sempre sia $\Phi\geqslant\Phi'$ occorre e basta che sia

$$\int_{\sigma_1}(u'P_x''+v'P_y''+w'P_z'')d\sigma_1=0 \quad (^1). \tag{2}$$

---

(1) Se su σ_2 sono dati gli spostamenti, aggiungendo il sistema $\mathbf{P}''$ a spostamenti nulli su σ_2 conviene considerare in luogo della (2) la relazione

$$\int_{\sigma_1}(u''P_x'+v''P_y'+w''P_z')d\sigma_1+\int_\tau(u''F_x'+v''F_y'+w''F_z')d\tau=0. \tag{2'}$$

Si osserverà che la (2) deve essere verificata quando varii in modo arbitrario non solo l'intensità di $\mathbf{P}''$ ma anche la distribuzione delle forze stesse su σ_1 (pur di soddisfare alle condizioni di equilibrio); altre volte invece si potrà chiedere che la (2) sia soddisfatta per certi sistemi di forze soltanto; la soluzione per cui si presenti quest'ultimo caso costituirà, come si è osservato al n. 1, una *soluzione fondamentale condizionata* a certe limitazioni delle forze date su σ_1. Su queste soluzioni condizionate ritorneremo nei numeri che seguono.

Invece osserveremo subito che l'uso della formula (2) permette di precisare facilmente le condizioni cui deve soddisfare lo spostamento $\mathbf{s}'(u', v', w')$ su σ_1 perchè si possa affermare che la soluzione da esso rappresentata è una soluzione fondamentale. Si vede infatti immediatamente che la (2) non può valere per $\mathbf{P}''$ qualunque altro che se $\mathbf{s}'$ rappresenta in σ_1 uno spostamento di corpo rigido; nel qual caso si può porre senza restrizione $\mathbf{s}'=0$. Ne segue che nelle soluzioni minimanti in senso completo σ_1 non si deforma ma si sposta rigidamente; prendendo uno dei piani coordinati tangente a σ_1 stessa, la ricerca della soluzione fondamentale si può dunque sostituire con la ricerca di una soluzione che dia luogo a forze *date* su σ_2 e a spostamenti nulli in σ_1. Per le condizioni di equilibrio saremo allora certi che su σ_1 si hanno le risultanti volute. Si osservi che quando su σ_2 sono dati gli spostamenti (invece delle forze) non è detto che esista la soluzione fondamentale (in senso completo) per un dato sistema di risultanti; per esempio se non si hanno forze di massa e si pone la condizione che su σ_2 sia $\mathbf{s}'=0$ allora la soluzione minimante si potrà ricavare dalla (2); ma da questa segue $\mathbf{s}'=0$ anche in σ_1 e quindi l'unica soluzione possibile è lo stato naturale. Se si fissano alcune limitazioni per $\mathbf{P}''$ allora $\mathbf{s}'$ può essere diverso da zero. Da queste considerazioni si deduce pure il seguente teorema:

« Se in un solido elastico S sono date due soluzioni fondamentali, e se per le due sollecitazioni coincide la suddivisione delle zone σ_1 e σ_2 (ed inoltre le condizioni assegnate su σ_2 sono dello stesso tipo (1)), la somma delle due soluzioni fondamentali è una soluzione fondamentale ».

Si osserverà, dall'esame della (2), che questo enunciato resta vero anche per le soluzioni minimanti condizionate; purchè la condizione resti la stessa per le due soluzioni.

3. - Indicherò ora alcuni esempi di soluzioni fondamentali complete. Consideriamo perciò un cilindro isotropo a sezione retta circolare; allora la sollecitazione *a torsione* costituisce una soluzione fondamentale (in senso completo): infatti le basi restano piane e ruotano rigidamente intorno all'asse del cilindro. Invece lo

(1) Con questa locuzione intendo specificare che se per la prima soluzione è data su σ_2 la distribuzione delle forze anche per la seconda soluzione è data la distribuzione delle forze; se per l'una sono dati su σ_2 gli spostamenti anche per l'altra sono dati gli spostamenti.

stesso cilindro sollecitato a *compressione semplice* dà luogo a spostamenti, che, come si è già osservato, non soddisfano alla (2) per ogni sistema P''. In questo caso la soluzione fondamentale (in senso completo) non si ottiene in modo analiticamente semplice; sperimentalmente si realizza invece assai spesso perchè comprimendo con una macchina un provino si impediscono anche (se l'attrito è un po' forte) le dilatazioni delle basi. Orbene in un lavoro, poco noto, pubblicato dal FILON si cerca una soluzione approssimata per questo caso di sollecitazione (1) e si giunge tra l'altro alla conclusione notevole che per il solo fatto dell'invariabilità delle basi (di cui non si tiene conto nel calcolo) le macchine di prova misurano un modulo di elasticità apparente che è circa del $5\,^0/_0$ superiore al modulo di elasticità effettivo del materiale.

Soluzioni minimanti condizionate.

4. - Dal punto di vista delle applicazioni interessano forse maggiormente le soluzioni minimanti condizionate a certe limitazioni nelle forze date su σ_1. Indicherò anche qui alcuni esempi.

Consideriamo dapprima la flessione in un arco ad asse circolare, con sezione, normale all'asse, costante. Siano A, B le sezioni (normali) estreme dell'arco e si consideri la sezione normale nel punto di mezzo C dell'asse. Costruita una soluzione per la flessione, sia φ_1 il potenziale elastico del tronco AC, φ_2 quello del tronco BC e supponiamo per fissare le idee che sia $\varphi_1 \leqslant \varphi_2$.

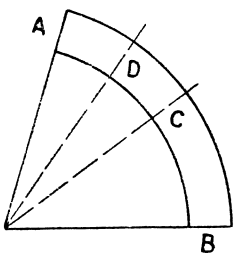


Fig. 1.

Si costruisca allora il sistema simmetrico di AC rispetto al raggio per C (vedi fig. 1); questo sistema soddisfa alle condizioni ai limiti ed a quelle necessarie per la validità del teorema di Menabrea ed ha potenziale minore od eguale a quello della soluzione primitiva. Vi sarà dunque un sistema elastico congruente che soddisfa alle condizioni ai limiti date, ha potenziale minore od uguale a $2\varphi_1$, ed è simmetrico rispetto al piano normale all'asse per il punto C.

Consideriamo questa seconda soluzione e ripetiamo la costruzione esposta riferendoci invece che al raggio per C ed all'arco AB, al raggio per D punto di mezzo dell'arco AC, ed a questo arco; troveremo così una soluzione (valida nell'arco AC) che ha lavoro di deformazione minore od eguale a quello della

(1) Cfr. L. N. G. FILON: *On the Elastic Equlibrium of Circular Cylinders under certain Pratical Systems of Loads.* Phil. Trans. of the Royal Society of London, serie A, vol. 198, 1902, pp. 147-234. La ricerca richiede l'uso di funzioni di Bessel, serie trigonometriche e polinomii algebrici in r e z. L'approssimazione consiste nel supporre gli spostamenti u e v nulli non su tutta la base, ma solo sul contorno della base stessa.

soluzione precedentemente costruita ed è simmetrica rispetto al raggio per D. Se in C (e quindi anche in A) mancano le tensioni tangenziali allora la stessa soluzione può essere considerata nell'arco BC, ed accostando i due archi AC, CB si ha nell'intero arco AB una soluzione che soddisfa alle condizioni sufficienti per la validità del teorema di Menabrea; allora proseguendo nella suddivisione dell'arco si giunge a costruire una sollecitazione elastica minimante che risulta in questo modo indipendente da θ ma è soggetta alla condizione che in A manchino le tensioni tangenziali (1).

Il risultato è valido per la flessione degli archi ad asse circolare e sezione normale all'asse costante considerati sia nel piano che nello spazio; poichè per questi ultimi non si conosce nessuna soluzione esso potrebbe servire come punto di partenza per eventuali ricerche. Invece, per il problema in due dimensioni si giunge subito alla soluzione del Prandtl, osservando che le componenti di tensione nel piano dipendono da una funzione biarmonica F per mezzo di relazioni che in coordinate polari divengono.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}, \qquad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\right)$$

e se σ_r, τ, σ_t non dipendono da θ la F ha la forma

$$F = F_1(r) + Ar\cos\theta + Br\operatorname{sen}\theta + a\theta.$$

I termini in sen θ e cos θ non hanno influenza sulle tensioni; resta così, poichè $f_1(r)$ è biarmonica, la soluzione

$$F = a\theta + b\log r + cr^2 + dr^2\log r$$

e tenendo conto delle condizioni ai limiti segue

$$a=0 \quad b=\frac{M}{D}4R^2R_1^2\log\frac{R}{R_1} \quad c=\frac{M}{D}(R^2-R_1^2+2R^2\log R-2R_1^2\log R_1) \quad d=\frac{M}{D}2R^2R_1^2$$

$$D=(R^2-R_1^2)^2-\left(2RR_1\log\frac{R}{R_1}\right)^2$$

Qui R e R_1 sono i raggi d'estradosso e d'intradosso dell'arco; M è l'intensità del momento flettente.

5. - Un ragionamento sintetico può essere svolto anche per il problema del Saint-Venant. Servendoci del teorema del n.° 2 potremo considerare separatamente i varii casi particolari di sollecitazione; basterà allora ripetere il ragionamento svolto al numero precedente per concludere che la torsione, la flessione e la tensione semplice costituiscono altrettante soluzioni fondamentali se le tensioni tan-

---

(1) Questa condizione è eccessiva. Il ragionamento può essere ripetuto integralmente se le forze tangenziali in A e B sono antisimmetriche rispetto alla mezzaria dell'arco.

genziali sulle basi sono antisimmetriche rispetto alla mezzaria della trave. Qualche particolare considerazione richiede invece la flessione composta perchè, in essa le risultanti variano da sezione a sezione (pur considerando soltanto sezioni normali all'asse).

Indichiamo con z l'asse della trave, con x, y due assi ortogonali perpendicolari alla z e giacenti nel piano della base Ω. Le condizioni ai limiti date su Ω sono

$$\int_{\Omega} \sigma_z d\Omega = 0, \qquad \int_{\Omega} x\sigma_z d\Omega = M', \qquad \int_{\Omega} y\sigma_z d\Omega = M,$$
$$\int_{\Omega} \tau_{zx} d\Omega = T', \qquad \int_{\Omega} \tau_{yz} d\Omega = T, \qquad \int_{\Omega} (y\tau_{zx} - x\tau_{yz}) d\Omega = 0,$$

mentre sull'altra base Ω' a distanza l da Ω avremo per l'equilibrio

$$\int_{\Omega} \sigma_z d\Omega' = 0, \qquad \int x\sigma_z d\Omega' = = M' + lt', \qquad \int y\sigma_z d\Omega' = M + l\tau,$$
$$\int \tau_{zx} d\Omega' = T', \qquad \int \tau_{yz} d\Omega' = T \qquad \int (y\tau_{zx} - x\tau_{yz}) d\Omega' = 0.$$

Utilizziamo ancora il teorema del n.° 2 ed aggiungiamo alla sollecitazione fondamentale cercata due soluzioni fondamentali a flessione semplice rispetto agli assi x e y le cui risultanti $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ soddisfino alle condizioni

$$M + \mathfrak{M} = -(M + \mathfrak{M}) + lT \quad \text{cioè} \quad \mathfrak{M} = -M + \frac{Tl}{2}$$
$$\mathfrak{M}' = -M' + \frac{T'l}{2}.$$

La nuova soluzione fondamentale così costruita è simmetrica rispetto alla mezzaria della trave; potremo dunque studiarla nella trave di lunghezza metà; ma, aggiungendo alla base di questa due sollecitazioni a flessione semplice definite dalle caratteristiche

$$\mathfrak{M}_1 = -(M + \mathfrak{M}) + \frac{lT}{4}$$
$$\mathfrak{M}_1' = -(M + \mathfrak{M}') + \frac{lT}{4}$$

(si tenga presente che la trave è ora lunga $\frac{l}{2}$) avremo ancora una sollecitazione fondamentale simmetrica che può essere studiata nella trave di lunghezza metà rispetto a quella ora considerata (cioè in una trave di lunghezza $\frac{1}{4}$ della primitiva).

Così possiamo proseguire giungendo al risultato che in una sezione perpendicolare alla z la soluzione fondamentale cercata differisce da quella di un'altra sezione generica solo per l'intensità delle sollecitazioni a flessione semplice che intervengono a formarla; e poichè quando il momento flettente è indipendente da z, anche le corrispondenti componenti di tensione sono indipendenti da z, in questo caso che il momento flettente dipende linearmente da z concluderemo senz'altro che le componenti di tensione (nella parte che contribuisce al momento

flettente e soltanto in quella parte) dipendono linearmente da z. Così si deduce che σ_z dipende linearmente da z mentre ne sono indipendenti τ_{zx} e τ_{zy}. Allora le equazioni indefinite dell'equilibrio si spezzano nelle seguenti:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}=\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0, \qquad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0. \tag{4}$$

Ma le (3), unite alla relazione di congruenza

$$(m+1)\left\{\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}\right\}=\Delta_2'(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z) \qquad \left[\Delta_2'=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]$$

non sono altro che le condizioni relative ad un sistema elastico piano (1); e poichè sulla superficie laterale le forze esterne sono nulle, così è nulla la sollecitazione dovuta a queste; si ha cioè $\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$ che insieme con le (4) rappresenta la posizione caratteristica del problema di Saint-Venant e dà luogo, nel caso che ci interessa, alla flessione composta.

---

(1) Si osservi che, per quanto si è ora dimostrato, è

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0$$

e quindi

$$\Delta_2'(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)=0.$$

C. B. BIEZENO et H. HENCKY (Delft - Olanda)

SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA STABILITÉ ÉLASTIQUE

1. - Les remarques suivantes se rattachent au problème de la stabilité d'un corps élastique. C'est Mr. SOUTHWELL qui le premier publia dans les « Transactions of the Royal society of London, 1913 » une note sur l'aspect général de cette question, mais il se borne encore au cas où au moment de flambage, les tensions principales des points divers du corps ont partout la même grandeur et la même direction. En attaquant le problème d'une manière différente de celle de Mr. SOUTHWELL, il nous a été possible de suspendre cette restriction.

Soit donné un corps élastique en équilibre, soumis à l'action des forces volumétriques X, Y, Z et des tensions P_x, P_y, P_z à sa surface, et considérons un parallélepipède rectangulaire $dxdydz$, sur les faces duquel agissent les tensions S_x, S_y, S_z, T_x, T_y, T_z (S=tension normale, T=tension tangentielle).

Alors il existe pour chaque point intérieur du corps les équations

$$\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial T_z}{\partial y}+\frac{\partial T_y}{\partial z}+X=0 \qquad \curvearrowright$$

et pour chaque point de sa surface les équations

$$P_x=S_x\cos(nx)+T_z\cos(ny)+T_y\cos(nz) \qquad \curvearrowright$$

où n signifie la normale de la surface dirigée vers l'extérieur. L'état du corps défini ci-dessus est indiqué par le chiffre I, et regardé comme l'état initial.

Donnons maintenant à chaque point du corps les déplacements supplémentaires u, v, w (qui sont donc mesurés à partir de l'état I) et désignons l'état où se trouve l'élément $dxdydz$ après sa déformation comme l'état II. Ce dernier se distingue du premier en ce que l'élément a changé de position aussi bien que de forme. Comme il est bien connu, le changement de forme est défini par les expressions

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad f_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad f_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad f_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right);$$

tandis que le changement de position (à l'exception de la translation u, v, w qui n'est pas essentiel pour notre but) est défini par les composantes de rotation:

$$(2)\qquad \omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Il nous faut maintenant déterminer la grandeur des tensions supplémentaires qui doivent être appliquées sur les côtés de l'élément $dxdydz$ se trouvant dans l'état I, pour l'amener a l'état II. Pour ce but, nous introduisons un état intermédiaire II′, qui se déduit de l'état II par un mouvement rotatoire $-\omega_x$, $-\omega_y$, $-\omega_z$ respectivement autour des axes x, y, z. En effectuant cette rotation rétrograde, nous aurons soin d'y faire participert outes les forces, agissant sur les faces de l'élément dans l'état II.

Puis nous comparons les forces correspondantes dans les états I et II′ et nous définissons comme tensions supplémentaires les différences des forces correspondantes rapportées aux éléments de surface $dydz$, $dzdx$, $dxdy$, mesurés dans l'état I.

Les composantes de ces tensions sont indiquées par des caractères minuscules s_x, s_y, s_z, t_x, t_y, t_z. Il faut remarquer pourtant que ces composantes ne sont pas les éléments d'un tenseur symétrique. En appelant A et A' les centres des côtés $dydz$, B et B' ceux des côtés $dzdx$, et C et C' ceux des côtés $dxdy$, on trouve que la configuration AA', BB', CC' se change aussitôt que les tensions s_x, s_y, s_z, t_x, t_y, t_z sont appliquées. En effet les droites AA', BB', CC' se tournent et s'allongent, de sorte que les forces initiales $S_x dydz$..... produiront des couples. C'est pour cette raison que nous sommes obligés d'introduire les composantes non-symétriques :

$$(3) \qquad \begin{cases} s_x & t_z+r_z & t_y-r_y \\ t_z-r_z & s_y & t_x+r_x \\ t_y+r_y & t_x-r_x & s_z \end{cases}$$

tellement que la force supplémentaire sur le côté $dydz$ soit donnée par les composantes $s_x dydz$, $(t_z+r_z)dydz$, $(t_y-r_y)dydz$.

Cependant ce ne sont que les composantes s_x, s_y, s_z, t_x, t_y, t_z qui sont responsables pour le changement de forme de l'élément considéré, et par conséquent il n'entre que ces composantes dans les équations, qui expriment la loi d'élasticité.

2. - Il a été déjà remarqué ci-dessus que les droites AA' BB' CC' de l'état I diffèrent de celles de l'état II′, et on démontre sans peine que les projections de ces dernières droites sur les axes des x, y, z ont la grandeur :

$$(4) \qquad \begin{cases} & x & y & z \\ AA': & \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx, & \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\omega_z\right)dx=f_z dx, & \left(\frac{\partial w}{\partial x}+\omega_y\right)dx=f_y dx \\ BB': & \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\omega_z\right)dy=f_z dy, & \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy, & \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\omega_x\right)dy=f_x dy \\ CC': & \left(\frac{\partial u}{\partial z}-\omega_y\right)dz=f_y dz, & \left(\frac{\partial v}{\partial z}+\omega_x\right)dz=f_x dz, & \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dz. \end{cases}$$

D'un autre côté les forces, qui appliquent en A, A', B, B', C, C', à l'état II' ont les composantes :

$$(5)\quad \begin{cases} & x & y & z \\ \text{en } A \text{ et } A' & (S_x+s_x)dydz, & (T_z+t_z+r_z)dydz, & (T_y+t_y-r_y)dydz, \\ \text{en } B \text{ et } B' & (T_z+t_z-r_z)dxdz, & (S_y+s_y)dzdx, & (T_x+t_x+r_x)dzdx, \\ \text{en } C \text{ et } C' & (T_y+t_y+r_y)dxdy, & (T_x+t_x-r_x)dxdy, & (S_z+s_z)dxdy. \end{cases}$$

Les couples qui résultent de ces forces doivent s'annuler, de sorte que l'on ait (en se bornant aux couples autour de l'axe x):

$$(T_y+t_y-r_y)f_z-(T_z+t_z+r_z)f_y+(T_x+t_x+r_x)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-(S_y+s_y)f_x+$$
$$+(S_z+s_z)f_x-(T_x+t_x-r_x)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

ou, en ne conservant que les termes du premier ordre dans les grandeurs u, v, w, s_x, s_y,....., r_z :

$$(6)\qquad 2r_x=(S_y-S_z)f_x+T_zf_y-T_yf_z+T_x\left(\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

3. - Considérons maintenant l'élément $dxdydz$ dans son état final II. On peut l'y amener en le tournant, avec toutes les forces qui agissent sur les côtés, $+\omega_x$ autour l'axe de x, $+\omega_y$ autour l'axe de y, et $+\omega_z$ autour l'axe de z. On trouve ainsi que dans l'état II les composantes de la force, ayant le point A pour point d'application seront (en désignant toujours par $dydz$, $dzdx$, $dxdy$ les côtés de l'élément considéré dans son état initial I) :

$$X_x\cdot dydz=(S_x+s_x+T_y\omega_y-T_z\omega_z)dydz$$
$$Y_x\cdot dydz=(T_z+t_z+r_z+S_x\omega_z-T_y\omega_x)dydz$$
$$Z_x\cdot dydz=(T_y+t_y-r_y+T_z\omega_x-S_x\omega_y)dydz$$

de sorte qu'on puisse introduire un système de tensions :

$$(7)\qquad \begin{cases} X_x=S_x+s_x+T_y\omega_y-T_z\omega_z \\ Y_x=T_z+t_z+r_z+S_x\omega_z-T_y\omega_x \\ Z_x=T_y+t_y-r_y+T_z\omega_x-S_x\omega_y \end{cases}$$

Quoique ces tensions sont elles-mêmes bien parallèles aux axes x, y, z, elles agissent sur des éléments plans, non perpendiculaires à ces axes. D'une manière analogue on trouve pour les composantes des tensions agissant aux points B et C des expressions X_y, Y_y, Z_y resp. X_z, Y_z, Z_z. Il suit qu'on obtient les équations d'équilibre de l'élément en substituant dans le système de formules

$$(8)\qquad \frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}+X=0$$

les expressions de X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z données ci-dessus. De cette façon on obtient les équations:

$$(9)\qquad \begin{cases} L \equiv \dfrac{\partial s_x}{\partial x} + \dfrac{\partial t_z}{\partial y} + \dfrac{\partial t_y}{\partial z} + T_y \cdot \dfrac{\partial \omega_y}{\partial x} + T_x \cdot \dfrac{\partial \omega_y}{\partial y} + S_z \cdot \dfrac{\partial \omega_y}{\partial z} \\ \qquad - T_z \cdot \dfrac{\partial \omega_z}{\partial x} - S_y \cdot \dfrac{\partial \omega_z}{\partial y} - T_x \cdot \dfrac{\partial \omega_z}{\partial z} \\ \qquad - \dfrac{\partial r_z}{\partial y} + \dfrac{\partial r_y}{\partial z} + Y \cdot \omega_z - Z \cdot \omega_y = 0 \end{cases}$$

4. - Pour la détermination des s_x, s_y, s_z, t_x, t_y, t_z il nous manque encore six relations. Elles nous sont fournies par la loi d'élasticité, qui, pour raison d'opportunité, soit mise sous la forme:

$$(10)\qquad \begin{cases} s_x = \dfrac{2G}{m-2} \cdot \left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}\right) + 2G \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ t_x = 2G \cdot f_x \end{cases}$$

Les auteurs sont conscients que ces relations sont en quelque mesure arbitraires, et pour cette raison ils s'en réservent encore une étude plus approfondie.

Si, dans l'état I le corps élastique est sans tension, il faut poser

$$S_x = S_y = S_z = T_x = T_y = T_z = 0$$

et on retrouve les équations bien connues:

$$\Delta u + \frac{m}{m-2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

5. - Jusqu'ici il n'était pas encore question du problème de stabilité proprement dit. Le trait caractéristique de ce problème se trouve donc dans les conditions de surface. En effet, celles-ci doivent exprimer qu'il y ait une solution λu, λv, λw, aussitôt qu'une solution u, v, w existe. Il est donc nécessaire d'examiner un tetraèdre situé à la surface du corps élastique dans l'état II et d'exprimer qu'il soit en équilibre sous l'action des tensions, agissant sur les côtés, originalement perpendiculaires aux axes des coordonnées et les tensions de surface P_x, P_y, P_z inaltérées ou, tout au plus, augmentées des quantités:

$$-(k_1 u + l_1 v + m_1 w), \qquad -(k_2 u + l_2 v + m_2 w), \qquad -(k_3 u + l_3 v + m_3 w)$$

dans le cas où le corps éprouve des résistances élastiques.

D'une manière analogue à celle déduite ci-dessus, on trouve pour les équations d'équilibre (en tenant compte des équations correspondantes pour l'état I):

$$(11)\qquad \begin{aligned} s_x \cos(nx) + (t_z - r_z)\cos(ny) + (t_y + r_y)\cos(nz) + \\ + P_z \omega_y - P_y \omega_z + k_1 u + l_1 v + m_1 w = 0 \end{aligned}$$

Le problème de la stabilité d'un corps élastique, soumis à sa surface à des tensions connues, est donc déterminé par les équations (9) (10) et (11). Comme elles sont linéaires et homogènes par rapport aux 12 inconnues u, v, w, $s_x, \ldots r_z$, on en déduit immédiatement que, si elles admettent une solution u, v, w, le système λu, λv, λw est aussi une solution.

Terminons en fixant que des équations (9) les résultats de Mr. SOUTHWELL, mentionnés au commencement de cette communication peuvent être déduits comme un cas particulier.

W. HOVGAARD (Cambridge - Mass. - U. S. A.)

DETERMINATION OF THE STRESSES IN A BEAM BY THE METHOD OF VARIATION

Introduction.

We owe to Saint-Venant the development of the theory of torsion and bending of beams. In two classic memoirs, equally remarkable for their completeness and lucidity, he has given a rigorous solution of this problem, comprising in particular the determination of displacements, strains, and stresses in cylindrical or prismatic beams fixed at one end and loaded at the other.

As stated by Saint-Venant, if the displacements were given, it would be an easy matter, by means of the general equations of elastic equilibrium and by a simple differentation, to determine the forces which produce them.

The inverse problem, to determine the displacements when the forces are given, is of far more practical importance, but had not, when Saint-Venant took up the problem, been solved in a general way, on account of the difficulty of integrating the equations in which the displacements enter and of determining the functions and arbitrary constants of integration.

In order to overcome this difficulty, Saint-Venant and later Clebsch adopted what they called the mixed or semi-inverse method, intermediate between the two described above. Saint-Venant assumed as given a part of the displacements and a part of the forces and then, by a rigorous analysis determined what must be the remaining displacements and the remaining forces in order to be compatible with the strain relations as well as with the equilibrium and boundary conditions. In this way he succeeded in obtaining an exact and complete solution and applied it to a great number of particular cases of practical importance. In particular he assumed the elongation (or contraction) of the filaments to be proportional to their distances from a plane through the axis normal to the plane of bending.

In the solution here offered, the inverse method, referred to above, is followed and applied to a cylindrical or prismatic beam fixed at one end. All the external forces as well as their distribution over the end section are assumed to be known, while none of the displacements are given. By means of the Principle of Least Work or Minimum Energy and Lagrange's method of multiplyers it is possible to embody all the conditions, together with the expression for the elastic work

of deformation in one integral, by the variation of which the unknown stresses can be determined directly. The solution comprises all possible conditions of loading of the beam at the free end and, being based on the fundamental Principle of Least Work, gives assurance that the state of stresses to which it leads, is one to which the beam must tend, even although it may not in practice conform to

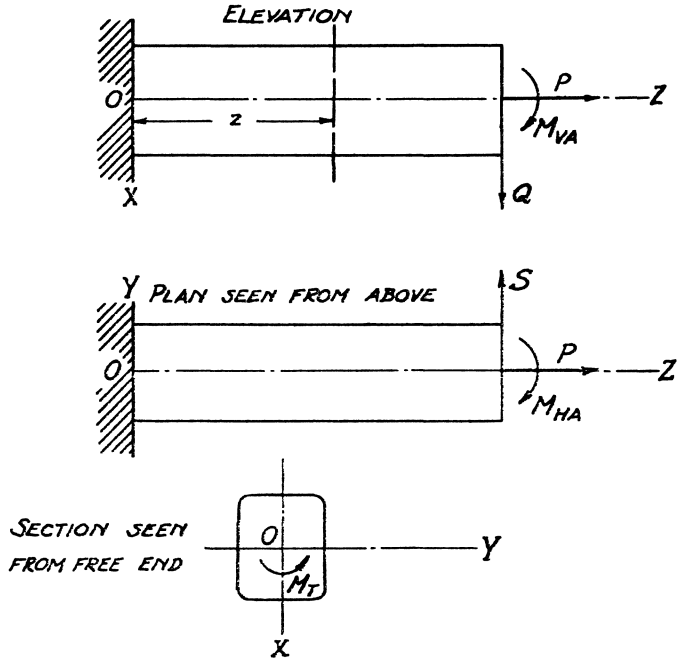


Fig. 1.

it near the points of application of the external forces. In other words, it gives the ideal or natural stress distribution.

The general solution for the stresses contains unknown arbitrary functions, which are determined by integration of two partial differential equations of the second order, and the solution must at the same time fulfil certain boundary conditions.

Statement of the Problem.

Consider the state of stress in a cylindrical or prismatic beam of simple section and of isotropic material, fixed at one end, while at the terminal section of the free end a system of forces is applied. No external forces act on the lateral bounding surfaces and the action of gravity is neglected.

A rectangular system of coördinates is placed as shown on Fig. 1. The length of the beam is $l = O_0A$.

The system of forces acting on the free end represents the most general case and may be resolved in the following resultant forces and couples:

An axial force P, a vertical force Q, and a horizontal force S, all acting at the center of gravity of the terminal section at A. A torsional couple T with axis parallel to O_0A, a bending couple $M_{V.I}$ in the vertical plane and a bending couple $M_{H.I}$ in the horizontal plane. Thus all the forces are known or determinate and the problem is to find the stresses, which are all unknown.

It is assumed that there are no normal transverse stresses, that is, the longitudinal filaments, of which we may imagine the body to be made up, do not exert on each other any pressures or tensions normal to their direction. Also transverse tangential tractions in planes parallel with the axis are neglected. On the other hand, when the fibers move lengthwise relative to one another, shear stresses are created.

There remain to be considered only three stresses: a longitudinal normal stress p and two shear stresses q and s, which act, respectively, vertically and horizontally in planes normal to the axis.

It follows that the strain in direction of OZ is: $e_{zz}=\frac{p}{E}$, where E is Young's modulus of elasticity, and the strain components due to shearing are:

$$e_{zx}=\frac{q}{G}, \qquad e_{zy}=\frac{s}{G}, \qquad e_{xx}=e_{yy}=-\sigma e_{zz}=-\sigma\frac{p}{E} \tag{1}$$

where σ is Poisson's ratio and G is the coefficient of rigidity.

$$G=\frac{E}{2(1+\sigma)}. \tag{2}$$

The Elastic Work of Deformation and the Equations of Condition.

The elastic work of deformation, expressed in terms of the stresses, takes the simple form:

$$W=\int_0^l\int_{y_2}^{y_1}\int_{x_2}^{x_1}\left\{\frac{p^2}{2E}+\frac{q^2}{2G}+\frac{s^2}{2G}\right\}dxdydz. \tag{3}$$

The stresses p, q, and s are unknown functions of x, y and z, but must be such as to make the elastic work a minimum while at the same time satisfying the conditions of equilibrium, the boundary conditions, and certain equations of compatibility of the strains.

The equations of condition are the following:

1°) For equilibrium of an elemental prism we have:

$$\frac{\partial q}{\partial z}=0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial s}{\partial z}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}=0. \tag{5}$$

It follows from (4) that q and s are independent of z, whence the shear stresses are the same at any set of values (x, y) throughout the beam, i.e., the tangential tractions are identically alike on every transverse section.

2°) The strain components must comply with certain equations of compatibility, which, expressed in terms of the stresses according to (1), furnish the relations:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial s}{\partial x}=\frac{\partial q}{\partial y}\right]+2\frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial x}=0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right]-2\frac{\sigma}{E}\frac{\partial^2 p}{\partial z\partial y}=0. \tag{7}$$

but these are not independent of (5) and all may be simplified by elimination of the derivatives of p. Differentiating (5) first with respect to x and then with respect to y and substituting in (6) and (7) we obtain:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0, \tag{9}$$

which take the place of (5), (6) and (7).

3°) At any transverse section we must have:

$$P=\int\int p\,dx\,dy, \tag{10}$$

$$Q=\int\int q\,dx\,dy, \tag{11}$$

$$S=\int\int s\,dx\,dy, \tag{12}$$

$$T=\int\int (sx-qy)\,dx\,dy, \tag{13}$$

$$M_{V}=M_{V.1}+Q(l-z)=-\int\int px\,dx\,dy, \tag{14}$$

$$M_{II}=M_{II.1}-S(l-z)=\int\int py\,dx\,dy. \tag{15}$$

The integration in all these integrals to extend over the entire surface of the cross section.

4°) At the lateral bounding surface the sum of the stress components normal to the surface must be zero since no external forces act on that surface. Let the equation to the bounding curve of a transverse section be:

$$y=\Phi(x)\ \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d\Phi}{dx}, \tag{16a}$$

Then:

$$\frac{s}{q}=\frac{dy}{dx}=\frac{d\Phi}{dx}, \tag{16b}$$

at all points of the boundary.

The Variation.

In forming the variational integral U we follow the method of Lagrange. The expressions on the left side of the differential equations (8) and (9) are multiplied respectively by coefficients λ_1 and λ_2 which are functions of the independent variables and are entered under the integral sign of (3). Each of the expressions under the integral sign in (10) te (15) is multiplied by a constant, a, b, c, e, f, g, respectively, and added under the integral sign of (3), and we get:

$$(17)\quad U=\int_0^l\int_{y_2}^{y_1}\int_{x_2}^{x_1}\Big\{\frac{p^2}{2E}+\frac{q^2}{2G}+\frac{s^2}{2G}+ap+bq+cs+e(sx-qy)<fpx+gpy+$$
$$+\lambda_1\Big[\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 q}{\partial y^2}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}\Big]+\lambda_2\Big[\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 q}{\partial x\partial y}+$$
$$+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\Big]\Big\}\,dxdydz.$$

In order to make U a minimum, it is necessary that the variation of U shall be zero when p, q, and s are made to vary independently and arbitrarily by an infinitesimal amount. The variation consists of two parts, first the terms at the limits, three groups of double integrals denoted by Ω containing variations of p, q, and s and of their derivatives for such values of the independent variables as satisfy the boundary equations; second, of one triple integral containing entirely arbitrary variations of p, q and s. We have

$$(18)\quad \delta U=\Omega+\int_0^l\int_{y_2}^{y_1}\int_{x_2}^{x_1}\Big\{\Big[\frac{p}{E}+a+fx+gy\Big]\delta p+\Big[\frac{q}{G}+b-ey-\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x^2}-$$
$$-\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x\partial y}+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x\partial y}\Big]\delta q+\Big[\frac{s}{G}+c+ex+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial y}-\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{2\sigma G}{E}\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial y^2}\Big]\delta s\Big\}\,dxdydz=0.$$

It is necessary that Ω and the triple integral shall each of them vanish, but in order that the triple integral shall vanish it is necessary that each of the coefficients of δp, δq and δs in that integral shall vanish separately. Consider first the coefficient of δp.

Solution for the Longitudinal Stress.

Equating the coefficient of δp to zero we obtain:

$$(19)\qquad p=-E(fx+gy+a).$$

Substituting in (10) we get:

$$P=-E\int\int(fx+gy+a)dxdy=-E(fm_{yy}+gm_x+aA)$$

where m_x and m_y are the area moments of the section about the X-axis and Y-axis respectively, through the centroid and A is the area of the section. Since OX and OY are by supposition the principal axes, m_x and m_y vanish and we get:

$$a = -\frac{P}{AE} = -\frac{p_0}{E} \tag{20}$$

where p_0 is the mean longitudinal stress in the beam due to the longitudinal force P.

Substituting the value of p from (19) in (14) and (15) we get:

$$M_{VA} + Q(l-z) = E\int\int (fx^2 + gxy + ax)\,dxdy = EfI_y$$

$$M_{HA} - S(l-z) = -E\int\int (fxy + gy^2 + ay)\,dxdy = -EgI_x$$

where I_x and I_y are the moments of inertia of the section about the axes OX and OY, respectively, while all integrals containing odd powers of x and y vanish. Hence

$$f = \frac{M_{VA} + Q(l-z)}{EI_y} \quad \text{and} \quad g = -\frac{M_{HA} - S(l-z)}{EI_x}. \tag{21}$$

Substituting these values of the constants in (19), we find:

$$p = -\frac{M_{VA} + Q(l-z)}{I_y}x + \frac{M_{HA} - S(l-z)}{I_x}y + p_0. \tag{22}$$

The first term in this expression taken by itself gives the usual formula for bending in the vertical plane. It consists of one part corresponding to a uniform bending moment due to the couple M_{VA} and another part due to the vertical end load Q. The second term gives the corresponding formula for bending in the horizontal plane, both being of the general form:

$$p = \frac{Mx}{I}. \tag{23}$$

This is the ordinary formula for bending stresses, which is thus seen to be in accordance with the Principle of Least Work not only in case of uniform bending in a circle but also for unequal bending.

The third term in (22) represents a longitudinal stress due to the axial force P. Since neither x nor y enter into this term, we may infer that for Least Work this stress must be uniformly distributed.

Determination of the Shearing Stresses.

We might now equate the coefficients of δq and δs in (18) to zero, but the work can be much simplified by first performing a reduction in (17).

Differentiating (22) with respect to z and substituting in (5) we get:

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{Qx}{I_y} - \frac{Sy}{I_x}. \tag{24}$$

Differentiating (22) first with respect to z and then separately with respect to x and y and substituting in (6) and (7) respectively we get:

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)=-\frac{2\sigma}{E}\frac{Q}{I_y}, \tag{25}$$

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)=\frac{2\sigma}{E}\frac{S}{I_x}. \tag{26}$$

Integrating these equations we obtain:

$$\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}=2\tau G+\frac{2\sigma G}{E}\left[\frac{Sx}{I_x}-\frac{Qy}{I_y}\right] \tag{27}$$

where τ is a constant of integration. The expressions on the left side of (24) and (27) now take the place of (8) and (9) in the equation for U and we obtain:

$$U=\int_0^l\int_{y_2}^{y_1}\int_{x_2}^{x_1}\left\{\frac{p^2}{2E}+\frac{q^2}{2G}+\frac{s^2}{2G}+ap+bq+cs+e(sx-qy)+fpx+gpy+\right. \tag{28}$$
$$\left.+\lambda_1\left(\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial s}{\partial y}\right)+\lambda_2\left(\frac{\partial s}{\partial x}-\frac{\partial q}{\partial y}\right)\right\}dxdydz.$$

The triple integral of the variation is:

$$\int_0^l\int_{y_2}^{y_1}\int_{x_2}^{x_1}\left\{\left[\frac{p}{E}+a+fx+gy\right]\delta p+\left[\frac{q}{G}+b-ey-\frac{\delta\lambda_1}{\partial x}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}\right]\delta q+\right. \tag{29}$$
$$\left.+\left[\frac{s}{G}+c+ex-\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right]\delta s\right\}dxdydz.$$

We have already disposed of the factor of δp and equating now the factors of δq and δs to zero we find:

$$q=G\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}-\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}+ey-b\right],\qquad s=G\left[\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}-ex-c\right] \tag{30}$$

from which by differentiation and substitution in (24) and (27):

$$\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial y^2}=-\frac{1}{G}\left[\frac{Qx}{I_y}+\frac{Sy}{I_x}\right], \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\lambda_2}{\partial y^2}=2(\tau+e)+\frac{2\sigma}{E}\left[\frac{Sx}{I_x}-\frac{Qy}{I_y}\right]. \tag{32}$$

We have thus arrived at the general solution of the problem, comprising two partial linear differential equations of the second order, but the integration of these in any given case depends upon the possibility of finding such expressions for λ_1 and λ_2 as will satisfy the boundary conditions. This part of the problem depends upon the form of the contour of the transverse section and can be completely and accurately solved for a number of sections of simple form.

The following solution, comprising only rational integral algebraical functions of x and y, satisfies the boundary conditions for various simple sections with one or two axes of symmetry

$$\begin{cases}\lambda_1=B(y^3-3xy^2)+C(x^3-3xy^2)-\left[\frac{Sx}{I_x}+\frac{Qy}{I_y}\right]\frac{xy}{2G},\\ \lambda_2=(\tau+e)x^2+\frac{\sigma}{3E}\left[\frac{Sx^3}{I_x}-\frac{Qy^3}{I_y}\right].\end{cases} \tag{33}$$

Differentiate λ_1 and λ_2 and substitute in (30):

$$q = G\left[3C(x^2-y^2) - \left(6B + \frac{S}{GI_{xy}}\right)xy - \frac{Qy^2}{EI_y} + ey - b\right], \tag{34}$$

$$s = -G\left[3B(x^2-y^2) + \left(6C + \frac{Q}{GI_y}\right)xy + \frac{Sx^2}{EI_x} - (2\tau + e)x + c\right]. \tag{35}$$

The three constants b, c and e can be determined from (11), (12) and (13) respectively, and the three constants of integration τ, B and C from the boundary conditions.

In many cases occurring in practice we have symmetry of the section about one or both of the principal axes and the actions are often simpler than here assumed. In such cases the expressions for q and s are much simplified.

For sections of rectangular form it is necessary to introduce transcendental series in the solution of (31) and (32).

Thus it is shown that by means of the Principle of Least Work it is possible to determine the stresses, when the external forces acting on the beam are known, without making any *a priori* assumptions regarding the displacements as by Saint-Venant's method.

The formulas (34) and (35) have been applied to beams of elliptic, quasi-elliptic, and triangular section under vertical und load and in pure torsion. The formulas (31) and (32) have been applied by the author to beams of rectangular section under vertical end load and in pure torsion. In all cases the results are the same as those obtained by Saint-Venant.

M. LELLI (Bologna - Italia)

SULLA ESTENSIONE DEI TEOREMI DI HELMHOLTZ E DI LAGRANGE AL MOTO DEI FLUIDI VISCOSI

1. - Le moderne teorie sui vortici prendono le mosse dalle ricerche classiche compiute da HELMHOLTZ.

Il fatto che queste ultime siano rivolte solamente ai fluidi perfetti non porta, in qualche caso, pregiudizio alcuno quando invece si prendano a considerare fluidi reali, cioè viscosi. Ma generalmente i teoremi dell'HELMHOLTZ si devono accettare come approssimati, e ciò tanto meglio quanto più le reali condizioni dei singoli problemi si avvicinano a quelle alle quali i teoremi medesimi sono subordinati.

Non sarà pertanto inutile, in vista ancora del grande interesse che tale ordine di fatti esercita oggi, specialmente nel campo dell'Aerodinamica, l'esprimere a quale condizione di movimento devono i fluidi reali soddisfare perchè per essi siano rigorosamente valide queste, ed un'altra legge (il teorema di LAGRANGE) del moto dei fluidi perfetti.

2. - L'equazione indefinita del moto di un fluido viscoso

$$\operatorname{grad} p = \varrho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} + \mu\Delta'\mathbf{v} \quad (^1),$$

avendosi

$$\Delta'\mathbf{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v},$$

può scriversi:

$$\operatorname{grad} p = \varrho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) + (\lambda+2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{v}. \tag{1}$$

In questa, p è la parte statica della pressione, ϱ la densità, $\mathbf{F}$ la forza agente sull'unità di massa, t il tempo, $\mathbf{v}$ la velocità; mentre λ e μ sono i coefficienti di viscosità normale e tangenziale, coefficienti che si possono supporre indipendenti dalla densità e dalla temperatura (^{2}).

(^{1}) BURALI-FORTI e MARCOLONGO: *Analyse vectorielle générale*, II, Chap. IV, parag. 6.

(^{2}) La dipendenza di λ e μ dalla densità e dalla temperatura è stata messa in conto da PIERRE DUHEM nella sua opera: *Recherches sur l'Hydrodynamique*. Peraltro l'esperienza dimostra, almeno nei riguardi di μ, una assai limitata influenza di questi due fattori (Cfr.

Ammettendo poi che le forze di massa dipendano dal potenziale φ (ciò che precisamente accade dei fluidi esistenti sul nostro globo) e che esista una relazione fra densità e pressione (proprietà, anche questa, verificata quando non muta la temperatura), si ha:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad}\left\{\varphi - \int \frac{dp}{\varrho}\right\} + \mathbf{u}, \tag{2}$$

avendo posto:

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \frac{\mu}{\varrho} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{u}. \tag{3}$$

Ciò premesso, ci limiteremo a ricordare che tanto i teoremi di HELMHOLTZ che quello di LAGRANGE, i quali tutti prendono le mosse dal teorema di THOMSON sulla conservazione della circolazione, sono da ritenersi validi se e soltanto se esiste un potenziale delle accelerazioni.

Ove si tratti di un liquido perfetto è $\mathbf{u}=0$, e però detto potenziale, in virtù della (2), esiste di fatto; così che la validità dei teoremi succitati risulta subordinata in tal caso unicamente all'esistenza del potenziale φ delle forze di massa ed a quella di una relazione fra p e ϱ.

Quando invece si tratti di un fluido viscoso i teoremi in questione varranno se e soltanto se, oltre alle due condizioni ora ripetute, è verificata anche quella della dipendenza da un potenziale del campo $\mathbf{u}$. Ciò che può tradursi in una condizione cinematica oppure statica.

Dal punto di vista cinematico risulta che deve essere:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \tag{4}$$

condizione la quale, ove il fluido sia omogeneo, si traduce nella:

$$\operatorname{rot}^3 \mathbf{v} = 0 \ (^1). \tag{5}$$

Dal punto di vista statico, invece, notando che l'equazione del moto di un fluido viscoso può anche scriversi:

$$\operatorname{grad} \beta = \varrho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right), \tag{6}$$

nella quale β è l'omografia delle pressioni totali, e che per conseguenza, confrontando con le (1) e (3), è:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{\varrho} \operatorname{grad} (\beta - p),$$

MARCEL BRILLOUIN: *Leçons sur la viscosité*), e però l'ipotesi fatta si presenta conforme alle esigenze delle ordinarie applicazioni.

(1) Tenuto conto dell'identità: $\operatorname{rot}^3 \mathbf{v} = -\Delta' \operatorname{rot} \mathbf{v}$, la condizione (5) coincide con quella « ..... *il vettore rot* $\mathbf{v}$ *deve essere armonico* » data nel 1918 dal CRUDELI (Rend. R. Accademia dei Lincei, Vol. XXVII, Fasc. 2°, Luglio 1918).

si trova che deve aversi:

$$\text{rot}\left\{\frac{1}{\varrho}\,\text{grad}\,(\beta-p)\right\}=0, \tag{7}$$

condizione la quale, ove il fluido sia omogeneo, si traduce in ciò: che il gradiente dell'omografia non degenere $\beta-p$ della parte *non statica* della pressione totale deve eguagliare il gradiente di una funzione scalare ed essere perciò suscettibile di una rappresentazione a superficie di livello ed a linee di flusso fra loro ortogonali, così come accade di un ordinario campo potenziale.

A. PROSCIUTTO (Bologna - Italia)

SUL MOTO PERTURBATO DI UN FLUIDO IN PROSSIMITÀ DI UNA CORONA DI PALE

1. - Una superficie alare infinitamente sottile e di larghezza infinita, con profilo ad arco di cerchio di corda $2b$ e di freccia h (fig. 1), investita con velocità $-v_0$ parallelamente alla corda, dà luogo ad uua corrente fluida la cui funzione caratteristica $\Phi(z)=\Phi(x+iy)$ è notoriamente:

$$(1)\qquad \Phi(z)=-\frac{v_0}{2}\left(\zeta+\frac{b^2+h^2}{\zeta}+2ih\log\zeta\right)$$

ove si intenda eliminata la variabile ζ per mezzo della trasformazione:

$$(1')\qquad z=\frac{1}{2}\left[(\zeta+ih)+\frac{b^2}{\zeta+ih}\right].$$

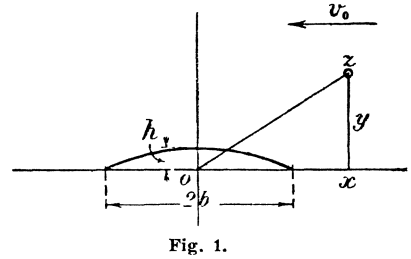


Fig. 1.

Questa corrente è circuitazionale e il valore della circuitazione lungo una linea che abbraccia la superficie alare è

$$(2)\qquad \Gamma=2\pi v_0 h.$$

Allo scopo di rendere possibili particolari sviluppi, conviene sostituire alla corrente (che diremo corrente reale) definita rigorosamente per mezzo delle relazioni precedenti, una corrente fittizia, sotto certi aspetti equivalente.

A notevole distanza dalla superficie alare la corrente fluida definita dalle (1) e (1') può essere assimilata a quella che risulta dalla composizione di una corrente uniforme di velocità $-v_0$ e di una corrente circuitazionale generata da un filetto vorticoso di vorticità Γ.

Una approssimazione molto maggiore si consegue se in luogo della corrente indotta da un unico filetto vorticoso si considera quella indotta da una lamina vorticosa avente profilo rettilineo di lunghezza $2b$ e con vorticità Γ distribuita lungo il profilo con legge determinata.

Partendo dalle formule (1) e (1') si può dimostrare che la legge di ripartizione della vorticità che meglio si adatta a rappresentare la corrente reale sarebbe quella definita da un diagramma semi-ellittico. Si può tuttavia, per maggiore semplicità, considerare invece una ripartizione uniforme sopra un segmento rettilineo (profilo della lamina vorticosa) al quale si potrà assegnare una lun-

ghezza $2a \leqslant 2b$ (fig. 2). In tal modo l'approssimazione, ad una certa distanza dalla superficie alare, resta ancora abbastanza elevata. La funzione caratteristica Φ_i della corrente fittizia risulta allora:

$$\Phi_i(z) = -v_0 z - i\frac{\Gamma}{4\pi a}\int_{-a}^{+a} \log(z-\xi)\,d\xi \tag{3}$$

intendendo con ξ una quantità reale che varia fra $-a$ e $+a$. Se ne deduce:

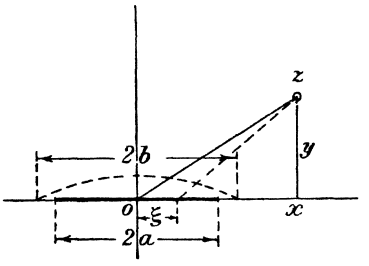


Fig. 2.

$$\Phi_i = -v_0 z - i\frac{\Gamma}{4\pi a}[(z+a)\log(z+a) - (z-a)\log(z-a)] \tag{4}$$

ed anche:

$$\frac{d\Phi_i}{dz} = w_x - iw_y = -v_0 - i\frac{\Gamma}{4\pi a}\log\frac{z+a}{z-a}. \tag{5}$$

Si può scegliere la lunghezza $2a$ del profilo della lamina vorticosa in modo che le velocità della corrente fittizia nei punti corrispondenti agli estremi del profilo alare (cioè nei punti $z = \pm b$) risultino uguali a quelle possedute, negli stessi punti, dalla corrente reale. Se il rapporto $\frac{h}{b}$ è abbastanza piccolo, le componenti di questa velocità sono:

$$w_x' = -v_0, \qquad w_y' = \pm v_0\frac{2h}{b} = \pm\frac{\Gamma}{\pi b};$$

perciò dal confronto con la (5) si deduce l'equazione:

$$4\frac{a}{b} = \log\frac{b+a}{b-a} \tag{6}$$

che è soddisfatta per

$$a = 0{,}9575\,b. \tag{7}$$

Nelle considerazioni che seguono riterremo dunque di potere assimilare il moto perturbato dovuto ad una superficie alare con profilo arcuato di corda $2b$ e freccia h, a quello determinato da una lamina vorticosa avente profilo rettilineo e distribuzione uniforme della vorticità, intendendo che la vorticità totale Γ e la lunghezza $2a$ del profilo della lamina siano definiti per mezzo delle relazioni (2) e (7).

2. - Una serie illimitata di filetti vorticosi di vorticità Γ, allineati lungo l'asse x e posti alla distanza τ l'uno dall'altro, induce una corrente la cui funzione caratteristica è data dall'espressione:

$$\Phi_1 = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\log(z-s\tau) \tag{8}$$

che con opportuni sviluppi può ridursi a:

$$\Phi_{\mathrm{I}} = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\log\operatorname{sen}\frac{\pi z}{\tau} + \text{cost.} \tag{9}$$

Da questa si deduce poi anche:

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{I}}}{dz} = -i\frac{\Gamma}{2\tau}\operatorname{cotg}\frac{\pi z}{\tau}. \tag{10}$$

Consideriamo ora una serie illimitata di lamine vorticose con profilo rettilineo di lunghezza $2a$ e con vorticità Γ uniformemente ripartita, allineate lungo l'asse x, distanziate di τ, e inclinate dell'angolo α rispetto all'asse x stesso (fig. 3). La funzione caratteristica Φ_{II} della corrente generata da questa serie di lamine è

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{II}}}{dz} = -i\frac{\Gamma}{4\tau a}\int_{-a}^{+a}\operatorname{cotg}\frac{\pi}{\tau}(z-\xi e^{i\alpha})d\xi, \tag{11}$$

ossia:

$$\frac{d\Phi_{\mathrm{II}}}{dz} = -i\frac{\Gamma}{4\pi a}e^{-i\alpha}\log\frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\tau}(z+ae^{i\alpha})}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{\tau}(z-ae^{i\alpha})}. \tag{12}$$

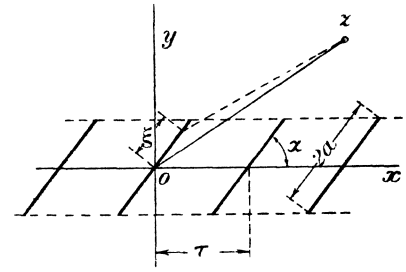


Fig. 3.

Questa corrente dovrà rappresentare abbastanza fedelmente (per quanto si è detto al n.° 1) la *perturbazione* dovuta ad una fila di pale arcuate, allineate lungo l'asse x (fig. 4). Se $2b$ è la corda dei profili delle pale e si assegna ad α il valore indicato dalla (7) la relazione (12) dovrà ritenersi applicabile anche nei punti $z = \pm be^{i\alpha}$, cioè in corrispondenza ai punti estremi dei profili delle pale.

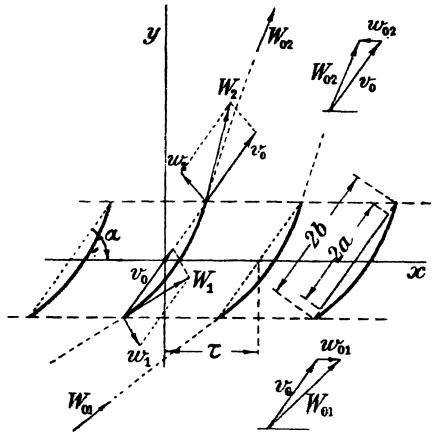


Fig. 4.

Le velocità nei punti a distanza infinita risultano naturalmente:

$$\begin{cases} \text{per } y = +\infty: \\ \quad w_{x02} = -\dfrac{\Gamma}{2\tau}, \qquad w_{y02} = 0 \\ \text{per } y = -\infty: \\ \quad w_{x01} = -\dfrac{\Gamma}{2\tau}, \qquad w_{y01} = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Alla corrente definita per mezzo della (12), la quale rappresenta la perturbazione, bisogna poi intendere sovrapposta una corrente uniforme di velocità v_0 inclinata dell'angolo α rispetto all'asse x, come indica la fig. 4.

Date le velocità (w_{01}, w_{02}) nei punti a distanza infinita a monte e a valle

del palettamento, impiegando la (12) si possono determinare le velocità (w_1, w_2) nei punti corrispondenti agli estremi dei profili delle pale.

Avendo così i valori degli angoli di entrata e di uscita nel palettamento, si possiede una indicazione molto importante per la determinazione dei profili da assegnare alle pale.

Questi concetti possono essere utilizzati per lo studio dei palettamenti delle macchine a turbina di tipo assiale, ma possono essere estesi anche ai palettamenti fissi di tipo radiale. Infatti applicando alla (12) la trasformazione di tipo noto:

$$\frac{2\pi}{\tau} z = in \log \frac{Z}{\varrho} \tag{14}$$

resta definita una nuova funzione $\Phi_{III}(Z)$, che in modo analogo può rappresentare la perturbazione dovuta ad un palettamento costituito da n pale distribuite lungo una circonferenza di raggio ϱ.

L. STABILINI (Bologna - Italia)

LE « FUNZIONI DI LINEE » E CERTI SISTEMI ELASTICI COMPOSTI

1. - Uno dei capitoli più interessanti della teoria delle funzioni, — oggi il più suggestivo forse, perchè estende ulteriormente e pone in nuova luce (1) il concetto di funzione che già, dalla prima immagine geometrica di Cartesio, aveva, attraverso LEIBNITZ e GIACOMO BERNOULLI, assunto con DIRICHLET amplissimo significato —, è quello, dovuto al prof. VOLTERRA, delle « *funzioni di linee* » o quantità che dipendono da tutti i valori di un'altra o più altre funzioni, il cui studio lo stesso prof. VOLTERRA ha mostrato essere strettamente collegato a quello delle equazioni integrali ed integro-differenziali (2).

Sono note le applicazioni di queste a problemi di fisico-matematica o di idrodinamica: per esempio al classico problema di Dirichlet, allo studio della trasmissione del calore in aste o lamine ed a quello delle oscillazioni di un liquido pesante (3).

Nel campo della teoria dell'elasticità pure alla risoluzione di un'equazione di Volterra di seconda specie, o di una integro-differenziale, è ricondotta la soluzione del problema statico o di quello dinamico, della torsione ereditaria in un filo elastico (4).

In questa comunicazione si vuole porre in evidenza come, nel campo della Scienza delle Costruzioni, tutta una serie di problemi aventi non piccola importanza dal lato tecnico, trovi la sua soluzione nella determinazione di una funzione di linee attraverso una equazione di Volterra di prima specie (5), la quale poi, avendo per nucleo l'unità, si riduce ad un'ordinaria equazione differenziale.

---

(1) Cfr. V. VOLTERRA: *Leçons sur les fonctions des lignes*, recuiellies et redigées par JOSEPH PÉRÈS, Paris, Gauthiers-Villars, 1913, Cap. I.

(2) Cfr. V. VOLTERRA: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles*, publiées par M. TOMASSETTI e F. S. ZARLATTI, Paris, Gauthiers-Villars, 1913, Cap. I.

(3) V. le citate *Leçons* opp. G. VIVANTI: *Equazioni integrali lineari*, Milano, Hoepli, 1916.

(4) *Leçons sur les équations*, etc., pag. 138.

(5) Come la risoluzione di un sistema iperstatico con un numero infinito di incognite per mezzo del teorema di Menabrea si riconduca alla determinazione di una funzione di

2. - Per determinare le reazioni dei vincoli in un sistema elastico iperstatico qualunque, occorre fare sistema delle equazioni fornite dalla statica dei corpi rigidi ed esprimenti che il sistema delle forze esterne, ivi comprese le reazioni incognite, è in equilibrio, con le equazioni di elasticità, — scritte per esempio con l'ausilio dei teoremi di Castigliano o della teoria dell'ellisse di elasticità —, esprimenti che, tolti i vincoli sovrabbondanti e sostituiti ad essi le loro reazioni, sotto l'azione delle forze esterne note e delle reazioni incognite ciascuna di quelle sezioni vincolate subisce lo spostamento elastico che dal corrispondente vincolo è consentito (1). E, poichè le equazioni della statica dei corpi rigidi permettono di esprimere alcune, — tre, al massimo, nel piano —, delle incognite in funzione delle altre, la risoluzione del sistema iperstatico è poi ricondotta alla risoluzione del sistema delle equazioni di elasticità.

In molti casi si possono dapprima per facilità di calcolo sopprimere uno o più vincoli: con che il sistema elastico in esame si riduce a più altri (o ad uno solo) più semplici; risoluti i quali il sistema delle equazioni di elasticità scritte per i vincoli dapprima soppressi risolve il sistema dato.

Ciò premesso, consideriamo due sistemi elastici piani non reticolari isostatici o iperstatici S ed S' soggetti a forze esterne, e supponiamo che essi siano mutuamente vincolati da un'asta collegata in A ed A' ad S ed S' con cerniere senz'attrito (fig. 1). La reazione F del sistema S su S', — e quindi quella $-F$ di S' su S —, agisce secondo AA' e la sua intensità si determina dall'equazione ottenuta uguagliando lo spostamento δ di A secondo AA' a quello consentito dal vincolo dato dal collegamento per mezzo dell'asta con il sistema elastico S', e quindi uguagliandolo alla somma dell'accorciamento, — o dell'allungamento —, di AA' e dello spostamento δ' di A' pure secondo AA'.

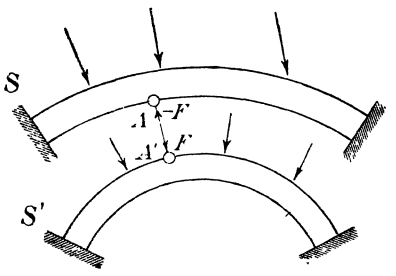


Fig. 1.

Se, — per esempio essendo i due sistemi elastici molto accostati —, l'accorciamento di AA' diventa trascurabile, qualunque sia la condizione di carico di S ed S', l'equazione determinatrice di F è

$$\delta = \delta' \tag{1}$$

linee, fu già mostrato qualche anno fa dall'ing. L. GHERARDELLI, il quale studiò come applicazione del metodo il caso di due mensole delle quali l'una sovrapposta all'altra; v. L. GHERARDELLI: *Su di una particolare applicazione del teorema di Menabrea*, Giornale del Genio Civile, 1923, pag. 175.

(1) Nel caso di sistemi elastici staticamente determinati gli spostamenti elastici delle sezioni vincolate non influiscono sulle reazioni di vincolo. Questi spostamenti elastici del

ossia, — ricordando che, per uno dei teoremi di Castigliano, la derivata del lavoro esterno di deformazione rispetto ad una forza è uguale alla proiezione dello spostamento del suo punto d'applicazione sulla sua linea d'azione, ricordando anche che su S' agisce la forza F e su S quella $-F$, ed indicando con L_e e L_e' il lavoro esterno di deformazione in S e S' —,

$$\frac{\partial L_e}{\partial F} = \frac{\partial L_e'}{\partial(-F)} \tag{2}$$

ossia

$$\frac{\partial L_e}{\partial F} + \frac{\partial L_e'}{\partial F} = 0 \tag{3}$$

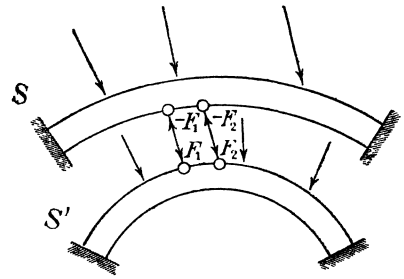


Fig. 2.

lineare in F, perchè sono notoriamente lineari in F il primo ed il secondo termine. La F è funzione di δ e δ'.

Supponiamo invece che le aste di collegamento, sempre incernierate ed inoltre ad assi paralleli, siano due AA' e BB' (fig. 2) e siano poi δ_A, $\delta_{A'}$, δ_B, $\delta_{B'}$, gli spostamenti di A, A', B e B'. Le equazioni che determinano gli sforzi assiali F_1 e F_2 nelle due aste sono

$$\begin{cases} \delta_A + \delta_{A'} = 0 \\ \delta_B + \delta_{B'} = 0, \end{cases} \tag{4}$$

ossia

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L_e}{\partial F_1} + \dfrac{\partial L_e'}{\partial F_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L_e}{\partial F_2} + \dfrac{\partial L_e'}{\partial F_2} = 0 \end{cases} \tag{5}$$

lineari in F_1 e F_2. F_1, — e così pure F_2 —, è funzione di δ_A, $\delta_{A'}$, δ_B, $\delta_{B'}$.

Analogamente, se il numero dei collegamenti aumenta, ciascuna delle F è funzione degli spostamenti di tutte le sezioni di S e S' vincolate.

Supponiamo ora che i collegamenti, sempre rimanendo paralleli e facendo capo a cerniere senz'attrito, vadano indefinitamente accostandosi e che contemporaneamente il loro numero divenga infinito; allora il numero delle equazioni risolventi e delle forze incognite F diviene infinito, ossia, — secondo la concezione di VOLTERRA —, queste si trasformano in un sistema continuo di forze mentre quelle danno luogo ad una equazione integrale lineare la cui soluzione è una certa funzione f che rappresenta appunto l'intensità della forza ripartita che, secondo la direzione del collegamento continuo, S ed S' reciprocamente si trasmettono; f è funzione degli spostamenti, secondo quella direzione, di tutti i punti

---

resto — all'infuori di cedimenti degli appoggi —, solo assai raramente si hanno nei sistemi staticamente determinati. Fra questi vari casi si può ricordare l'arco a tre cerniere con spinta eliminata da un tirante che fu per esempio usato come schema statico del curioso ponte in ferro sopra il Song-Ma, v. Le Génie Civil, 1909, pag. 25.

di S e S', ossia è una funzione di linee. Con la notazione di VOLTERRA, essendo a e b i limiti del collegamento continuo, può scriversi

$$f=\left|\left[\delta(x)\right]\right|_{b}^{a}. \tag{6}$$

È ovvia l'estensione di quanto precede al caso di tre o più sistemi elastici.

3. - Chiamerò nel seguito per brevità *sistema elastico composto* un insieme di due o più sistemi elastici piani nei quali le sezioni i cui baricentri sono posti sulla parallela ad una data direzione siano vincolate a subire, secondo questa direzione, uguali spostamenti (1).

Praticamente un sistema elastico composto è in generale realizzato da due o più travi, — intesa questa parola nel senso più generale —, ciascuna delle quali poggia direttamente (2) o indirettamente (3) sulla sottostante e delle quali la superiore sopporta i carichi esterni quasi sempre verticali (4).

Allora, nel caso di due sole travi, la f acquista un significato meccanico assai semplice: essa rappresenta il carico ripartito che dalla trave caricata viene trasmesso alla sottostante; se le travi sono più di due, le diverse f rappresentano i carichi ripartiti che vengono successivamente trasmessi da ogni trave alla sottostante (5).

4. - Studiamo più particolarmente la determinazione dell'equazione integrale risolvente e della f nel caso, per la pratica più interessante, di un sistema ela-

---

(1) Supponiamo naturalmente, come di solito, che le dimensioni trasversali dei diversi solidi elastici siano piccole in confronto della loro lunghezza, e possano trascurarsi le deformazioni di ogni sezione rispetto alle traslazioni e rotazioni che essa subisce quando il solido si deforma.

(2) Tale è per esempio l'insieme di due travi rettilinee inflesse liberamente appoggiate agli estremi, poste l'una sull'altra ed a contatto l'una dell'altra, soggette ad un carico verticale gravante sulla trave superiore; insieme di cui lo studio è ben noto dai Corsi di Scienza delle Costruzioni.

(3) Per esempio per mezzo di un tratto di muro. Nella realtà poi un collegamento di questo genere dà luogo non solo ad azioni verticali ma anche ad azioni orizzontali (per esempio attriti).

(4) Nella costruzione si può ovviamente ottenere che ciascuna trave sopporti il peso proprio e quello del sovrastante collegamento.

(5) Si è ammesso che i carichi esterni gravino sulla trave superiore e quindi il collegamento agisca per compressione, perchè praticamente assai di rado può presentarsi un collegamento continuo fra due o più travi sull'inferiore (o su una intermedia) delle quali gravino i carichi esterni. Un tal collegamento dovrebbe del tutto o in parte agire per trazione e potrebbe per esempio essere costituito da una serie di staffe poste l'una accanto all'altra. Lo studio di un sistema di questo genere non differisce dall'altro che sopra si sviluppa.

stico composto formato di due travi S e S', i cui assi, pur potendo, in generale, avere diverso sviluppo (1), abbiano gli estremi sulle medesime verticali e siano nel comune intervallo di sviluppo direttamente o indirettamente sovrapposte; fra queste travi, vincolate alle estremità, non si esercitino azioni orizzontali (attriti, ecc.), e la superiore S sia soggetta a un carico esterno verticale ripartito. Vedremo che la risolvente è un'equazione di Volterra di prima specie avente per nucleo l'unità e riducibile ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea e a coefficienti variabili.

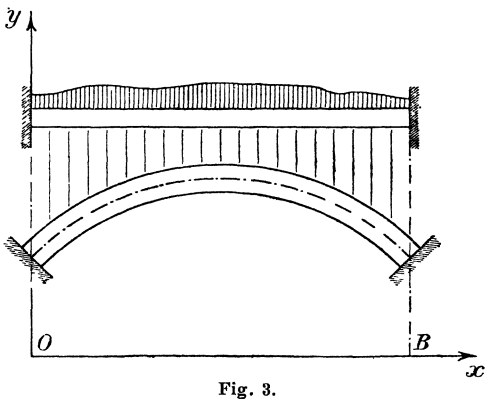


Fig. 3.

Assumiamo come sistema di riferimento un sistema cartesiano ortogonale con l'asse x orizzontale e l'origine sulla verticale per l'estremo sinistro di S e S', e sia $OB=l$ la proiezione sull'asse x del comune intervallo $(O<x<l)$ di sviluppo di S e S' (fig. 3).

5. - Le caratteristiche di sollecitazione in una sezione generica di S o di S' saranno, in generale, un momento flettente M, una componente normale N, uno sforzo di taglio T; e noi potremo distinguere in M, in N ed in T due parti: l'una M^*, N^*, T^*, dipendente dalle reazioni dei vincoli che si trovano a sinistra (o a destra) della sezione considerata e l'altra dai carichi che sono pure alla sinistra (o alla destra) della sezione stessa.

Risolviamo i due sistemi elastici S e S' determinando le espressioni analitiche delle linee di influenza delle reazioni dei vincoli, per appoggi semplici, o dei parametri individuanti le dette reazioni, per cerniere od incastri; esse saranno rappresentate da certe funzioni ben determinate in ogni caso.

Se dunque indichiamo con x l'ascissa nel sistema di riferimento scelto di un carico unitario agente verticalmente sopra S e diretto verso il basso, con ξ quella nello stesso sistema del baricentro di una sezione generica di S, ed indichiamo con $M^*_{x\xi}$ la parte di momento in quella sezione dovuta alla reazione dei vincoli (a sinistra della sezione) originate dal detto carico, parte che è rappresentata da un'espressione analitica ben determinata, il momento flettente in quella sezione dovuto al carico unitario sarà

$$M_{x\xi}=M^*_{x\xi} \tag{7}$$

(1) Un caso tipico è quello degli archi longitudinali di un portico che col sussidio di una sovrastante trave sostengono il muro frontale di un edificio.

se il carico è a destra della sezione ($x > \xi$),

$$M_{x\xi} = M^{*}_{x\xi} - 1(\xi - x) \tag{8}$$

se il carico è a sinistra della sezione ($x < \xi$).

Analogamente, chiamando α l'angolo che la sezione generica considerata forma con la verticale, si ha per lo sforzo di taglio e la componente normale

$$N_{x\xi} = N^{*}_{x\xi}\,, \tag{9}$$

$$T_{x\xi} = T^{*}_{x\xi}\,, \tag{10}$$

se il carico è a destra della sezione, e

$$N_{x\xi} = N^{*}_{x\xi} - 1 \cdot \operatorname{sen}\alpha, \tag{11}$$

$$T_{x\xi} = T^{*}_{x\xi} - 1 \cdot \cos\alpha, \tag{12}$$

se il carico è a destra della sezione.

Analogamente per il sistema S avremo

$$M'_{x\xi'} = M^{*\prime}_{x\xi'}, \tag{13}$$

$$N'_{x\xi'} = N^{*\prime}_{x\xi'}, \tag{14}$$

$$T'_{x\xi'} = T^{*\prime}_{x\xi'}, \tag{15}$$

o rispettivamente

$$M'_{x\xi'} = M^{*\prime}_{x\xi'} - 1 \cdot (\xi' - x), \tag{16}$$

$$N'_{x\xi'} = N^{*\prime}_{x\xi'} - 1 \cdot \operatorname{sen}\alpha', \tag{17}$$

$$T'_{x\xi'} = T^{*\prime}_{x\xi'} - 1 \cdot \cos\alpha', \tag{18}$$

— essendo α' l'angolo che la sezione generica di S' fa con la verticale —, a seconda che il carico 1 si trova a destra o a sinistra della sezione.

Poichè α ed α', dipendentemente dalla forma delle travi S ed S', sono funzioni analiticamente ben determinate di ξ e ξ', $\alpha = \alpha(\xi)$, $\alpha' = \alpha'(\xi')$, così le $M_{x\xi}$, $M'_{x\xi}$, $N_{x\xi}$, ecc., che rappresentano le linee d'influenza delle caratteristiche di sollecitazione per una sezione generica di ascissa ξ o ξ', sono in ambedue i campi, a sinistra e a destra della sezione stessa, espressioni analitiche determinate di ξ o di ξ', oltre che, naturalmente, di x.

6. - Supponiamo, come si è detto, che su di S gravi un carico verticale ripartito secondo una legge analiticamente data, $p = p(x)$. Si tratta di determinare con quale legge $f = f(x)$ un carico verticale ripartito viene trasmesso da S ad S'.

Secondo gli usuali procedimenti della scienza delle costruzioni una soluzione approssimata si presenta spontanea ed è la seguente:

Si divide il tratto OB in un numero finito q di tronchi Δx abbastanza piccoli perchè possa ammettersi che la f non cambi di segno in ciascuno di essi, così che, detto f_t il valor medio di f nel tronco Δx_t, la forza incognita $\varphi_t = f_t \Delta x_t$ sia applicata nell'interno del corrispondente tronco Δx_t; poi si scrivono q equazioni, ciascuna delle quali esprimente che, sotto l'azione delle forze esterne, delle reazioni

dei vincoli e delle φ incognite (in numero di q), il punto di mezzo del tronco t^{mo} di S, — al quale punto si ammette sia applicata la corrispondente φ_t —, ha un abbassamento uguale a quello subito dal punto di mezzo del tronco di S' sotto l'azione delle reazioni dei vincoli e delle incognite.

Quindi, secondo il ricordato teorema di Castigliano, detti L_e e L_e' il lavoro esterno di deformazione in S e S', avremo il sistema di q equazioni

$$\frac{\partial L_e}{\partial \varphi_t} + \frac{\partial L_e'}{\partial \varphi_t} = 0 \tag{19}$$

per determinare le q incognite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$.

Indicando con E e G i moduli di elasticità longitudinale e trasversale, con A l'area e con I il momento d'inerzia rispetto all'asse di flessione della sezione trasversale, con χ il fattore di taglio e distinguendo con un apice le quantità relative ad S', il sistema (19) può scriversi:

$$\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \int_0^l \frac{N}{EA}\frac{\partial N}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \int_0^l \chi\,\frac{T}{GA}\frac{\partial T}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \tag{20}$$
$$+ \int_0^l \frac{M'}{E'I'}\frac{\partial M'}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \int_0^l \frac{N'}{E'A'}\frac{\partial N'}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \int_0^l \chi\,\frac{T'}{G'A'}\frac{\partial T'}{\partial \varphi_t}\,d\xi = 0, \qquad (t=1,2,\ldots,q).$$

Ora, ricordando il numero precedente ed indicando con $\bar{p}_t$ il valor medio di p nell'intervallo generico Δx_t, per una sezione di ascissa ξ_i, appartenente alla trave S, che cada fra il punto di applicazione di ϱ_i e φ_{i+1} è

$$M = \sum_1^q{}_t(\bar{p}_t\Delta x_t - \varphi_t)M^*_{x_t\xi_i} - \sum_1^i{}_t\bar{p}_t\Delta x_t(\xi_i - x_t) + \sum_1^i{}_t\varphi_t(\xi_i - x_t), \tag{21}$$

$$N = \sum_1^q{}_t(\bar{p}_t\Delta x_t - \varphi_t)N^*_{x_t\xi_i} - \sum_1^i{}_t\bar{p}_t\Delta x_t \operatorname{sen}[\alpha(\xi_i)] + \sum_1^i{}_t\varphi_t \operatorname{sen}[\alpha(\xi_i)], \tag{22}$$

$$T = \sum_1^q{}_t(\bar{p}_t\Delta x_t - \varphi_t)T^*_{x_t\xi_i} - \sum_1^i{}_t\bar{p}_t\Delta x_t \cos[\alpha(\xi_i)] + \sum_1^i{}_t\varphi_t \cos[\alpha(\xi_i)], \tag{23}$$

e quindi

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi_t} = -M^*_{x_t\xi_i}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_t} = -N^*_{x_t\xi_i}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_t} = -T^*_{x_t\xi_i}, \tag{26}$$

per $\xi_i < x_t$, e

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi_t} = -M^*_{x_t\xi_i} + \xi_i - x_t, \tag{27}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \varphi_t} = -N^*_{x_t\xi_i} + \operatorname{sen}[\alpha(\xi_i)], \tag{28}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi_t} = -T^*_{x_t\xi_i} + \cos[\alpha(\xi_i)], \tag{29}$$

per $\xi_i > x_t$.

Per la sezione corrispondente del sistema S' si ha invece osservando che per esso è $\xi' = \xi$,

$$M' = \sum_1^q{}_t \varphi_t M^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \varphi_t (\xi_i - x_t), \tag{30}$$

$$N' = \sum_1^q{}_t \varphi_t N^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \varphi_t \operatorname{sen}[\alpha'(\xi_i)], \tag{31}$$

$$T' = \sum_1^q{}_t \varphi_t T^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \varphi_t \cos[\alpha'(\xi_i)], \tag{32}$$

e quindi

$$\frac{\partial M'}{\partial \varphi_t} = M^{*\prime}{}_{x_t \xi_i}, \tag{33}$$

$$\frac{\partial N'}{\partial \varphi_t} = N^{*\prime}{}_{x_t \xi_i}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \varphi_t} = T^{*\prime}{}_{x_t \xi_i}, \tag{35}$$

per $\xi_i < x_t$, e

$$\frac{\partial M'}{\partial \varphi_t} = M^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - (\xi_i - x_t), \tag{36}$$

$$\frac{\partial N'}{\partial \varphi_t} = N^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - \operatorname{sen}[\alpha'(\xi_i)], \tag{37}$$

$$\frac{\partial T'}{\partial \varphi_t} = T^{*\prime}{}_{x_t \xi_i} - \cos[\alpha'(\xi_i)], \tag{38}$$

per $\xi_i > x_t$.

Uno qualunque dei sei integrali del primo membro della equazione generica t^{ma} del sistema (20), per esempio il primo, si trasforma pertanto nel seguente modo

$$\begin{aligned}
\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \varphi_t}\,d\xi = {} & \int_0^{x_t} \frac{1}{EI}\left\{ \sum_1^q{}_t (\bar{p}_t \Delta x_t - \varphi_t) M^*_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \bar{p}_t \Delta x_t (\xi_i - x_t) + \right. \\
& \left. + \sum_1^i{}_t \varphi_t (\xi_i - x_t) \right\} (-M^*_{x_t \xi_i})\,d\xi + \int_{x_t}^l \frac{1}{EI}\left\{ \sum_1^q{}_t (\bar{p}_t \Delta x_t - \varphi_t) M^*_{x_t \xi_i} - \right. \\
& \left. - \sum_1^i{}_t \bar{p}_t \Delta x_t (\xi_i - x_t) + \sum_1^i{}_t \varphi_t (\xi_i - x_t) \right\} (-M^*_{x_t \xi_i} + \xi_i - x_t)\,d\xi = \\
= {} & -\int_0^l \frac{1}{EI}\left\{ \sum_1^q{}_t (\bar{p}_t \Delta x_t - \varphi_t) M^*_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \bar{p}_t \Delta x_t (\xi_i - x_t) + \right. \\
& \left. + \sum_1^i \varphi_t (\xi_i - x_t) \right\} M^*_{x_t \xi_i}\,d\xi + \\
& + \int_x^l \frac{1}{EI}\left\{ \sum_1^q{}_t (\bar{p}_t \Delta x_t - \varphi_t) M^*_{x_t \xi_i} - \sum_1^i{}_t \bar{p}_t \Delta x_t (\xi_i - x_t) + \right. \\
& \left. + \sum_1^i \varphi_t (\xi_i - x_t) \right\} (\xi_i - x_t)\,d\xi.
\end{aligned} \tag{39}$$

Se si fanno tendere a zero gli intervalli Δx_t e si aumenta indefinitamente il loro numero il sistema (20) si trasforma in un'equazione integrale lineare che si ottiene passando al limite per $\Delta x_t = 0$ in ciascuno dei sei integrali della equazione generica.

Per il primo integrale già considerato si ha, passando al limite,

$$(40) \qquad -\int_0^l \frac{1}{EI}\left\{\int_0^l (p-f)M^*_{x\xi}dx - \int_0^\xi p(\xi-x)dx + \int_0^\xi f(\xi-x)dx\right\} M^*_{x\xi}d\xi + \\ + \int_x^l \frac{1}{EI}\left\{\int_0^l (p-f)M^*_{x\xi}dx - \int_0^\xi p(\xi-x)dx + \int_0^\xi f(\xi-x)dx\right\}(\xi-x)d\xi.$$

Gli altri cinque integrali danno termini analoghi, nei quali in luogo di $M^*_{x\xi}$ compaiono $N^*_{x\xi}$, $T^*_{x\xi}$, $M^{*\prime}{}_{x\xi}$, $N^{*\prime}{}_{x\xi}$, $T^{*\prime}{}_{x\xi}$, in luogo di $(\xi-x)$, sen $[\alpha(\xi)]$, cos $[\alpha(\xi)]$, ecc.

Si omette pertanto, per brevità l'ovvia trascrizione dell'equazione integrale risolvente.

7. - Consideriamo per un momento l'espressione (40): i tre integrali entro la prima parentesi $\{\ \}$ sono funzioni di ξ; $M^*_{x\xi}$ invece è la somma di un certo numero di prodotti di una funzione di x (un parametro della reazione di vincolo) per una funzione di ξ. Ne consegue che tutto l'integrale

$$-\int_0^l \frac{1}{EI}\{\ldots.\}M^*_{x\xi}d\xi$$

è una funzione di x, che potremo indicare con $\pi_m(x)$, contenente linearmente una o più costanti c_{m_1}, c_{m_2}, c_{m_3},.... che moltiplicano le stesse fnnzioni di x che compaiono in $M^*_{x\xi}$, costanti che per ora non conosciamo.

Consideriamo ora più particolarmente i termini entro parentesi $\{\ \}$ dell'espressione (40):

$$\int_0^l (p-f)M^*_{x\xi}d\xi$$

rappresenta la parte di momento flettente nella sezione ξ dovuta alle reazioni dei vincoli che si hanno nel sistema S per effetto del carico p e della $-f$; esso sarà pertanto una funzione nota di ξ, che potremo indicare con $\overline{M}_\xi$, in ξ della medesima forma di $M^*_{x\xi}$, la quale conterrà tante costanti $c_{\overline{m}_1}$, $c_{\overline{m}_2}$,.... da determinare quante sono le condizioni di vincolo;

il secondo integrale entro parentesi $\{\ \}$,

$$\int_0^\xi p(\xi-x)dx,$$

è pure una funzione di ξ, $P(\xi)$, facilmente calcolabile perchè è data la $p=p(\xi)$; quanto al terzo integrale, osserviamo che, indicando con $\psi(x)$ la funzione primitiva seconda di $f(x)$, ossia essendo

$$\psi(x)=\int_0^x\int_0^x f(x)dx\cdot dx, \tag{41}$$

si ha, integrando per parti

$$\int_0^\xi f(\xi-x)dx=\Big[\psi'(x)(\xi-x)\Big]_{x=0}^{x=\xi}+\Big[\int\psi'(x)dx\Big]_{x=0}^{x=\xi}=\psi(\xi). \tag{42}$$

L'espressione (41) si trasforma così nella seguente

$$-\pi_m(x)+\int_x^l\frac{1}{EI}\{\overline{M}_\xi-P_m(\xi)+\psi(\xi)\}(\xi-x)d\xi. \tag{43}$$

8. - Gli altri cinque integrali della equazione integrale a cui si riduce il sistema (20), che in luogo di $M^*_{x\xi}$, contengono $N^*_{x\xi}$, $T^*_{x\xi}$, $M^{*\prime}{}_{x\xi}$, $N^{*\prime}{}_{x\xi}$, $T^{*\prime}{}_{x\xi}$, ed in luogo di $(\xi-x)$, sen $[\alpha(\xi)]$, cos $[\alpha(\xi)]$, ecc., danno luogo ad espressioni analoghe alla (43), nelle quali in luogo delle $\pi_m(x)$, $\overline{M}_\xi$, $P_m(\xi)$, compariranno certe altre funzioni $\pi_n(x)$, $\overline{N}_\xi$, $P_n(\xi)$,.... $\pi_{m'}(x)$, $\overline{M}_\xi'$, $P_{m'}(\xi)$,.... il cui significato simbolico è ben chiaro. Così pure in luogo delle costanti c_{m_1}, c_{m_2},...., $c_{\overline{m}_1}$, $c_{\overline{m}_2}$,.... compariranno altre costanti c_{n_1}, c_{n_2},...., $c_{\overline{n}_1}$, $c_{\overline{n}_2}$,....; c_{t_1}, c_{t_2},...., $c_{\overline{t}_1}$, $c_{\overline{t}_2}$,.... ecc.

In luogo poi del termine

$$\psi(\xi)$$

che compare nel primo integrale, si avrà nel secondo

$$\int_0^\xi f\,\text{sen}\,[\alpha(\xi)]dx=\text{sen}\,[\alpha(\xi)]\cdot\psi'(\xi)$$

e nel terzo

$$\int_0^\xi f\cos[\alpha(\xi)]dx=\cos[\alpha(\xi)]\cdot\psi'(\xi).$$

Ora i termini $\overline{M}_\xi(\xi-x)$, $P_m(\xi)(\xi-a)$, sotto il segno $\int$ della (43) e quelli analoghi integrati rispetto a ξ fra i limiti x e b, danno dei termini costanti di cui indico la somma con K (1), e altrettante funzioni note di x.

(1) I termini K non hanno però alcun interesse perchè alla prima derivazione naturalmente scompaiono.

Indicando semplicemente con $V(x)$ la somma di tutte queste funzioni di x e delle precedenti $\pi_m(x)$, $\pi_n(x)$, $\pi_t(x)$,...., la risolvente diviene

$$(44)\quad K+V(x)+\int_x^l \left\{ \left[\frac{1}{EI}+\frac{1}{E'I'}\right]\psi(\xi)(\xi-x)+\left[\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha(\xi)]}{EA}+\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha'(\xi)]}{E'A'}+ \right.\right.$$
$$\left.\left. +\chi\frac{\cos^2[\alpha(\xi)]}{GA}+\chi'\frac{\cos^2[\alpha'(\xi)]}{G'A'}\right]\psi'(\xi)\right\} d\xi=0.$$

9. - La (44) può subito essere semplificata.

Derivando rispetto ad x si ha

$$(45)\quad \frac{dV}{dx}-\int_x^l \left[\frac{1}{EI}+\frac{1}{E'I'}\right]\psi(\xi)\,d\xi-\left[\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha(\xi)]}{EA}+\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha'(\xi)]}{E'A'}+ \right.$$
$$\left. +\chi\frac{\cos^2[\alpha(\xi)]}{GA}+\chi'\frac{\cos^2[\alpha(\xi)]}{GA}\right]\psi'(x)=0.$$

Derivando ancora rispetto ad x, supponendo per semplicità che S ed S' abbiano sezione costante (1)

$$(46)\quad \frac{d^2V}{dx^2}+\left[\frac{1}{EI}+\frac{1}{E'I'}\right]\psi(x)-\left[\frac{2\operatorname{sen}[\alpha(x)]\cos[\alpha(x)]}{EA}\frac{d\alpha}{dx}+ \right.$$
$$+\frac{2\operatorname{sen}[\alpha'(x)]\cos[\alpha'(x)]}{E'A'}\frac{d\alpha'}{dx}-\chi\frac{2\cos[\alpha(x)]\operatorname{sen}[\alpha(x)]}{GA}\frac{d\alpha}{dx}-$$
$$\left.-\chi'\frac{2\cos[\alpha(x)]\operatorname{sen}[\alpha(x)]}{G'A'}\frac{d\alpha'}{dx}\right]\psi'(x)-$$
$$-\left[\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha(x)]}{EA}+\frac{\operatorname{sen}^2[\alpha'(x)]}{E'A'}+\chi\frac{\cos^2[\alpha(x)]}{GA}+\chi'\frac{\cos^2[\alpha'(x)]}{G'A'}\right]\psi''(x)=0,$$

ordinando e ricordando che $G=\frac{2}{5}E$, $G'=\frac{2}{5}E'$, risulta

$$(47)\quad \left\{\frac{1}{EA}\left[\operatorname{sen}^2[\alpha(x)]+\frac{5}{2}\chi\cos^2[\alpha(x)]\right]+\frac{1}{E'A'}\left[\operatorname{sen}^2[\alpha'(x)]+ \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5}{2}\chi'\cos^2[\alpha'(x)]\right]\right\}\psi''(x)+\left\{\frac{\operatorname{sen}[2\alpha(x)]}{EA}\left(1-\frac{5}{2}\chi\right)\frac{d\alpha}{dx}+ \right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{sen}[2\alpha'(x)]}{E'A'}\left(1-\frac{5}{2}\chi'\right)\frac{d\alpha}{dx}\right\}\psi'(x)-\left\{\frac{1}{EI}+\frac{1}{E'I'}\right\}\psi(x)=\frac{d^2V}{dx^2}.$$

L'equazione risolvente è pertanto indicando con $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$, funzioni note di x (2), del tipo

$$(48)\quad \bar{a}\psi''+b\psi'+c\psi=\bar{d}$$

ossia è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti variabili. In ogni caso particolare può tentarsene l'integrazione che, come è noto, è spesso possibile con il cambiamento della variabile indipendente.

---

(1) Se S ed S' avessero sezione variabile sarebbe ovvia la modificazione in ciò che segue.

(2) Nel nostro caso $\bar{c}$ è una costante.

Integrata che sia la (48) si ha subito con due derivazione successive la f:

$$f = \frac{d^2\psi}{dx^2}. \tag{49}$$

10. - Rimangono a determinarsi le costanti c_{m_1}, c_{m_2},.... della funzione $\pi_m(x)$, le costanti $c_{\overline{m}_1}$, $c_{\overline{m}_2}$,.... di $\overline{M}_\xi$ e le altre analoghe che sono, in generale, tutte contenute nella $f(x)$.

Ora è

$$\pi_m(x) = -\int_0^l \frac{1}{EI}\left\{\int_0^l (p-f)M^*_{x\xi}dx - \int_0^\xi p(\xi-x)dx + \int_0^\xi f(\xi-x)dx\right\} M^*_{x\xi}d\xi. \tag{50}$$

Il primo membro di questa identità è la somma dei prodotti delle costanti c_m per funzioni di x; il secondo membro, eseguite le integrazioni, è invece il prodotto di altre costanti, — che sono in generale combinazioni lineari di tutte le c_m, $c_{\overline{m}}$, c_n, $c_{\overline{n}}$, c_t, $c_{\overline{t}}$,...., —, per le medesime funzioni di x. Uguagliando i coefficienti nei due membri delle stesse funzioni di x si ricavano tante equazioni lineari quante sono le c_m, ciascuna delle quali equazioni contiene in generale tutte le c_m, $c_{\overline{m}}$, c_n, $c_{\overline{n}}$,.... ecc.

Nello stesso modo si opera per le costanti c_m. È

$$\overline{M}_\xi = \int_0^l (p-f)M^*_{x\xi}dx; \tag{51}$$

il primo membro di questa identità è la somma dei prodotti delle costanti $c_{\overline{m}}$ per funzioni di ξ; il secondo membro eseguita l'integrazione è invece il prodotto di altre costanti, — che in generale sono continuazioni lineari di tutte le c_m, $c_{\overline{m}}$, c_n, $c_{\overline{n}}$,...., —, per le medesime funzioni di ξ. Uguagliando i coefficienti nei due membri delle stesse funzioni di ξ, si ricavano tante equazioni lineari quante sono le $c_{\overline{m}}$, ciascuna delle quali equazioni contiene in generale tutte le c_m, $c_{\overline{m}}$, c_n, $c_{\overline{n}}$, c_t, $c_{\overline{t}}$,.... ecc.

Operando poi nello stesso modo con $\pi_n(x)$, $\pi_t(x)$,.... $\overline{N}_\xi$, $\overline{T}_\xi$,...., si ricavano tante equazioni quante sono le costanti da determinare. Con che il problema è risolto.

11. - La teoria sopra sviluppata consente la trattazione di molti problemi tecnici fino ad oggi, — per quel che mi risulta —, insoluti o quasi.

Sono fra questi, per esempio, lo studio statico, — interessante sopra tutto per la stabilità dei piedritti —, degli archi longitudinali di portico che sostengono, col sussidio di una sovrastante trave in ferro od in cemento armato, il muro frontale di un edificio, e del rinforzo dei ponti in muratura o di cemento

armato ad arco (1) quando si assumano carichi ripartiti a base del calcolo. Di essi tratterò in altra nota.

Questa teoria comprende, come si vede facilmente, la nota trattazione delle travi composte rettilinee inflesse. Per queste infatti l'equazione t^{ma} del sistema (20) si riduce a

$$\int_0^l \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial \varphi_t}\,d\xi + \int_0^l \frac{M'}{E'I'}\frac{\partial M'}{\partial \varphi_t}\,d\xi = 0, \qquad (t=1, 2, \ldots, q) \tag{52}$$

ciò che esprime l'uguaglianza delle freccie d'inflessione per le sezioni corrispondenti delle due travi. Il problema si può allora più semplicemente trattare per mezzo dell'equazione differenziale della linea elastica (2).

(1) Come esempio di rinforzo si può vedere: *Brückenverstärkung der Reichbahn.* Der Bahningenieur, 1928, pag. 292.

(2) Cfr. C. GUIDI: *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni.* Parte III.

B. FINZI (Milano - Italia)

SULLE SINGOLARITÀ ANALITICHE NELLA MECCANICA DEI FLUIDI

È ben noto quale importanza abbia lo studio delle singolarità nell'analisi moderna. Le funzioni analitiche si studiano e si classificano appunto in base alle loro singolarità (1); non solo, ma la conoscenza dei punti singolari e delle caratteristiche di una funzione in essi permette la costruzione della funzione stessa (2).

Si comprende che ogni qual volta un problema fisico venga schematizzato in un problema matematico, le singolarità analitiche eventualmente presenti caratterizzeranno pure il problema fisico, o almeno quello schema di problema fisico che si è voluto rappresentare matematicamente.

Ora, poichè una recente polemica ha rilevato come non tutti i cultori delle scienze aero e idrodinamiche siano d'accordo nel tener conto delle singolarità nei problemi matematici che vogliono schematizzare problemi di meccanica dei fluidi, mi permetto di intrattenere i cultori di matematiche applicate (e in modo speciale quelli che sanno tradurre le sintesi logiche in concrete realtà) sull'influenza delle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi.

§ 1. - Darò, da prima, qualche esempio di problema fisico che comporta singolarità nella sua rappresentazione matematica:

Consideriamo, per semplicità, un liquido perfetto moventesi di moto stazionario, piano, irrotazionale. Le linee di flusso siano semirette uscenti da un punto O. È questo lo schema di una *sorgente*. Il potenziale di velocità e la velocità saranno definiti dalle seguenti relazioni:

$$\varphi = a \log r, \qquad v = \frac{a}{r}$$

(r è la distanza tra O e un generico punto del campo di moto). Potenziale e velocità hanno una singolarità nel punto O.

Se un liquido perfetto si muove di moto stazionario, piano, irrotazionale, e

(1) Cfr. ad es. G. VIVANTI: *Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere*, 2.ª ed., Milano, 1928, n.° 132.

(2) G. VIVANTI, loco citato, n.i da 132 a 149.

le linee di flusso sono circonferenze tutte di centro O, si ha lo schema del *vortice* puntiforme. In tal caso, detta θ l'anomalia di un punto, riferita al polo O e ad un dato asse polare, il potenziale di velocità e la velocità saranno definiti dalle seguenti relazioni:

$$\varphi = a\theta, \qquad v = -\frac{a}{r}.$$

Il potenziale di velocità non è dunque uniforme e, anche in questo caso, la velocità ha una singolarità nel punto O.

Si consideri una corrente stazionaria, piana, irrotazionale, traslatoria o traslo-circolatoria investente un profilo con *punti angolosi*: tali punti sono singolari per la velocità. Ciò avviene, ad esempio, se una corrente investe una lamina rettilinea o una lamina foggiata ad arco di circonferenza.

Gli esempi si potrebbero facilmente moltiplicare. Vogliamo però ancora ricordare che, oltre alle singolarità vere e proprie, altre possono essere le cause di irregolarità del moto: così la presenza di una *scia* o di una *cavitazione* determina una discontinuità della velocità [1].

§ 2. - È notissimo quale profonda modificazione subiscano i teoremi analitici in presenza di singolarità: basti citare il teorema fondamentale di Cauchy. L'integrale di una funzione analitica esteso ad una linea chiusa, limitante un campo privo di singolarità per la funzione stessa, è nullo. Se vi sono singolarità entro il campo, tale integrale è invece uguale alla somma dei residui di detti punti singolari [2]. Se, in fine, le singolarità sono in punti del contorno (e — per semplicità — supponiamo che in essi la linea di contorno abbia tangente unica) l'integrale in discorso ha valor principale uguale alla semisomma dei residui.

È ben naturale pensare quindi che la presenza di singolarità porti pure profonde modificazioni nei teoremi di meccanica dei fluidi. E così è infatti.

Ad esempio:

Si consideri un liquido (o comunque un fludio incompressibile) moventesi (per semplicità) di moto piano. Se si traccia una linea chiusa σ limitante una regione τ di piano ove il moto è privo di singolarità, e si calcola il *flusso* attraverso a tal linea, si trova manifestamente zero, perchè

$$\int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = -\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{v} d\tau = 0.$$

---

[1] Queste particolari irregolarità formarono oggetto di una comunicazione di D. RIABOUCHINSKI al Congresso Internazionale di Meccanica Applicata di Zurigo (*Sur les singularités des mouvements fluides*, Verhandlungen des zweiten int. Kong. für techn. Mechanik, pag. 512).

[2] Chiamiamo brevemente residuo di un punto singolare c il prodotto di $2\pi i$ per il coefficiente della potenza di grado -1 nello sviluppo della funzione $f(z)$ in serie di potenze di $z - c$.

Non così (in generale) se in τ vi sono singolarità. Ad esempio, se σ è una linea chiusa abbracciante una sorgente,

$$\int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n} d\sigma = 2\pi a,$$

e $2\pi a$ è appunto ciò che si dice « portata » della sorgente.

Consideriamo il classico *paradosso di d'Alembert* (1). Esso sussisterà per un corpo traslante uniformemente in un fluido, allorchè si suppone il moto indotto stazionario e regolare. Non si può però affermare che esso sussista ancora se si toglie l'ipotesi di regolarità. Ad esempio: se una corrente traslatoria irrotazionale investe una lamina foggiata ad arco di circonferenza, BIKLEY (2) dimostrò che la resistenza diretta non è nulla. Così non nulla è la resistenza se si suppone la presenza di una scia indefinita. Neppure nulla è nell'ipotesi di scia di vortici (KÁRMÁN), chè questi vortici puntiformi sono appunto singolarità nel campo di moto. Lo stesso dicasi nell'ipotesi del PRANDTL, in cui si suppone la presenza di una scia che è un vero covo di singolarità — fisicamente giustificabilissime — ed analiticamente atte a rimuovere il paradosso di d'Alembert (3).

Si consideri l'ormai classico *teorema di Kutta-Joukowski*: se una corrente piana, traslo-circolatoria, stazionaria, irrotazionale investe un profilo rigido, e il moto è ovunque regolare, si esercitano sul profilo rigido azioni dinamiche la cui risultante è perpendicolare alla direzione asintotica della corrente, di modulo uguale al prodotto della densità per la circolazione per la velocità asintotica, e di verso ottenuto ruotando la velocità asintotica di un angolo retto nel senso inverso della circolazione. Tale teorema non sussiste più (in generale) se il profilo è fornito di *cuspidi* (4). Notevole è sopra tutto il caso della lamina rettilinea.

---

(1) Consulta su l'argomento il recente studio di A. MASOTTI: *Appunti storici sul paradosso di d'Alembert*, Periodico di Matematiche, serie IV, vol. VIII, n. 4.

(2) *Some Two-Dimensional Potential Problems connected with the circular Arc*, Ph. Mag., 1918, vol. XXXV, pag. 396; vol. XXXVI, pag. 273.

(3) Si consulti la recentissima opera di W. MÜLLER: *Mathematische Strömungslehre*, Berlin, 1928.

(4) Cfr. A. ROSENBLATT: *Sur le théorème de Kutta-Joukowski*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. V (1927), pag. 564. Cfr. anche B. FINZI: *Sopra il teorema di Kutta-Joukowski*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. VIII (1928), pag. 210.

Ad esempio, nel caso di un profilo con un'*unica cuspide*, se $R_{\perp}$ e $R_{//}$ sono le componenti della risultante delle azioni dinamiche secondo due assi x e y, di cui l'asse x diretto come la direzione asintotica della corrente, sarà

$$R_{//} + iR_{\perp} = R_{\infty} + R.$$

In questa formula R_{∞} è il residuo all'infinito, R il residuo nella cuspide. Se valesse anche in questo caso il teorema di Kutta-Joukowski, sarebbe

$$R_{//} + iR_{\perp} = R_{\infty}.$$

Ciò esigerebbe $R = 0$; il che manifestamente non è.

CISOTTI dimostrò che, se β è l'inclinazione della lamina sulla direzione asintotica della corrente, se c è il valore della velocità asintotica, C il valore della circolazione, ϱ la densità, la risultante delle azioni dinamiche ha modulo definito dalla seguente relazione (1):

$$R = \varrho c C \cos\beta.$$

La direzione e il verso di tale risultante si ottengono facendo ruotare la lamina (orientata confermemente all'angolo β) di un angolo retto in senso opposto alla circolazione.

Ancora un esempio: la *potenza* di una corrente piana, irrotazionale, liquida stazionaria è manifestamente nulla in assenza di singolarità. Non così (in generale) se vi sono singolarità: detta ω una generica circonferenza di raggio infinitesimo con centro in un punto singolare, se p è la pressione, ψ la funzione di corrente, tale potenza risulta definita dalla seguente relazione (2):

$$\pi = \sum_{\omega} \int p\, d\psi.$$

Applicando, in particolare, la relazione ora scritta al caso della lamina rettilinea, si trova che il valore assoluto di tale potenza è uguale al valore assoluto di $\varrho c^2 C \cos\beta \operatorname{sen}\beta$: ciò in pieno accordo con il risultato di CISOTTI.

§ 3. - Come nello studio degli integrali impropri, accanto al caso in cui la funzione integranda diviene infinita in qualche punto dell'intervallo, si considera il caso in cui l'intervallo diviene infinito, così noi, accanto allo studio di funzioni che diventano infinite in qualche punto del campo in cui è definito il moto del fluido, considereremo il caso in cui il campo si estende indefinitamente.

Il punto all'infinito costituisce, accanto alle singolarità, una caratteristica del fenomeno in istudio. Si pensi, del resto, che una funzione, pur essendo regolare in esso, può aver residuo non nullo (3); e si ricordi anche che la presenza di singolarità al finito si ripercuote sul comportamento all'infinito: il residuo nel punto all'infinito è infatti uguale e contrario alla somma dei residui delle singolarità al finito.

Un notevolissimo esempio dell'influenza del comportamento all'infinito nei problemi di dinamica dei fluidi è dato dal paradosso di d'Alembert e dalle sue estensioni: infatti, affinchè valga il paradosso di d'Alembert per un fluido perfetto

---

(1) U. CISOTTI: *Una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. V (1927), pag. 16.

(2) B. FINZI: *Interpretazione energetica di una notevole eccezione del teorema di Kutta-Joukowski*, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, vol. V (1927), pag. 666.

(3) La funzione $\frac{1}{z}$, ad esempio, è regolare nel punto all'infinito ed ha ivi per residuo $-2\pi i$.

qualsiasi in moto regolare stazionario ([1]), è sufficiente che (essendo v la velocità indotta nel fluido e — a meno di una costante — p la pressione sopra una sfera di raggio r tendente all'infinito) siano vr^2 e pr^2 nulli in media all'infinito ([2]). Anzi, supposte verificate le condizioni ora ricordate, è addirittura nulla la risultante R delle azioni dinamiche che il fluido esercita sul solido traslante uniformemente in seno ad esso. Nel caso di un liquido, le condizioni all'infinito si possono ridurre all'unica condizione: vr^2 nullo in media all'infinito ([3]). Questa è manifestamente soddisfatta dall'annullarsi all'infinito di vr^2 ([4]). Se ci riferiamo anzichè ad un moto spaziale, ad un moto piano, affinchè sia $R=0$ sarà evidentemente sufficiente che vr si annulli all'infinito. Un esempio notevole in cui questa condizione *non* è verificata è offerto da una corrente piana, irrotazionale, traslocircolatoria investente un profilo regolare rigido. In tal caso infatti vr non è nullo all'infinito, perchè v si annulla all'infinito come $\frac{1}{r}$. Notoriamente, nel caso in esame, non è zero R, ma è zero soltanto la componente di R secondo la direzione asintotica della corrente, e R è data dal ben noto teorema di Kutta-Joukowski. Non è forse fuor di luogo osservare che il comportamento all'infinito nel caso in esame ripercuote una singolarità al finito: tale comportamento proviene infatti dall'avere la velocità complessa (notoriamente funzione analitica) un residuo non nullo nel punto all'infinito, e tale residuo è appunto l'opposto del residuo del vortice puntiforme a cui è dovuta la circolazione.

Il paradosso di d'Alembert fu esteso da CISOTTI ([5]) a masse fluide continue anche non perfette, in moto regolare stazionario. Per l'estensione è sufficiente — come del resto per fluidi perfetti — che, oltre ad essere vr^2 nullo in media all'infinito, all'infinito si spengano le azioni dinamiche. Se (a meno di una costante) β è l'omografia degli sforzi, sarà dunque sufficiente che vr^2 e βr^2 siano nulli in media all'infinito. Nel caso di un liquido viscoso, ad esempio, è sufficiente che oltre a vr^2 anche $\frac{d\nu}{dP} r^2$ sia nullo in media all'infinito. Se si suppone — come nel caso di liquidi perfetti — che vr^2 si annulli all'infinito, entrambe

---

([1]) U. CISOTTI: *Sul paradosso di d'Alembert*, Atti del R. Ist. Veneto, t. LXIII, 2 (1903-1904), pag. 423; t. LXV, 2 (1905-1906), pag. 1291.

([2]) M. ROY: *Note sur le paradoxe de d'Alembert*, Journal de l'École Polytecnique, 2e sér., 26e fasc. (1927), pag. 58. — « Nullo in media all'infinito » è detto nel senso di P. NOILLON (Comp. Rend. de l'Ac. des Sc., 26 mars 1923, pag. 880).

([3]) M. ROY, loco citato, pag. 50.

([4]) Quest'ultima condizione è automaticamente verificata per i moti irrotazionali, perchè essa coincide con la ben nota condizione di convergenza all'infinito delle funzioni armoniche (cfr. ad es. R. MARCOLONGO: *Teoria Matematica dello equilibrio dei corpi elastici*, Milano 1904, pag. 41). Ad esempio, nel caso della sfera, v si annulla all'infinito come $\frac{1}{r^3}$.

([5]) *Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue*, Rend. R. Ist. Lombardo, t. L, fasc. 12-13, 1917, pag. 502.

le condizioni ora ricordate risultano verificate, e quindi il paradosso di d'Alembert è estensibile ai liquidi viscosi (1). Questo risultato fu da me confermato, perchè dimostrai che, ferme le condizioni all'infinito ora enunciate, è nulla la dissipazione d'energia in seno al liquido viscoso (2).

A mo' di conclusione osservo soltanto che il nocciolo delle questioni ora ricordate sta appunto nel comportamento all'infinito; comportamento che è però ugualmente definito sia per fluidi perfetti che per fluidi viscosi.

---

(1) Manifestamente nel caso piano è sufficiente che vr sia nullo all'infinito.

(2) B. FINZI: *Constatation énergétique du paradoxe de d'Alembert dans les liquides visqueux,* Comp. Rend., t. 182 (1926), pag. 1077.

M. PASCAL (Napoli - Italia)

COSTRUZIONI GEOMETRICHE PER LA CORRENTE PIANA CIRCUITO-ROTATORIA INTORNO AD UNA LAMINA RETTILINEA

In una sua Nota il sig. E. CAROFOLI (1), prendendo le mosse dal potenziale complesso della corrente provocata da una lamina piana rotante in seno ad un fluido in riposo, già determinato dal CALDONAZZO (2), ha trovato l'analogo potenziale per il moto intorno ad una lamina rotante in una corrente che ha una nota velocità all'infinito e che possiede ancora una circuitazione non nulla intorno all'ostacolo. Supponendo che la velocità all'infinito sia $U=$cost. parallela all'asse x (fisso e con l'origine nel centro di rotazione), che la velocità angolare ω sia del pari costante, e dicendo Γ la circuitazione, h la distanza del punto medio della lamina dal centro di rotazione, α l'angolo costante che la lamina forma con la congiungente l'origine col centro della lamina, $4a$ la lunghezza della lamina, la risultante delle azioni dinamiche su questa è

$$R=R_x+iR_y=i\varrho U\Gamma-2i\pi\varrho\omega a^2U+8\pi\varrho a^2\omega^2h\cos\alpha e^{i(\omega t+\alpha)}+$$
$$+6i\pi\varrho\omega a^2Ue^{i2(\omega t+\alpha)}-\varrho\omega h\cos\alpha\Gamma e^{i(\omega t+\alpha)}-\varrho\omega hIe^{i\omega t}$$

riferita agli assi fissi, ed il momento risultante rispetto all'origine è

$$M_0=\varrho hU\Gamma\cos\omega t+2\pi\varrho a^2U^2\operatorname{sen}2(\omega t+\alpha).$$

Se si suppone $\alpha=0$, queste espressioni possono ovviamente semplificarsi e possono scriversi

$$R=R_x+iR_y=R_1+R_2+R_3$$
$$M_0=|R_2|h_2+|R_3|h_3,$$

avendo posto

$$R_1=i\varrho U\{\Gamma-2\pi\omega a^2\}$$
$$R_2=6\pi\varrho\omega a^2Uie^{2i\omega t}$$
$$R_3=2\varrho\omega h\{4\pi a^2\omega-\Gamma\}e^{i\omega t},$$

ed avendo indicato con h_2, h_3 i bracci delle forze R_2 e R_3 rispetto all'origine, e con $|R_2|$, $|R_3|$ le grandezze di tali forze.

---

(1) E. CAROFOLI: *Sur le mouvement autour d'une plaque plane en rotation.* Comp. Rendus, Paris, t. 184, 1927; p. 804-806.

(2) B. CALDONAZZO: *Sopra la rotazione uniforme di un solido in un liquido indefinito.* Nuovo Cimento (7), v. 26, a. 69, 1923; p. 25-39.

Il moto riferito ad assi fissi non è permanente; ma per quel che riguarda la determinazione della posizione delle forze agenti sulla lamina e la loro variazione al variare del tempo può essere facilmente studiato.

Noi ci proponiamo appunto di far vedere come con alcune semplici costruzioni geometriche sia possibile assegnare in ogni istante la posizione e la grandezza della forza risultante agente sulla lamina in rotazione uniforme.

1. - Supponiamo in primo luogo che sia $h=0$; la lamina, adagiata inizialmente sull'asse x, abbia cioè il suo punto di mezzo nell'origine e roti uniformemente intorno a tale punto.

L'espressione della forza risultante è allora

$$R=R_1+R_2 \tag{1}$$

e quella del momento risultante rispetto all'origine

$$M_0=|R_2|h_2. \tag{2}$$

Prescindendo per ora dalla forza R_1 che non dipende dal tempo, è costantemente diretta secondo l'asse y, ed è quindi tale che il suo momento rispetto all'origine è zero, si ha subito che il braccio rispetto all'origine della forza R_2 è

$$h_2=\frac{A}{2}\operatorname{sen} 2\omega t \tag{3}$$

avendo posto

$$A=\frac{2U}{3\omega}.$$

L'equazione della linea d'azione di tale forza è dunque

$$x\cos 2\omega t+y\operatorname{sen} 2\omega t=\frac{A}{2}\operatorname{sen} 2\omega t. \tag{4}$$

Si ricava subito allora che *la linea d'azione della forza R_2 passa costantemente per il punto di coordinate* $\left(x=0, y=\frac{A}{2}\right)$.

La linea d'azione (4) incontra la direzione inclinata dell'angolo ωt sull'asse x (cioè — si può dire — la lamina, quantunque la lunghezza di questa possa esser tale che il punto d'intersezione si trovi soltanto sul prolungamento) nel punto P_1 di coordinate

$$x=\frac{A}{2}\operatorname{sen} 2\omega t, \qquad y=A\operatorname{sen}^2\omega t$$

ad una distanza cioè dall'origine (centro di rotazione e punto medio della lamina)

$$\delta=A\operatorname{sen}\omega t.$$

Tale punto si muove dunque al variare del tempo sulla circonferenza

$$x^2+\left(y-\frac{A}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4} \tag{5}$$

che ha per centro il punto fisso per il quale passa costantemente la forza R_2, *ed ha per raggio* $\frac{A}{2}$.

Se a partire dal punto P_1 riportiamo sulla direzione della retta (4) un segmento proporzionale alla grandezza della forza, cioè

$$C_2 = 9k\varrho\omega^2\pi a^2 A = k\,|R_2|$$

(in cui il coefficiente k ha opportune dimensioni) otterremo il punto P_2 di coordinate

$$x = \left(\frac{A}{2} + C_2\right) \operatorname{sen} 2\omega t, \qquad y = (A - 2C_2) \operatorname{sen}^2 \omega t + C_2$$

il cui luogo al variare del tempo è l'ellisse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A + 2C_2}{2}\right)^2} + \frac{\left(y - \frac{A}{2}\right)^2}{\left(\frac{A - 2C_2}{2}\right)^2} = 1 \tag{6}$$

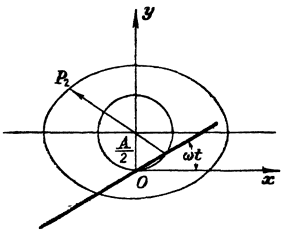


Fig. 1.

di centro $\left(x=0, y=\frac{A}{2}\right)$ e con gli assi paralleli agli assi coordinati.

Si vede facilmente che l'ellisse (6) è tutta esterna alla circonferenza (5).

Poichè queste due curve possono facilmente costruirsi appena sia assegnata la corrente circuito-rotatoria, è chiaro che si potrà in ogni istante disegnare in posizione e grandezza la forza dipendente dal tempo che agisce sulla lamina. Basta infatti congiungere col centro del cerchio (5) il secondo punto d'intersezione della lamina colla circonferenza stessa, e prolungare fino all'intersezione con l'ellisse (6).

2. - La forza R_1 indipendente dal tempo, che del pari agisce sulla lamina, ha, come abbiamo detto, la direzione dell'asse y. Immaginandola applicata nel punto $\left(x=0, y=\frac{A}{2}\right)$, essa potrà facilmente esser composta con la forza R_2.

Diciamo C_1 un segmento proporzionale alla grandezza della forza R_1. L'equazione della linea d'azione della risultante di tutte le forze agenti sulla lamina nel caso ora in esame ($h=0$) è

$$x[C_2 \cos 2\omega t + C_1] + yC_2 \operatorname{sen} 2\omega t = \frac{C_2 A}{2} \operatorname{sen} 2\omega t. \tag{7}$$

Anche la forza risultante passa per ogni valore del tempo per il punto $\left(x=0, y=\frac{A}{2}\right)$.

Il luogo del secondo estremo del suo vettore rappresentativo applicato in $\left(x=0, y=\frac{A}{2}\right)$ è la circonferenza

$$x_2 + \left(y - \left(\frac{A}{2} + C_1\right)\right)^2 = C_2^2$$

di centro $\left(x=0, y=\frac{A}{2} + C_1\right)$ e di raggio C_2.

Il punto di applicazione della forza risultante sulla lamina ha per coordinate

$$x = \frac{C_2 A}{C_1 + C_2} \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t, \qquad y = \frac{C_2 A}{C_1 + C_2} \operatorname{sen}^2 \omega t$$

alla distanza dal centro di rotazione

$$\frac{C_2 A}{C_1 + C_2} \operatorname{sen} \omega t.$$

Al variare del tempo, tale punto descrive la circonferenza

$$x^2 + \left(y - \frac{C_2 A}{2(C_1 + C_2)}\right)^2 = \frac{C_2^2 A^2}{4(C_1 + C_2)^2} \tag{8}$$

tangente all'asse x sull'origine.

Disegnata dunque tale circonferenza, si ha subito la posizione della risultante, congiungendo l'intersezione della lamina con la circonferenza stessa col centro di questa.

3. - Se h è diverso da zero, compare nella espressione della risultante il termine

$$R_3 = 2\varrho\omega h \{4\pi a^2 \omega - \Gamma\}$$

ed in quella del momento risultante rispetto all'origine il termine

$$\varrho U h \Gamma \cos \omega t.$$

Il braccio dunque della forza R_3 rispetto all'origine è

$$h_3 = B \cos \omega t$$

avendo posto

$$B = \frac{U\Gamma}{2\varrho \{4\pi a^2 \omega - \Gamma\}}.$$

L'equazione della linea d'azione della R_3 è allora

$$x \operatorname{sen} \omega t - y \cos \omega t = B \cos \omega t.$$

La forza R_3 passa costantemente per il punto $(x = 0, y = -B)$.

Il punto P di intersezione delle linee d'azione delle due forze R_2 e R_3 ha per coordinate

$$x = (A + 2B) \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t, \qquad y = -B + (A + 2B) \operatorname{sen}^2 \omega t.$$

Il luogo di tale punto è la circonferenza

$$x^2 + \left(y - \frac{A}{2}\right)^2 = \left(\frac{A + 2B}{2}\right)^2$$

che ha per raggio $\frac{A + 2B}{2}$ ed è concentrica alla circonferenza che abbiamo già trovata come luogo del punto d'intersezione della linea d'azione della forza R_2 con la lamina.

La posizione della forza R_3 è quindi molto facilmente determinabile.

Dal punto P riportiamo nella direzione e verso delle due forze R_2 e R_3 due segmenti C_2 e C_3 proporzionali alle grandezze di tali due forze.

Il punto Q, secondo estremo della risultante applicata in P ha per coordinate

$$x=[(A+2B-2C_2)\operatorname{sen}\omega t+C_3]\cos\omega t$$
$$y=[(A+2B-2C_2)\operatorname{sen}\omega t+C_3]\operatorname{sen}\omega t+C_2-B$$

ed il luogo di tale punto al variare del tempo è

$$(9)\quad [x^2+(y-[C_2-B])^2-(A+2B-2C_2)(y-[C_2-B])]^2=C_3^2[x^2+(y-[C_2-B])^2],$$

che è una lumaca di PASCAL che ha il suo punto doppio in $(x=0, y=C_2-B)$.

L'equazione della linea d'azione della risultante delle due forze R_2 e R_3 è poi

$$(10)\quad x[2C_2\operatorname{sen}^2\omega t-C_3\operatorname{sen}\omega t-C_2]-y[2C_2\operatorname{sen}\omega t-C_3]\cos\omega t+$$
$$+[C_2A\operatorname{sen}\omega t+C_3B]\cos\omega t=0$$

la quale retta incontra l'asse y nel punto S

$$y=\frac{C_2A\operatorname{sen}\omega t+C_3B}{2C_2\operatorname{sen}\omega t-C_3}.$$

Componendo infine le tre forze R_1, R_2, R_3, si ottiene come equazione della linea d'azione della risultante

$$(11)\quad x[C_1+C_2+(C_3-2C_2\operatorname{sen}\omega t)\cos\omega t]-$$
$$-y[C_3-2C_2\operatorname{sen}\omega t)\cos\omega t-(C_2A\operatorname{sen}\omega t+C_3B)\cos\omega t=0.$$

La risultante di tutte le forze agenti sulla lamina incontra questa nel punto T di coordinate

$$x=\frac{C_2A\operatorname{sen}\omega t+C_3B}{C_1+C_2}\cos\omega t,\qquad y=\frac{C_2A\operatorname{sen}\omega t+C_3B}{C_1+C_2}\operatorname{sen}\omega t$$

che è il centro di pressione sulla lamina.

Al variare del tempo esso descrive la lumaca di Pascal

$$(12)\quad \left[x^2+y^2-\frac{C_2A}{C_1+C_2}y\right]^2=\frac{C_3^2B^2}{(C_1+C_2)^2}(x^2+y^2)$$

che ha il suo punto doppio nell'origine. Per $h=0$ essa si riduce alla circonferenza (8) che abbiamo già trovata.

La (12) può essere disegnata molto agevolmente appena sia stata assegnata la corrente circuito-rotatoria da studiare: come intersezione della (12) con la retta di inclinazione ωt sulla quale è adagiata la lamina si ottiene il centro di pressione su questa.

Se poi si riporta da T sulla direzione della retta d'azione (11) della risultante un segmento C proporzionale alla grandezza di questa, si ottiene il punto

$$x = \frac{[C_2A - 2C_2(C_1 + C_2)] \operatorname{sen} \omega t + C_3(B + C_1 + C_2)}{C_1 + C_2} \cos \omega t$$

$$y = C_1 + C_2 + \frac{[C_2A - 2C_2(C_1 + C_2)] \operatorname{sen} \omega t + C_3(B + C_1 + C_2)}{C_1 + C_2} \operatorname{sen} \omega t$$

il cui luogo al variare del tempo è la lumaca di Pascal

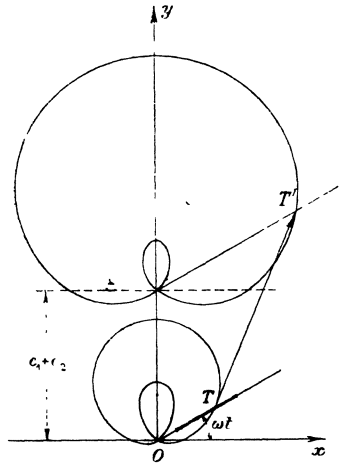


Fig. 2.

$$(13) \quad \left[x^2 + y_1^2 - \frac{C_2A + 2C_2(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2} y_1\right]^2 = C_3^2(C_1 + C_2 + B)^2(x^2 + y_1^2)$$

dove $y_1 = y - (C_1 + C_2)$, che ha il punto doppio nel punto $(x = 0, y = C_1 + C_2)$.

Per mezzo delle due lumache di Pascal (12) e (13), la costruzione della risultante di tutte le forze agenti sulla lamina in rotazione per ogni valore del tempo, è molto semplice.

Come intersezione della lamina con la (12) si determina infatti immediatamente il centro di pressione che è il punto di applicazione della risultante sulla lamina.

Condotta poi dal punto $(x = 0, y = C_1 + C_2)$ la parallela alla direzione della lamina per quel tempo che si considera, se ne determina l'intersezione T' con la lumaca di Pascal (13): il vettore $T' - T$ rappresenterà in grandezza e posizione il vettore rappresentativo della risultante di tutte le forze agenti sulla lamina in rotazione, per quell'istante.

L. S. DA RIOS (Padova - Italia)

SUL PARADOSSO DI DUBUAT

1. - Il moto traslatorio uniforme con velocità **V** d'un corpo attraverso un fluido previamente in quiete equivale dinamicamente (come è ben noto) al movimento di quel fluido con egual velocità e diretta contro il corpo stesso reso immobile. Infatti, al sostituire che si faccia, alla velocità **v** d'un elemento materiale (di massa m) del sistema, la velocità $\mathbf{v}-\mathbf{V}$, non ne varia per questo l'accelerazione **a**, e quindi neppure la corrispondente forza totale **f**; talchè è la medesima equazione $\mathbf{f}=m\mathbf{a}$ che regge il moto nell'uno e l'altro caso. Ne deriva che la resitenza **R** incontrata dal corpo nel suo movimento dev'esser uguale alla forza $\mathbf{R}_1$ da applicarsi ad esso per trattenerlo contro la corrente investitrice.

L'ovvia conclusione teorica non è dall'esperienza suffragata; e vi si contrappone il paradosso che va sotto il nome di DUBUAT, e che afferma essere di fatto $\mathbf{R}_1$ diversa da **R**. Già il ST-VENANT aveva posto il fenomeno in rilievo nella sua Memoria: *Sulla resistenza dei fluidi*; e il FLAMANT ne giustificava poi i risultati sperimentali, osservando che le velocità effettive nei diversi punti della corrente investitrice sono ben lungi dall'essere uguali, come si suppongono (1). Il DUBUAT, per l'acqua, trovò precisamente che, la velocità essendo di circa un metro al secondo, il rapporto tra R_1 ed R per piastre normali è 1,3. Tale discordanza fra R ed R_1 è da N. JOUKOWSKI attribuita a moti vorticosi lungo le pareti del canale; e questo autore ritrovò R_1 uguale ad R rifacendo sostanzialmente la stessa esperienza con assoluta eliminazione di vortici (2).

Avverto infine che EIFFEL insiste nell'affermare che R_1 non fu riscontrato nelle sue esperienze diverso da R; vale a dire che la forza R_1 misurata alla galleria del vento fu sensibilmente ritrovata uguale ad R, ossia alla trazione T occorrente per il trascinamento nell'aria tranquilla (3). Risultato sperimentale questo che appare in contraddizione con quello su citato del DUBUAT, al *tunnel* aerodinamico effettuandosi pure una corrente a contatto di pareti e a sezione relativamente piccola.

---

(1) Cfr. FLAMANT: *Hydraulique*; Paris, Béranger, 1909, pag. 602.

(2) Cfr.: N. JOUKOWSKI: *Aérodynamique*; Paris, Gauthier-Villars, 1916, pagg. 43-46.

(3) Cfr.: G. EIFFEL: *La résistence de l'air*; Paris, Dunot et Pinat, 1911, pag. 42.

Dopo di aver a lungo riflettuto sul fenomeno in parola, mi son deciso a comunicare in proposito alcune considerazioni; dalle quali fatti accertati e d'altronde apparentemente contraddittori possono avere ragione di coesistere.

2. - La resistenza incontrata da un corpo che si muove con velocità costante V, in senso ad un fluido in quiete, dipende (secondo la concezione newtoniana) dall'impulso che il corpo per il suo movimento imprime alle particelle del mezzo ad esso aderenti, e quindi dalla densità del fluido stesso. A vero dire, il fenomeno è ben più complicato; e, fra l'altro, non si potrà escludere che la resistenza sia funzione *diretta* anche della preesistente pressione statistica del fluido. Voglio dire che non solo la resistenza dipende dalla pressione in quanto questa varia con la densità; ma che fluidi a pari densità e diversa pressione possono dar luogo a diversa resistenza. Così, se ad un fluido di densità δ e pressione statica p_0 si sostituisce un fluido della stessa densità e pressione statica p_0', tutte le altre circostanze rimanendo immutate, la resistenza passerà da un valore R ad un valore R'. E come diverse sono a ritenersi le suddette resistenze al moto R ed R', così diverse saranno le forze R_1 ed R_1' che al corpo bisognerà applicare per tenerlo fisso contro l'uno o l'altro dei due fluidi che l'investono colla velocità V anzidetta.

Per il fatto che un fluido omogeneo di densità δ passa dalla quiete ad una velocità V, si sa che la sua pressione passa da un valore p_0 al valore $p_0 - 1/2\delta V^2$. Pertanto, lo stato preesistente di pressione d'una corrente fluida che investe un corpo tenuto fisso è diverso da quello che al fluido compète quando, essendo esso in riposo, venga attaccato dal corpo in movimento. In conformità la resistenza R incontrata dal corpo in moto dev'essere disuguale dalla forza R_1 che lo trattiene contro la corrente. Insomma, se l'impulsione del corpo contro il fluido è da stimarsi uguale all'impulsione del fluido contro il corpo, la resistenza R può essere diversa (anche per uno stesso fluido) dalla forza R_1, perchè diverso è lo stato preesistente di pressione, *caeteris paribus*. E precisamente R_1 sarà uguale non ad R, ma a quella resistenza R' che incontrerebbe il corpo muovendosi colla stessa vetocità V in seno ad un fluido tranquillo della stessa densità δ ma a pressione statica p_0' uguale a $p_0 - 1/2\delta V^2$.

Indicando con p^* la preesistente pressione effettiva (statica o dinamica) del fluido nel quale un corpo si muove o resiste a corrente, parmi lecito asserire a priori che R ed R_1 diminuiscano al diminuire di p^*.

3. - A prescindere dalle varie concezioni alle quali si riferiscono le diverse espressioni della resistenza R al moto, si sa che si può porre in generale

$$R = \delta l^2 V^2 f(\delta, l, V, \ldots);$$

essendo l la misura di un segmento che determina la grandezza del corpo che

si considera rispetto ad altri della stessa forma, e $f(\delta, l, V, \ldots)$ una funzione di grado zero delle predette quantità δ, l, V e di altre che eventualmente si vogliono introdurre. Ad esempio, si è supposto da alcuni che R dipende esplicitamente della viscosità ν del fluido, e da altri che essa dipende dalla comprimibilità. Nel primo caso si è dedotto, in base al principio di omogeneità, $f(\delta, l, V, \nu) = f\left(\frac{Vl}{\nu}\right)$. Nell'ipotesi che R dipenda, oltre che da δ, l, V, anche direttamente da p^*, si osservi intanto che è $p^* = p_0 - 1/2\delta V^2$; e perciò si potrà supporre $f(\delta, l, V, p^*) = f\left(\frac{p^*}{\delta V^2}\right)$, risultando in tal modo $f\left(\frac{p^*}{\delta V^2}\right)$ di grado zero.

4. - Che la resistenza R al moto non sia uguale alla predetta forza R_1 da applicarsi al corpo contro corrente, ossia che i due rispettivi sistemi di moto non siano dinamicamente equivalenti, si può arguire anche dall'equazione fondamentale dell'idrodinamica. Questa si suole scrivere vettorialmente sotto la forma

$$\delta \mathbf{a} = \delta \mathbf{f} - \textit{gradiente}\, p\,; \tag{1}$$

essendo f la forza unitaria di massa e p la pressione dinamica del fluido in un punto generico. Ora, da tale equazione deducendosi appunto $p = p_0 - 1/2\delta v^2$, la componente di *gradiente* p rispetto, ad esempio, all'asse delle x, sarà

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\delta v \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Sostituendo a v il valore v − V, con V costante e supponendosi (per semplicità) che v e V siano dirette secondo l'asse delle x, si ha invece

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\delta (v - V) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Con ciò, supponendosi invariata la forza f di massa, il secondo membro dell'equazione (1) subisce variazione ponendo (v − V) in luogo di v; mentre il primo membro resta immutato. I due sistemi in moto, di cui si è parlato, non possono quindi ritenersi senz'altro equivalenti. Essendo perciò diverso il comportamento della pressione nei due casi di moto in discorso, potrà darsi che diversi siano i valori di R ed R_1; ove si tratti, beninteso, di fluidi reali. Per i fluidi perfetti si sa bene che R ed R_1 risultano nulli, stante il paradosso di D'ALEMBERT.

5. - Ecco allora come si può spiegare la coesistenza dei fatti sopra riferiti:

La forza di resistenza R_1, a corpo fisso, dev'essere minore della resistenza R al moto o della trazione T; ma il divario si accentuerà con la velocità V. Per valori piccoli di V, come possono ritenersi quelli delle esperienze di DUBUAT, le depressioni dinamiche saranno trascurabili rispetto alle inevitabili dissipazioni vorticose. Prevarrà quindi l'effetto vorticoso sulla diminuita pressione del liquido investente. Di qui il maggior valore di R_1. Similmente dicasi circa l'osservazione del FLAMANT.

Quando V aumenti e passi dal valore di 1 metro del DUBUAT al valore di 10 metri al minuto secondo, come nelle esperienze di EIFFEL, la depressione diverrà rilevante, e il suo effetto potrà annullare quello di urto alle pareti della galleria del vento. Si capisce quindi come l'EIFFEL possa aver trovato sensibilmente $R=T$.

Che avverrà quando V aumenti fino, ad esempio, a raggiungere i 100 metri al secondo, ossia 360 Km. all'ora? Il valore di R_1 potrebbe risultare alquanto minore di T. E allora, come dovranno correggersi i dati al tunnel?

La questione mi sembra assai interessante, perchè mi si possa indulgere per averla anche soltanto affacciata.

F. CORINI (Bologna - Italia)

L' ELICA NELLA TRAZIONE FERROVIARIA

Premesse.

Il tipo di propulsione più largamente usato nella locomozione terrestre, e particolarmente nella trazione ferroviaria, è la ruota motrice ad aderenza naturale; soltanto in casi eccezionali e quando si adottino pendenze superiori a quella limite rispetto all'aderenza, vengono impiantate ferrovie a dentiera e funicolari.

Un recente esperimento dell'applicazione all'automobile di un propulsore a reazione non ha dato, come era da prevedersi, buoni risultati.

L'elica invece, che pure è l'unico propulsore adottato nella locomozione aerea ed acquea, non è mai stata applicata alla locomozione terrestre, se si eccettui un recente esperimento su una ferrovia aerea.

Riprendendo un nostro precedente studio (cfr. CORINI: *Étude comparative des divers types de propulsour*, Bulletin de l'Association internationale du congrès des chemins de fer, Octobre 1926) vogliamo determinare in quali casi l'elica può essere utilmente adottata in luogo della ruota motrice ad aderenza naturale, e risolvere i problemi che, dalla adozione dell'elica, sorgono nella trazione ferroviaria.

La ruota motrice ad aderenza naturale.

Consideriamo un locomotore, avente un peso aderente P, i cui motori trasmettano alle ruote motrici uno sforzo di trazione T. Se R è il valore delle resistenze al movimento del locomotore e dei veicoli ad esso rimorchiati, affinchè la locomozione possa iniziarsi, è necessario che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$$R < T \leqslant f \cdot P \tag{1}$$

essendo f il coefficiente di aderenza fra ruote e rotaie.

Raggiunta una velocità V, alla quale corrisponda il valore R' delle resistenze al movimento, la locomozione potrà essere mantenuta se saranno soddisfatte le seguenti condizioni:

$$R' \leqslant T \leqslant f \cdot P. \tag{2}$$

Occorre tener presente che il valore di T può variare nell'intervallo corri-

spondente ad un giro di ruota, anche se i motori non subiscono variazioni di regime; ciò per esempio avviene nelle locomotrici a vapore e a stantuffo.

Se per qualsiasi valore di T sono soddisfatte le condizioni (2), si ha il perfetto rotolamento delle ruote sulle rotaie. La velocità periferica V_p delle ruote motrici è perfettamente uguale alla velocità V di traslazione del treno.

La potenza effettiva comunicata dai motori alle ruote motrici è misurabile con il prodotto $T \cdot V_p$; la potenza trasmessa per aderenza dalle ruote motrici al treno è misurabile con il prodotto $T \cdot V$. Il rendimento del propulsore, ruote motrici ad aderenza naturale, è perciò dato da:

$$\eta = \frac{T \cdot V}{T \cdot V_p} = \frac{V}{V_p}. \tag{3}$$

Nell'ipotesi fatta, che conduce al rotolamento perfetto delle ruote, risulta:

$$\eta = 1. \tag{4}$$

Supponiamo che in qualche istante non sia soddisfatta la seconda condizione della (1). Ciò può avvenire: sia perchè si abbia una locomotiva a sforzo di trazione variabile e sia $T < fP$, in tutto il campo eccetto che in un intorno del valor massimo T' nel quale sia $T > fP$; sia perchè il valore di f subisca delle variazioni in modo da rendere in qualche istante l'aderenza inferiore allo sforzo di trazione. Allora si ha il rotolamento interrotto da qualche istante di slittamento. Si ha allora:

$$V_{\text{medio}} < V_p$$

ed:

$$\eta = \frac{V_{\text{medio}}}{V_p} < 1.$$

Quando sono soddisfatte le condizioni (1) per la locomozione assumendo per f un valore medio, plausibile con le particolari condizioni di esercizio, gli slittamenti dovuti a diminuzioni accidentali di f sono di piccolissima entità e la conseguente diminuzione di rendimento è praticamente trascurabile. Se in ogni istante è: $T > fP$, risulta:

$$V = 0$$

ed:

$$\eta = 0.$$

Si può quindi concludere: *la ruota motrice ad aderenza è un propulsore a rendimento* 1 *quando sono soddisfatte le condizioni della locomozione, e cioè in ogni istante* $R \leqslant T \leqslant fP$; *essa è un propulsore a rendimento nullo se* $T > fP$; può assumere un valore intermedio fra 0 e 1 quando sia, in parte del tempo durante il quale si considera il moto, soddisfatta la prima e in altra parte la seconda delle dette condizioni.

L'elica.

Consideriamo un veicolo ferroviario munito di due eliche; una anteriore traente e una posteriore spingente di caratteristiche e dimensioni identiche (v. fig. 1). Sia T la spinta assiale, Q la coppia e W la potenza spesa per ogni elica.

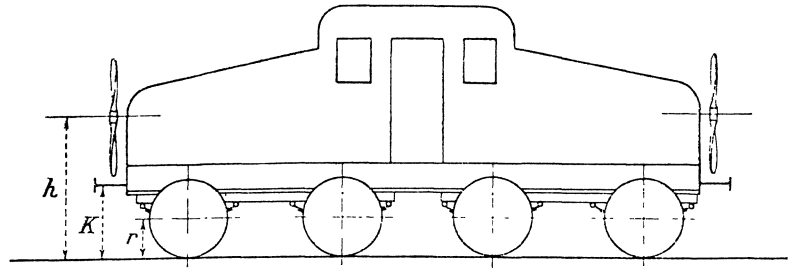


Fig. 1.

La spinta assiale complessiva $F=2T$ applicata all'asse comune delle due eliche EE' può essere considerata sostituita dal seguente sistema:

Forza F_1 applicata alla retta CC' congiungente i centri delle ruote; forza F_2 congiungente i centri dei ganci di trazione; coppia contenuta nel piano meridiano della locomotiva di momento:

$$\mu=F_1(h-r)+F_2(h-K) \tag{1}$$

essendo h, K, r rispettivamente le altezze dell'asse delle eliche, della congiungente i centri dei ganci di trazione, e della congiungente i centri delle ruote sul piano del ferro o in generale sulla via.

La forza F_1 è uguale alla resistenza al movimento della locomotiva: la F_2 è la forza che viene trasmessa ai veicoli rimorchiati. La sostituzione del sistema descritto alla F è assicurata dal collegamento esistente fra le varie parti della locomotiva.

La coppia di momento μ ha per effetto di variare la ripartizione del carico degli assi, che risulta a veicolo fermo.

Gli assi della locomotiva rispetto alla azione della forza F_1 si trovano nelle stesse condizioni di assi rimorchiati qualsiasi e la condizione affinchè il moto abbia luogo è soltanto la seguente:

$$F=F_1+F_2>R_1+R_2 \tag{2}$$

essendo R_1 e R_2 le resistenze al movimento della locomotiva e dei veicoli rimorchiati. Il moto perciò avviene indipendentemente dal peso della locomotiva. Esso dipende unicamente dal valore della spinta assiale delle eliche.

Consideriamo l'elica traente anteriore. Per l'elica considerata e per tutte quelle simili ad esse si ottiene:

$$(3) \qquad \begin{cases} T=\varrho \cdot \tau \cdot R^4 \cdot \Omega^2 \\ Q=\varrho \cdot n \cdot R^5 \cdot \Omega^2 \\ W=\varrho \cdot n \cdot R^5 \cdot \Omega^3 \end{cases}$$

Il coefficiente di spinta τ e il coefficiente di coppia n sono adimensionali e sono funzione del coefficiente di avanzamento:

$$(4) \qquad \gamma = \frac{V}{R \cdot \Omega}.$$

Il rendimento dell'elica è dato da:

$$(5) \qquad \eta = \frac{T \cdot V}{W} = \frac{\tau \cdot \gamma}{n}.$$

L'andamento dei valori $\tau \cdot n \cdot \eta$ in funzione di γ risulta dalla fig. 2.

Il massimo di η può variare da 0,75 a 0,85 e può raggiungere in condizioni particolarmente favorevoli il valore 0,90.

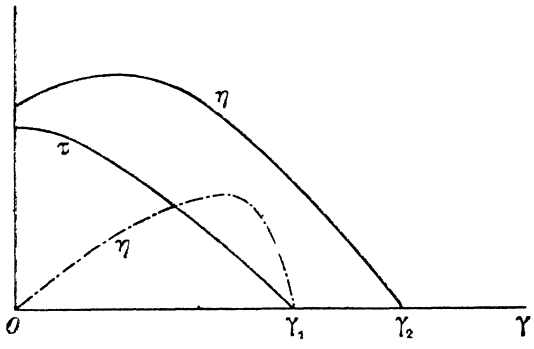


Fig. 2.

Mentre la ruota ad aderenza naturale è un propulsore a rendimento 1 quando sia soddisfatta la condizione della locomozione, l'elica, è un propulsore a rendimento minore di 1 e nella maggior parte dei casi la differenza dell'unità supera il valore 0,15; entrambi i propulsori si prestano a far funzionare i motori ad essi collegati come generatori.

Parrebbe quindi che nella locomozione terrestre fosse sempre da preferirsi la ruota ad aderenza all'elica. Parrebbe che l'elica potesse rendere utili servizi soltanto quando si debbano percorrere livellette con inclinazione superiore alla pendenza limite, rispetto all'aderenza, e non si volessero adottare impianti a dentiera o funicolari.

Ma il punto di vista adottato per il confronto dell'elica con la ruota, non abbraccia il problema nel suo complesso. Infatti, se i rendimenti calcolati per la ruota e per l'elica sono esatti dal punto di vista meccanico, non rispecchiano la utilità del propulsore in quanto viene considerato lavoro utile anche quello speso a imprimere il moto alla locomotiva. Occorre perciò introdurre il concetto di *rendimento del trasporto.*

Rendimento del trasporto.

Definiamo *rendimento del trasporto* il rapporto fra il lavoro corrispondente al percorso del peso rimorchiato (utilizzabile per il trasporto di viaggiatori e di merci) e il lavoro corrispondente al percorso del peso totale del treno (peso rimorchiato e peso della locomotiva).

Detto K un coefficiente, si ha evidentemente:

$$\varepsilon = \frac{K \cdot Q \cdot V}{K \cdot (P + Q) \cdot V} = \frac{Q}{P + Q} \tag{6}$$

in cui:

V è la velocità;

Q è il peso rimorchiato;

P è il peso della locomotiva.

Se il propulsore è costituito da ruote motrici, il massimo valore di ε si ha per:

$$T = 1000\, fP; \qquad P = \frac{T}{1000\, f} \tag{7}$$

T essendo lo sforzo di trazione.

Si ha cioè:

$$\varepsilon = \frac{Q}{\frac{T}{1000\, f} + Q}. \tag{8}$$

Quando l'organo propulsore è l'elica, il peso P non è più legato allo sforzo di trazione dalla (7).

Il peso del locomotore sarà funzione della sua potenza.

Posto:

$$N_c = \frac{T \cdot V}{270} \tag{9}$$

si avrà:

$$P = \varphi(N_c) \tag{10}$$

in cui φ è la caratteristica della funzione. Si noti che per piccole potenze si potranno adottare delle automotrici e allora il peso P non rappresenta più il peso del veicolo nel quale sono installati i motori e i propulsori, ma rappresenterà soltanto il peso dell'equipaggiamento motore-propulsore.

Il rendimento del trasporto sarà allora:

$$\varepsilon' = \frac{Q}{\varphi(N_c) + Q}. \tag{11}$$

Il *rendimento globale* sarà perciò nel caso delle ruote motrici:

$$\theta = \varepsilon \cdot \eta = \frac{Q}{\frac{T}{1000\, f} + Q} \cdot 1.$$

Nel caso dell'elica:

$$\theta' = \varepsilon' \eta' = \frac{Q}{\varphi(N_c) + Q} \cdot \frac{\tau \cdot \gamma}{n}. \tag{12}$$

A seconda che risulti:

(13) $$\theta \gtreqless \theta'$$

sarà più, ugualmente, o meno conveniente la ruota che l'elica.

Risulta da ciò che anche per pendenze inferiori a quella limite può l'elica essere più conveniente della ruota.

Si deve inoltre tenere presente che con l'elica quale propulsore si può adottare il motore a combustione interna in luogo del motore a vapore.

Indichiamo con c' il coefficiente economico del ciclo nel motore a combustione interna e con c il rendimento globale della locomotiva a vapore (prodotto del

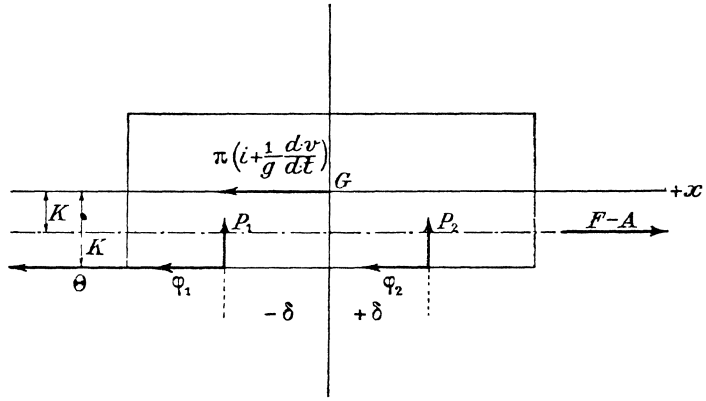


Fig. 3.

coefficiente economico reale del ciclo del vapore per il rendimento della caldaia).

Dovremo allora confrontare i prodotti:

(14) $$\theta_1 = \varepsilon \cdot \eta \cdot c$$
$$\theta_1' = \varepsilon' \cdot \eta' \cdot c'.$$

e la convenienza dell'un sistema rispetto all'altro dipenderà dal verificarsi dell'una o dell'altra delle seguenti diseguaglianza:

$$\begin{cases} \theta_1 < \theta_1' \\ \theta_1 > \theta_1'. \end{cases}$$

Occorre osservare che il valore di $\eta' = \frac{\tau\gamma}{n}$ diviene piccolo per valori dello sforzo di trazione T grandi e per piccoli valori della velocità V del treno.

L'elica può risultare perciò conveniente per treni leggeri a grande velocità.

L'equazione del moto con la trazione ad elica risulta la seguente:

$$F = (\pi + np)\left(r + i + \frac{1000\,\alpha}{g}\frac{dv}{dt}\right) + \theta$$

in cui:

F = spinta totale assiale delle eliche;

π = peso sospeso del locomotore;
n = numero degli assi del locomotore;
p = peso di un asse;
r = resistenza al moto in rettilineo ed orizzontale;
i = pendenza;
a = coefficiente di energia;
g = accelerazione della gravità;
v = velocità;
t = tempo;
θ = sforzo di trazione trasmesso ai veicoli rimorchiati (v. fig. 3 e 4).

Le soluzioni dei problemi relativi alle varie fasi del moto sono analoghe a quelle che si ottengono con la locomotiva ad aderenza: le differenze princi-

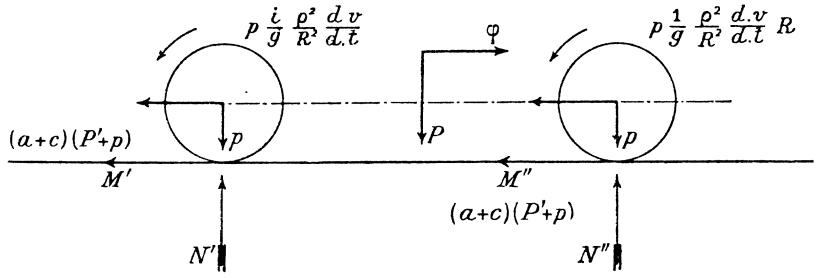


Fig. 4.

pali riguardano la ripartizione del carico sugli assi e la direzione della reazione delle rotaie.

In generale si ha un aumento del peso trasmesso agli assi anteriori ciò che entro certi limiti è a favore della stabilità.

Famiglia di eliche più convenienti.

Occorre anzitutto stabilire per un determinato programma di trazione quale è la famiglia di eliche più conveniente e poscia per un determinato treno, l'elica più conveniente. Sappiamo che in generale valgono le seguenti norme:

a) Quando non siano richiesti sforzi rilevanti all'avviamento e si vogliano buoni rendimenti alle maggiori velocità, sono consigliabili eliche con piccola larghezza complessiva;

b) Quando siano richiesti sforzi rilevanti all'avviamento e alle piccole velocità sono consigliabili eliche di notevole larghezza complessiva;

c) Quando si debbano prevedere funzionamenti entro larghi limiti di velocità occorre prevedere pale di notevole spessore;

d) Quando si preveda il funzionamento soltanto a grandi velocità è consi-

gliabile adottare eliche con sezioni di pale di limitato spessore e molto penetranti, compatibilmente con la resistenza delle pale alle sollecitazioni.

Nella trazione ferroviaria si debbono sviluppare i maggiori sforzi di trazione all'avviamento ed anche alle piccole velocità corrispondenti ai percorsi in forte salita, mentre si debbono in generale prevedere larghi limiti per le velocità di regime, salvo per treni specialissimi, quali treni celeri con pochissime fermate molto distanti fra di loro.

Le eliche più adatte alla trazione ferroviaria sono perciò le eliche di notevole larghezza complessiva e di notevole spessore. In generale si riscontrerà l'oppor-

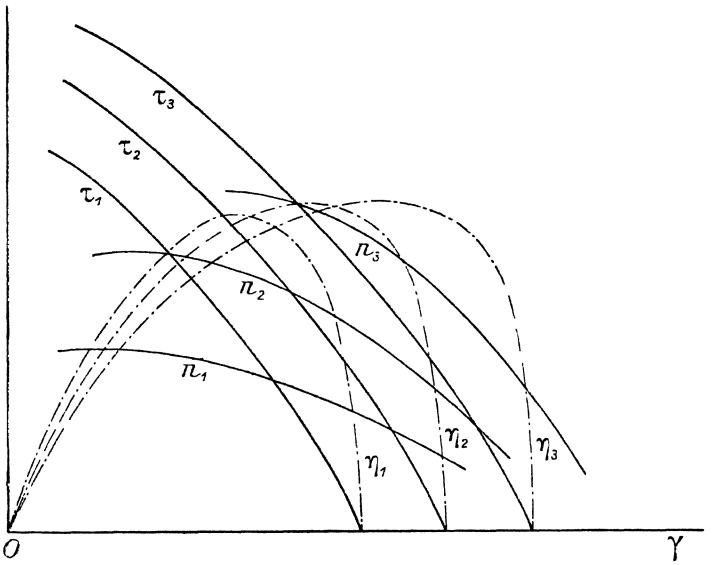


Fig. 5.

tunità di adottare eliche a 4 pale. Per i treni celeri si adotteranno sezioni di elica sottili e molto penetranti.

Fissata con i criteri suesposti la famiglia di eliche da adottarsi per un determinato tipo di treno, fissato cioè il rapporto $\frac{b}{R}$ fra la larghezza totale e il raggio dell'elica, occorre determinare la forma più conveniente cioè il rapporto $\frac{Ha}{R}$ tra il passo areodinamico Ha e il raggio dell'elica.

Nella fig. 5 abbiamo rappresentati i diagrammi per una famiglia di eliche con passi crescenti.

Si scorge cioè la possibilità, con l'uso dell'elica, di adottare per la trazione ferroviaria un motore ad alto coefficiente economico tale da compensare largamente il minor rendimento dell'elica rispetto alla ruota sulle linee a piccola pendenza e nel caso delle automotrici senza rimorchio.

Le conclusioni alle quali siamo giunti sui limiti di utile applicazione dell'elica vanno estese a favore dell'elica quando si prenda in considerazione la possibilità di adottare motori a combustione interna ad alto coefficiente economico.

Elica a passo variabile.

La determinazione dell'elica più conveniente sopra esposta, si riferisce a ben precise condizioni di trazione: per una data potenza W e una data velocità angolare Ω del motore, per una data velocità V del treno l'elica determinata dà il

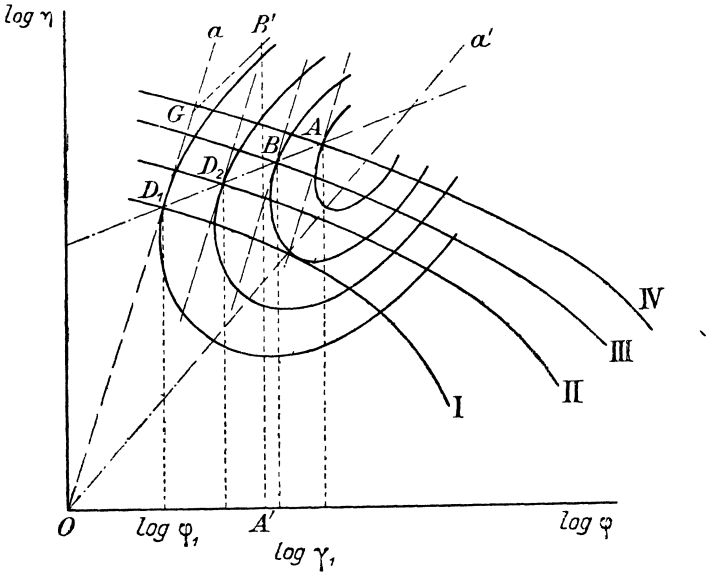


Fig. 6.

massimo rendimento. Ma se varia la velocità V o qualche altro degli elementi suddetti, l'elica dà senz'altro un rendimento minore del massimo. Si può ovviare a questo inconveniente adottando eliche a *passo variabile.* Le pale anzichè essere invariabilmente fisse al mozzo, possano ruotare intorno ad un asse longitudinale.

Per risolvere il problema posto servono i noti diagrammi logaritmici di RITH indicati nella fig. 6.

Diagramma di propulsione.

Nelle locomotive ad aderenza la caratteristica meccanica del motore è omotetica alla curva di propulsione della locomotiva. Nella locomotiva ad elica si determina il diagramma di propulsione: $F=F(v)$ partendo dalla caratteristica meccanica del motore e dai diagrammi caratteristici dell'elica.

Dalla seconda delle (3) si ha:

$$n_1 = \frac{Q_1}{\varrho \cdot R^5 \cdot \Omega^2}.$$

Dal diagramma dell'elica si ricava il γ_1 corrispondente e quindi la:

$$V_1 = \gamma_1 \cdot R \cdot \Omega_1$$

ed inoltre la:

$$\tau_1 = \tau(\gamma_1).$$

Resta fissato:

$$T_1 = \tau_1 \varrho R^4 \Omega_1^2$$

ed in fine:

$$F_1 = 2F_1.$$

Le coppie di valori F_1 e V_1 determinano il diagramma di propulsione. Questo risulta conveniente alla trazione ferroviaria anche se la caratteristica meccanica è quella di un motore a combustione interna e cioè a coppia costante.

Elica a passo variabile.

L'adozione dell'elica a passo variabile permette di ottenere per ogni regime di un treno l'elica più conveniente e permette di realizzare una determinata forma del diagramma di propulsione, rendendo applicabile alla trazione ferroviaria il motore a combustione interna senza intermediari di trasmissioni speciali.

A. LOPERFIDO (Firenze - Italia)

SULLE PROPRIETÀ ESSENZIALI DELLE CARTE USATE DALL'ARTIGLIERIA PER IL TIRO IN DIREZIONE

Sarà, innanzi tutto, giovevole ricordare, in modo succinto, le proprietà generali relative alla sintesi grafica di una superficie sopra un'altra per comprendere meglio lo scopo di questa comunicazione, inspirata da tante esperienze, in pace ed in guerra, relative alla balistica esterna; precisamente al tiro in direzione, concreto e logico nelle sue norme, solo quando non sa prescindere dal metodo differenziale.

Date due superficie in corrispondenza univoca, si può sempre definire la rappresentazione di una di esse sopra l'altra considerando gli elementi lineari:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv_1^2$$
$$ds_1^2 = E_1 du_1^2 + 2F du_1 dv_1 + G dv_1^2$$

e le equazioni parametriche in maniera da potere assumere:

$$ds_1^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2$$

in cui:

$$e = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial u}\right)^2$$
$$f = E_1 \frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial u_1}{\partial v} + F_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v} + \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial u}\right) + G_1 \frac{\partial v_1}{\partial u}\frac{\partial v_1}{\partial v}$$
$$g = E_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial v}\right)^2 + 2F_1 \frac{\partial u_1}{\partial v}\frac{\partial v_1}{\partial v} + G_1 \left(\frac{\partial v_1}{\partial v}\right)^2.$$

L'angolo θ, variabile fra 0 e 2π, che la tangente ad una linea descritta dal punto (u, v) forma con la linea $v = \text{cost.}$, e l'angolo ω delle due linee coordinate, vengono così definiti:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad ; \quad \operatorname{sen}\omega = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds} + F\frac{dv}{ds}\right)$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}$$

da cui:

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E\frac{du}{dv} + F}{\sqrt{EG - F^2}}$$

L'angolo θ, corrispondente sull'altra superficie è analogamente definito:

$$\operatorname{cotg}\theta_1 = \frac{e\frac{du}{dv} + f}{\sqrt{eg - f^2}}$$

e quindi soltanto la condizione:

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G}$$

potrà determinare l'uguaglianza:

$$\theta_1 = \theta.$$

In tal caso la rappresentazione si dice *autogonale, isogonica* o *conforme.*

Indicando con $n = \frac{ds_1}{ds}$ il modulo della deformazione lineare, e con $m = \frac{dS_1}{dS}$ il modulo superficiale, ogni rappresentazione autogonale sarà così enunciata:

$$n = \text{cost.}; \qquad m = \text{cost.}; \qquad \theta_1 - \theta = \delta = 0.$$

Allora se $n > 1$ vi sarà allungamento, ed espansione quando $m > 1$; se $n < 1$ si manifesterà un accorciamento, come nel caso di $m < 1$ si avrà una contrazione.

Ma la conoscenza di n, che occorre per definire una rappresentazione, scaturisce da un ragionamento analogo a quello relativo alla curvatura delle sezioni normali. Perchè se si assume:

$$n = \frac{x^2 + y^2}{u^2 + v^2}$$

e si ammettono le corrispondenze:

$$x = x(uv), \qquad y = y(uv)$$

e le correlazioni di e, f e g; sostituendo in:

$$ds_1^2 = eu^2 + 2fuv + gv^2$$

i valori seguenti:

$$u = ds \cos\alpha; \qquad v = ds \operatorname{sen}\alpha$$

in cui α rappresenta l'azimut di ds_1, si avrà:

(1) $$n^2 = e\cos^2\alpha + 2f \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + g\operatorname{sen}^2\alpha.$$

Adunque il modulo di deformazione lineare si trova connesso al valore dell'azimut ed alla posizione del punto; infatti i coefficienti e, f e g sono funzioni di u e v come nel caso della curvatura delle sezioni normali nel punto sopra una superficie.

Assumendo

$$\xi = \frac{\cos\alpha}{n} \quad ; \quad \eta = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{n}$$

l'equazione precedente diventa:

$$1 = e\xi^2 + 2f\xi\eta + g\eta^2$$

e può segnalare la forma dell'indicatrice dei moduli col valore del discriminante $eg - f^2$.

Se, in un campo infinitesimo, intorno al punto P, sopra gli elementi lineari che spiccano dal medesimo punto, si staccano segmenti proporzionali ad $\frac{1}{n}$, si potrà descrivere l'indicatrice dei moduli relativi, e così, per tang $\alpha=\theta$, si avrà, sostituendo e poi derivando:

$$n^2\theta+\frac{1}{2}\frac{\partial n^2}{\partial\theta}(1+\theta^2)=f+g\theta.$$

Con la condizione di *massimo* e di *minimo*, si ottiene:

$$n^2\theta=f+g\theta$$

e poi, per coesistenza, l'equazione:

$$n^4-(e+g)n^2+(eg-f^2)=0$$

le cui radici N_1^2 ed N_2^2 rappresentano i moduli principali delle deformazioni lineari; quindi:

$$N_1^2+N_2^2=e+g\,;\qquad N_1N_2=\sqrt{eg-f^2}.$$

L'azimut di N_1 ed N_2 si ottiene derivando la (1) e perciò:

$$\text{tang } 2\alpha=\frac{2f}{e-g}.$$

Supponendo infine l'indicatrice orientata in modo che risulti $f=0$, si avrà una formola analoga a quella di Eulero, ossia:

$$n^2=e\cos^2\alpha+g\,\text{sen}^2\,\alpha$$

e poichè allora:

$$e=N_1^2\quad;\quad g=N_2^2$$

così sarà:

(2) $$n^2=N_1^2\cos^2\alpha+N_2^2\,\text{sen}^2\,\alpha.$$

Con $\alpha=45^\circ$ resta definita la media aritmetica:

$$n^2=\frac{1}{2}(N_1^2+N_2^2)$$

ossia il *modulo lineare armonico* adagiato sulla bisettrice dell'angolo retto di due direzioni principali, mentre, considerando ancora il modulo:

$$n_1^2=N_1^2\,\text{sen}^2\,\alpha+N_2^2\cos^2\alpha$$

ortogonale al primo, si ricava lo *scostamento circolare*, ossia:

$$n^2-n_1^2=(N_1^2-N_2^2)\cos 2\alpha.$$

Infine la condizione:

$$n^2+n_1^2=N_1^2+N_2^2=\text{cost.}$$

prova che due elementi ortogonali corrispondono sempre agli elementi principali, con modulo a valore massimo e minimo, e, soltanto nel caso in cui l'indicatrice dei

moduli è un circolo, la rappresentazione diventa autogonale, ossia quando $N_1 = N_2$; ed allora $\delta = 0$.

In ogni altro caso si potrà calcolare il valore massimo di δ con la relazione:

$$\text{tang } \delta_m = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{N_2}{N_1}} - \sqrt{\frac{N_1}{N_2}}\right).$$

Per l'autalicità:

$$m = N_1 N_2 = 1.$$

* * *

La Carta autogonale, definita col metodo conico di Lambert, utile nella rappresentazione delle plaghe geografiche estese in longitudine, e quella che corrisponde alla proiezione di Gauss, convenientissima per le regioni estese lungo il meridiano, nonchè la formazione delle mappe catastali, hanno un reticolato geografico ortogonale.

Celebre, per la storia della cartografia razionale, è il metodo di Mercatore che utilizza la latitudine crescente, ossia la così detta funzione di Mercatore, cioè:

$$U = 7915{,}705 \log \text{tang}\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) - 22{,}945 \text{ sen } \varphi - 0{,}051 \text{ sen}^3 \varphi.$$

* * *

Per formare una Carta topografica non è dunque arbitraria la scelta del metodo più opportuno, perchè bisogna ricordare che qualsiasi lavoro di tal genere non è soltanto l'utile opera del disegno e della stampa; ma ancora, ed essenzialmente, la conclusione di formole matematiche segnalate dalla geometria differenziale ed applicate con un criterio di confronto e di relatività, e non mai con l'imperialismo di un giudizio assoluto.

Così, mentre la genesi della *lossodromia* esclude la rappresentazione *cilindrico-autogonale* dalle regioni polari e, per me, anche dall'aereonautica, nel Catasto geometrico non è essenziale la rappresentazione autalica.

Anche per il tiro in direzione la rappresentazione autogonale non è assolutamente necessaria, perchè allora possono essere utilizzate le Carte autaliche con una deformazione angolare massima relativa, non superiore al millesimo convenzionale, ossia a circa 3′22″,5 per ogni gittata che non oltrepassi i 30 Cm.

E qui devo ricordare che tutte le Carte militari, costruite con sufficiente precisione, possono consentire il valore probatorio delle coordinate euleriane di un bersaglio rispetto ad un radiante balistico. Ecco perchè in tutte le Carte topografiche vi può essere sempre un reticolato ortogonale ausiliario.

In tutti i casi la posizione del bersaglio è un punto di un quadrilatero che può anche essere riferito al principio della *Finestra di Viviani* identificato, alla maniera cartesiana, con origine nel vertice S. O. ed in unità lineari, allo scopo di non creare contrasto col grado di precisione della Carta medesima.

I tre elementi che l'Artiglieria deve ricavare da una Carta sono, come tutti sanno:

distanza
dislivello } con l'approssimazione di $\frac{n}{5000}$

orientamento con l'approssimazione corrispondente alla precisione consentita dai goniometri e dalla reale derivazione del cannone.

Ora, col metodo di Cassini, che considera un cilindro tangente alla sfera terrestre lungo un meridiano, si ottiene:

$$\delta_m = \frac{y}{4R^2 \operatorname{arc} 1''}; \qquad m = 1 + \frac{y}{2R^2}$$

e, conseguentemente, per $y = 200$ Cm.:

$$\delta_m = 51''; \qquad m = 1{,}0005.$$

Così fu costruita la Carta di Francia e del Regno delle due Sicilie; la prima con origine a Parigi, l'altra nel punto dove il meridiano di Capodimonte taglia il 40mo parallelo geografico.

Più tardi la Francia adottò il metodo *autalico pseudo-conico* di Bonne, per cui:

(4) $$\operatorname{tang} \delta_m = \frac{1}{2}\,\omega \operatorname{arc} 1'' \left(\operatorname{sen} \varphi_0 - \frac{r}{R}\right)$$

quindi per

$$\varphi_0 = 45°; \qquad \varphi = 48{,}30'; \qquad \omega = -7°$$

si ottiene:

$$\delta_m = 18'\,15''.$$

Ma la Francia abbandonò, in tempo di guerra, il metodo di Bonne, per assumere quello *conico-ortogonale* di Lambert.

* * *

Nella Carta d'Italia, caso particolare di quella di Bonne, perchè in ogni suo foglio al 100000 i paralleli, distanti di 20′, sono rettilinei ed i meridiani, sinusoidali, connessi a 30′ di longitudine:

$$\delta_m = \frac{15'}{2} \operatorname{sen} \varphi$$

e nel caso di $\varphi = 45°$

$$\delta_m = 5'\,15''.$$

Quando $n = 50000$, allora:

$$\delta_m = 2'\,38''$$

ed, infine, per $n = 25000$, si ottiene:

$$\delta_m = 1'\,18''.$$

L'Artiglieria usando le così dette tavolette al 25000, quando la gittata non deve superare i 14 Cm., corre il rischio di alterare l'orientamento iniziale di circa $^1/_3$ di millesimo convenzionale; ed allora che cosa si può desiderare di più

se con il goniometro è consentita la precisione di 3'22" ad ogni puntamento? E nacquero così tante motivazioni che proponevano di sostituire la proiezione naturale col metodo della Carta gnomonica a cui era ricorso Elia de Beaumont per la sua concezione pentagonale.

E così le nostre tradizioni cartografiche, luminosamente iniziate dai nostri cauti predecessori, ebbero una raffica di nebbia che ora va completamente dileguandosi.

* * *

Ora, data una Carta topografica, per il suo utile uso nel tiro dell'Artiglieria, quando non sia possibile considerare con le norme della geodesia operativa la posizione del bersaglio in un campo determinato e dedurne la correzione topografica, si ricorre, come è stato accennato, ad un altro reticolato geografico con la successione, per esempio, di 20" per la longitudine e di 15" per la latitudine. Resta così individuato un insieme di quadretti in ognuno dei quali — con l'origine al vertice S. O. — si avrà, per la posizione del bersaglio e nel caso della proiezione naturale:

$$x = \frac{1}{25} N \cos\varphi(\omega - \omega_0) \text{ arc } 1''$$

$$y = \frac{1}{25} \varrho_m(\varphi_0 - \varphi) \text{ arc } 1''.$$

Attribuendo poi ai fusi di questo reticolato ausiliario numeri crescenti, da ovest ad est, fra 10 e 99, ed alle striscie numeri crescenti da 1000 a 9900, verso sud, con l'intervallo costante di 100, si avrà per il punto A appartenente al quadretto 6612:

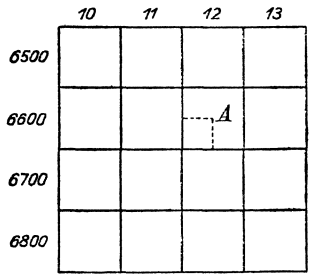


Fig. 1.

$$x = 8^{m/m},4; \qquad y = 6^{m/m},2.$$

Il problema inverso, che ha lo scopo di far conoscere le coordinate geografiche quando siano date le coordinate cartesiane, viene risoluto con le seguenti equazioni:

$$\varphi = \varphi_1 + \frac{y}{\Delta} 15''; \qquad \omega = \omega_0 + \frac{x}{\Delta_1} 20''$$

in cui Δ indica la lunghezza in millimetri dell'arco di 15" di meridiano e Δ_1 la lunghezza, espressa nella stessa unità, dell'arco di parallelo con l'amplitudine di 20".

Con questo procedimento dunque possono essere segnati sulle Carte italiane per il tiro in direzione: le posizioni delle batterie di medio e grosso calibro, gli osservatorî ed i capisaldi di orientamento.

Nella guerra mondiale l'Armata francese, che aveva adottato per lo stesso scopo il metodo autogonale di Lambert, per il territorio italiano si riferì al meridiano di Roma ed al 46° parallelo; ma il reticolato ausiliario era definito in unità chilometriche sopra una Carta alla scala di 1:20000.

Le ascisse rappresentavano così un fascio di rette parallele alla tangente al 46° parallelo nel punto comune col meridiano della Carta, e le ordinate, i meridiani, dopo avere subito la rotazione di $0'',72\omega$ allo scopo di raddrizzarli su quello di Roma.

Il reticolato così definito è un insieme continuo di quadrati unitarî e perciò sembra più facile l'uso della Carta, mentre poi, allo scopo di un segno invariabile, le coordinate sono riferite ad un'origine arbitraria per cui le ascisse crescono verso nord e le ordinate verso est.

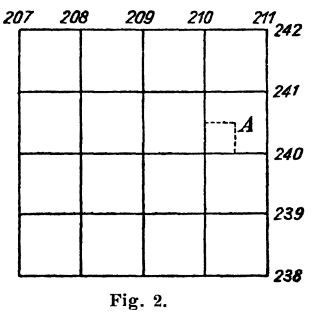


Fig. 2.

La posizione di un punto A resta dunque allora determinata rispetto al vertice S. O. con l'approssimazione di 10^m nel valore delle coordinate, mentre, per la scala della Carta, la precisione relativa sarebbe di $\frac{20000}{5000} = 4^m$.

Ma, pur riferendosi allo stesso parallelo 46°, e nel caso di gittate non superiori ai 25 Cm., le nostre Carte quadrettate ammettono, con la più razionale precisione, la possibilità di rendere minima la deformazione angolare.

La nostra Carta perciò — anche nel campo della balistica esterna — durante la guerra rimase integrale nella sua concezione algebrica e fu molto utile. I combattenti per i primi resero questo omaggio alle tradizioni scientifiche del nostro Istituto.

* * *

Ora, giova pure accennare che per utilizzare gli elementi geografici della triangolazione austriaca durante l'ultimo periodo di guerra, bisognò concordare i due reticolati, ossia eliminare dai valori delle coordinate geografiche e dell'azimut l'equazione delle relative deviazioni, causa principale dell'accennata discordanza.

Per alcuni, questa ineguaglianza doveva invece dipendere dalla diversità delle equazioni corrispondenti alle Carte limitrofe. Niente di più assurdo che questa asserzione, perchè è precisamente l'orientamento dell'ellissoide terrestre sul geoide, all'origine delle coordinate geografiche, che può spiegare le perturbazioni di uguale ordine per la latitudine e la longitudine di tutti i punti al confine, variabili poi soltanto con la distanza.

Nei due accennati punti infatti i coseni di direzione della normale all'ellissoide, e della verticale non possono essere identici per la diversità di forma delle due superficie che non sono nè coincidenti, nè parallele.

Infatti, per l'ellissoide si avrà:

$$\frac{x}{N} = \cos\varphi \operatorname{sen}\omega = \cos\alpha\,; \qquad \frac{y}{N} = \cos\varphi\cos\omega = \cos\beta$$

$$\frac{z}{N(1-e^2)} = \operatorname{sen}\varphi = \cos\gamma$$

mentre per la verticale al geoide si avrà nello stesso punto:

$$\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial x} = \cos l \operatorname{sen} L = \cos \alpha_1$$
$$\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial y} = \cos l \cos L = \cos \beta_1$$
$$\frac{1}{g}\frac{\partial W}{\partial z} = \operatorname{sen} l = \cos \gamma_1$$

g rappresenta l'accelerazione di gravità.

Ora φ ed ω sono calcolati con serie attraverso plaghe geografiche non uniformi, mentre l ed L vengono determinati con osservazioni dirette alle stelle fisse. Quando si orienta l'ellissoide sul geoide, allora si è costretti a considerare le uguaglianze giammai coesistenti:

$$\alpha = \alpha_1 ; \qquad \beta = \beta_1 ; \qquad \gamma = \gamma_1 .$$

Inoltre, considerando le deviazioni locali:

$\xi = \varphi - l$ *componente normale*;
$\eta = (\omega - L) \cos \varphi = (\alpha - A) \operatorname{cotg} \varphi$ *componente ortodromica*;

saranno comprese nei vertici di confine le equazioni dell'attrazione:

$$\xi - \xi_1 = \text{cost.}$$
$$\eta - \eta_1 = \text{cost.}$$

le quali, riferite alla semplice transitività matematica, consentono il ragguaglio dei due reticolati con una traslazione ed una rotazione.

Con questa nozione logica, mai a contrasto con i principî fondamentali della geodesia, la regola accennata conduce anche alla più sicura definizione delle frontiere geografiche, ed altresì alla più opportuna applicazione nel caso che si voglia definire il geoide in una data regione con la regola dei profili lineari. Perchè se H_1 ed H_2 rappresentano le quote altimetriche di due punti $A_1(\varphi_1 \cdot \omega_1)$ ed $A_2(\varphi_2 \cdot \omega_2)$ dell'ellissoide iniziale, e congiunti fra loro geodeticamente, si avrà:

$$H_2 - H_1 = -a \int_{A_1}^{A_2} (\xi d\varphi + \eta \cos \varphi d\omega)$$

indipendentemente dall'orientamento, cioè dal percorso geometrico.

Lungo un meridiano invece si ottiene semplicemente:

$$H_2 - H_1 = -a \int_{A_1}^{A_2} \xi d\varphi$$

ed ecco perchè è utilizzata allora la livellazione astronomica nel metodo delle aree.

* * *

Con la caratteristica del moto planetario, che si può attribuire al lungo tragitto d'un proiettile a grande potenza, sorgono altre ineguaglianze che valgono a giustificare tutto ciò che è stato enunciato per la più logica rappresentazione topografica, utile anche all'Artiglieria.

Se dunque, nel moto dei proiettili, sono previste le ineguaglianze dovute alla precessione ed alla nutazione, e quella, non ancora definita in modo concreto, relativa alla derivazione, si scorgeranno effetti corrispondenti assai più grandi di quelli connessi ad un metodo qualsiasi di sintesi grafica; ed allora si può benissimo escludere il giudizio aprioristico, quando occorre stabilire le equazioni di una Carta.

La designazione, insomma, deve avere un ordine comparativo, e giammai assoluto, e basta per ciò ricordare come LAPLACE definisce il dislivello ortometrico fra il radiante balistico ed il punto di caduta del proiettile.

Trattando adunque il problema del tiro di Artiglieria con l'ausilio del metodo differenziale, si potrà — volta per volta, ben ragionando — vedere quale possa essere il miglior modo di rappresentazione geometrica del campo balistico rispetto a tutte le inuguaglianze che non possono lasciare alcuna incertezza.

S. TIMOSHENKO (Ann Arbor - U. S. A.) (1)

THE STIFFNESS OF SUSPENSION BRIDGES

The strength of a brigde depends not only on the strength of material used, but also on the elastic stability of members of the structure. The most favorable conditions from the point of view of stability, will be obtained when the principal members of the structure are in tension. Such conditions are fulfilled in suspension bridges, and this is one of the reasons why this is so often used in large modern structure.

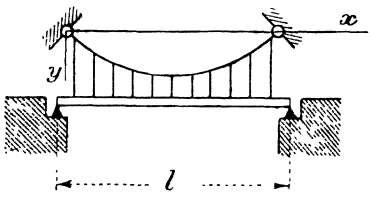


Fig. 1.

In order to explain the various methods of analysing stresses in a suspension bridge, let us consider the simplest case of a one-span bridge (fig. 1). The bridges are usually so assembled that the dead load is completely taken by te cable. Let H_0 be the horizontal component of the cable stress, produced by the dead load, $w=$ the intensity of that load. Thus, taking the axes as shown in the figure, the equation of the initial curve of the cable will be

$$H_0 \frac{d^2y}{dx^2} = -w. \tag{1}$$

Let us imagine now a live load of an intensity p (2) acting on the truss. Part of this load will be transmitted to the cable, and part will produce bending of the truss. Let q be the intensity of the load transmitted to the cable, η the deflection of the truss, and βH_0 the increase of cable stress. Then, the curve of the cable after loading will be

$$H_0(1+\beta)\frac{d^2(y+\eta)}{dx^2} = -(w+q). \tag{2}$$

From (1) and (2), the load transmitted to the truss will be

$$p-q = p-\beta w + H_0(1+\beta)\frac{d^2\eta}{dx^2}$$

(1) Professor of Engineering Mechanics, University of Michigan.

(2) p is a known function of x.

and the differential equation of the deflection curve of the truss can be written as follows:

$$EI\frac{d^4\eta}{dx^4}=p-\beta w+H_0(1+\beta)\frac{d^2\eta}{dx^2}. \tag{3}$$

This equation can be solved without any difficulty, if the quantity β is known. For determination of this quantity, the energy equation is usually applied.

If, during the application of the live load p, T is the work donc by the load's acting on the cable, and V the increase in the potential energy of the cable, then

$$V=T. \tag{4}$$

From (3) and (4), the quantity β and the deflections η can be calculated.

The usual method of solution of equations (3) and (4), is a cut and try method. Assuming a certain value for β, the deflections can be calculated from (3). Knowing the deflections, the work T can be determined, and if it satisfies equation (4), the quantity taken for β is correct; otherwise the calculations should be repeated with a new assumed value for β.

The problem can be simplified, and β can be calculated directly by representing the deflection curve of the truss in the form of the following trigonometrical series:

$$\eta=a_1\sin\frac{\pi x}{l}+a_2\sin\frac{2\pi x}{l}+a_3\sin\frac{3\pi x}{l}+\ldots. \tag{5}$$

The coefficients a_1, a_2, a_3,.... can be calculated without any difficulty in each particular case by using the principle of virtual displacements ([1]). Knowing these coefficients as functions of β, and substituting (5) in expression for the work T on the right side of equation (4), an equation for calculating β will be obtained.

The numerical calculations made show that the series (5) is a very quickly convergent series, and that all the calculations are simpler than by using the cut and try method.

The method described can be applied without any difficulty in the case of a bridge with three spans, not only for continuous, but also for concentrated, loads. It can be applied also in cases where the rigidity of the truss varies along the length of the bridge.

([1]) Some examples of such calculations can be found in the writer's paper: *The stiffness of suspension bridges.* Proc. A. S. C. E., Vol. 54 (1928), p. 1464.

G. KOLOSSOFF (Leningrad - U. S. S. R.)

SUR L'APPLICATION DES DIAGRAMMES COMPLEXES (IMAGINAIRES) DANS LA THÉORIE DE LA RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX

1. - Moments d'inertie des systèmes plans.

Soit M_k (masse m_k) un système de points situé dans un plan, que nous prendrons pour plan Oxy d'un système de coordonnées rectangulaires et soient

$$I_x=\Sigma m_k y_k^2, \qquad I_y=\Sigma m_k x_k^2$$

les moments d'inertie autour Ox, Oy, et

$$I_{xy}=\Sigma m_k x_k y_k$$

le moment centrifuge. Dans la théorie de la resistance des matériaux, il est souvent nécessaire de déterminer les moments autour Ox_1, Oy_1 qu'on obtient en tournant les axes Ox, Oy autour du point O d'un angle θ; nous avons les formules de transformation des coordonnées:

$$x=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta, \qquad y=x_1\sin\theta+y_1\cos\theta$$

ainsi que

$$x+iy=(x_1+iy_1)e^{\theta i} \qquad i=\sqrt{-1})$$

et

$$x^2-y^2+2ixy=(x_1^2-y_1^2+2ix_1y_1)e^{2\theta i}.$$

En appliquant cette formule au point $M_k(x_k, y_k)$, en multipliant par m_k et en sommant:

$$I_y-I_x+2iI_{xy}=e^{2\theta i}(I_{y_1}-I_{x_1}+2iI_{x_1y_1}).$$

Il est évident que $I_x+I_y=I_{x_1}+I_{y_1}$, et nous trouvons la construction suivante pour déterminer I_{x_1}, I_{y_1}, $I_{x_1y_1}$ au moyen des I_x, I_y, I_{xy}. Construisons un diagramme des quantités complexes et M le point

$$I_y-I_x+2iI_{xy}(I_y-I_x=OE,\ 2I_{xy}=ME).$$

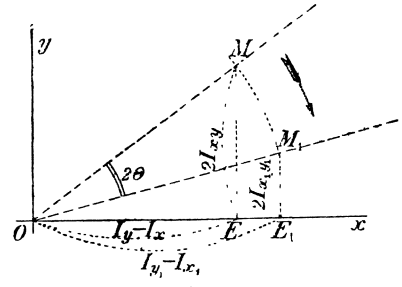


Fig. 1.

Nous obtiendrons le point $I_{y_1}-I_{x_1}+2iI_{x_1y_1}(M_1)$ en tournant le rayon vecteur OM dans le sens de la flèche d'un angle 2θ et nous trouverons

$$M_1E_1=2I_{x_1y_1}, \qquad (OE_1=I_{y_1}-I_{x_1}).$$

En connaissant $I_{x_1}+I_{y_1}=I_x+I_y$ nous trouvons immédiatement I_{x_1}, I_{y_1}.

Pour construire les axes principaux d'inertie, il faut prendre θ de manière que $M_1E_1=I_{x_1y_1}=0$ ainsi que OM_1 coincide avec Ox; $\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2I_{xy}}{I_y-I_x}$ comme on le démontre dans les cours. Cette construction est plus simple et évidente que les constructions du cercle de Mohr et la méthode de Culmann.

2. - La transformation des tensions dans les problèmes plans d'élasticité.

Soient X_x, Y_y, X_y les trois tensions sur les éléments perpendiculaires aux axes Ox, Oy et X_{1x_1}, Y_{1y_1}, X_{1y_1} les tensions par rapport aux axes Ox_1, Oy_1.

Nous avons les formules de transformation:

$$X_x+Y_y=X_{1x_1}+Y_{1y_1}, \qquad Y_y-X_x+2iX_y=e^{2\theta i}(Y_{1y_1}-X_{1x_1}+2iX_{1y_1})$$

et nous trouvons pour la détermination de X_{1x_1}, Y_{1y_1}, X_{1y_1} le même diagramme; nous trouvons les tensions principales en tournant les axes d'un angle θ tel que $\operatorname{tg} 2\theta=\frac{2X_y}{Y_y-X_x}$.

3. - Distribution des efforts dans le problème plan d'élasticité au moyen de deux fonctions de la variable complexe.

Soient $F(\zeta)$ et $\Phi(\zeta)$ deux fonctions de la variable complexe $\zeta=x+iy$, $F_1(\zeta_1)$, $\Phi_1(\zeta_1)$, $\zeta_1=x-iy$ les valeurs de $F(\zeta)$, $\Phi(\zeta)$, ζ quand i est changée en $-i$. La distribution des efforts est donnée au moyen des formules:

$$2X_y+i(X_x-Y_y)=-\frac{i\zeta_1}{2}F'(\zeta)+\Phi(\zeta)$$

$$X_x+Y_y=R(F(\zeta))$$

$$4\mu(a+iu)=-\frac{i\zeta_1}{2}F(\zeta)+\int\Phi(\zeta)d\zeta+\frac{i(\lambda+3\mu)}{2(\lambda+\mu)}\int F_1(\zeta_1)d\zeta_1$$

où $R(F(\zeta))$ est la partie réelle de $F(\zeta)$, u, a sont les deplacements d'un point suivant les axes, λ, μ sont les coefficients d'élasticité (Lamé).

La distribution des efforts (théorème de M. Lévy) ne dépend pas des coefficients λ, μ [1].

---

[1] Voir Comptes rendus, t. 180, 181 (1925).

F. BOULAD BEY (Cairo - Egitto)

SUR LE CALCUL EXACT ET PRATIQUE DES POUTRES CONTINUES DE PONTS DE FORME QUELCONQUE

On sait que les lignes d'influence dans les poutres continues, une fois établies en tenant compte de la variation des dimensions de ses divers éléments, offrent l'avantage de permettre un calcul rapide et exact de la résistance de ces poutres sous l'action d'une surcharge quelconque.

Nous croyons qu'on n'a pas encore donné un procédé expéditif pour tracer graphiquement les lignes d'influence des efforts dans les éléments des travées intermédiaires d'une poutre continue de forme quelconque posée sur appuis simples. Les méthodes employées conduisent à des calculs et des tracés très longs et fastidieux.

Nous pensons donc qu'il est utile de présenter ici une nouvelle méthode graphique générale et pratique pour le tracé de ces lignes dans le cas des poutres continues posées sur un nombre d'appuis variant de trois à cinq et d'indiquer l'extension de l'application de cette méthode au cas d'un nombre d'appuis supérieur à cinq.

Soit (S) la ligne d'influence des efforts dans un élément quelconque S (fig. 1) d'une travée intermédiaire A_1A_2 d'une poutre continue sur cinq appuis A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Cette méthode ramène la détermination de cette ligne (S) au cas où cette poutre serait supposée reposant uniquement sur ses deux appuis extrêmes A_0 et A_1.

En effet, soit (R_0) et (R_1) diag. 1 les deux lignes d'influence respectives des réactions des deux appuis A_0 et A_1 supposées déterminées, A_0B_0 diag. 2 l'ordonnée en A_0 de la ligne (R_0) et J le point de rencontre de la verticale de l'appui A_1 avec la droite B_0s joignant le point B_0 et le point de projection s du noeud opposé à l'élément S sur la droite A_0A_4. Donnons ci-après, l'énoncé du nouveau théorème sur la détermination géométrique immédiate de la ligne d'influence (S) communiqué tout récemment par nous à l'Académie des Sciences de Paris [1].

THÉORÈME. - *Les ordonnées de cette ligne d'influence sont représentées par les segments verticaux intérieurs aux zones hachurées et pointillées*

---

[1] *Sur la détermination géométrique des lignes d'influence dans les poutres continues de forme quelconque* (C. R. Séance du 3 septembre 1928).

comprises entre les deux lignes suivantes: 1°) *La ligne d'influence* (A_0'') *des efforts dans cet élément S dus à une charge isolée* $P=-1$ *agissant dans cette poutre supposée à une seule travée* A_0A_4 *rapportée à la droite* B_0A_4; 2°) *La ligne d'influence* (r_1) *des réactions de l'appui* A_1, *à ordonnées*

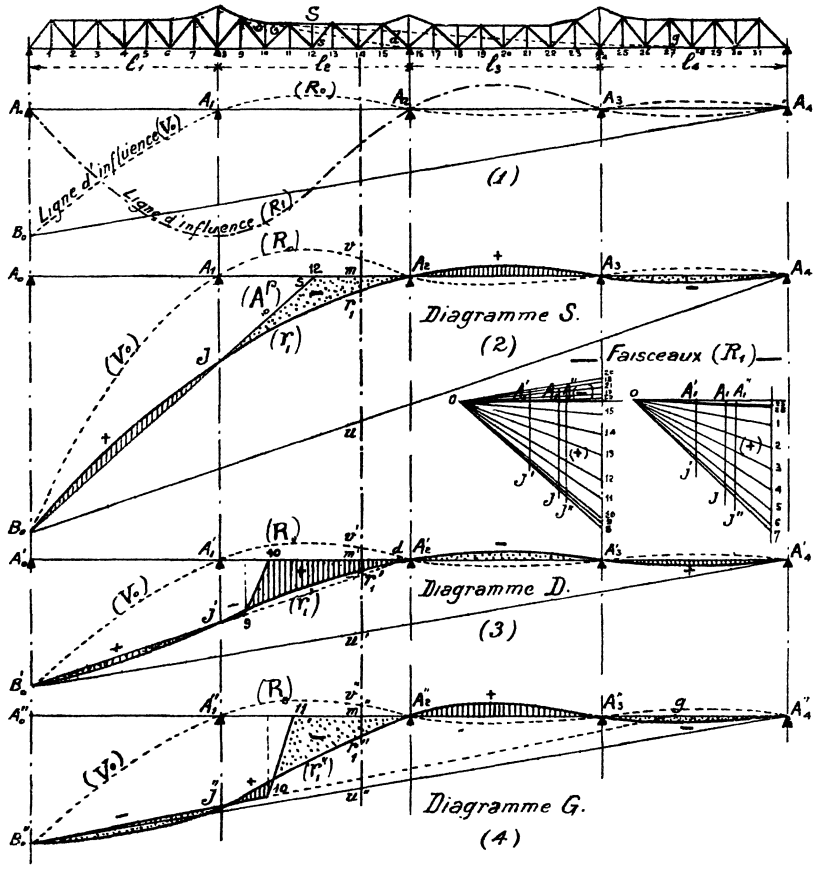


Fig. 1.

comptées à partir de la ligne (R_0) *ou* (V_0) *réduites de manière que cette ligne* (r_1) *ou* $B_0JA_2A_3A_4$ *passe par le point J ci-dessus et reste continue en* A_1 *et* A_2 [1].

Propriété de la ligne (R_0) **relative à ce théorème.** - *Quelque soit le nombre de travées d'une poutre continue* A_0A_n *si la ligne* (R_0) *diag.* 1 *à ordonnée* A_0B_0

---

[1] Dans le cas d'un élément quelconque S de la travée extrême A_0A_1, on retombe sur la détermination suivante connue de la ligne (S): *les ordonnées de cette ligne sont représentées par les segments verticaux compris entre les deux lignes,* (A_0'') *et* (R_0) *ou* (V_0).

en A_0 était rapportée à la droite B_0A_n, elle représenterait également la ligne d'influence (V_0) de la réaction V_0''' en A_0 due aux seules réactions développées par tous les appuis intermédiaires sous l'action de la charge $P=-1$ agissant dans cette poutre supposée à une seule travée A_0A_n. Cette réaction V_0''' en A_0 est descendante (−) quelque soit la position m de la charge P.

Comme la seule connaissance des réactions des appuis dues à une charge isolée mobile et unitaire, est suffisante pour établir immédiatement les lignes d'influence en question, nous donnons ci-après quelques indications pour calculer les réactions des appuis d'une poutre à un nombre quelconque de travées ainsi qu'un procédé graphique très simple pour établir les lignes d'influence des réactions des appuis d'une poutre à trois travées continues.

§ 1. - Calcul direct des réactions d'appuis d'une poutre continue.

Considérons une poutre continue quelconque reposant librement sur $(n+1)$ appuis A_0, A_1,...., A_n de niveau ou non et comportant n travées inégales successives l_0, l_1,...., l_n mesurées suivant la droite A_0A_n supposée horizontale. Supprimons tous les appuis intermédiaires. Soient (A_1) et (A_{n-1}) les deux lignes d'influence respectives des déplacements verticaux élastiques ou flèches au droit des deux points d'appui supprimés A_1 et A_{n-1} de cette poutre considérée à une seule travée A_0A_n. De ces deux lignes d'influence construites par la méthode classique, on peut déduire rapidement la ligne d'influence des flèches d'un point intermédiaire quelconque en appliquant la construction géométrique que nous avons précédemment exposée (1).

Un exemple pratique de cette construction a été également donné par nous (2).

Numérotons, à partir de l'appui A_0 par les chiffres 0, 1, 2, 3,...., m les noeuds successifs d'attache des entretoises à la poutre ci-dessus. Adoptons les notations à indices superposées suivants :

1°) δ_k^i et δ_k''' les flèches prises par un point intermédiaire A_k de cette poutre supposée à une seule travée A_0A_n soumise à l'action d'une charge unitaire isolée P agissant respectivement en un point A_i et à un noeud m. On sait que $\delta_k^i=\delta_i^k$ et $\delta_k'''=\delta_m^k$.

R_k''' la valeur algébrique de la réaction d'un appui A_k de cette poutre continue sous l'action de la charge P agissant au noeud d'action m.

Et représentons par b_k et d_m les distances respectives d'un point d'appui A_k et d'un noeud m à l'appui extrême A_n.

---

(1) *Nouveau théorème sur les déplacements élastiques et son application à la simplification du calcul direct des réactions des appuis des poutres continues* (C. R. de l'Académie des Sciences, Séance 13 juillet 1914). — *Sur le calcul des poutres continues* (C. R. du Congrès du Hâvre de l'A. F. A. S. de 1914).

(2) *Contribution au calcul des poutres à travées solidaires par la méthode moderne de déformation élastique* (C. R. du Congrès de Lyon de l'A. F. A. S. de 1926).

Pour chaque noeud m, on établit un système de $(n-1)$ équations d'élasticité en remplaçant dans:

$$\delta_k^1 R_1''' + \delta_k^2 R_2''' + \ldots + \delta_k^{n-1} R_{n-1}''' = \delta_k''' \times 1$$
$$k \text{ par } 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$$

et puis les deux équations statiques:

$$R_0''' + R_1''' + \ldots + R_n''' - P = 0$$
$$b_0 R_0''' + b_1 R_1''' + \ldots + b_{n-1} R_{n-1}''' - P d_m = 0.$$

Nous avons déjà montré que la résolution de ce système de $(n+1)$ équations se simplifie en lui appliquant notre théorème précité des deux déplacements élastiques, qui le ramène immédiatement à un système d'équations étagé de la même forme que celui des moments sur appuis (1).

§ 2. - **Poutres continues à quatre appuis** A_0, A_1, A_2, A_3 (fig. 2).

Construction très simple des lignes d'influence (R_1) et (R_2) respectives des deux appuis A_1 et A_2. On a

$$\delta_1^1 R_1''' + \delta_1^2 R_2''' = \delta_1''' \times 1$$
$$\delta_2^1 R_1''' + \delta_2^2 R_2''' = \delta_2''' \times 1.$$

Posons les constantes:

$$c_1 = \delta_1^1 + \delta_1^2, \qquad c_2 = \delta_2^1 + \delta_2^2.$$

On démontre aisément que si l'on prend sur une droite horizontale de longueur arbitraire B_1B_2 (fig. 2) deux points D_1 et D_2 tels que

$$B_1D_1 : D_1B_2 = \delta_1^2 : \delta_1^1$$
$$B_1D_2 : D_2B_2 = \delta_2^2 : \delta_2^1$$

et si l'on porte sur les verticales de ces deux points, les deux segments:

$$D_1D_1''' = \frac{\delta_1''' \times 1}{c_1}, \qquad D_2D_2''' = \frac{\delta_2''' \times 1}{c_2}$$

à l'échelle des réactions, la droite $D_1'''D_2'''$ rencontre respectivement les deux verticales de B_1 et B_2 en deux points R_1''' et R_2''' tels que les deux segments B_1R_1''' et B_2R_2''' représentent les deux réactions inconnues R_1''' et R_2'''. Les extrémités de tels segments seront cotées par les numéros des noeuds d'action de la charge P qui correspondent à ces extrémités (2).

---

(1) La définition et la résolution graphique de ce système sont indiquées par M. d'OCAGNE dans son Ouvrage: *Calcul graphique et nomographie.*

(2) Notre construction ci-dessus a été appliquée en 1911 au calcul du pont de Raswa. Dans la pratique, on prendra $B_1B_2 = 50$ cm. On aura les directions des droites $D_1'''D_2'''$ en se

Définition des faisceaux et échelle d'influence. - Portons sur un axe vertical $B_1R_1^6$ à partir d'une origine B_1 diag. 2 et dans un sens convenu, des segments proportionnels aux ordonnées d'une ligne d'influence (R_1) des effets de nature quelconque dans une poutre continue. Inscrivons, à côté dex extrémités de ces segments, les numéros des noeuds correspondants au droit de ces ordon-

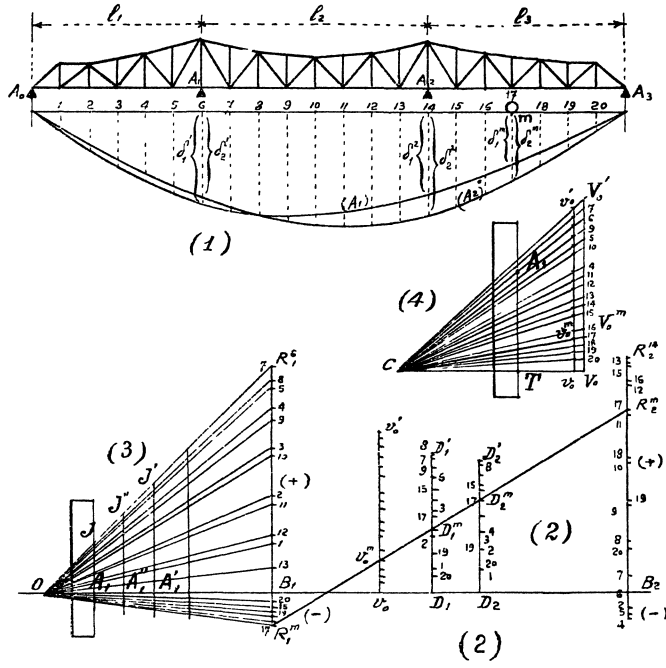


Fig. 2.

nées. Ensuite, joignons ces extrémités à un pôle arbitraire 0. L'ensemble des rayons convergents à ce pôle, sera dit : *Faisceau d'influence des effets* (R_1). De même l'ensemble des points ainsi cotés déterminés par ce faisceau sur une verticale sera dit : *Échelle d'influence* (R_1). Elle est constituée par des segments proportionnels aux ordonnées de la ligne d'influence (R_1). Il suffit de connaître la longueur d'une ordonnée de cette ligne d'influence, pour avoir immédiatement au moyen de ce faisceau sur une verticale convenablement choisie, une échelle d'influence donnant les longueurs des ordonnées réelles de cette ligne. En se servant d'une bande de papier sur laquelle on relève cette échelle et en déplaçant cette bande, on peut ainsi tracer rapidement par points la ligne (R_1). C'est ainsi

---

servant d'un diagramme semblable au trapèze $D_1'''D_1D_2D_2'''$ ayant pour base $\Delta_1\Delta_2 = uD_1D_2$ (u nombre arbitraire égal à 5 ou 10). Dans ce diagramme les droites $\Delta_1'''\Delta_2'''$ sont parallèles aux droites $D_1'''D_2'''$.

que nous nous sommes servis du faisceau (R_1) des réactions de l'appui A_1 pour tracer la ligne d'influence (R_1) de ces réactions (fig. 3).

Construction de la ligne d'influence (R_0) (fig. 3). - Comme en vertu de la propriété de la ligne (R_0) enoncée ci-dessus, cette ligne représente aussi la ligne d'influence (V_0) rapportée à la droite B_0A_n il suffit de déterminer la réaction V_0''' pour avoir R_0'''. On démontre que si l'on prend un point v_0 (fig. 2) sur B_1B_2

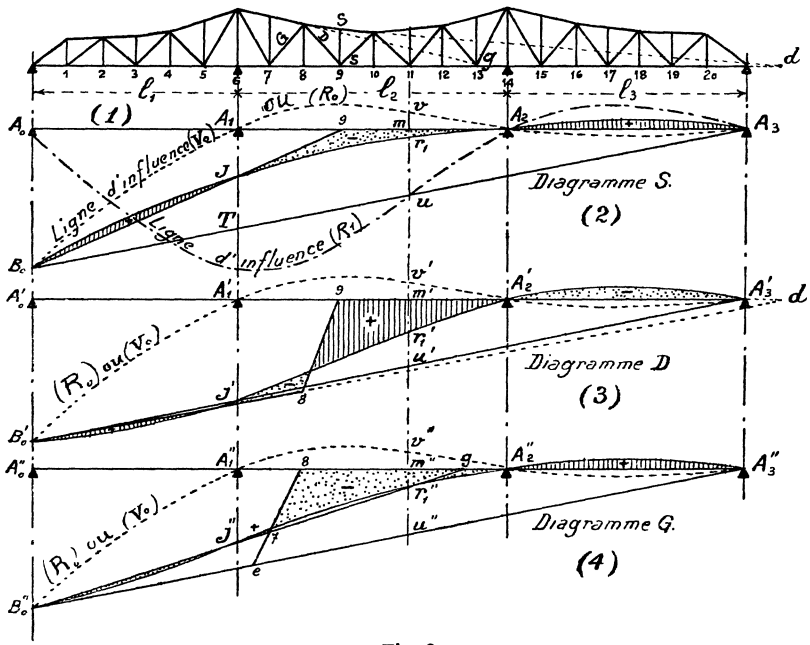


Fig. 3.

tel que $B_1v_0 : v_0B_2 = A_2A_3 : A_1A_3$ et si v_0''' est le point de rencontre de la verticale de v_0 avec la droite $D_1'''D_2'''$ on obtient la réaction

$$V_0''' = v_0v_0''' \times \frac{(l_2 + 2l_3)}{A_0A_3}.$$

Il en résulte qu'il suffit de construire le faisceau de sommet C et de base l'échelle $v_0v_0'''v_0^1$ relevée sur la verticale de v_0 pour avoir un faisceau d'influence des réactions V_0'''. Connaissant l'ordonnée A_1T (fig. 3) au droit de A_1 de la ligne d'influence (V_0), on n'a qu'à relever sur ce faisceau l'échelle d'influence correspondante A_1T, échelle qui permet de tracer la ligne (V_0) ou (R_0) rapportée à la droite B_0A_3.

Remarques. - Si les trois travées sont symétriques et si on prend :

$$B_1B_2 = A_0A_3 \quad \text{et} \quad B_1v_0 = A_0A_1$$

on a :

$$V_0''' = v_0v_0'''.$$

§ 3. - Construction de la ligne d'influence des efforts dans un élément quelconque d'une travée intermédiaire d'une poutre continue à quatre appuis (fig. 3) et à cinq appuis (fig. 1).

La méthode est applicable de la même façon à ces deux cas et repose sur notre théorème ci-dessus. Bornons-nous à l'exposer pour le cas général de la poutre triangulée A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 (fig. 1) en supposant déterminées les deux lignes d'influence (R_0) et (R_1). Pour cela, considérons cette poutre soumise à l'action de la charge unitaire P en m, supprimons tous les appuis intermédiaires A_1, A_2, A_3 et remplaçons-les par les réactions correspondantes R_1, R_2, R_3 développées sens l'action de P.

Désignons par:

1°) A_0^m et V_0^m les valeurs algébriques des deux réactions développées en A_0 sous les deux réactions respectives de la charge P en m et du groupe des réactions (R_1, R_2, R_3) agissant l'une et l'autre séparément sur cette poutre supposée à deux appuis A_0 et A_4. La réaction V_0^m est descendante et négative quel que soit m.

2°) f_0 et f_1 les efforts constants en valeurs algébriques produits dans un élément quelconque S de la travée A_1A_2 sous les deux actions respectives des deux réactions $R_0=1$ et $R_1=1$ agissant séparément en A_0 et A_1 de la poutre supposée en porte-à-faux de A_2 à A_0 libre.

L'effort total dans l'élément S aura pour expression:

$$F_S=f_0 \cdot A_0^m+f_0 V_0^m+f_1 R_1^m=f_0 \cdot \left(A_0^m+V_0^m+\frac{f_1}{f_0} R_1^m\right)$$

qui montre que les ordonnées de la ligne d'influence (S) des efforts dans l'élément S, s'obtiennent en considérant cette poutre à deux appuis simples A_0 et A_4 et en additionnant en tenant compte de leurs signes les ordonnées telles que um et uv des deux lignes suivantes à ordonnées comptées à partir de la droite B_0A_4: 1°) la ligne d'influence (A_0^p) des efforts dans l'élément dus à la charge P dans A_0A_4; 2°) la ligne d'influence (V_0) des efforts dus à la réaction V_0^m représentée par la ligne (R_0) rapportée à la droite B_0A_4 et à ordonnée arbitraire $A_0B_0=1$ en A_0, et en ajoutant aux ordonnées résultantes telles que vm les ordonnées telles que vr_1 de la ligne d'influence (r_1) des réactions $\frac{f_1}{f_0} R_1$ à ordonnées réduites comptées à partir de la ligne (V_0) ou (R_0).

Ceci posé, considérons les trois éléments suivants: la membrure S et les deux diagonales D et G. Soient s, d, g les noeuds opposés respectivement à ces trois éléments et J, J', J'' les points de rencontre respectifs de la verticale du point A_1 avec les droites B_0s, $B_0'd$, $B_0''g$.

On sait que les trois lignes d'influence (A_0^p) correspondant respectivement aux trois éléments ci-dessus, sont les trois polygones $B_0sA_4B_0$, $B_0'9 \cdot 10 \cdot A_4'B_0'$ et $B_0''10 \cdot 11 \cdot A_4''B_0''$ correspondants. Comme les trois lignes d'influence (r_1)

pour ces mêmes éléments S, D, G doivent passer respectivement par les points J, J', J'', elles s'obtiennent en relevant sur le faisceau d'influence (R_1) au moyen d'une bande de papier les trois échelles d'influences respectives ayant pour leurs segments correspondant au noeud A_1 les longueurs respectives A_1J, A_1J' et A_1J'' pour ces trois éléments S, D, G et en traçant ensuite par points ces lignes au moyen de ces échelles.

Les segments verticaux compris entre les lignes (A_0'') et (r_1) sont proportionnels aux ordonnées de la ligne d'influence cherchée. Les efforts de tension sont indiqués par la surface hachurée ou le signe + et les efforts de compression par la surface pointillée ou le signe —.

Remarque. - Les lignes d'influence des efforts représentées ainsi par ces segments seront dites à *ordonnées réduites.* Pour avoir les efforts réels d'un élément quelconque S, il suffit d'adopter comme unité l'ordonnée A_0B_0 en A_0 et de multiplier par le coefficient ci-dessus f_0 dit de *majoration* (correspondant à l'élément S), l'effort réduit que donne la lecture des ordonnées réduites.

Extension de l'application de la méthode à une poutre à un nombre quelconque d'appuis. - Le procédé ci-dessus s'applique aux éléments des deux premières et deux dernières travées d'une poutre à un nombre quelconque d'appuis A_0, A_1,...., A_n. Exposons aussi son application aux éléments de l'une ou de l'autre des deux travées A_2A_3 et $A_{n-3}A_{n-2}$. Pour cela, adoptons les mêmes notations que ci-dessus pour un élément quelconque S dans la travée A_2A_3 et soient J_1 et J_2 les deux points de rencontre respectifs de la droite B_0s avec les deux verticales des deux points d'appuis A_1 et A_2. Le théorème énoncé ci-dessus pour la ligne d'influence (S) subsiste aussi pour la travée A_2A_3, à condition de substituer à la ligne (r_1) la ligne d'influence $(r_{1,2})$ qui passe par les deux points J_1 et J_2 et dont les ordonnées comptées à partir de la ligne (V_0) ou (R_0) serent égales à la somme des ordonnées des deux lignes d'influence (R_1) et (R_2) réduites de manière que les deux ordonnées respectives de ces deux lignes à droite des deux points A_1 et A_2 soient égales à A_1J_1 et A_2J_2. Ces ordonnées réduites s'obtiennent en relevant sur les deux faisceaux d'influence (R_1) et (R_2) au moyen de deux bandes de papier, deux échelles d'influence $\frac{f_1}{f_0}R_1$ et $\frac{f_2}{f_0}R_2$ définies par les deux ordonnées A_1J_1 et A_2J_2.

G. ABATE-DAGA (Messina - Italia)

SULLA APPLICAZIONE DEL SISTEMA DI PROIEZIONE SOLDNER ALLA FORMAZIONE DELLE MAPPE CATASTALI ITALIANE

1. - Lo sviluppo in piano della superficie del geoide viene attuato per il Catasto Italiano col sistema di proiezione Soldner, ideato dal CASSINI nella prima metà del secolo XVIII per la Carta della Francia, definito nelle sue espressioni analitiche in principio del secolo scorso dal SOLDNER, per il Catasto della Baviera, e adottato poi per l'intero Catasto della Germania.

Questo sistema, che fu denominato *cilindrico-congruente*, consiste nello sviluppare sulle generatrici di una superficie cilindrica tangente al geoide lungo un meridiano centrale di ciascuna zona le geodetiche perpendicolari al meridiano stesso nei rispettivi punti di tangenza, e nello sviluppare poi tale cilindro sul piano, assumendo come assi coordinati la retta su cui si sviluppa il meridiano principale, e la perpendicolare alla stessa in un punto centrale della zona.

Le coordinate corrispondenti su tale sviluppo ad un dato punto del geoide sono pertanto: la lunghezza della geodetica condotta da tale punto perpendicolarmente al meridiano principale, e quella dell'arco di meridiano compreso fra il centro degli assi e il piede di tale geodetica.

Restano così invariate sullo sviluppo le distanze dei singoli punti dal meridiano principale, ma vengono allungate tutte le altre.

Supponendo che nella zona considerata la superficie terrestre appartenga ad una sfera di raggio r (il che si può ritenere, trattandosi di una zona non eccessivamente vasta), un lato s misurato sul geoide parallelamente al meridiano principale, a una distanza y dal medesimo, può considerarsi come arco di un cerchio minore parallelo al meridiano stesso, e avente perciò il raggio uguale a $r \cos \frac{y}{r}$, mentre è invece rappresentato sullo sviluppo Soldner da un segmento σ di lunghezza uguale a quella di un arco di uguale ampiezza misurato sul meridiano di raggio r. Si ha pertanto

$$\frac{\sigma}{s} = \frac{r}{r \cos \frac{y}{r}},$$

e limitando al secondo termine lo sviluppo in serie di $\cos \frac{y}{r}$:

$$\sigma - s = s \frac{y^2}{2r^2}.$$

Questo è l'allungamento massimo che subiscono le distanze passando dal geoide allo sviluppo Soldner; e risulta di 6 cm. per Km. a 70 Km. dal meridiano principale, di 12 cm. per Km. a 100 Km.

Se il lato è inclinato dell'angolo α sul meridiano principale subisce un allungamento minore, che fu determinato dal MAFFIOTTI in:

$$\sigma - s = s \frac{y^2}{2r^2} \cos^2 \alpha$$

essendo y l'ordinata media degli estremi.

Ne consegue che le figure giacenti sul geoide si deformano leggermente passando sullo sviluppo.

Di tali deformazioni si tiene conto soltanto nei calcoli relativi ai punti trigonometrici della rete principale; ai quali si collegano poi quelli di sottorete e di dettaglio con i procedimenti della geometria piana, conglobando gli spostamenti dovuti al sistema di proiezione con quelli dovuti agli errori di osservazione.

Per i calcoli relativi alla applicazione della proiezione Soldner furono predisposti e inseriti nella Istruzione (I), pubblicata nel 1889, appositi formulari; i quali furono dimostrati dal Prof. N. JADANZA, nella sua: *Guida al calcolo delle coordinate geodetiche* (Torino, 1895), e dal Prof. F. GUARDUCCI nella « Rivista di Topografia e Catasto » (Maggio, 1893).

In seguito il compianto Ing. G. B. MAFFIOTTI, Ispettore Compartimentale del Catasto, pubblicò un completo studio analitico del sistema Soldner (*I sistemi di proiezione nei rilevamenti catastali moderni*) (Torino, Clausen, 1900), illustrando i procedimenti adottati dalla Istruzione (I), proponendone altri più speditivi, e mettendo in evidenza le proprietà e i vantaggi del sistema stesso.

Rimandando per notizie più complete alle predette pubblicazioni, la presente comunicazione si limita a trattare dei più importanti procedimenti adottati, e di un nuovo procedimento per la trasformazione delle coordinate Soldner.

2. - *Calcolo delle coordinate sferiche ortogonali* x_1, y_2 *di un punto* P_2 *rispetto ad un punto* P_1 *e dell'azimut Soldner* α_2 *di* P_1 *in* P_2 *per mezzo del lato* $s = P_1P_2$ *della triangolazione, e dell'azimut Soldner* α_1 *di* P_2 *in* P_1 (intendendosi per azimut Soldner di P_2 in P_1 l'angolo che la direzione da P_1 a P_2 fa con la parallela al meridiano principale condotta da P_1 verso Nord).

Per questo calcolo fu predisposto il mod. 12 (Istr. I) con le formole di Zachariae. Ma furono in seguito riconosciute più adatte le seguenti, proposte dal Maffiotti, e dette « formole di Soldner »

$$(1) \qquad x_2 = x_1 + m + \frac{m y_2^2}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{m n^2}{2r^2}, \qquad m = s \cos \alpha_1$$

$$(2) \qquad y_2 = y_1 + n - \frac{m^2 y_1}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{m^2 n}{2r^2}, \qquad n = s \operatorname{sen} \alpha_1$$

(3) $$a_2 = a_1 \pm \pi - \Delta a, \qquad \Delta a = \frac{m(2y_1 + n)}{2r^2 \operatorname{sen} 1''}$$

in cui r è il raggio della sfera sostituibile al geoide nella zona considerata.

Il vantaggio di queste formole sta nel fatto che i termini di correzione sono tutti della forma $\frac{pq^2}{2r^2}$; quindi si possono tutti calcolare con una sola tabella pubblicata dallo stesso Maffiotti.

Per il caso particolare in cui P_1 sia l'origine delle coordinate il Maffiotti ricavò le formole ridotte:

$$\log x_2 = \log m + \frac{M}{3r^2} n^2; \qquad \log y_2 = \log n - \frac{M}{6r^2} m^2$$

e fornì con apposita tabella i valori calcolati di $\frac{M}{3r^2}$ e $\frac{M}{6r^2}$ per le varie latitudini italiane.

3. - *Calcolo delle coordinate sferoidiche ortogonali x, y mediante la latitudine φ e la longitudine λ, e calcolo inverso, essendo date le posizioni geografiche φ_0, λ_0 della origine, oltre a φ e λ.*

Rappresentando con φ_p la latitudine del piede della ordinata y sul meridiano principale, e posto:

(4) $$u = \varphi_p - \varphi_0$$

(4') $$\psi = \varphi_p - \varphi$$

e quindi:

(4'') $$u = \varphi - \varphi_0 + \psi$$

l'arco u è legato alla ascissa x dalla relazione

(5) $$x = u\varrho \operatorname{sen} 1''$$

se ϱ è il raggio di curvatura del meridiano alla latitudine $\varphi_0 + \frac{u}{2}$.

L'arco ψ è dato, secondo i casi, da una delle seguenti relazioni dimostrate dal Maffiotti:

(6) $$\log \psi = 2 \log \theta + \log (h) + (d)\theta^2$$

$$\log (h) = \log \frac{N}{2\varrho} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi, \qquad (d) = \frac{M}{2} \operatorname{sen}^2 1'' \left(\cos^2 \varphi - \frac{1}{6}\right),$$

(7) $$\log \psi = 2 \log y + \log \tan \varphi_p + \log (c) - (e)y^2$$

$$(c) = \frac{1}{2N\varrho \operatorname{sen} 1''} = \frac{1}{2r^2 \operatorname{sen} 1''}, \qquad (e) = \frac{M}{4N^2} \left(\tan^2 \varphi + \frac{1}{3}\right).$$

Date le posizioni geografiche φ, λ, si calcola ψ mediante la (6), poi u mediante la (4''), e x mediante la (5), o meglio con la formola del Maffiotti:

(8) $$\log x = \log \varrho_0 \operatorname{sen} 1'' + \log u + u\delta_1 + \left(\frac{u}{10^3}\right)^2 \delta_2$$

$$\delta_1 = \frac{\operatorname{sen} 1''}{2} \frac{d \log \varrho \operatorname{sen} 1''}{d\varphi}; \qquad \delta_2 = \frac{\operatorname{sen} 1''}{8} \frac{d^2 \log \varrho \operatorname{sen} 1''}{d\varphi^2}$$

in cui $\varrho_0 \operatorname{sen} 1''$ è il valore di $\varrho \operatorname{sen} 1''$ alla latitudine φ_0; i valori di $\delta_1\delta_2$ sono dati dalle tabelle del Maffiotti, e il termine $\left(\frac{u}{10^3}\right)^2\delta_2$ è quasi sempre trascurabile.

Date x e y, si calcola u mediante la (8) trasformata come segue:

$$(8') \qquad \log u = \log x - \log \varrho_0 \operatorname{sen} 1'' - u_0\delta_1 - \left(\frac{u_0}{10^3}\right)^2\delta_2; \qquad u_0 = \frac{x}{\varrho_0 \operatorname{sen} 1''}$$

poi φ_p mediante la (4), ψ mediante la (7), e φ mediante la (4").

L'ordinata y è legata alla differenza $\theta = \lambda - \lambda_0$ dalla seguente relazione, anch'essa dimostrata dal Maffiotti:

$$(9) \qquad \log y = \log N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi + \log\theta - (a)\theta^2, \qquad (a) = \frac{M}{6} \operatorname{sen}^2 1'' \operatorname{sen}^2\varphi$$

che serve quando sono date φ e θ.

Se invece sono date x e y, si calcola prima:

$$\log\theta_0 = \log y - \log N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi$$

e poi:

$$\log\theta = \log\theta_0 + (a)\theta_0^2.$$

I valori di $\varrho \operatorname{sen} 1''$ e $N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi$ si ricavano dalle tabelle annesse alla Istruzione (I); quelli dei coefficienti (a), (c), (d), (e), (h) da quelle del Maffiotti.

4. - *Calcolo della distanza s fra due punti P_1, P_2 e degli azimut α_1 di P_2 in P_1, e α_2 di P_1 in P_2, essendo date le coordinate sferiche ortogonali x_1y_1, x_2y_2 dei due punti.*

I valori della distanza e dell'azimut riferiti allo sviluppo si calcolano col noto procedimento della Geometria piana.

La distanza reale, misurata sul geoide, e l'azimut Soldner α_1 si possono ottenere dalle formole di Soldner (1) e (2), ponendo nei termini di correzione:

$$m = x_2 - x_1 = \Delta x \quad \text{e} \quad n = y_2 - y_1 = \Delta y,$$

e ricavando i valori di

$$s\cos\alpha_1 = \Delta x - \frac{\Delta x y_2^2}{2r^2} + \frac{\Delta x \Delta\bar{y}^2}{6r^2}; \qquad s\operatorname{sen}\alpha_1 = \Delta y + \frac{\Delta\bar{x}^2 y_1}{2r^2} + \frac{\Delta\bar{x}^2\Delta y}{6r^2}$$

dai quali si ottengono col noto procedimento s e α_1.

Il valore di α_2 si ottiene analogamente con l'equazione (3), ponendo $\Delta\alpha$ sotto la forma:

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta x(2y_1 + \Delta y)}{2r^2 \operatorname{sen} 1''}.$$

5. - Oltre a questo procedimento, il Maffiotti suggerì quest'altro più semplice.

Introducendo nella formola (3) di Soldner l'ordinata media $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)$ si ha:

$$\frac{1}{2}\Delta\alpha = \frac{y\Delta x}{2r^2 \operatorname{sen} 1''}.$$

Il Maffiotti dimostrò che

$$\log s \cos\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right) = \log \Delta x - (\gamma_2 - \gamma_3)$$

$$\log s \operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right) = \log \Delta y - \gamma_1$$

$$\gamma_1 = \frac{M}{12r^2}\Delta\bar{x}^2; \qquad \gamma_2 = \frac{M}{2r^2}y^2; \qquad \gamma_3 = \frac{M}{24r^2}\Delta\bar{y}^2$$

e fornì i valori di γ_1, γ_2, γ_3 con apposite tabelle.

Trovati i valori di $s\cos\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$ e $s\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)$, si trovano successivamente

$$\tan\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right); \qquad \alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha; \qquad \alpha_1; \qquad \Delta\alpha; \qquad \alpha_2,$$

e il valore controllato di s:

$$s = \frac{s\cos\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}{\cos\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)} = \frac{s\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\alpha_1 + \frac{1}{2}\Delta\alpha\right)}.$$

6. - *Calcolo della distanza fra due punti di cui sono date le coordinate geografiche* φ_1, λ_1, φ_2, λ_2.

Il Maffiotti diede per questo calcolo le seguenti formole:

$$\log s = \log N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi + \log\theta - \log\operatorname{sen}\beta = \log\varrho \operatorname{sen} 1'' + \log\Delta\varphi - \log\cos\beta$$

$$\log\tan\beta = \log N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi - \log\varrho \operatorname{sen} 1'' + \log\theta - \log\Delta\varphi;$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1; \qquad \theta = \lambda_2 - \lambda_1$$

in cui $\log N \operatorname{sen} 1'' \cos\varphi$ e $\varrho \operatorname{sen} 1''$ si devono ricavare dalle tabelle della Istruzione (I), in corrispondenza della latitudine del punto di mezzo di s, e β è un angolo che è approssimativamente uguale all'azimut.

Le formole valgono però soltanto per distanze minori di 20 Km. Per distanze maggiori (fino a 50 Km.) si deve dal log. di s sottrarre un termine di correzione ks^2, in cui il valore di k è dato da apposita tabella del Maffiotti.

7. - S'intende che la distanza calcolata con i predetti procedimenti è ridotta al livello del mare; perchè a tale livello sono ridotte le basi e la triangolazione dell'I. G. M. a cui è appoggiata la triangolazione catastale.

La distanza reale fra i punti considerati, misurata sul terreno sarà:

$$s' = s\frac{r+a}{r}$$

se a è l'altitudine media dei punti stessi, e r il raggio medio terrestre.

8. - *Trasformazione delle coordinate Soldner da una origine ad un'altra.*

Per tale trasformazione non serve il procedimento generale, dovendosi tener conto delle variazioni dovute al sistema di proiezione, variabili con le distanze dal meridiano principale, e, in certi casi, anche della disomogeneità delle triangolazioni, alle quali si appoggiano i due sviluppi di cui si tratta.

Il problema fu risolto in vari modi da W. JORDAN, da G. B. MAFFIOTTI e più recentemente dall'Ing. C. PASTORI; ma fu sempre considerato nella sua espressione generale: dati gli elementi di collegamento di una origine nuova ad una antica, e le coordinate di un punto sulla origine antica, trovare le corrispondenti sulla origine nuova.

La soluzione del problema così considerato presenta speciali difficoltà nella pratica, sia per il controllo dei risultati, sia nei riguardi delle eventuali disomogeneità delle triangolazioni.

Considerando invece che per ciascun sviluppo si calcolano le coordinate Soldner dei punti della rete principale, e quindi nella zona di confine fra due sviluppi si hanno sempre alcuni punti di cui si posseggono (o si possono calcolare) su entrambi i centri le coordinate, il predetto problema si può porre sotto la seguente forma, che consente una soluzione più speditiva, ed offre speciale facilità di controllo e di compensazione dei risultati: *conoscendosi le coordinate ortogonali* x_1, y_1, x_n, y_n *di due punti* P_1, P_n, *e gli azimut Soldner* a_1 *in* P_1, a_n *in* P_n, *riferiti ad un centro* O_a *ed i corrispondenti elementi* X_1, Y_1, X_n, Y_n, A_1, A_n *riferiti ad un centro* O_n, *trovare le coordinate ortogonali* X_2, Y_2, X_3, Y_3,.... *sul centro* O_n *dei punti* P_2, P_3,.... *di cui si conoscono le coordinate* x_2, y_2, x_3, y_3,.... *riferite al centro* O_a.

Consideriamo la poligonale P_1, P_2, P_3,...., P_n.

La differenza $t_1 = a_1 - A_1$ fra gli azimut Soldner dati in P_1 per una stessa direzione, e riferiti rispettivamente ai centri O_a, O_n rappresenta in via approssimativa la convergenza dei meridiani fra i centri stessi; ma comprende anche la piccola differenza di orientamento dovuta al sistema di proiezione, e quella eventualmente esistente fra le reti trigonometriche dei due sviluppi.

Tale differenza è quindi leggermente diversa in P_2, P_3,....

In P_2 si ha dalla formola (3) di Soldner, modificata come al n.° 5.

$$a_2 = a_1 \pm \pi - \frac{\Delta x_1 y}{r^2 \operatorname{sen} 1''}; \qquad A_2 = A_1 \pm \pi - \frac{\Delta X_1 Y}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$$

$$\Delta x_1 = x_2 - x_1; \qquad \Delta X_1 = X_2 - X_1$$

e quindi:

(10) $$t_2 = a_2 - A_2 = t_1 + \frac{\Delta X_1 Y - \Delta x_1 y}{r^2 \operatorname{sen} 1''}$$

essendo Y, y le ordinate (riferite rispettivamente ai centri O_n, O_a) del punto di mezzo del P_1, P_2.

Nel termine di correzione a denominatore $r^2 \operatorname{sen} 1''$ si può con sufficiente

approssimazione porre: $\Delta X_1 = \Delta x_1$ e ritenere costante la differenza $D = Y - y$, che rappresenta approssimativamente la distanza fra i due meridiani principali nella zona considerata.

Quindi, potendosi ritenere r^2 sen $1'' = 197$ per tutte le latitudini italiane, quando Δx e D siano espressi in Km. si ha dalla equazione (10):

$$(10') \qquad t_2 = t_1 + \delta_1'' ; \qquad \delta_1'' = \Delta x_1 \frac{D}{197} ; \qquad \Delta x_1 = x_2 - x_1$$

e analogamente:

$$t_3 = t_2 + \delta_2'' ; \qquad \delta_2'' = \Delta x_2 \frac{D}{197} ; \qquad \Delta x_2 = x_3 - x_2$$

$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \ldots\ldots$$

Il valore di t_n dovrà risultare uguale a quello ricavato direttamente dai dati a_n, A_n fornendo così un controllo dei valori t_2, t_3,....

Consideriamo ora le espressioni delle ascisse x_2, X_2 ricavate dalla formola di Soldner (1) ponendovi nei termini di correzione: $\Delta x_1 = m$, $\Delta y_1 = n$

$$x_2 = x_1 + m + \frac{\Delta x_1 y_2^2}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{\Delta x_1 \Delta \overline{y}_1^2}{2r^2} ; \qquad m = s \cos a_1$$

$$X_2 = X_1 + M + \frac{\Delta X_1 Y_2^2}{2r^2} - \frac{1}{3}\frac{\Delta X_1 \Delta \overline{Y}_1^2}{2r^2} ; \qquad M = s \cos A_1 .$$

Da queste equazioni, sostituendo ad A_1 il suo valore $a_1 - t_1$, ritenendo:

$$\text{sen}\, t_1 \cos t_1 = \text{sen}\, t_1$$

(per essere t_1 un angolo molto piccolo) e ponendo:

$$(11) \qquad \Delta_0 X_1 = \Delta x_1 - \Delta x_1 (1 - \cos t_1) + \Delta y_1 \,\text{sen}\, t_1$$

si ricava

$$X_2 = X_1 + \Delta_0 X_1 + \frac{\Delta X_1 Y_2^2}{2r^2} - \frac{\Delta x_1 y_2^2}{2r^2} - \frac{\Delta X_1 \cdot \Delta \overline{Y}_1^2 - \Delta x_1 \Delta \overline{y}_1^2}{6r^2} .$$

Potendosi ritenere $\Delta X_1 = \Delta x_1$ e $\Delta Y_1 = \Delta y_1$ nel termine di correzione a denominatore $6r^2$, e $\Delta X_1 = \Delta_0 X_1$ in quello a denominatore $2r^2$, si ha:

$$(12) \qquad X_2 = X_1 + \Delta X_1 ; \qquad \Delta X_1 = \Delta_0 X_1 + c_x ; \qquad c_x = \frac{\Delta_0 X_1 \cdot Y_2^2}{2r^2} - \frac{\Delta x_1 \cdot y_2^2}{2r^2} .$$

Analogamente dalla equazione Soldner (2) modificata si ha

$$y_2 = y_1 + n - \frac{\Delta \overline{x}_1^2 y_1}{2r^2} - \frac{\Delta \overline{x}_1^2 \Delta y_1}{6r^2} ; \qquad n = s \,\text{sen}\, a_1$$

$$Y_2 = Y_1 + N - \frac{\Delta \overline{X}_1^2 Y_1}{2r^2} - \frac{\Delta \overline{X}_1^2 \Delta Y_1}{6r^2} ; \qquad N = s \,\text{sen}\, A_1$$

e ponendo

$$(13) \qquad \Delta_0 Y_1 = \Delta y_1 - \Delta y_1 (1 - \cos t_1) - \Delta x_1 \,\text{sen}\, t_1$$

si ottiene:

$$(14) \qquad Y_2 = Y_1 + \Delta Y_1 ; \qquad \Delta Y_1 = \Delta_0 Y_1 - c_y ; \qquad c_y = \frac{\Delta \overline{X}_1^2 Y_1}{2r^2} - \frac{\Delta \overline{x}_1^2 y_1}{2r^2} .$$

Nelle espressioni (11) e (13) si sono di proposito conservati i termini:

$$\Delta x_1 - \Delta x_1(1-\cos t_1) \quad \text{e} \quad \Delta y_1 - \Delta y_1(1-\cos t_1)$$

invece di ridurli rispettivamente a:

$$\Delta x_1 \cos t_1 \quad \text{e} \quad \Delta y_1 \cos t_1,$$

perchè i valori di $\Delta x_1(1-\cos t_1)$ e di $\Delta y_1(1-\cos t_1)$ si calcolano speditamente col regolo calcolatore, essendo sempre molto piccoli, potendosi considerare costante $\cos t_1$ per due dati sviluppi Soldner; mentre il calcolo di $\Delta x_1 \cos t_1$ e $\Delta y_1 \cos t_1$ sarebbe alquanto più laborioso.

I termini di correzione c_x e c_y sono della stessa forma $\frac{pq^2}{2r^2}$ di quelli delle formole Soldner: quindi possono essere calcolati con le stesse tabelle che servono per il calcolo delle coordinate ortogonali.

Calcolati i valori di $\Delta X_1 \Delta X_2$,.... e $\Delta Y_1 \Delta Y_2$,.... per tutte le coppie di punti P_1P_2, P_2P_3,.... $P_{n-1}P_n$, si dovranno verificare le relazioni:

$$\sum \Delta X = X_n - X_1; \qquad \sum \Delta Y = Y_n - Y_1 \tag{15}$$

che forniranno un sicuro controllo dei calcoli.

Però queste relazioni non si verificheranno se non vi è omogeneità lineare fra le triangolazioni dei due sviluppi. In tal caso si dovranno prima rendere $\Delta_0 X$ e $\Delta_0 Y$ omogenei con la triangolazione riferita al centro O_n. Se i lati delle triangolazioni riferite ai centri $O_a O_n$ stanno fra loro nel rapporto $\frac{s_a}{s_n} = 1+\lambda$, ciò si otterrà diminuendo algebricamente e rispettivamente $\Delta_0 X$ e $\Delta_0 Y$ delle quantità:

$$\lambda \Delta_0 X, \qquad \lambda \Delta_0 Y,$$

perchè $\Delta_0 X$ e $\Delta_0 Y$ sono funzioni lineari di s.

Corretti in tal modo i valori $\Delta_0 X$, $\Delta_0 Y$, dovranno verificarsi le equazioni (15) a meno di piccolissimi errori dovuti alla approssimazione dei calcoli. Questi errori si potranno opportunamente compensare ripartendoli sui vari valori dei ΔX, ΔY.

Nelle espressioni di c_x, c_y delle equazioni (12) e (14) si può, a meno di un errore praticamente trascurabile, porre: $\Delta_0 X_1 = \Delta x_1$. Si ha allora:

$$c_x = \Delta x_1 \frac{Y_2^2 - y_2^2}{2r^2}, \qquad c_y = \Delta \bar{x}_1^2 \frac{Y_1 - y_1}{2r^2} = \Delta \bar{x}_1^2 \frac{D}{2r^2}.$$

Se x è costante queste equazioni e le (10), (10′) danno:

$$c_x = 0; \qquad c_y = 0; \qquad t_1 = t_2 = t_3 = \ldots = t_n$$

e le equazioni (12), (14) diventano:

$$\begin{cases} X_2 = X_1 + \Delta y_1 \operatorname{sen} t_1 \\ Y_2 = Y_1 + \Delta y_1 - \Delta y_1(1-\cos t_1). \end{cases} \tag{16}$$

Se invece è costante y si ha:

$$c_x = K\Delta x_1 ; \qquad K = \frac{Y_2^2 - y_2^2}{2r^2} = \text{costante}$$

$$c_y = K'\Delta\bar{x}_1^2 ; \qquad K' = \frac{D}{2r^2} = \text{costante}$$

quindi dalle equazioni (11), (12), (13), (14), si ha:

$$(16') \qquad \begin{cases} X_2 = X_1 + \Delta x_1 - \Delta x_1(1 - \cos t_1) + K\Delta x_1 \\ Y_2 = Y_1 - \Delta x_1 \operatorname{sen} t_1 - K'\Delta\bar{x}_1^2 . \end{cases}$$

Queste equazioni (16), (16'), servono per trasformare, col predetto procedimento, le coordinate degli incrocicchi del quadrettamento quando occorre di riportare graficamente qualche porzione di mappa da uno sviluppo ad un altro.

Entro certi limiti di Y, y, Δx, il procedimento sopra esposto può essere semplificato; ma lo spazio disponibile per le singole comunicazioni dei Congressisti non consente di trattare qui tale argomento.

C. MONTUSCHI (Bologna - Italia)

« DISPOSITIVO CATINA » PER LA COMPRESSIONE DEI FORAGGI NEI SILOS

Trattasi di un'applicazione industriale assai modesta, ma che in un paese com'è il nostro, con proprietà frazionata, con la sempre maggior estensione dell'appoderamento per la ruralizzazione dell'Italia secondo gli intendimenti del Duce, potrà avere qualche importanza.

Per la conservazione dei foraggi nei silos per la quale il Ministero per la Economia Nazionale svolge opera continua, si richiede da tempo un apparecchio per comprimere i foraggi, che sia di semplice costruzione, di facile e sicura manovra, di molto effetto con minimo sforzo e con limitata spesa d'impianto e manutenzione.

A questo tende il « Dispositivo Catina » sfruttando principi notissimi, fra i quali quello del torchio: le formule relative sono pure note e di uso comune, onde posso astenermi dal citarle, limitandomi invece ad accennare agli accorgimenti pratici impiegati per rendere possibile un'utile applicazione industriale.

Il Dispositivo consta di un albero centrale a vite, alla cui estremità inferiore è calettata una ruota dentata con la quale ingrana una vite perpetua manovrata mediante manovella o volantino.

All'albero è connesso il solito coperchio, che porta nel centro la chiocciola a madrevite che svolgesi attorno all'albero, una rotella alla periferia del coperchio ruotando entro una scanalatura ad U fissata lungo la parete del silos, mentre impedisce al coperchio di ruotare intorno all'albero ne facilita invece il suo movimento ascendente e discendente secondo il senso di rotazione della manovella.

Lo sforzo su questa è minimo ed anche nel momento della massima compressione, che può salire sino ad 8 e 10 quintali per metro quadrato, non eccede quello normale di un uomo.

Ruota dentata e vite perpetua sono racchiusi entro un cofano, che si trova in un piccolo camerino sottostante al silos, dove il contadino deve discendere per far funzionare il coperchio compressore.

Un tubo a cannocchiale fissato inferiormente al coperchio protegge l'albero.

La manovella è tarata in modo da diventare folle dopo raggiunta una determinata compressione, onde il contadino è avvisato quando può cessare il lavoro.

E. G. BARRILLON (Paris - Francia)

AU SUJET DE DIVERS APPAREILS UTILISÉS AU TRACÉ DES CHAMPS HYDRODYNAMIQUES

L'étude théorique du mouvement des fluides nécessite des calculs compliqués lorsqu'on veut pousser la solution jusqu'au tracé complet des trajectoires suivies par chaque particule. Ces trajectoires peuvent être étudiées, soit dans le cas d'un fluide en repos et d'un solide en mouvement (cas d'un navire se déplaçant sur une eau calme, ou d'un avion se déplaçant dans l'air), soit dans le cas d'un solide au repos dans un fluide en mouvement (cas d'une pile de pont ou d'un modèle d'avion dans un tunnel aérodynamique).

Parmi les cas traités par la théorie, les plus simples sont ceux dans lesquels on peut considérer que le phénomène est le même dans tous les plans parallèles à un certain plan de référence. On est alors conduit à introduire la représentation du mouvement à l'aide de fonctions analytiques.

La méthode générale est de passer d'une forme simple de courant à des formes de plus en plus compliquées, par une ou plusieurs transformations conformes.

Une transformation conforme est en somme une opération analogue à celle du tracé de la carte géographique. Les méridiens et les parallèles sont ici remplacés par des lignes de courant et des lignes équipotentielles, mais à la différence de ce qui se passe en général, dans l'établissement d'une carte géographique, les transformations conformes conservent les angles au voisinage de chaque point, et les lignes correspondant ici aux parallèles et aux méridiens, sont toujours perpendiculaires entre elles en chacun de leurs points d'intersection.

Le problème qui va nous occuper est celui du tracé de l'ensemble d'un champ hydrodynamique, composé d'une part, de lignes de courant et d'autre part, de lignes équipotentielles orthogonales aux lignes de courant. Le champ le plus simple de l'espèce est formé d'un quadrillage de droites que l'on trace facilement avec la règle et l'équerre. On trace aussi facilement, avec règle et compas, un quadrillage formé de cercles concentriques et de droites rayonnant autour du centre, ou un quadrillage formé de cercles orthogonaux.

Pour de tels champs, il est inutile d'utiliser d'autres appareils que ceux qui se trouvent sur toute table de dessinateur. Les appareils qui nous intéressent ici, ont pour but de transformer ces champs élémentaires, en d'autres champs plus compliqués.

La transformation utilisée est pour chaque opération une transformation conforme, c'est-à-dire conservant les angles. Dans une telle transformation, un réseau orthogonal sera transformé en un autre réseau orthogonal et si le réseau

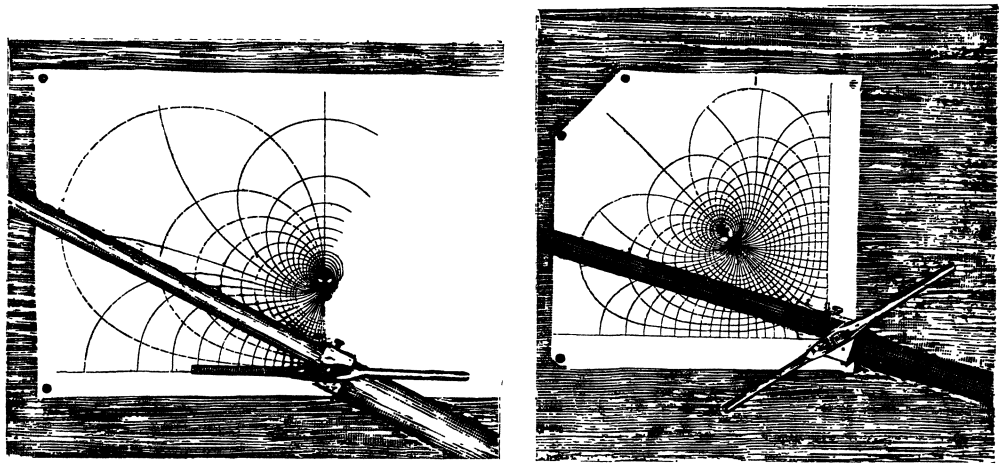


Fig. 1.

primitif représente un champ hydrodynamique, le réseau final obtenu par la transformation, représentera un nouveau champ hydrodynamique.

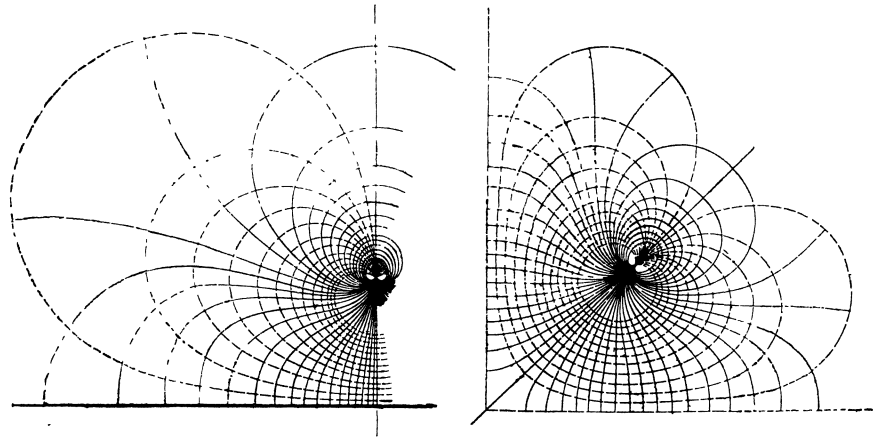
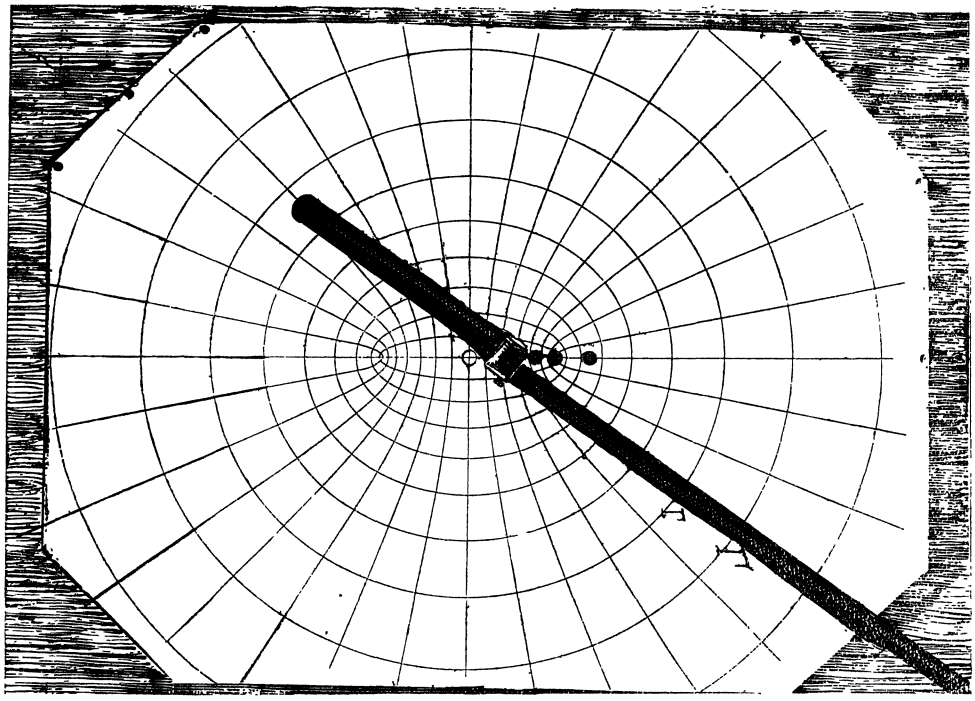


Fig. 2.

Un champ élémentaire pouvant être transformé une ou plusieurs fois par un même appareil ou par plusieurs appareils, dans un ordre variable, on voit qu'avec un petit nombre d'appareils et un petit nombre de champs élémentaires, il sera possible d'obtenir une très grande variété de résultats.



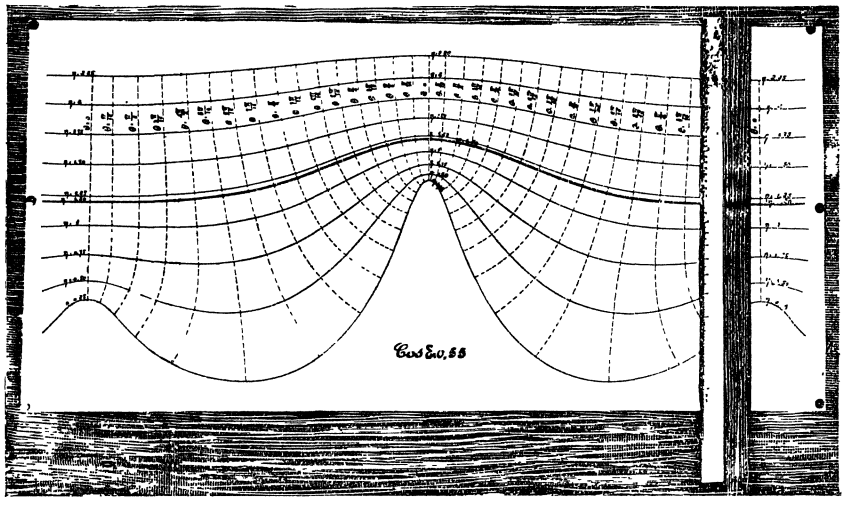


Fig. 3.

Transformateur éventail (fig. 1).

Cet appareil comprend deux échelles graduées suivant des puissances des entiers successifs, ces échelles sont tracées sur deux bras, chaque bras porte une roue dentés et les deux roues dentées sont réunies par une crémaillère. Il faut deux opérateurs pour utiliser l'appareil. Le tracé L_1 étant donné, le premier opérateur oriente le bras B_1 et lit la division de l'échelle B_1 se trouvant en M_1, le second opérateur marque sur l'échelle B_2 (qui se trouve orientée par le mouvement de B_1) le point M_2 correspondant à la division lue par le premier opérateur, le point M_2 appartient à la courbe L_2 du tracé cherché.

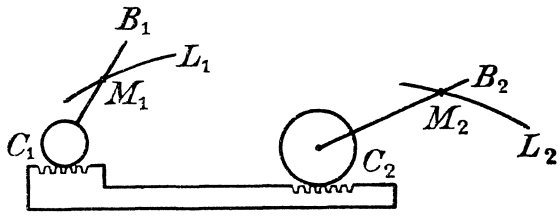


Fig. *a*).

L'expression analytique de la transformation exécutée est:

$$Z = K_1 z^{K_2}.$$

Il est clair, qu'au lieu des deux crémaillères figurées sur le dessin de principe, on peut utiliser des tambours reliés par un fil métallique, et c'est ainsi que l'appareil que nous utilisons a été réalisé.

Un cas très simple de la transformation effectuée par cet appareil est l'inversion de la géométrie élémentaire qui correspond à $K_2 = -1$. Il existe déjà de nombreux appareils permettant de faire mécaniquement l'inversion d'une figure géométrique. Ces appareils ont l'inconvénient de ne pas séparer la figure proposée et la figure transformée, mais de les superposer sur une même feuille de papier, ce qui n'est pas pratique dans le cas où comme ici, les figures se composent d'un très grand nombre de lignes.

Dans l'appareil décrit, les figures sont au contraire tracées sur deux feuilles séparées.

Nous donnons un exemple d'application de cet appareil (fig. 2).

Transformateur périodique (fig. 3).

Dans cet appareil, l'échelle B_1 est une échelle régulière, l'échelle B_2 est une échelle logarithmique, telle que celle d'une règle à calcul. L'échelle B_2 ne tourne pas, mais reste parallèle à elle-même.

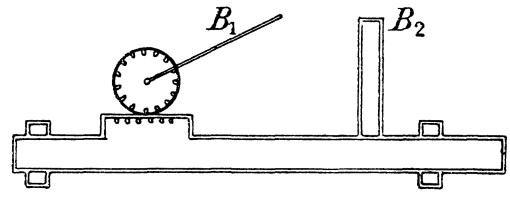


Fig. *b*).

Le mode d'emploi est identiquement le même que pour l'appareil précédent. La transformation

peut être effectuée soit en partant du tracé B_1, soit en partant du tracé B_2.

L'expression analytique de la transformation exécutée est:

$$Z = K_1 e^{K_2 z}.$$

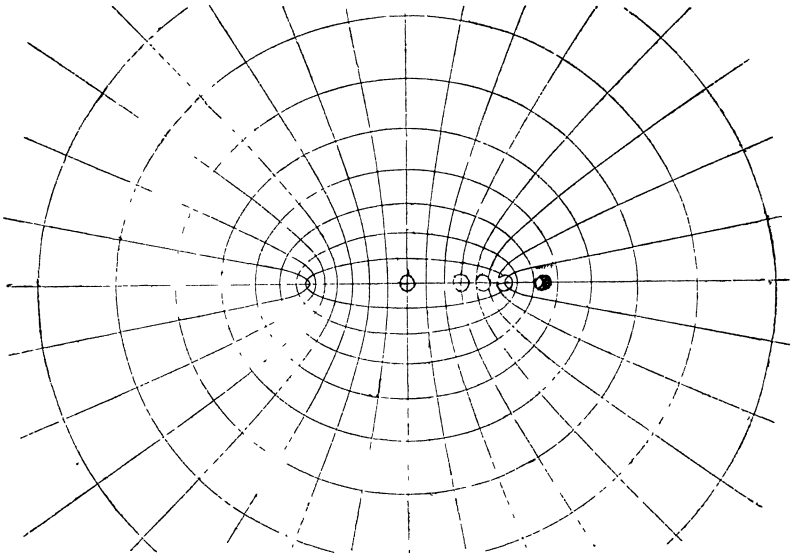


Fig. 4.

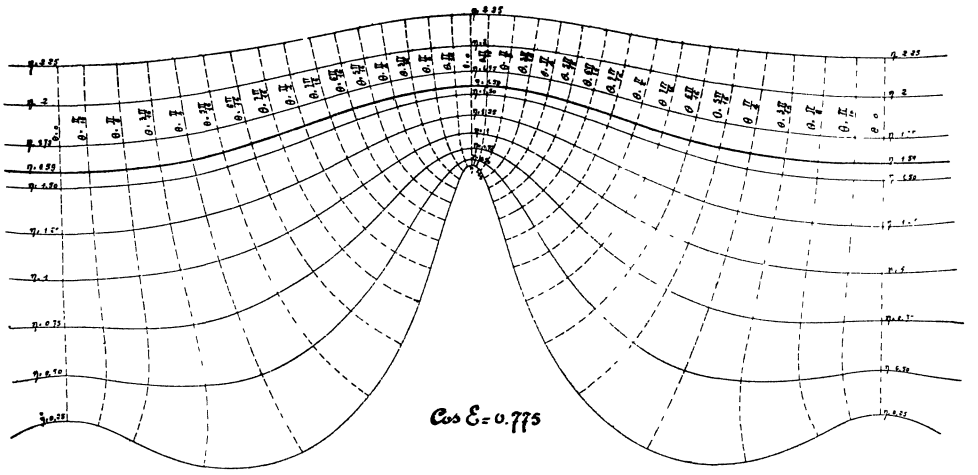


Fig. 5.

Cet appareil est spécialement utile pour les tracés de houle, en particulier pour l'étude de la houle à la surface de séparation de deux milieux lorsque l'on tient compte de la densité des deux milieux.

Un exemple en est donné, qui transforme la figure 4 en la figure 5.

Double inverseur à équerre.

Cet appareil comprend un style suiveur, décrivant le champ donné et un style traceur décrivant le champ cherché. Ces deux styles sont d'ailleurs interchangeables. L'appareil ne nécessite qu'un seul opérateur.

Dans le cas de fonctionnement le plus simple, le premier style décrivant une ligne droite, le second style décrit successivement un tronçon de la même droite,

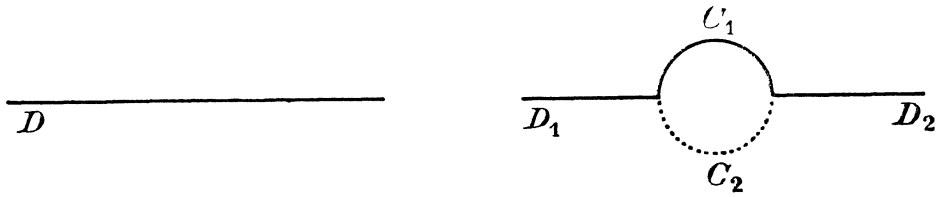


Fig. e).

soit D_1 puis un demi cercle C_1 enfin, continue suivant le tronçon D_2 de la droite D. Au passage de D_1 à C_1 l'appareil peut se diriger, soit suivant C_1 soit suivant C_2 symétrique de C_1 par rapport à D; de même pour le passage de C_1 ou C_2 à D_2.

La transformation fait correspondre à l'ensemble d'un plan, la partie d'un autre plan extérieure à un cercle C_1, C_2.

L'expression analytique de la transformation exécutée est

$$z = Z + \frac{K^2}{Z}.$$

L'appareil a comme principale application le tracé de champs dans lesquels une ligne de courant comprend une portion d'arc de cercle.

Comme exemple d'application de cet appareil nous allons montrer comment, avec ce seul appareil utilisé plusieurs fois, on peut obtenir la transformation du champ élémentaire d'un quadrillage de droites équidistantes, en un champ correspondant à l'écoulement autour d'un cylindre circulaire muni de 4 ailettes radiales (fig. 6 et 7). Un autre application de cet appareil est le tracé des champs d'écoulement autour des ailes d'avions, et en particulier autour des profils Jokowski.

L'appareil actuel permet non seulement de tracer le profil, mais d'obtenir le tracé complet du champ aérodynamique. Nous donnons ici un exemple relatif au passage d'un courant devant une baie (fig. 8).

Transformateur à cône.

Cet appareil ne nécessite qu'un seul opérateur. Il associe à un tracé donné, un nouveau tracé obtenu en figurant des points successifs sur le papier. Le principal usage de l'appareil est d'obtenir des tracés contenant une ligne de

discontinuité. Sur une telle ligne, la pression doit être constante et par suite la vitesse constante. Le problème sera résolu en associant aux rayons vecteurs du

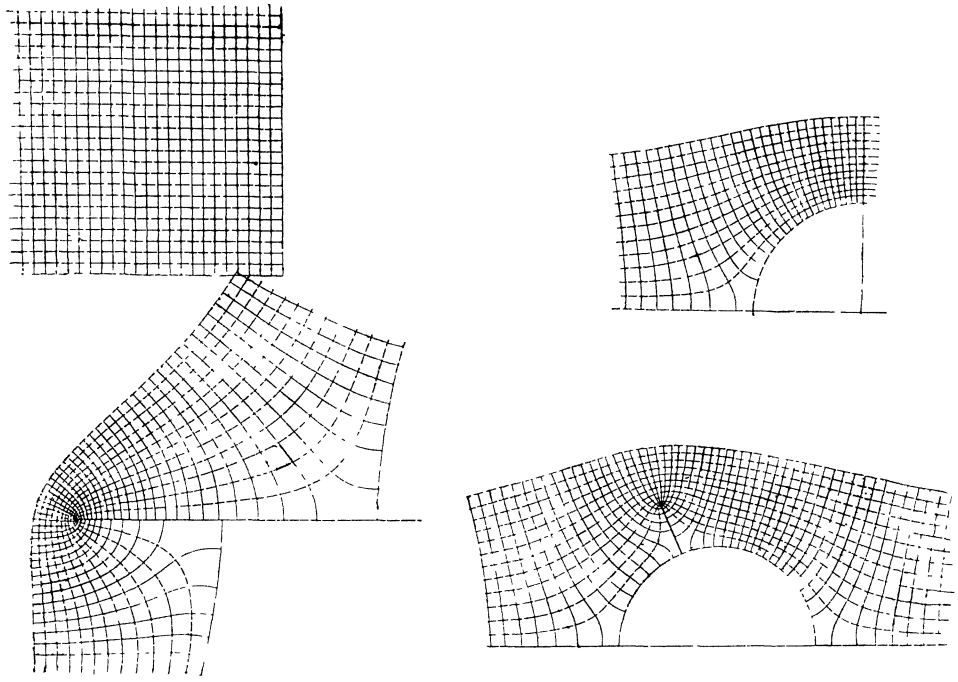


Fig. 6.

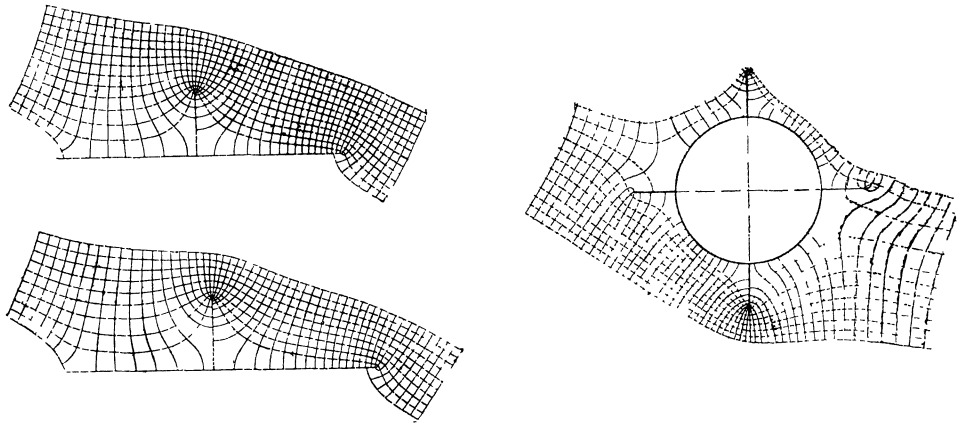


Fig. 7.

champ donné, les vitesses du champ cherché. A des rayons vecteurs constants correspondront des vitesses constantes.

Si donc on part d'un champ pour lequel une portion de ligne de courant

est un arc de cercle, la portion correspondante de la ligne de courant transformée, sera une ligne de vitesse constante ou une ligne de discontinuité.

L'expression analytique de la transformation exécutée est:

$$\zeta = \frac{dz}{dF}.$$

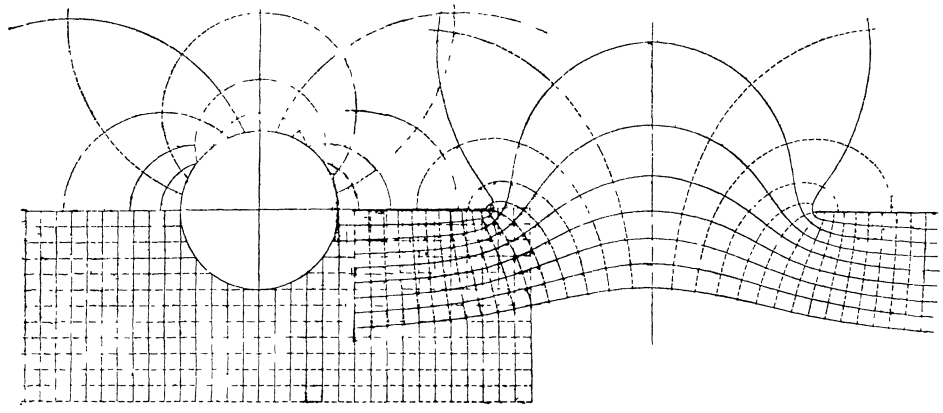


Fig. 8.

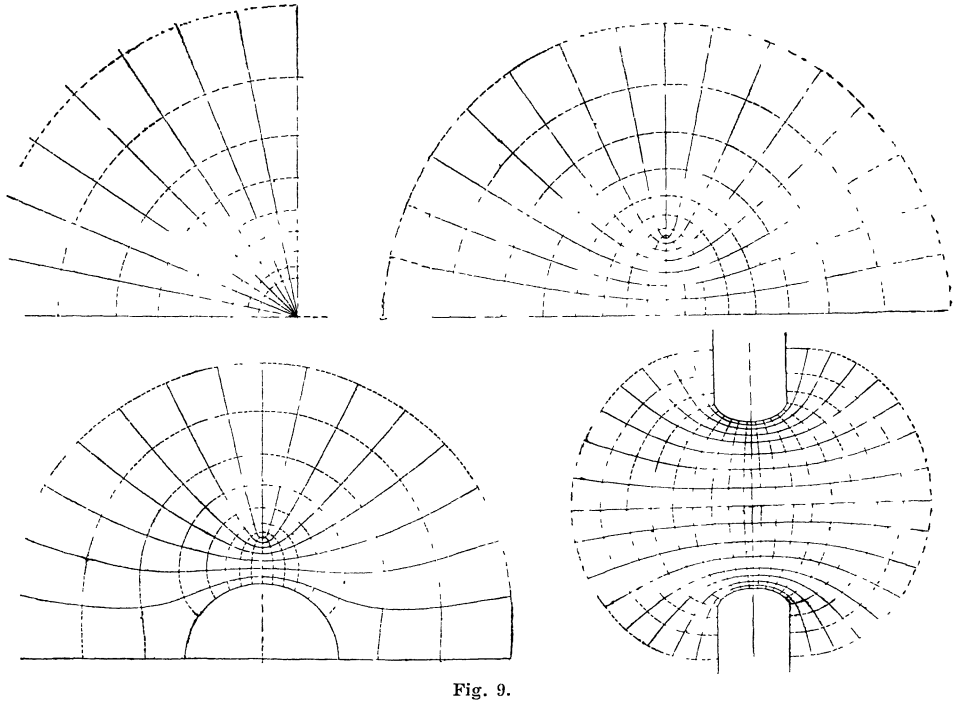


Fig. 9.

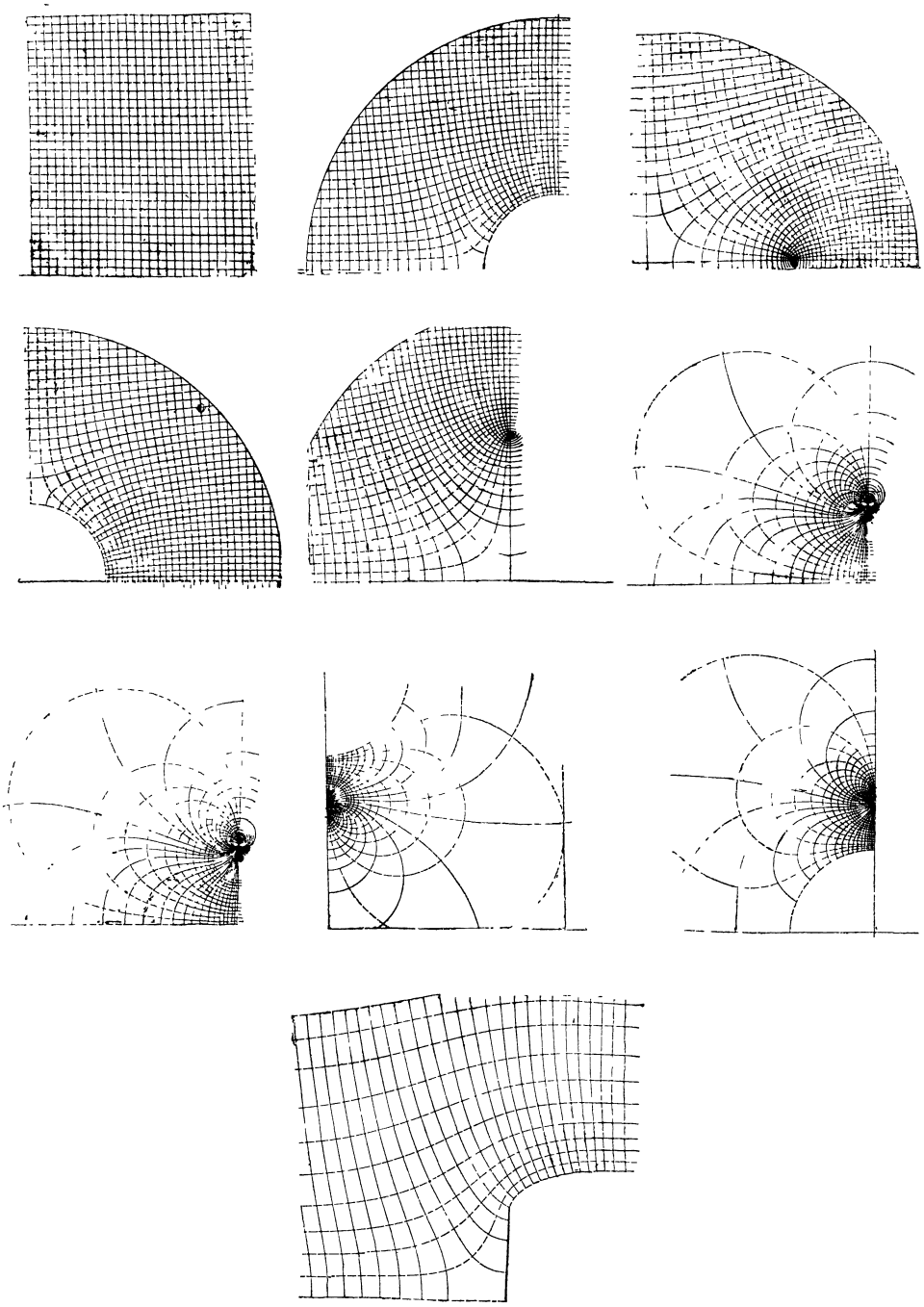


Fig. 10.

Pour illustrer les descriptions sommaires de ces divers appareils, nous donnons quelques reproductions de tracés obtenus par leur emploi (fig. 9, 10, 11 et 12). Dans la fig. 10 on a représenté toutes les étapes, chaque série des autres figures correspond à une étape.

D'une façon générale, la combinaison du double inverseur à équerre et de l'appareil à cône permet le tracé des champs avec ligne de discontinuité.

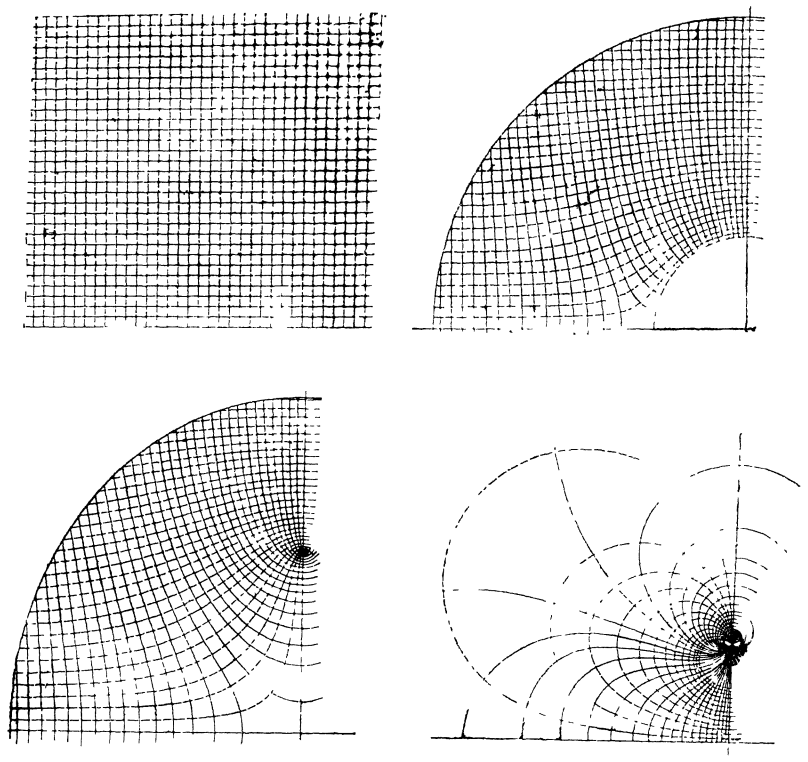


Fig. 11.

S'il y a deux lignes de discontinuité avec vitesses différentes, on est conduit à faire la représentation d'un anneau sur un rectangle, ce qui est immédiat avec la crémaillère. Pour avoir des champs à l'intérieur d'un rectangle on est conduit à l'application de fonctions elliptiques. Comme exemple nous donnons (fig. 13) le tracé du champ $F(z)=p(z)$ en partant d'un quadrillage rectiligne régulier et utilisant l'appareil à cône et l'éventail. La suite des opérations est indiquée en détail sur la fig. 13.

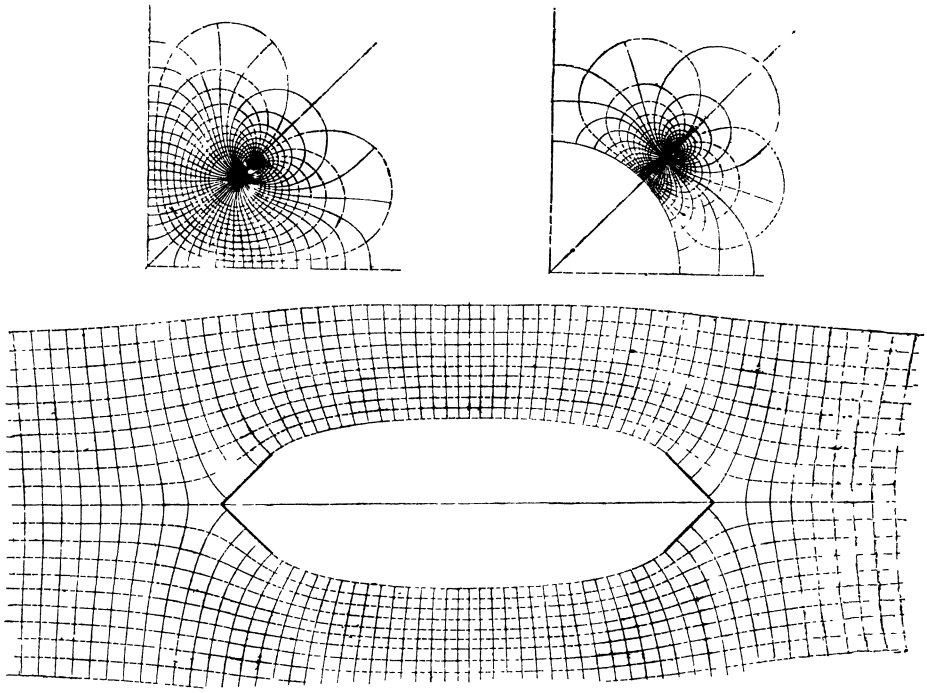


Fig. 12.

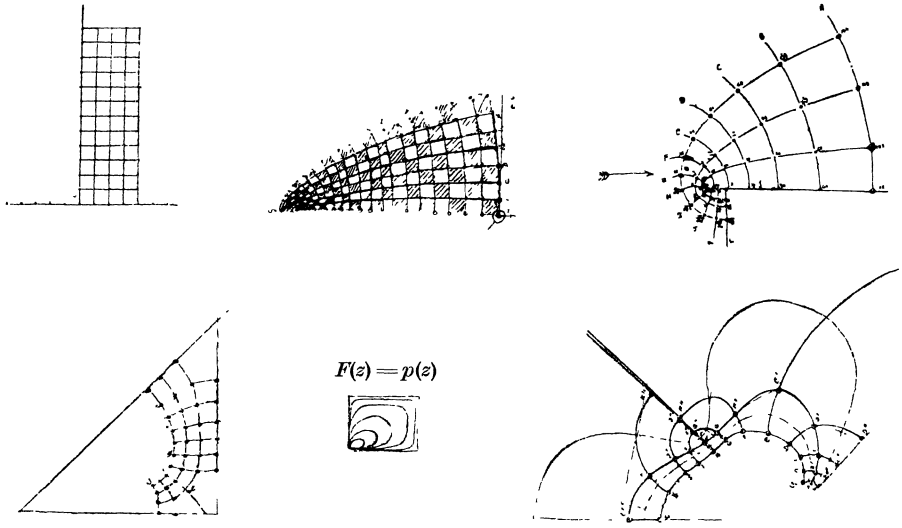


Fig. 13.

ANITA TESTA (Cagliari - Italia)

SULLA PROPAGAZIONE DEGLI IMPULSI NELLE LINEE DI TIPO TELEGRAFICO

L'equazione delle linee telegrafiche con induttanza trascurabile (caso generale dei comuni cavi sottomarini) si lascia scrivere sotto la forma

$$R\left(G+K\frac{\partial}{\partial t}\right)u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

dove R è la resistenza, G la conduttanza di disperdimento, K la capacità, tutte misurate per unità di lunghezza; e quindi

$$b\frac{\partial u}{\partial t}+cu=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

con b e c costanti positive.

Il prof. GIORGI in una sua recente memoria (1) ha mostrato l'applicazione del metodo degli operatori funzionali alla ricerca e discussione degli integrali di quest'equazione quando la linea si suppone infinita nel senso delle x positive e le perturbazioni si suppongono prodotte da una forza elettromotrice $V_0(t)$ applicata all'origine della linea e data arbitrariamente per tutti i valori passati del tempo. Egli stesso mi ha suggerito di proseguire questa ricerca, considerando in modo particolare il caso in cui la forza elettromotrice applicata ha forma *impulsiva* (2); cioè quando si pone $u_0(t)=Fu(t)$ dove il noto simbolo $Fu(t)$ rappresenta la impulsiva unitaria, così definita: $Fu(t)$ è nulla per tutti i valori negativi e positivi di t, e differisce da zero solo in un intervallo infinitamente piccolo comprendente il punto $t=0$, nel quale intervallo la $Fu(t)$ assume valori infinitamente grandi con legge tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Fu(t)dt=1. \tag{3}$$

Si suppone naturalmente che valga la condizione di successione, il che equivale a dire che la linea deve essere in quiete, cioè $u(x, t)$ deve essere nulla per tutti

(1) G. GIORGI: *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo LII (Anno 1928), pp. 265-312.

(2) Per la definizione formale più rigorosa della $Fu(t)$ e per la discussione sulla legittimità dell'uso di questo simbolo, mi riferisco all'annotazione 41 contenuta nella Memoria del prof. GIORGI testè citata.

i valori negativi del tempo: e si cerca $u(x, t)$ per t positivo, cioè si cerca lo stato di perturbazione prodotto dall'impulso che si propaga lungo la linea. La trattazione essendo già stata fatta nel caso della linea infinita, mi occupo qui del problema relativo a una linea finita di lunghezza l, con l'ipotesi che la linea sia aperta all'estremità ultima; cioè che per $x=l$ si abbia $\frac{\partial u}{\partial x}=0$.

Applicando il metodo degli operatori funzionali, pongo $\frac{\partial}{\partial t}=\Delta$ e tratto Δ come se fosse un moltiplicatore.

L'equazione si scrive allora

$$b\Delta u + cu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Integrandola come se fosse a derivate ordinarie si ha

$$u = e^{x\sqrt{b\Delta+c}}\varphi_1 + e^{-x\sqrt{b\Delta+c}}\varphi_2 \tag{5}$$

dove φ_1 e φ_2 sono costanti rispetto ad x e quindi funzioni di t; e sono state scritte dopo i fattori simbolici che le moltiplicano, e non prima di essi, perchè quei fattori hanno valore di operatori funzionali che agiscono sulle dette funzioni. Le φ_1 e φ_2 devono essere determinate, come si determinerebbero in un'equazione differenziale ordinaria in base alle condizioni

$$\begin{cases} u = u_0 (= Fu(t)) & \text{per} \quad x=0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \text{per} \quad x=l. \end{cases} \tag{6}$$

Eseguendo i calcoli, in modo ovvio risulta a riduzioni eseguite

$$u(x, t) = \frac{\operatorname{Cosh}(l-x)\sqrt{b\Delta+c}}{\operatorname{Cosh} l\sqrt{b\Delta+c}}\, Fu(t). \tag{7}$$

Il simbolo operatorio rappresentato dalla frazione deve essere valutato in base alla teoria degli operatori funzionali $F(\Delta)$. In base a questa teoria abbiamo che $u(x, t)$ risulta essere nient'altro che la funzione generatrice relativa all'espressione scritta sotto forma di frazione; vale a dire, si deve considerare la frazione stessa come se fosse una funzione di variabile complessa, cioè come se Δ anzichè un simbolo di derivazione rappresentasse una variabile complessa ω; e a questa funzione si deve applicare la trasformazione di LAPLACE.

Precisamente si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{\operatorname{Cosh}(l-x)\sqrt{b\omega+c}}{\operatorname{Cosh} l\sqrt{b\omega+c}}\, e^{ut} d\omega. \tag{8}$$

La funzione sotto il segno integrale è una trascendente uniforme, quindi l'operatore non è a valutazione multipla e il valore dell'integrale è indipendente dalla scelta del cammino d'integrazione. Di più nelle direzioni $\pm i\infty$ la funzione sotto il segno integrale si comporta assintoticamente come

$$e^{-x\sqrt{b\omega+c}} e^{ut}, \tag{9}$$

cioè tende a zero di ordine esponenziale. Ciò è quanto dire che l'operatore è diffusivo e che la funzione $u(x, t)$ risulta essere una funzione propriamente detta, cioè priva di elementi impulsivi, come quelle più semplici che si presentano nel caso della linea infinita. Ciò corrisponde al fatto che l'integrale può essere inteso nel significato ordinario.

Il procedimento stesso seguito dal prof. G. GIORGI nella sua memoria citata per la discussione dell'operatore $e^{-x\sqrt{bA+c}}$, il quale è un caso particolare di quello che noi incontriamo, è ancora applicabile per dimostrare che la nostra $u(x, t)$ è nulla per tutti i valori negativi del tempo, ed è continua per $t=0$. La teoria degli operatori, e similmente quella delle trasformate di LAPLACE, mostra che l'andamento iniziale della funzione stessa, cioè il suo andamento per valori molto piccoli di t, dipende dall'andamento assintotico del nucleo che sta sotto il segno integrale; e siccome esso andamento assintotico dato dalla (9), è indipendente da l, ed è lo stesso come se la linea fosse infinita, se ne deduce che sull'effetto iniziale dovuto a un impulso l'estremità distante della linea non ha influenza. Per quest'effetto iniziale rimangono applicabili le formule riportate nella memoria del prof. GIORGI per le linee infinite.

Per tutti gli altri valori positivi e finiti del tempo l'andamento rimane rappresentato dall'integrale (8) che è sempre convergente.

GIORGINA MADIA (Napoli - Italia)

I TRASFORMATORI TELEFONICI

Mi propongo di far conoscere qui, nella parte che più interessa la matematica, i risultati di una ricerca che ho compiuto per via teorica e sperimentale nel Laboratorio Centrale della Siemens-Halske a Berlino, e che ha per oggetto il ricavare le norme pel calcolo dei trasformatori telefonici. Questo calcolo dipende da una serie di studî compiuti da varii autori ([1]), ma che ancora non formavano una catena completa. Ho voluto riunire e collegare i diversi risultati conosciuti e completare la catena in ciò che era sostanzialmente mancante.

Con la traccia che qui presento, ritengo che il difficile problema del calcolo matematico di un trasformatore telefonico (finora eseguito caso per caso e per via in massima parte empirica) possa dirsi risoluto.

* * *

Resistenze complesse di un trasformatore a circuito aperto e a circuito chiuso. Loro andamento in funzione della frequenza. - Un trasformatore telefonico è un trasformatore a nucleo di ferro destinato a esser percorso da correnti di forma svariata che, allo scopo del calcolo, possono immaginarsi come risultanti di un gran numero di correnti sinusoidali di frequenze molto diverse. Per gli effetti pratici, occorre che certe caratteristiche di buon funzionamento siano raggiunte da quelle correnti sinusoidali la cui frequenza è compresa entro un certo intervallo, più piccolo di quello di udibilità acustica. Nel trasformatore telefonico effettivo, il nucleo di ferro lavora sempre nell'intervallo di magnetizzazione in cui l'induzione magnetica è in prima approssimazione proporzionale alla forza magnetizzante. I calcoli si possono impostare in questa ipotesi, trascurando in prima approssimazione l'isteresi.

Le grandezze che in un trasformatore si prestano a misura diretta sono le cosiddette resistenze « a circuito aperto » e a « circuito chiuso » offerte dal

([1]) FELDTKELLER und BARTELS. Wiss. Ver Siemens Konzern, 6, 65, 1927; Elektrischen Nachrichten Technik, Band 5, Heft 6, 1928. Da questi lavori è stata tolta la maggior parte delle figure che compaiono in questa Nota.

primario e dal secondario (1). Agli effetti del calcolo di queste resistenze, un trasformatore telefonico può esser considerato come un trasduttore quadripolare asimmetrico (2), e allora al suo schema si può sostituire quello di un trasduttore collegato a un trasformatore ideale con rapporto di trasformazione eguale a quello del trasformatore dato, così come mostra la fig. 1.

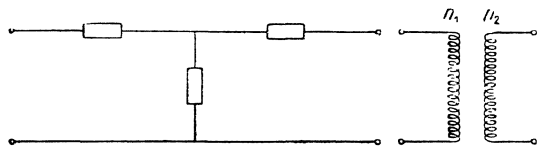


Fig. 1.

Determinare gli elementi di questo trasduttore equivalente è dunque il problema che anzitutto ci si propone.

Il trasformatore dovendo essere studiato, come si è supposto, sotto l'azione di correnti sinusoidali di diverse frequenze, le resistenze di cui si parla sono resistenze (impedenze) complesse; e in ogni caso si tratta di studiare il loro andamento in funzione della frequenza $\omega = 2\pi\nu$ e di rappresentare questo andamento, ove occorre, graficamente per mezzo di un luogo di punti nel piano complesso. Intendendo che le lettere ronde rappresentano gli elementi complessi, e che sia $i = \sqrt{-1}$ nel significato corrente in elettrotecnica, siano $\mathfrak{Z}_{c1}$, $\mathfrak{Z}_{c2}$ le impedenze misurate al primario e al secondario quando il secondario e il primario rispettivamente sono chiusi in corto circuito. Se n_1 ed n_2 rappresentano i numeri di spire del primario e del secondario; R_1 ed R_2; L_1 ed L_2 le resistenze ohmiche e le induttanze corrispondenti, si trova facilmente applicando formole note:

$$\mathfrak{Z}_{c1} = R_1 + R_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 + i\sigma\left[L_1 + L_2\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\right]\omega$$

$$\mathfrak{Z}_{c2} = R_2 + R_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 + i\sigma\left[L_2 + L_1\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\omega$$

dove σ è il coefficiente di disperdimento definito dalla nota relazione:

$$\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

essendo M il coefficiente d'induzione mutua fra i due avvolgimenti.

Ponendo:

$$L_1 = A_L n_1^2; \qquad L_2 = A_L n_2^2; \qquad \tau = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R_2}\right),$$

si ha pure:

$$\mathfrak{Z}_{c1} = \left(\frac{1}{\tau} + i\,\frac{\sigma}{2}\,\omega\right) 2A_L n_1^2$$

$$\mathfrak{Z}_{c2} = \left(\frac{1}{\tau} + i\,\frac{\sigma}{2}\,\omega\right) 2A_L n_2^2.$$

---

(1) Cioè le resistenze apparenti che si misurano tra i due poli del primario (o del secondario) quando il secondario (o il primario) è aperto o chiuso in corto circuito.

(2) Per la definizione di trasduttore v. G. GIORGI: *Filtri d'onda e linee infinite.* Rend. Congresso di Telegrafia e Telefonia a Como, settembre 1927.

In quanto alle due resistenze $\mathfrak{Z}_{a1}$, $\mathfrak{Z}_{a2}$, offerte dal trasformatore a circuito aperto, osserviamo prima di tutto che per esse vale la relazione:

$$\frac{\mathfrak{Z}_{a1}}{\mathfrak{Z}_{a2}} = \frac{\mathfrak{Z}_{c1}}{\mathfrak{Z}_{c2}} = \frac{n_1^2}{n_2^2}.$$

Il rapporto $\frac{n_1^2}{n_2^2}$ ha, negli ordinari trasformatori telefonici, valori assai piccoli e perciò la sola $\mathfrak{Z}_{a1}$ è suscettibile di misura, mentre $\mathfrak{Z}_{a2}$ raggiunge valori dell'ordine di $10^6 \div 10^7$ ohm.

L'andamento di $\mathfrak{Z}_{a1}$ nel piano complesso è mostrato nella fig. 2 dalla quale si deduce che l'impedenza $\mathfrak{Z}_{a1}$ può esser riprodotta dall'accoppiamento in parallelo di una resistenza ohmica, di un'induttanza e di una capacità. Ponendo dunque:

$$\mathfrak{Z}_{a1} = R_{a1} + iX_{a1}$$

si deve avere:

$$R_{a1} = \frac{R_p}{1+\left(\frac{R_p}{X_p}\right)^2}$$

$$X_{a1} = \frac{X_p}{1+\left(\frac{X_p}{R_p}\right)^2}$$

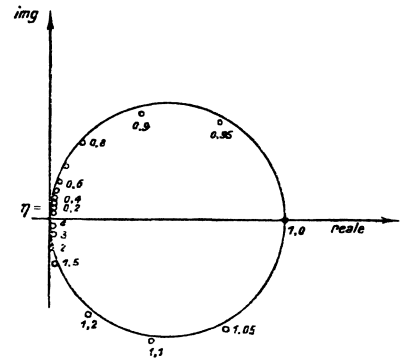


Fig. 2.

dove i valori di R_{a1}, X_{a1}, R_p, X_p sono indicati nella fig. 3.

Per la frequenza critica ω_0 del circuito antirisonante composto di L e C, si ha $X_p = 0$ e la resistenza che offre il primario quando il secondario è aperto, assume il valore massimo R_p. Questo valore ω_0 lo chiamo perciò « frequenza di antirisonanza » del trasformatore.

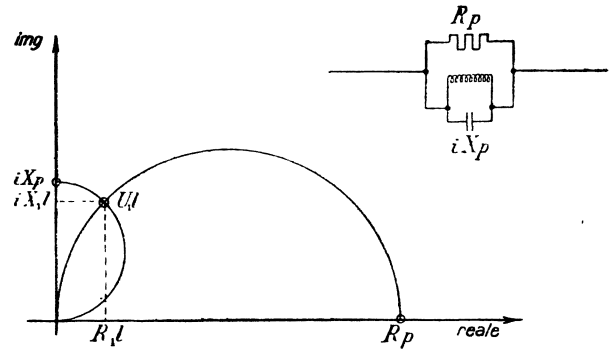


Fig. 3.

L'induttanza L è quella offerta dal primario:

$$L_1 = A_L n_1^2$$

e la capacità C_1 dev'esser tale che

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}.$$

La fig. 4 mostra qual'è, in definitiva, lo schema equivalente al trasformatore dato.

* * *

Trasformatore compreso fra due resistenze ohmiche. - Un trasformatore telefonico può esser chiuso su resistenze ohmiche o su circuiti dotati di capacità (p. es. quando il secondario è collegato alla griglia di una valvola termojonica). Nei due casi la sua funzione è diversa e quindi anche le condizioni cui deve soddisfare sono differenti. Considero qui soltanto ([1]) il caso non ancora completamente studiato, di un trasformatore compreso fra due resistenze ohmiche Z_1 e Z_2 tali che per esse valga la relazione ([1]):

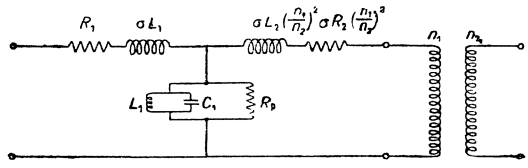


Fig. 4.

(1) $$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}.$$

Per un trasformatore così fatto, la principale condizione da soddisfare, è che l'attenuazione da esso prodotta sia, nella determinata banda di frequenza da trasmettere, costante e quanto più piccola possibile. Se il trasformatore ha nucleo di ferro dato, questa condizione dipende essenzialmente dal numero di spire n_1, n_2 dei suoi avvolgimenti, o più precisamente dal rapporto di trasformazione $\frac{n_1}{n_2}$. E poichè le condizioni del circuito, assegnando i valori di Z_1 e Z_2 determinano per la (1) il rapporto di trasformazione è il valore di n_1 (o di n_2) quello che dev'essere determinato in modo tale da non rendere troppo grande la resistenza ohmica del trasformatore; tenendo però presente che un numero troppo piccolo di spire col diminuire l'induttanza del trasformatore ha per effetto di aumentarne l'attenuazione. Ci si propone dunque di ricercare, dipendentemente dal numero di spire, la condizione di optimum.

Si consideri a tale scopo un trasformatore di nucleo dato, chiuso sulle due resistenze reali Z_1 e Z_2 e comprendente nel primario un generatore ideale (senza resistenze interne) e di f. e. m. sinusoidale E_0. La potenza che arriva al primario è

(2) $$W_1 = \left| \frac{E_0^2}{4 Z_1} \right|$$

e quella che la resistenza esterna riceve dall'avvolgimento secondario e dissipa in calore, è:

(3) $$W_2 = | I_2^2 Z_2 |$$

dove I_2 è la corrente che circola nel secondario.

([1]) Pei trasformatori del secondo tipo, cioè chiusi su circuiti contenenti capacità vedi:

Considerando il trasformatore come un trasduttore si ha d'altronde

$$I_2 = \frac{E_0}{AZ_2 + DZ_1 + CZ_1Z_2 + B} \tag{4}$$

dove A, B, C, D sono le costanti del trasduttore. Poichè dobbiamo ricercare l'andamento dell'attenuazione con la frequenza, rappresentiamo questa per mezzo della « costante logaritmica d'attenuazione » b, definita da

$$e^b = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}}$$

e ricerchiamo l'espressione di questa b in funzione della frequenza. Tenendo conto di (2) di (3) e di (4) si ha

$$e^b = \sqrt{\frac{W_1}{W_2}} = \left| \frac{CZ_1Z_2 + DZ_1 + AZ_2 + B}{2\sqrt{Z_1Z_2}} \right|,$$

ovvero, esprimendo le costanti del trasduttore in funzione di $\mathfrak{Al}_{a1}$, $\mathfrak{Al}_{c1}$, $\mathfrak{Al}_{a2}$, $\mathfrak{Al}_{c2}$:

$$e^b = \left| \frac{Z_1^2 + 2Z_1\mathfrak{Al}_{a1} + \mathfrak{Al}_{a1}\mathfrak{Al}_{c1}}{2Z_1\sqrt{\mathfrak{Al}_{a1}(\mathfrak{Al}_{a1} - \mathfrak{Al}_{c1})}} \right| \cdot$$

$$= \frac{Z_1 + \mathfrak{Al}_{a1} + \sqrt{\mathfrak{Al}_{a1}(\mathfrak{Al}_{a1} - \mathfrak{Al}_{c1})}}{2\sqrt{\mathfrak{Al}_{a1}(\mathfrak{Al}_{a1} - \mathfrak{Al}_{c1})}} \cdot \frac{Z_1 + \mathfrak{Al}_{a1} - \sqrt{\mathfrak{Al}_{a1}(\mathfrak{Al}_{a1} - \mathfrak{Al}_{c1})}}{Z_1}.$$

$\mathfrak{Al}_{c1}$ è generalmente molto piccola rispetto ad $\mathfrak{Al}_{a1}$, tanto che si può sempre scrivere in prima approssimazione:

$$\sqrt{\mathfrak{Al}_{a1}(\mathfrak{Al}_{a1} - \mathfrak{Al}_{c1})} = \mathfrak{Al}_{a1} - \frac{\mathfrak{Al}_{c1}}{2}$$

e quindi

$$e^b = \left| \left(1 + \frac{Z_1}{2\mathfrak{Al}_{a1}}\right)\left(1 + \frac{\mathfrak{Al}_{a1}}{2Z_1}\right) \right|$$

o anche

$$b = \log \left| 1 + \frac{Z_1}{2\mathfrak{Al}_{a1}} \right| + \log \left| 1 + \frac{\mathfrak{Al}_{a1}}{2Z_1} \right|.$$

Il primo di questi termini

$$\log \left| 1 + \frac{Z_1}{2\mathfrak{Al}_{a1}} \right|$$

cresce col crescere di Z_1 e per Z_1 costante raggiunge un minimo in corrispondenza alla frequenza ω_0 di antirisonanza. Nella formola che dà il valore dell'attenuazione, esso ha dunque importanza soltanto per frequenze molto lontane da quella critica, è poichè allora la $\mathfrak{Al}_{a1}$ può esser considerata come una reattanza pura

$$iL_1\omega = iA_L\omega n_1^2$$

FELDTKELLER und BARTELS: *Ueber die Vermessung von Uebertragern für Fernsprechzwischenverstärken.* Wiss. Ver Siemens-Konzern, 6, 65, 1927.

si può scrivere con sufficiente approssimazione,

$$\log\left|1+\frac{Z_1}{2\,\mathfrak{Z}_{a1}}\right|=\log\left|1+\frac{Z_1}{2iA_L\omega n_1^2}\right|.$$

E infine, ricordando l'espressione di $\mathfrak{Z}_{c1}$:

$$\mathfrak{Z}_{c1}=\left(\frac{2}{\tau\omega}+i\sigma\right)A_L\omega n_1^2$$

risulta:

$$b=\log\left|1+\frac{Z_1}{2iA_L\omega n_1^2}\right|+\log\left|\frac{\left(1+\frac{2}{\tau\omega}+i\sigma\right)A_L\omega n_1^2}{2Z_1}\right|.$$

Trascurando rispetto ad 1 il termine

$$\frac{R_1+R_2\frac{L_1}{L_2}}{Z_1}\cdot\frac{\sigma L_1\omega}{Z_1},$$

si ottiene infine l'andamento di b rappresentato da questa formola definitiva:

$$b=\log\left|1+\frac{A_L n_1^2}{\tau Z_1}\right|+\log\left|1+\frac{Z_1}{2iA_L\omega n_1^2}\right|+\log\left|1+\frac{i\sigma A_L\omega n_1^2}{2Z_1}\right|.$$

Ora osserviamo: il primo termine di questa somma

$$b_1=\log\left|1+\frac{A_L n_1^2}{\tau Z_1}\right|$$

è indipendente dalla frequenza e rappresenta perciò l'attenuazione costante dovuta alle resistenze ohmiche degli avvolgimenti e al coefficiente di disperdimento magnetico. Gli altri due termini invece

$$b_2=\log\left|1+\frac{Z_1}{2iA_L\omega n_1^2}\right|;\qquad b_3=\log\left|1+\frac{i\sigma A_L\omega n_1^2}{2Z_1}\right|$$

sono funzioni della frequenza tali che al crescere di ω mentre b_2 diminuisce fino a divenire trascurabile, b_3 aumenta ed assume valori apprezzabili solo per frequenze elevate. Riassumendo:

b_1 è un termine costante nell'attenuazione;

b_2 è un termine supplementare variabile che viene in evidenza per le basse frequenze;

b_3 è un termine supplementare variabile che viene in evidenza per le alte frequenze.

* * *

Attenuazione e distorsione in una banda di frequenze. - Si abbia ora da trasmettere una banda di frequenze comprendente parecchie ottave, e siano $\omega_{\min}$, $\omega_{\max}$ le due frequenze che, inferiormente e superiormente limitano questa banda. Ogni frequenza ω considerata sarà tale cioè che:

$$\omega_{\min}\leq\omega\leq\omega_{\max}.$$

Se l'intervallo $\omega_{\min} - \omega_{\text{mass}}$, è sufficientemente largo, si può supporre che l'attenuazione al limite inferiore della banda sia espressa da:

$$b' = b_1 + \log \left| 1 + \frac{Z_1}{2iA_L\omega_{\min} n_1^2} \right| = b_1 + b_2'$$

e al limite superiore da

$$b'' = b_1 + \log \left| 1 + \frac{i\sigma A_L \omega_{\text{mass}} n_1^2}{Z_1} \right| = b_1 + b_3''.$$

Sia b_2' sia b_3'' variano al variare di n_1. Mentre però al crescere di n_1, b_2' diminuisce per l'aumentare delle induttanze, b_3'' aumenta per l'aumentare della reattanza di disperdimento. Per ogni valore fisso di n_1 esiste una certa

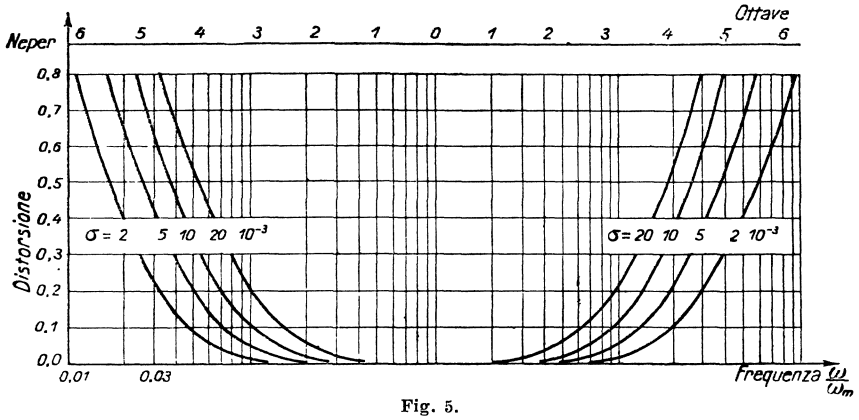


Fig. 5.

frequenza intermedia ω_m tale che per essa l'attenuazione totale $b = b_1 + b_2 + b_3$ raggiunge un minimo $\bar{b}$ perchè un minimo raggiunge la somma dei due termini $b_2 + b_3$.

Definiamo *distorsione* corrispondente ad ogni valore di ω la differenza $b - \bar{b}$. E allora: la distorsione per basse frequenze è dovuta quasi esclusivamente alla rapida variazione di b_2; quella per alte frequenze a quella di b_3.

La curva d'attenuazione ha un andamento simmetrico rispetto ad ω_m e quindi se $\omega_{\min}$ ed ω_{mass} sono tali da verificare la relazione:

$$\frac{Z_1}{2A_L\omega_{\min} n_1^2} = \frac{\sigma A_L \omega_{\text{mass}} n_1^2}{2Z_1}, \tag{5}$$

(cioè corrispondono a distorsioni eguali) si deve avere:

$$\omega_m = \sqrt{\omega_{\text{mass}} \cdot \omega_{\min}}$$

e quindi da (5)

$$n_1^2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{Z_1}{A_L} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\min} \cdot \omega_{\text{mass}}}} = \frac{1}{\sigma} \frac{Z_1}{A_L} \frac{1}{\omega_m}.$$

In questa ipotesi l'attenuazione complessiva è data per ogni valore di ω da:

$$b = b_1 + b_2 + b_3 = \log\left|1 + \frac{A_1 n_1^2}{\tau Z_1}\right| + \log\left|1 + \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{\omega_m}{i\omega}\right| + \log\left|1 + \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{i\omega}{\omega_m}\right|$$

ed ha rispetto ad ω_m un andamento simmetrico che, per trasformatori a nucleo di ferro chiuso è mostrato nella fig. 5. Questa mostra inoltre che la distorsione, e quindi anche l'attenuazione dipende oltre che dal rapporto $\frac{\omega_m}{\omega}$, anche dal coefficiente di disperdimento σ in modo tale che, al crescere di σ diminuisce la larghezza della banda trasmessa con una distorsione non superiore a certi limiti; o in altri termini, cresce la distorsione con cui vengono trasmesse le frequenze estreme.

* * *

Influenza di un campo magnetico dovuto a correnti continue. - Un trasformatore telefonico di cui il secondario sia chiuso su una resistenza ohmica e di cui il primario sia collegato all'anodo di una valvola termojonica può esser considerato come un trasformatore compreso fra due resistenze ohmiche e rientrare perciò nel caso precedentemente studiato. La capacità che la valvola offre fra anodo e filamento è infatti piccolissima e la resistenza offerta dalla valvola si può senz'altro considerare come una resistenza reale.

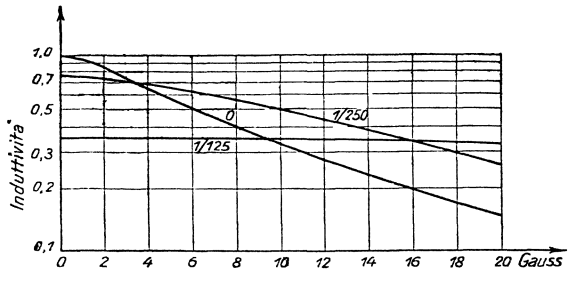


Fig. 6.

Nel primario allora circola oltre la corrente alternante, anche una corrente continua anodica la quale produce una magnetizzazione fissa, che si somma algebricamente con quella alternante; in pratica il nucleo viene a lavorare in una zona di saturazione magnetica e diviene meno sensibile alle correnti alternanti. L'esistenza di questo campo magnetico sovrapposto porta con sè un aumento di σ e quindi diminuisce la larghezza della banda di frequenze trasmesse con piccola distorsione e peggiora perciò la trasmissione telefonica. Un mezzo noto per diminuire questo effetto disturbatore del campo

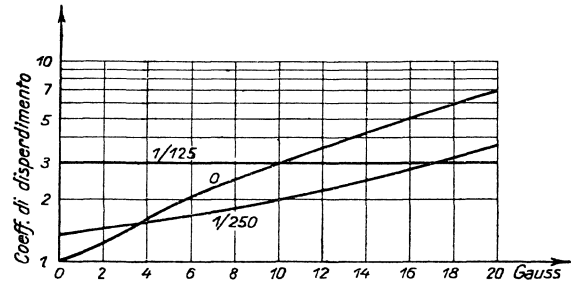


Fig. 7.

magnetico è quello di fare un taglio nel cammino delle linee di forza, cioè interporre un intraferro nel nucleo. In corrispondenza alle diverse larghezze di questo intraferro le fig. 6 e 7 mostrano l'andamento dell'induttanza specifica A_L e di σ in funzione dell'intensità H del campo magnetico.

Dall'esame di questi diagrammi si vede che A_L e σ hanno andamento reciproco (il che, d'altronde, si può prevedere a priori) e che per ogni valore di H c'è un determinato spessore dell'intraferro capace di dare un minimo per σ e un massimo per A_L.

Di questo fatto bisogna tener conto nel calcolo del numero di spire n_1. Assegnata infatti la valvola termojonica il cui anodo dev'esser collegato al primario del trasformatore da calcolare, viene ad esser conosciuto senz'altro il valore di H e quindi per il diagramma (6) o (7) l'opportuno intraferro da introdurre nel nucleo e i valori di σ e di A_L corrispondenti. Determinati così i più opportuni valori di σ e di A_L la formola:

$$n_1^2 = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{Z_1}{A_L} \frac{1}{\omega_m} \tag{6}$$

ci permette di calcolare per ogni Z_1 assegnata e per ogni frequenza media ω_m della banda da trasmettere, il valore di n_1; n_2 essendo determinato dalla resistenza Z_2 per la quale abbiamo sempre supposto valere la relazione:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{n_1^2}{n_2^2}.$$

Si possono dunque costruire delle tabelle che in corrispondenza a ogni determinato tipo di trasformatore e insieme alle curve delle fig. 6 e 7 permettano di trovare rapidamente gli elementi costruttivi del trasformatore che più si adatta ad ogni scopo determinato.

* * *

Trasmissione di un piccolo intervallo di frequenze. - In tutto quanto si è detto nel precedente paragrafo, si è sempre supposto che debba esser trasmessa una banda di frequenze sufficientemente larga (cioè di parecchie ottave) e perciò si è tenuto conto soprattutto della distorsione agli estremi dovuta alla rapida variazione dei termini b_2 e b_3 che, come si è visto, determinano da soli, la larghezza della banda trasmessa con distorsione non superiore a una data. Si è cercato infatti di determinare n_1 in modo da rendere massima questa larghezza senza preoccuparci del termine

$$b_1 = \log \left| 1 + \frac{A_L n_1^2}{\tau Z_1} \right| \tag{7}$$

che rappresenta l'attenuazione costante e che diminuisce col diminuire di n_1.

Sostituiamo in (7) il valore di n_1 dato dalla (6) e otteniamo

$$b_1 = \log \left| 1 + \frac{1}{\tau \sqrt{\sigma \omega_m}} \right| ;$$

cioè: diminuendo b_1 aumenta la frequenza media ω_m della curva d'attenuazione. Infatti, diminuendo n_1, aumenta, per ogni ω il termine b_2, diminuisce b_3 e tutta

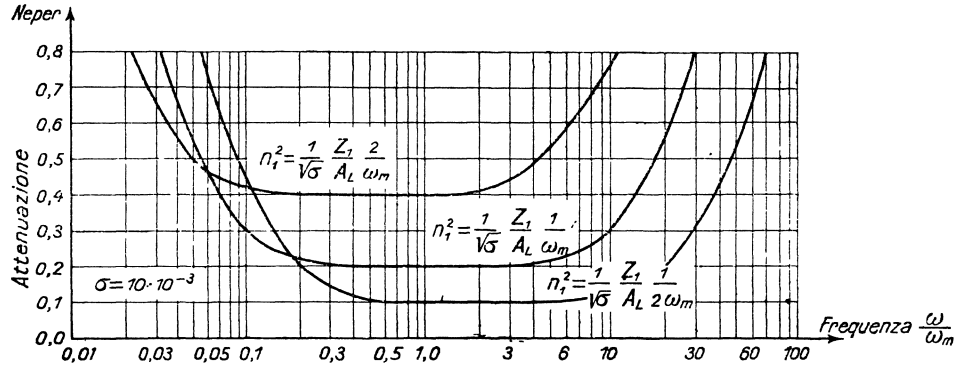


Fig. 8.

la curva si sposta verso le frequenze maggiori, abbassandosi nello stesso tempo verso l'asse delle ω pel diminuire di b_1 (v. fig. 8).

Questo spostamento può essere spinto fino a che la distorsione non raggiunga il massimo valore permesso Δb: cioè fino a che non sia:

$$b_2' = \Delta b = \log \left| 1 + \frac{Z_1}{2 i A_L \omega_{\min} n_1^2} \right| .$$

Questo termine è della forma:

$$\log |1 \pm ih| < \frac{1}{2} h^2$$

dove h però è abbastanza piccolo rispetto ad uno per poter scrivere senz'altro

$$\log |1 \pm ih| = \frac{1}{2} h^2$$

e quindi:

$$b_2' = \Delta b = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{2 i A_L \omega_{\min}} \right)^2$$

da cui

$$n_1^2 = \frac{1}{2} \frac{Z_1}{A_L \omega_{\min}} \frac{1}{\sqrt{2 \Delta b}} .$$

Per trovare questo valore di Δb ragioniamo come segue: i termini b_2 e b_3 sono entrambi della forma $\log |1 \pm ih|$ e tali che la loro somma soddisfa alla diseguaglianza

$$b_2 + b_3 < \frac{\sigma}{8} \left[\left(\frac{\omega_m}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right]$$

e quindi per $\omega = \omega_{min}$, poichè b_3 è trascurabile,

$$b_2' = \Delta b < \frac{\sigma}{8} \frac{\omega_m^2}{\omega_{min}^2}$$

o anche

$$\Delta b < \frac{\sigma}{8} \frac{\omega_{mass}}{\omega_{min}}.$$

Determinato così il valore di Δb, il termine d'attenuazione costante b_1 si può scrivere:

$$b_1 = \frac{1}{\tau \sqrt{2\Delta b}} \frac{1}{2\omega_{min}}.$$

Esso è tanto più piccolo quanto più grande è la distorsione Δb ammissibile e quanto più elevata è la frequenza minima della banda da trasmettere.

Anche in questo caso si possono costruire delle tabelle che, in corrispondenza ai diversi valori di ω_{min} e di Δb, diano per ogni tipo di trasformatori il numero di spire opportuno.

G. VANNI (Roma - Italia)

OSSERVAZIONI SULLE TEORIE DELLA PROPAGAZIONE DELLE ONDE HERTZIANE ED IN PARTICOLARE SULLE TEORIE ELETTRO E MAGNETO-IONICHE

§ 1. - Scopo della presente comunicazione, è di richiamare l'attenzione degli studiosi sopra alcuni punti delle teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche e più specialmente di quelle dette teorie elettro e magneto-ioniche, considerando, in particolar modo, il poderoso lavoro del prof. P. O. PEDERSEN di Copenhaghen pubblicato nel 1927, avente per titolo: *The propagation of Radio Waves*, di cui l'illustre autore diede conoscenza allo scrivente a Washington, in occasione della Conferenza Internazionale Radiotelegrafica.

§ 2. - Allo stato attuale della scienza non esiste, come è noto, una teoria completa della propagazione dei segnali radiotelegrafici, la quale renda conto, in modo esauriente, di tutti i fenomeni estremamente complessi che essa presenta, e che sono stati messi in luce specie in questi ultimi anni. Esiste, tuttavia, un insieme molto notevole di lavori, elaborati da eminenti fisici e matematici. Fra questi, il lavoro del prof. PEDERSEN costituisce, a mio avviso, uno dei più esaurienti e più completi, sia dal punto di vista teorico come da quello tecnico e pratico. Ritengo fare cosa estremamente utile per i giovani studiosi, di richiamare l'attenzione su di esso, cominciando col preporre alcune considerazioni generali sui caratteri delle diverse teorie di propagazione delle onde elettromagnetiche, anteriori a quelle fondate sui fenomeni elettro e magneto-ionici.

§ 3. - Le teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche si possono porre in relazione alle due classiche scoperte fatte, una da HERTZ, nel 1887, sul modo di produrre sperimentalmente le onde che da lui presero il nome e che le teorie di MAXWELL avevano divinato, e l'altra del MARCONI, il quale, nel 1895, trovò il modo di utilizzare tali onde per l'invio dei segnali a distanza senza fili conduttori, portando successivamente le distanze di trasmissione, da pochi chilometri, a varie migliaia, quando, nel 1901, potè trasmettere dei segnali attraverso l'Atlantico da Poldhu, in Inghilterra, al Capo Breton nel Canadà, a circa 4000 Km. creando così la radiotelegrafia transoceanica.

§ 4. - In relazione alle sopra indicate scoperte, le teorie della propagazione delle onde elettromagnetiche si possono riferire a *tre* grandi periodi: il primo, anteriore alla scoperta della radiotelegrafia, va dal 1887 al 1901, vale a dire dalla scoperta di HERTZ a quella della radiotelegrafia transoceanica, fatta dal MARCONI utilizzando onde lunghe. Il secondo periodo comprende l'intervallo dal 1901 al 1922, epoca in cui, riprendendo la via già segnalata dal MARCONI nel 1916 e 1919, si utilizzano, dai radiodilettanti, le onde corte di circa 200 metri per l'invio di segnali attraverso l'Atlantico tra l'Europa e gli Stati Uniti. Infine, il terzo ed ultimo periodo, in cui le onde corte e ultra corte fino a pochi metri di lunghezza sono in piena efficienza, va dal 1922 ad oggi.

§ 5. - **1° Periodo.** — Le teorie della propagazione del primo periodo comprendono principalmente l'opera magistrale di HERTZ [1] il quale, oltre ad avere scoperto il modo di ottenere le onde elettromagnetiche per mezzo del suo classico oscillatore simmetrico a capacità localizzate terminali, calcolandone il periodo, la lunghezza d'onda ed il decremento, tratta il problema della propagazione delle onde così generate, nella ipotesi della terra piana e perfettamente conduttrice a contatto con una atmosfera perfettamente isolante. Trova, inoltre, l'espressione del campo elettrico e magnetico dell'oscillatore a distanza, mettendo, per il primo, in evidenza la distinzione tra l'azione *induttiva* del campo e quella di *irradiazione*, della quale, per mezzo del teorema di POYNTING, calcolò il valore e il decremento. Furono così, da HERTZ, poste le basi scientifiche di quasi tutte le relazioni empiriche o semiempiriche, di cui si avvalsero i tecnici nei primi periodi della telegrafia senza fili.

§ 6. - È bene osservare che, avendo HERTZ in mira, nelle sue classiche ricerche, di mettere in evidenza l'analogia tra le onde da lui scoperte e le onde luminose, egli cercò di produrre onde che, per la loro lunghezza e frequenza, si accostassero il più possibile a quelle luminose, vale a dire onde di alcuni metri o meno; e ciò anche perchè, utilizzando le proprietà riflettenti dei conduttori, analoghe a quelle delle superficie speculari per la luce, fosse possibile concentrare la energia di tali onde per mezzo di riflettori sferici o parabolici, analoghi a quelli adoperati in ottica. Come fa giustamente osservare il MARCONI in una conferenza fatta nel Giugno 1922, all'Istituto dei radio Ingegneri di New York [2] lo studio e l'uso delle onde corte *datano quindi dal 1887*, dall'epoca, cioè, delle classiche ricerche di HERTZ e dei suoi contemporanei (fra cui il nostro illustre RIGHI) giacchè in tutte queste esperienze si utilizzarono onde corte ed ultra corte,

---

[1] Wiedemann Ann., Bd. 31, 1887. — HERTZ: Electric Waves, English Trans., E. Jones, London, 1900.

[2] Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones (1923), p. 443.

variabili da alcuni metri a pochi decimetri, con le quali venne creato un nuovo ramo della scienza, l' *Ottica elettromagnetica*, dovuto sopratutto ad HERTZ ed al RIGHI. E si noti che la prova della efficienza delle onde corte non solo per scopi scientifici di laboratorio, ma anche per l'invio di segnali, data dai primi tempi della telegrafia senza fili, giacchè, nel 1896, il MARCONI riuscì, in Inghilterra, a trasmettere dei segnali con un oscillatore a onde corte alla distanza di alcuni chilometri, mentre, con un'antenna e con i dispositivi allora usati, la trasmissione non era possibile al di là di qualche centinaio di metri.

§ 7. - Poichè tutto quanto si riferisce alle onde corte, le quali hanno ora radicalmente trasformato la tecnica delle radiosegnalazioni, appassiona gli studiosi di tutto il mondo, sarà bene osservare altresì, che negli anni 1916 e 1917, durante la guerra, il MARCONI ed i suoi Ingegneri utilizzarono, in esperienze fatte in Italia e in Inghilterra a Carnarvon, onde corte di 2 o 3 metri, irradiate da riflettori, e, nel 1919, furono fatte decisive esperienze di trasmissione radiofoniche tra Hendon e Birmingam a 160 chilometri, con onde di 15 metri.

§ 8. - **2° Periodo.** — L'accennato secondo periodo delle teorie della propagazione si inizia nel 1901 quando il MARCONI riuscì, per il primo, a inviare dei segnali da Poldhu al Capo Breton nel Canadà, vincendo l'ostacolo di circa *400 chilometri*, dovuto alla curvatura della terra. L'attenzione degli uomini di scienza fu diretta a spiegare come mai i raggi hertziani emessi da Poldhu tangenzialmente alla superficie terrestre, e quindi in direzione presso a poco orizzontale, seguissero la curvatura della terra arrivando a 4000 Km. di distanza, invece di propagarsi, come la luce, in linea retta, perdendosi nello spazio. È bene notare che fu appunto in tale epoca che, per spiegare le portate considerevoli dei segnali radiotelegrafici, il prof. KENNELLY [1] e l'HEAVISIDE [2] formularono la loro ipotesi della probabile esistenza, nelle alte regioni dell'atmosfera, di uno strato ionizzato e perciò conduttore capace di riflettere e guidare, seguendo la curvatura della terra, le onde hertziane. Questa ipotesi e le relative teorie che se ne dedussero, ebbero, tuttavia, in quel tempo scarso sviluppo.

§ 9. - Il periodo che và dal 1901 al 1922 e che comprende circa un ventennio, è uno dei più notevoli, sia dal punto di vista dei progressi della tecnica radiotelegrafica realizzati dal MARCONI e da altri inventori, come dal punto di vista delle evoluzioni delle teorie della propagazione, iniziate da HERTZ. In questo periodo, tali teorie possono essere considerate, secondo il LOVE [3] da *tre* punti

---

[1] KENNELLY. Electrical World and Eng., p. 473 (marzo, 1902).

[2] HEAVISIDE. Enciclopedia Britannica, IX ed., p. 215 (dicembre, 1902).

[3] LOVE: *The transmission of Electric waves over the surface of the earth.* Trans. of R. Soc. of London, vol. 215, p. 105 (1915).

di vista: 1°) Generalizzando l'ipotesi di HERTZ che riteneva la terra piana e perfettamente conduttrice, la terra viene considerata come una sfera dotata di una certa conduttività e costante dielettrica, e si determina l'attenuazione che le onde elettriche subiscono, sia quando si considera la terra come un conduttore perfetto (conduttività infinita, resistenza nulla), sia quando si considera come un conduttore imperfetto (conduttività e resistenza aventi valori finiti). Le teorie considerate da questo punto di vista si possono chiamare *teorie della resistenza.* 2°) Ammesso, per le onde elettromagnetiche un ripiegamento intorno agli ostacoli analogo a quello subito dalle onde luminose, si possono investigare le diverse circostanze del fenomeno, in relazione alle dimensioni della terra ed alla lunghezza delle onde elettromagnetiche; si hanno così le *teorie della diffrazione* che si propongono di dare una spiegazione adeguata della possibilità dell'invio dei segnali, seguendo la curvatura della terra. 3°) L'atmosfera viene, infine, considerata non come un dielettrico omogeneo perfettamente isolante, ma come un dielettrico *ionizzato* e quindi dotato di una certa conduttività. È questo il punto di vista delle così dette *teorie atmosferiche,* delle quali il pieno sviluppo è quello costituito dalle recenti teorie elettroioniche che hanno assunto particolare importanza ed estensione in questi ultimi anni, specie dopo le trasmissioni a onde corte.

10. - Le teorie della resistenza e della diffrazione che caratterizzano il 2° periodo, hanno, per punti di partenza, dei postulati abbastanza semplici: *a*) la terra è considerata come un conduttore piano o sferico, dotato di una conduttività finita o infinita, circondato da un dielettrico omogeneo; *b*) l'apparato radiatore di onde è costituito da un osciliatore o *dipolo* hertziano situato nel dielettrico, in prossimità della superficie terrestre; *c*) le onde emesse, costituiscono un sistema di oscillazioni armoniche di unica frequenza e di grande lunghezza rispetto alle onde luminose, ma piccolissima rispetto alle dimensioni della terra. Quando, tuttavia, si cerca di risolvere il problema, apparentemente semplice, di determinare, come aveva fatto HERTZ nel caso della terra piana, il campo magnetico ed elettrico a distanza in un punto qualunque del dielettrico vicino alla superficie, si trovano difficoltà matematiche considerevoli, alcune delle quali sono accennate nel citato lavoro di LOVE, di cui ritengo lo studio utilissimo per i nostri giovani cultori di matematica. È da osservare che queste difficoltà hanno esercitato la sagacia di fisici e matematici insigni come MACDONALD ([1]), Lord RAYLEIGH ([2]), POINCARÉ ([3]),

---

([1]) Proc. Royal Soc., vol. 71 (1903), p. 251.

([2]) Proc. Royal Soc., vol. 72 (1904), p. 40.

([3]) POINCARÉ. Proc. Royal Soc., vol., 72 (1904), p. 42. — Rend. Circ. Mat. Palermo, t. 29 (1910), p. 169.

ZENNECK [1], SOMMERFELD [2], NICHOLSON [3], AUSTIN [4], RYBCZYNSKI [5], ECCLES [6], LOVE [7], VAN DER POL [8] ecc.

§ 11. - Speciale importanza anche dal punto di vista tecnico, hanno i lavori dello ZENNECK e del SOMMERFELD, il quale, generalizzando i risultati di HERTZ, introdusse i concetti di onde di spazio e onde di superficie, e quello della così detta *distanza numerica*, mostrando il differente carattere della propagazione secondo che la distanza numerica è molto maggiore o molto minore di uno. Una interessante applicazione pratica dei risultati di SOMMERFELD è stata fatta, alla determinazione delle portate delle trasmissioni a piccola distanza, dal Col. SACCO del nostro Genio Militare [9].

§ 12. - **3° Periodo.** — Il terzo periodo delle teorie della propagazione che va dal 1922 ad oggi, ha inizio nell'epoca dello sviluppo delle onde corte, in cui, conformemente ai risultati già ottenuti dal MARCONI negli anni 1916, 1917 e 1919, ma in opposizione alle teorie generalmente ammesse dai tecnici e dagli uomini di scienza (secondo cui si riteneva come dimostrata la impossibilità delle onde, inferiori a 200 metri, di superare grandi distanze come quelle transoceaniche) si era, dai radio dilettanti, ottenute verso la fine del 1922, le comunicazioni bilaterali, tra l'Europa e gli Stati Uniti, con onda intorno a 200 metri. Le ricerche dei cultori di scienza e di tecnica furono dirette a spiegare la ragione di questo paradosso, e ad investigare le proprietà singolari delle onde corte. Ebbe così origine il 3° periodo delle teorie di propagazione, che è una estensione di quello sopra indicato delle teorie *atmosferiche* ed è caratterizzato da uno studio, più profondo e più completo di quelli fatti anteriormente, delle condizioni fisiche dell'atmosfera e più specialmente della modifica che, sulla conduttività e costante dielettrica della atmosfera, produce la presenza di ioni e di elettroni dovuti alla azione della luce solare o di altre radiazioni. Fu, nel tempo stesso, ripresa la ipotesi dello stato conduttore di KENNELLY ed HEAVISIDE, alla quale in un primo tempo non era stata data la dovuta importanza. Il punto di partenza delle nuove teorie, che chiameremo *elettroniche*, è una ipotesi avanzata dall'ECCLES [10] fin

---

(1) Ann. de Physik (IV), Bd. 23 (1907), p. 864.
(2) Ann. de Physik (IV), Bd. 28 (1909), p. 665.
(3) Phil. Mag., vol. 19 (1910), p. 757.
(4) Bull. of Bur. of Standards, vol. 7, p. 315 (1911).
(5) Ann. de Phys. (IV), Bd. 41 (1913), p. 191.
(6) Proc. Royal Soc., vol. 87 (1912), p. 79.
(7) Phil. trans. of Roy Soc., vol. 215, p. 105 (1915).
(8) Phil. Mag. (6), vol. 38, p. 365 (1919).
(9) Bollettino Radiotelegrafico del R. Esercito (V), Genn. 1927.
(10) Proc. Royal Soc. of London, vol. 87 (1912).

dal 1912, nella quale si ammette che la presenza di elettroni e di ioni nell'atmosfera ne diminuisca la costante dielettrica al disotto del valore uno, che ha nelle condizioni di perfetto isolamento ed aumenta quindi la velocità dell'onda al disopra del valore $c=3.10^{10}$ cm/s relativo al vuoto.

§ 13. - La teoria di ECCLES, notevolmente estesa ed applicata da APPLETON, NICHOLS e SCHELLENG, TAYLOR e HULBURT e dal PEDERSEN nel già citato suo magistrale lavoro, porta alla espressione di due importanti parametri della atmosfera, che sono la costante dielettrica e la conduttività. Se in un mezzo ionizzato vi sono N elettroni o ioni per cm^3, aventi la frequenza di collisione ν fra loro e con le molecole residue neutre, chiamendo e ed m la carica e la massa dell'elettrone o dello ione, $\omega=2\pi f$ la frequenza angolare dell'onda che attraversa il mezzo ionizzato, si trova, esprimendo tutto in unità $e \cdot s$:

$$(1) \qquad \varepsilon_s=1-4\pi N\frac{e^2}{m}\frac{1}{\nu^2+\omega^2}, \qquad \sigma_s=N\frac{e^2}{m}\frac{\nu}{\nu^2+\omega^2}.$$

§ 14. - Se si suppone una frequenza nulla di collisione (il che si può approssimativamente ritenere nelle altissime regioni dell'atmosfera) si ha:

$$(2) \qquad \varepsilon_s=1-4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2}, \qquad \sigma_s=0.$$

Le formule precedenti permettono di rendersi conto della legge di rifrazione che regola la traiettoria dei raggi hertziani, giacchè se indichiamo con v la velocità delle onde (quella che si chiama velocità ordinaria o di *fase*) relativa ad un dato mezzo di cui l'indice di rifrazione sia n, e c la costante intrinseca dell'etere, numericamente eguale alla velocità della luce o delle onde elettromagnetiche nello spazio vuoto, si ha:

$$(3) \qquad v=\frac{c}{n}.$$

§ 15. - Ora se ammettiamo in prima approssimazione la relazione di MAXWELL, $n=\sqrt{\varepsilon}$, e consideriamo un mezzo dielettrico di permeabilità magnetica $\mu=1$, avremo:

$$(1) \qquad v=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}=\frac{c}{\sqrt{1-4\pi\dfrac{Ne^2}{m\omega^2}}}.$$

Si vede come la ionizzazione dell'atmosfera diminuendo al disotto del valore normale, sensibilmente eguale ad uno, il potere dielettrico, ne diminuisca altresì l'indice di rifrazione al disotto dell'unità; avremo perciò una velocità di fase *maggiore* di quella c che è relativa al vuoto o allo spazio libero. Quando quindi un raggio hertziano passa da uno strato dell'atmosfera ad uno strato superiore più ionizzato, esso si trova nelle condizioni di un raggio di luce che passa da un dato mezzo in uno meno rifrangente, in cui la velocità della luce è maggiore, e

si comprende come il raggio hertziano emesso da una data stazione trasmittente *T*, sotto un certo angolo di inclinazione rispetto all'orizzonte (fig. 1) si propaghi sensibilmente in linea retta nelle basse regioni dell'atmosfera, fino ad una certa altezza ove la ionizzazione determina il cambiamento dell'indice di rifrazione al disotto di uno. Avremo così, nei vari strati diversamente ionizzati, una serie di deviazioni successive in *O*, *A*, *B* per le quali il raggio si allontanerà sempre più dalla normale fino a raggiungere, in *B*, la condizione critica della riflessione totale, quando cioè l'angolo di incidenza nel mezzo meno ionizzato sarà tale che il corrispondente angolo di rifrazione sia retto. Avrà, allora, luogo il fenomeno della *riflessione totale*, per cui il raggio, non potendo più uscire dallo strato Kennelly-Heaviside, si rifletterà e seguirà un cammino discendente *B*, *C*, *D* ritornando verso terra, e dando luogo ad una specie di miraggio elettromagnetico inverso, per così dire, del miraggio ottico.

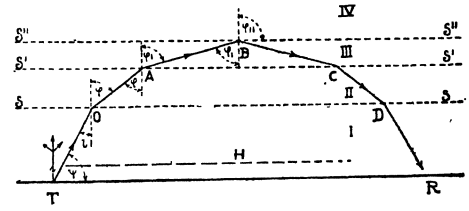


Fig. 1.

§ 16. - Si arriva, in tal modo, a questa conseguenza fondamentale che nella irradiazione di una antenna radiotelegrafica *T*, si hanno due specie di raggi hertziani: uno, che si può dire raggio diretto *TH*, che si propaga in direzione presso a poco parallela alla superficie terrestre, secondo il così detto vettore radiante di POYNTING. L'onda corrispondente è detta dal PEDERSEN *terrestre* o *diretta* (earth bound). Essa è più o meno attenuata per effetto della resistenza, l'attenuazione essendo maggiore quanto più piccola è la lunghezza d'onda, come risulta dai lavori di ZENNECK e di SOMMERFELD. L'altro raggio *TO* è quello più o meno inclinato sull'orizzonte, e corrisponde alla così detta *onda libera*, la quale si propaga in alto, in seno all'atmosfera, ove si rifrange e si riflette nello strato Kennelly-Heaviside.

§ 17. - Con le onde corte al disotto di 200 metri, l'attenuazione dell'onda terrestre è così forte che ha importanza solo a non grande distanza dalla stazione trasmittente. La radiazione che riesce effettiva per grandi distanze è quella prodotta dall'onda libera corrispondente al raggio hertziano più o meno inclinato rispetto all'orizzonte.

§ 18. - Per le onde lunghe, la legge di attenuazione della componente terrestre (earth bound) per onde da 300 a 25.000 m. e per distanze superiori ai 1000 Km. sul mare e di giorno, è espressa dalla nota formula di AUSTIN:

$$E = 120\pi \frac{hI}{\lambda d} \sqrt{\frac{a}{\operatorname{sen} a}}\, e^{-\frac{0{,}0014 d}{\lambda^{0{,}6}}}$$

ove E indica il campo elettrico in volt/Km., h, λ, d rispettivamente l'altezza efficace dell'aereo trasmittente, la lunghezza d'onda e la distanza, tutto espresso in Km., α è la distanza angolare delle due stazioni.

§ 19. - **Espressione rigorosa dell'indice di rifrazione.** — Abbiamo già notato come la espressione

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

dell'indice di rifrazione sia approssimata. La espressione rigorosa può ottenersi nel modo seguente, inspirato ai procedimenti del PEDERSEN, opportunamente semplificati (1).

Le equazioni generali di MAXWELL, per un onda elettromagnetica di cui siano E ed H le componenti elettrica e magnetica, in un mezzo omogeneo aventi le costanti σ, ε e μ (conduttività, costante dielettrica e permeabilità magnetica) si possono scrivere nella notazione vettoriale:

(1) $$4\pi I = \text{rot } H \quad \text{Equaz. di AMPÈRE,}$$

(2) $$\frac{\partial(\mu H)}{\partial t} = -\text{rot } E \quad \text{Equaz. di FARADAY.}$$

La corrente totale I è espressa, trattandosi di mezzo omogeneo, dalla somma scalare della corrente di conduzione σE e della corrente di spostamento, vale a dire da

(3) $$I = \sigma E + \frac{\varepsilon E}{4\pi} \quad \text{in u. e. m.}$$

Mettendo in evidenza le componenti di rot H e rot E, riferite ad un sistema destrorso di assi, le (1) e (2) si possono scrivere, supposto $\mu = 1$:

(1') $$4\pi I = i\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z}\right)$$

(2') $$-\frac{\partial H}{\partial t} = i\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + j\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + k\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

essendo i, j, k tre vettori unità disposti secondo i tre assi del sistema. Le equazioni precedenti possono riferirsi ad una onda piana linearmente polarizzata il cui vettore elettrico E_z (fig. 2) sia orientato parallelamente all'asse Oz, ed il cui valore sia funzione di x e di t secondo una equazione analoga a quella che si considera nella propagazione di una perturbazione periodica in un conduttore filiforme indefinito, e cioè:

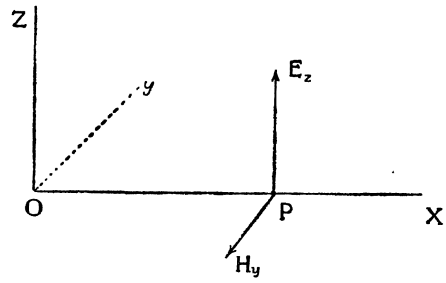


Fig. 2.

(3) $$E_z = Ae^{j\omega t - sx}$$

(1) PEDERSEN: *The propagation of electric Waves*, p. 117.

nella quale s è la così detta costante di *propagazione*, e $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ la pulsazione o frequenza angolare.

Poniamo, come nel caso dei conduttori filiformi

$$s = \gamma + j\delta$$

essendo γ la costante di *attenuazione* e δ la *costante d'onda.*

La (3) può scriversi

(3') $$E_z = Ae^{j\omega t}, \qquad e^{-(\gamma+j\delta)x}$$

di cui il termine indipendente dal tempo consta del fattore di attenuazione $e^{-\gamma x}$ che decresce in progressione geometrica quando x cresce in progressione aritmetica e del fattore $e^{-j\delta x}$ il quale si chiama fattore di fase, la quantità δ essendo la costante di *fase* o *costante d'onda.* La ragione di questa denominazione si vede subito osservando che se la distanza x varia per l'intervallo:

(4) $$\lambda = \frac{2\pi}{\delta}$$

cioè x diviene $x + \frac{2\pi}{\delta}$ l'argomento δx diviene $\delta x + 2\pi$ e il fattore di fase $e^{-j\delta x}$ riprende lo stesso valore. La quantità λ definita dalla (4) definisce quella che si chiama *lunghezza d'onda.*

Ciò posto, osserviamo che un fenomeno periodico il cui periodo sia T, la frequenza $f = \frac{1}{T}$, e la lunghezza d'onda λ, possiede quella che si dice *velocità di fase*, definita da:

(5) $$v = \frac{\lambda}{T} = f\lambda.$$

Poichè $f = \frac{\omega}{2\pi}$ e per la (4), $\lambda = \frac{2\pi}{\delta}$, si ha pure:

(6) $$v = \frac{\omega}{\delta} = \frac{2\pi f}{\delta}.$$

Se ne deduce che: « Un'onda di pulsazione ω ha, in un mezzo omogeneo, una velocità di fase eguale al quoziente della pulsazione per la costante d'onda ». Tale velocità è quindi variabile, in generale, con la frequenza, vale a dire il mezzo considerato è, come si dice, dotato di dispersione o di deformazione; esso si trova nelle condizioni di un cavo avente una certa capacità, induttanza, resistenza e permittanza costanti, ma non legate da alcuna particolare relazione e nel quale quindi la velocità di una perturbazione elettrica sia funzione della frequenza e della lunghezza d'onda. Cercando di utilizzare i concetti e le notazioni della già citata teoria dei conduttori filiformi, possiamo trovare i valori della costante di attenuazione γ e della costante d'onda δ e vedere quali particolari valori assuma la velocità di fase e l'indice di rifrazione del mezzo.

Dalla espressione (3) della forza elettrica, si desume, tenendo presenti le

equazioni (1'), (2') di AMPÈRE-FARADAY, che la forza magnetica H_y, dovuta al moto di traslazione della forza elettrica è parallela all'asse delle y; e poichè, per la seconda delle dette equazioni scalari, deve essere, tenendo presente la (3):

$$\frac{\partial H_y}{\partial t}=\frac{\partial E_z}{\partial x}-\frac{\partial E_z}{\partial z}=\frac{\partial E_z}{\partial x}=-sE_z$$

risulta

$$H_y=-\frac{s}{j\omega}E_z=j\frac{s}{\omega}E_z. \tag{7}$$

Se ora, nelle equazioni di AMPÈRE (1'), consideriamo quella che si riferisce alla proiezione sull'asse Oz, avremo, essendo $H_x=0$:

$$4\pi\sigma E_z+\varepsilon_m\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}=\frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{8}$$

Ora si ha dalle (3) e (7):

$$\frac{\partial E_z}{\partial t}=j\omega E_z; \qquad \frac{\partial H_y}{\partial x}=j\frac{s}{x}\frac{\partial E_z}{\partial x}; \qquad \frac{\partial E_z}{\partial x}=-sE_z$$

avremo, sostituendo questi valori nella (8)

$$4\pi\sigma E_z+\varepsilon j\omega E_z=-j\frac{s^2}{\omega}E_z$$

da cui

$$\omega(4\pi\sigma+\varepsilon j\omega)=s^2.$$

La costante di propagazione s è quindi tale che

$$s^2=-\varepsilon\omega^2+j4\pi\omega\sigma$$

e quindi

$$s=\gamma+j\delta=\sqrt{-\omega^2\varepsilon+j4\pi\sigma\omega}. \tag{9}$$

Dalla (9) si deduee

$$\gamma^2-\delta^2=-\omega^2\varepsilon$$
$$\gamma^2+\delta^2=\sqrt{(\omega^2\varepsilon)^2+(4\pi\sigma\omega)^2}.$$

Ciò posto, ε e σ rappresentano, nelle formole precedenti, la permeabilità elettrica e la conduttività, in unità elettromagnetiche. Se ε_s ed σ_s esprimono le stesse costanti in unità elettrostatiche, è noto che $\varepsilon_s=c^2\varepsilon$, $\sigma_s=c^2\sigma$, ove $c=3.10^{10}$ rappresenta quella che il LODGE chiama velocità costituzionale dell'etere (1) e che, secondo lo stesso LODGE, ha un valore numerico dello stesso ordine di grandezza della velocità della luce nel vuoto, e del rapporto fra l'unità elettromagnetica ed elettrostatica di carica.

---

(1) LODGE: *The revolution in Physics.* 19th Kelvin Lectures - Journal of Inst. of El. Eng., (october, 1928), p. 1006.

Dalle relazioni precedenti si deduce, con facili trasformazioni:

$$\gamma^2=\omega^2\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}-\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}-\frac{\varepsilon_s}{2}\right\} \tag{10}$$

$$\delta^2=\omega^2\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}+\frac{\varepsilon}{2}\right\}=\frac{\omega^2}{c^2}\left\{\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}+\frac{\varepsilon_s}{2}\right\}. \tag{11}$$

Ciò posto, è noto che l'indice di rifrazione di un mezzo nel quale la velocità di fase di una certa radiazione sia v, è uguale al rapporto tra velocità c di propagazione di questa nel vuoto, e la velocità di fase v. Sarà dunque, detto n l'indice di rifrazione

$$n=\frac{c}{v}$$

e poichè chiamando $\omega=2\pi f$ la pulsazione dell'onda considerata δ la costante d'onda del mezzo, si ha per la (6),

$$v=\frac{\omega}{\delta}$$

si ha pure tenendo presente la (11)

$$n=\delta\frac{c}{\omega}=\sqrt{\frac{\varepsilon_s}{2}+\sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4}+\left(\frac{2\pi\sigma_s}{\omega}\right)^2}}. \tag{12}$$

Si vede che l'indice di rifrazione di un mezzo per un onda di pulsazione ω è una funzione piuttosto complessa di questa pulsazione, o della frequenza, della costante dielettrica ε_s del mezzo, e della sua conduttività. Solo per un mezzo perfettamente isolante, di conduttività nulla, si può ritenere valida la relazione

$$n=\sqrt{\varepsilon_s}. \tag{13}$$

In tal caso la velocità di fase è espressa da

$$v=\frac{c}{n}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_s}} \tag{14}$$

e si vede che, in generale, la velocità di fase è funzione della frequenza e quindi della lunghezza d'onda, oltre che delle costanti elettriche σ ed ε del mezzo.

§ 20. - Velocità di fase e velocità di gruppo. — È noto che quando la velocità di fase è funzione della frequenza e della lunghezza d'onda e che in seno ad un mezzo omogeneo, si propagano due onde di lunghezze d'onda λ e $\lambda+d\lambda$ poco differenti, aventi velocità di fase pure poco differenti (fig. 3), queste due onde, interferendo fra loro, danno luogo ad un fenomeno analogo al fenomeno acustico dei battimenti e costituiscono un'onda complessa o *gruppo d'onda*, i cui massimi e minimi

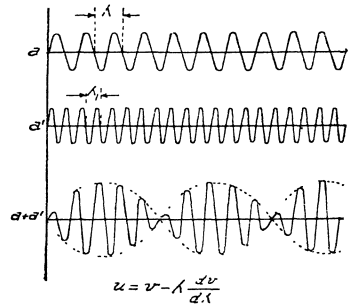


Fig. 3.

si propagano con una velocità u detta *velocità di gruppo*, in generale diversa dalla velocità di fase delle onde componenti. È stato dimostrato da Lord RAYLEIGH che la velocità u del gruppo è espressa da (1)

$$u = \frac{\partial\left(\frac{v}{\lambda}\right)}{\partial\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = v - \lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda} \tag{1}$$

in funzione della velocità v delle onde componenti e della legge di variazione di essa con la lunghezza d'onda.

Alla relazione precedente si può arrivare molto semplicemente nel modo seguito anni sono da chi scrive, nelle lezioni tenute presso l'Istituto Militare R. T. (2).

§ 21. - Essendo la velocità v funzione della frequenza f dell'onda, si può trasformare la (1) esprimendo $\frac{\partial v}{\partial f}$ anzichè $\frac{\partial v}{\partial\lambda}$. Ciò può farsi nel seguente modo.

Detta v la velocità di fase, si ha:

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

da cui:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial v} = \frac{1}{f^2}\left(f - v\frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

e quindi:

$$\lambda\frac{\partial v}{\partial\lambda} = \frac{v}{1 - \frac{v}{f}\frac{\partial f}{\partial v}}.$$

Sostituendo questo valore nella (1) del § 20, si ottiene:

$$u = \frac{v}{1 - \frac{f}{v}\frac{\partial v}{\partial f}} \tag{1}$$

che corrisponde alla formula data da BREIT e TUVE (3), nella quale figura la pulsazione invece della frequenza.

È da notare che alla formula precedente si arriva immediatamente se si pone la relazione tra velocità di fase e di gruppo sotto la forma adoperata dal prof. APPLETON (4) e cioè

$$\frac{1}{u} = \frac{\partial}{\partial f}\left(\frac{f}{v}\right). \tag{2}$$

Dalla (1) risulta se la velocità di fase v è indipendente dalla frequenza, vale a dire se il mezzo è senza dispersione, la velocità u di gruppo coincide con la velocità di fase.

---

(1) RAYLEIGH: *Theory of sound* (2th ediz.), vol. 1, pag. 302.

(2) VANNI. Bollettino R. T. del R. Esercito, anno 1922, vol. 1, pag. 20.

(3) BREIT e TUVE. Physical Review, vol. 28, pag. 554 (1926).

(4) E. V. APPLETON. Proc. Phys. Soc., vol. 41, pag. 56, December 1928.

§ 22. - È importante esprimere la velocità del gruppo in funzione dell'indice di rifrazione n del mezzo. Chiamando c la costante caratteristica dell'etere, la velocità di fase v è espressa come sappiamo (§ 19) da

$$v = \frac{c}{n} \tag{1}$$

da cui

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{c}{n^2}\frac{\partial n}{\partial f} = -\frac{v}{n}\frac{\partial n}{\partial f} \tag{2}$$

sostituendo questo valore nella (1) si ottiene

$$u = \frac{v}{1 + \frac{f}{n}\frac{\partial n}{\partial f}} = \frac{c}{n + f\frac{\partial n}{\partial f}} \tag{3}$$

formola importante che esprime la velocità di gruppo in funzione della costante c dell'etere e mostra che quando l'indice di rifrazione del mezzo è costante e indipendente dalla frequenza, la velocità di gruppo è uguale alla velocità di fase ed eguale alla velocità c nello spazio libero vuoto.

Si vede altresì che per una legge di variazione di n con la frequenza, tale che $\frac{\partial n}{\partial f}$ sia positivo, la velocità di gruppo u è *minore* della velocità c nel vuoto.

In generale, la velocità di gruppo può essere eguale, maggiore o minore della velocità di fase v. Ciò dipende dalla legge di variazione dell'indice di rifrazione con la frequenza e con le costanti ε, σ del mezzo. Nel caso nostro si ha per la (12) del § 19:

$$n^2 = \frac{\varepsilon_s}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_s^2}{4} + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}.$$

Se nel mezzo considerato vi sono N elettroni o ioni per cm^3, aventi la frequenza di collisione ν fra loro e con le rimanenti molecole del mezzo, si ha secondo le (1) del § 14:

$$\varepsilon_s = 1 - 4\pi N \frac{e_s^2}{m}\frac{1}{\nu^2 + \omega^2} \qquad \sigma_s = N\frac{e^2}{m}\frac{\nu}{\nu^2 + \omega^2}.$$

Sostituendo questi valori di n, ε e σ nella (3), si trova che la velocità di gruppo non può mai superare la costante c dello spazio libero.

§ 23. - Un caso particolare importante si ha quando si può ritenere il mezzo come un dielettrico perfetto a conduttività nulla, e supporre nulla la frequenza di collisione ν degli ioni o elettroni, il che può, in via approssimativa, ammettersi aver luogo nelle altissime regioni della atmosfera.

La velocità di fase è in tal caso espressa semplicemente da:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{1}$$

Volendo trovare il valore della velocità di gruppo utilizzando la formola di

BREIT e TUVE (§ 21) ove apparisce la variazione di v rispetto alla frequenza, osserviamo che dalle (1) si ricava

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{c}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\frac{d\varepsilon}{df} = -\frac{v}{2\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{df}. \tag{2}$$

Esprimendo ε in funzione di f e supposta nulla la conduttività σ, si ha

$$\varepsilon = 1 - 4\pi\frac{Ne^2}{m\omega^2} = 1 - \frac{Ne^2}{\pi m f^2} \quad \text{da cui} \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial f} = \frac{2Ne^2}{\pi m f^3}. \tag{3}$$

La (2) diviene quindi

$$\frac{\partial v}{\partial f} = -\frac{v}{\varepsilon}\frac{Ne^2}{\pi m f^3}.$$

Sostituendo questo valore nella formola di BREIT e TUVE e tenendo conto della (3), si ha:

$$u = \frac{v}{1 - \frac{f}{v}\frac{dv}{\partial f}} = v\varepsilon = c\sqrt{\varepsilon} = cn. \tag{4}$$

Dalle (1) e (4) si ricava la relazione rimarchevole

$$uv = c^2$$

vale a dire che la costante intrinseca c dell'etere, numericamente eguale alla velocità delle onde luminose o elettromagnetiche nel vuoto, è, come fa osservare il LODGE [1], media geometrica delle velocità di gruppo e di fase delle onde elettromagnetiche. Essendo ε, e quindi n, minore di uno, la velocità di gruppo u che lo stesso LODGE identifica con la velocità della energia, è *costantemente minore* di c. Al contrario, la velocità di fase v è secondo la (1), *costantemente maggiore* di c. Più piccola è la velocità di gruppo o della energia, più grande è la velocità di fase, che può tendere verso ∞, se u tende verso zero.

Si giunge così al risultato notevole della possibilità della esistenza di velocità *maggiori* di c, vale a dire di quella che si può ritenere come velocità della luce nel vuoto, la quale viene considerata, nella teoria della relatività, come una velocità limite. È stata appunto la esistenza di una velocità di fase maggiore di quella nel vuoto, che è stata invocata da ECCLES per spiegare l'incurvamento subìto da un raggio elettromagnetico propagantesi nelle alte regioni della atmosfera, col conseguente fenomeno del ritorno a terra.

Devesi però osservare che, come nell'ottica ordinaria, si ritiene che, nella propagazione degli impulsi luminosi successivi, quali si hanno nei metodi di FIZEAU, di FOUCAULT e di NEWCOMB, si debba considerare la velocità di *gruppo* e non quella di fase (la quale si ritrova nei metodi basati sulla aberrazione); così nella ottica elettromagnetica si ammette che, nella propagazione di segnali o impulsi

[1] LODGE, loc. cit., p. 106.

elettromagnetici quali si hanno nelle ordinarie trasmissioni radioelettriche, si debba considerare la *velocità di gruppo*, costantemente minore di c, anzichè la velocità di fase. È per questa ragione che la stessa velocità di gruppo, considerata dal LODGE come volocità di propagazione della energia, viene chiamata velocità di segnale, e di essa si giovano PEDERSEN [1] e APPLETON [2] per calcolare il tempo impiegato da un segnale a percorrere un certo cammino in seno alla atmosfera. In guisa che, in seno allo strato ionizzato Kennelly-Heaviside, la velocità del segnale è quella del gruppo u, e il tempo necessario per percorrere la parte incurvata di un certo cammino di cui l'elemento sia ds, è espresso da:

$$t = \int \frac{ds}{u}.$$

§ 24. - Caratteristiche della traiettoria di un raggio hertziano. — Considerando, in special modo, l'andamento di quella che abbiamo chiamata onda libera o atmosferica (§ 16), si possono applicare i noti procedimenti della ottica metereologica per calcolare gli elementi della traiettoria di un raggio hertziano TAB (fig. 4) emesso da una stazione trasmittente T sotto un angolo ψ, che chiameremo angolo di elevazione. Si dimostra allora che si chiama n l'indice di rifrazione nel punto più alto A della traiettoria, h l'altezza di questo, R il raggio terrestre, si ha:

$$n = \frac{\cos\psi}{1 + \frac{h}{R}}$$

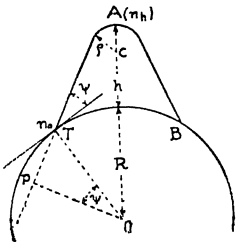


Fig. 4.

la quale vale anche quando $\psi = 0$, cioè quando il raggio è emesso orizzontalmente in direzione tangente alla superficie terrestre.

La curvatura nello stesso punto A (reciproca del raggio di curvatura) è espressa da:

$$a = \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial h}.$$

La curvatura nella sommità del raggio, dipende quindi, essenzialmente, dalla legge di variazione dell'indice di rifrazione con l'altezza. Se questa legge di variazione è rapida, sarà grande la curvatura, e, viceversa, questa sarà piccola se detta variazione è lenta.

§ 25. - Andamento e forme diverse delle traiettorie dei raggi hertziani. — Ciò posto, è facile vedere che, nelle trasmissioni radiotelegrafiche le quali diano

---

(1) PEDERSEN. Loc. cit., p. 171.

(2) APPLETON. Loc. cit., p. 45 e 56.

luogo, oltre che alla componente terrestre, anche a quella inclinata o libera, si possono avere i seguenti casi, in corrispondenza ai diversi valori dell'angolo di elevazione ψ (fig. 5).

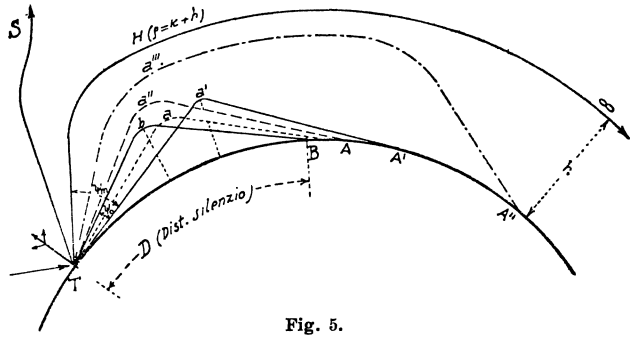


Fig. 5.

1°) $\psi=0$, il raggio è cioè emesso orizzontalmente e si propaga in linea detta secondo la traiettoria Ta', fino a riflettersi totalmente in a', ove la curvatura a precedentemente definita, assume un valore tale da far ritornare il raggio verso la terra nel punto A'.

2°) $\psi=\psi_0$; l'angolo di inclinazione ha il valore critico ψ_0, tale che il raggio riflettendosi in b, assume in questo punto tale curvatura da farlo ritornare nella terra in B alla più *piccola distanza* possibile dalla stazione trasmittente T. Tutti gli altri raggi emessi da T sotto un angolo diverso, sia in più sia in meno, dall'angolo critico ψ_0, ritornano a terra fra B ed A', ad una distanza TA' *maggiore* della distanza minima TB. Se ne deduce che nessun raggio indiretto può penetrare nell'intervallo TB, il quale misura una distanza minima di trasmissione dei raggi indiretti, vale a dire quella che si chiama distanza di evanescenza o di *silenzio* (skip-distance). La distanza di silenzio varia con il valore dell'onda corta e con le condizioni atmosferiche diurne e notturne. Dai risultati delle ricerche teoriche e sperimentali fatte da H. TAYLOR e HULBURT riportate nella fig. 6 (1) risulta che la distanza di silenzio di giorno per l'onda, per esempio, di 16 m. è di 2500 Km., quella dell'onda di 20 m. è di 1300 Km., quella di 32 m. è di 600 Km. e così via fino a non esservi più distanza di evanescenza per onde superiori a 50 metri.

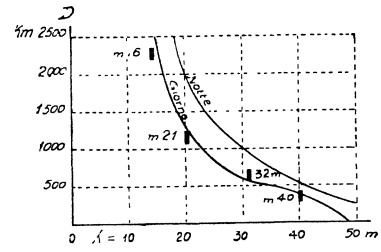


Fig. 6.

3°) $\psi=\psi_m$ per un certo valore ψ_m dell'angolo di elevazione, il raggio segue il cammino TH, presentando, nel vertice H, una curvatura eguale a quella di un cerchio massimo parallelo alla superficie terrestre, cioè di raggio $R+h$. Il raggio hertziano, dopo essersi elevato fino all'altezza h nella atmosfera, prosegue il suo cammino parallelamente alla terra, e può eventualmente ritornare, se le condizioni di ionizzazione dello strato che percorre lo consentono, a terra, sia in

(1) Physical Review, II, vol. 27, p. 189 (1926).

qualche punto intermedio del globo (fig. 7) come B, C, D, sia addirittura alla stazione trasmittente. Si ha così il fenomeno della *eco elettromagnetica* per cui un segnale emesso da una stazione può ritornare al punto di partenza con un ritardo eguale al tempo impiegato dall'onda elettromagnetica nel tragitto percorso. Può anche accadere che il segnale emesso da un'altra stazione B, arrivi in A per due vie, una diretta secondo il cammino 2,2 e l'altra indiretta, dopo un giro intorno al globo. Fenomeni di questo genere sono stati osservati in occasione delle esperienze effettuate dai sig.ri WAGNER e RUKOP per iniziativa della Telefunken.

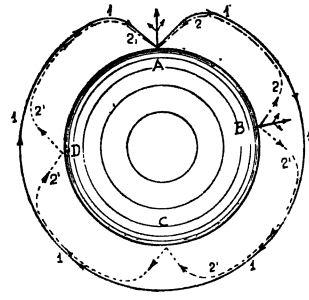


Fig. 7.

4°) $\psi > \psi_m$. Infine, può accadere che il raggio venga emesso sotto un angolo ψ (fig. 8) maggiore di quello ψ_m che corrisponde al raggio avvolgente la terra; se, nel punto più alto, acquista una curvatura maggiore della curvatura nel punto H, il raggio attraversa lo strato di Kennelly-Heaviside e si propaga al di là, dando luogo, in circostanze speciali, ad alcuni singolari fenomeni recentemente osservati da STÖRMER, di echi elettromagnetici a grandi ritardi di tempo, fino a 15 secondi (1).

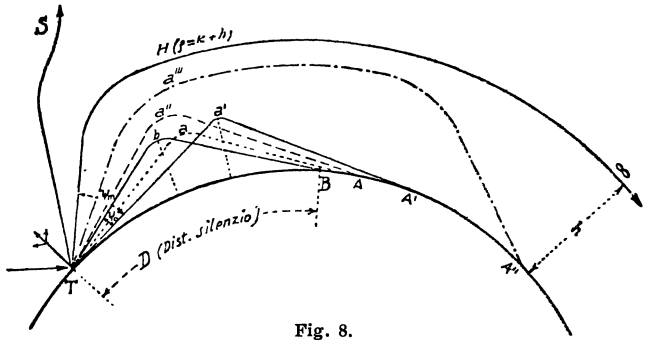


Fig. 8.

§ 26. - Si vede, da quanto precede, come l'atmosfera, con le sue proprietà elettroniche, abbia una parte preponderante nella trasmissione ad onde corte, e come essa determini, oltre alla componente terrestre (earth-bound) della emissione, la componente libera propagantesi nella atmosfera. Se si tiene presente che, secondo il PEDERSEN, l'attenuazione γ di questa, è, per onde molto corte e fra certi limiti, espressa dalla relazione approssimata:

$$\gamma = kN\lambda^2$$

proporzionale cioè al numero N di ioni per cm.^{3} e al *quadrato* della lunghezza d'onda, si concepisce come l'attenuazione che le onde corte subiscono nell'alta atmosfera possa essere piccola, a differenza della attenuazione delle onde terrestri,

(1) STÖRMER: *Écho d'ondes électromagnétiques courtes.* Onde électrique, Déc. 1928, p. 530.

determinatl dalle teorie di resistenza (SOMMERFELD, ZENNECK). Si comprende, altresì, la possibilità delle grandi portate, sia per riflessioni multiple di piccola ampiezza (short-step transmissions) (fig. 9), sia per riflessioni multiple di grande ampiezza (long-step transmissions). E si concepisce, infine, come non vi sia limite alla portata delle radiazioni per onde corte, come dimostrano alcune recenti esperienze del MARCONI, potendo esse perfino compiere, come si è veduto, l'intero giro del globo, o anche uscire addirittura dallo strato di HEAVISIDE e dare luogo ai fenomeni osservati dallo STÖRMER, come si è già accennato.

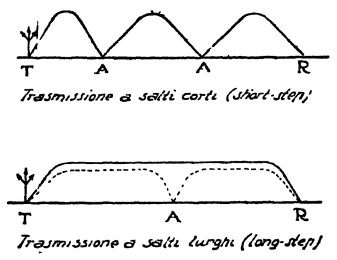


Fig. 9.

§ 27. - Teorie magneto-ioniche, azione del campo magnetico terrestre. — In quanto precede, non si è tenuto conto dell'azione che il campo magnetico terrestre esercita sulla traiettoria degli elettroni vaganti nell'alta atmosfera, quando questa è attraversata da onde elettromagnetiche. Tale azione che rientra nel dominio della fisica pura (magneto-ionica) è stata considerata principalmente dai tecnici inglesi ed americani, e sopratutto da APPLETON e BARNETT [1] e da NICHOLS e SCHELLENG [2] per spiegare il fatto, apparentemente paradossale, ma dimostrato dalla esperienza, della diminuzione brusca che la portata delle onde medie tra 150 e 400 subisce intorno ad un certo valore critico, prossimo a 200 m. (fig. 10).

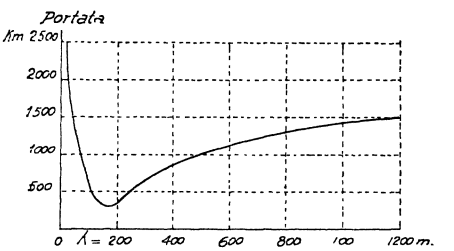


Fig. 10.

La teoria dimostra anzitutto che un elettrone di costanti e ed m (carica e massa) animato della velocità v, supposta per semplicità normale al campo magnetico terrestre H, descrive una traiettoria circolare con una frequenza angolare propria (frequenza critica) espressa:

$$\omega_0 = \frac{eH}{m}.$$

Considerando un elettrone per il quale, come è noto, si ha:

$$\frac{e}{m} = 1.8 \times 10^7 \quad \text{u. e. m.}$$

posto nel campo magnetico terrestre $H = 0{,}5$, si trova con la formula prece-

---

(1) Electrician, Aprile 1925, p. 328.

(2) The Bell System Tecn. Journ., vol. 4 (1925).

dente, $\omega_0 = 9 \times 10^6$, cui corrisponde la frequenza critica $f_0 = 1.6 \times 10^6$ cicli/s e la lunghezza d'onda:

$$\lambda_0 \cong 214^m.$$

Un'onda di questa lunghezza, la quale investa un complesso di elettroni situati nell'alta atmosfera in un campo magnetico di valore prossimo a 0,5 Gauss, determina quindi, per effetto di risonanza, una violenta agitazione degli elettroni stessi, diminuendo, in conseguenza, la propria energia; la portata dell'onda risulta così diminuita.

§ 28. - Passando ora ad investigare analiticamente l'azione del campo terrestre, si trova che questa azione è diversa secondo che l'onda si propaga parallelamente al campo (cioè in direzione presso a poco da nord a sud) ovvero in direzione normale, da est ad ovest. Supponendo l'onda incidente polarizzata linearmente in un certo piano, si può, come è noto, supporla costituita da due onde polarizzate circolarmente, una destrorsa l'altra sinistrorsa. Scrivendo le equazioni generali del moto degli ioni in un campo magnetico si trovano, per le onde polarizzate circolari, tre coppie di valori diversi ε_1 ed ε_{11}, σ_1 e σ_{11}, n_1 e n_{11}, rispettivamente per la costante dielettrica, la conduttività e l'indice di rifrazione del mezzo. Le espressioni di questi valori sono assai complicate e vengono date dal PEDERSEN sotto forma di monogrammi.

Nel caso di una propagazione parallela al campo terrestre, e supposto che si possa trascurare la frequenza di collisione, ritenendo nulla la conduttività, i valori approssimati degli indici di rifrazione per le due onde sopra indicate, sono:

$$(1) \qquad \begin{cases} n_1^2 = \varepsilon_1 = 1 - \dfrac{Ne^2}{\pi m} \dfrac{\lambda^2}{1 - \dfrac{\lambda}{\lambda_0}} \\ n_{11}^2 = \varepsilon_{11} = 1 - \dfrac{Ne^2}{\pi m} \dfrac{\lambda^2}{1 + \dfrac{\lambda}{\lambda_0}} \end{cases}$$

ove λ è l'onda di trasmissione, e λ_0 l'onda critica di risonanza.

§ 29. - Queste formule sono state adoperate da TAYLOR e HULBURT per il calcolo degli indici di rifrazione dello strato di Kennelly-Heaviside, e per onde di trasmissione comprese fra 20 m. e 60 m. È da notare, però, che tali formule sono approssimate, giacchè non tengono conto della frequenza di collisione degli elettroni; pure essendo valevoli fra i limiti sopra indicati, non valgono per valori dell'onda di trasmissione prossimi al valore critico $\lambda = \lambda_0$, giacchè condurrebbero a valori infiniti della costante dielettrica ε_1 e dell'indice di rifrazione n_1. La formula completa indicata dal PEDERSEN, tenendo conto della frequenza di collisione, conduce invece a valori perfettamente attendibili.

Risultati e formule analoghe si hanno nel caso della propagazione normale al meridiano magnetico.

§ 30. - **Conclusione.** — Il problema della traiettoria di un raggio hertziano per onde lunghe, medie e corte è stato magistralmente trattato, con procedimenti rigorosi, dal PEDERSEN, alla luce delle moderne teorie elettro e magneto-ioniche. Il problema è assai complicato e lascia insoluti o dubbi molti punti, specie quelli che si riferiscono alla costituzione e conoscenza delle costanti fisiche dell'alta atmosfera, costituzione che ci è ancora, in gran parte, ignota e per la quale occorre ancora il concorso delle discipline che non si ritenevano in un primo tempo necessarie alla radiotecnica, quali la meteorologia, la eliofisica e la geofisica.

Il problema è quindi arduo, perchè oltre alle difficoltà intrinseche sue, comprende quelle inerenti alla tecnica radio-elettrica ed alla scienza dell'ottica elettromagnetica. Poichè, tuttavia, tecnica e scienza sono entrambre glorie italiane, la prima di GUGLIELMO MARCONI, la seconda di AUGUSTO RIGHI, le cui alte tradizioni sono degnamente continuate in questo stesso Ateneo dal prof. MAJORANA, parta da noi l'augurio che il difficile problema affrontato dal PEDERSEN, trovi, nel nostro paese, la sua completa soluzione.

H. LEVY (London - Inghilterra)

THE EXTENSION OF THE KÁRMÁN VORTEX STREET TO THREE DIMENSIONAL FLOW

As far as the author is aware no attempt has yet been made either on the experimental or on the theoretical side to extend to three dimensions the conceptions regarding the formation of a vortex street in the wake of a body as developed by KÁRMÁN and RUBACH for two dimensions (1). The problem is complicated by the fact that there is a complete absence of direct experimental evidence regarding the nature of the flow in the wake of a three dimensional body. This makes it extremely difficult to construct in imagination the possible systematic motions that might originate. It should be understood, therefore, at this stage that, until direct experimental evidence is available, the suggestions put forward hereare merely of a tentative nature, but this has not prevented mathematical investigation on the basis of these suggestions from proceeding.

It may be remarked in this first place that whatever organised motion is contemplated in three dimensions, must be such that in the limiting case it becomes reduced to the KÁRMÁN state of flow for two dimensions. This may be regarded for the moment as a check to be used on the consistency of our analysis.

For simplicity in the discussion, we will confine our attention initially to the case of a surface of revolution moving steadily through a fluid along the direction of its axis. The limitation so imposed, while it renders the discussion easier may not necessarily be a real restriction, for it should be borne in mind that the KÁRMÁN flow has, broadly speaking, been found by experiment (2) to be valid for cases other than those in which the cylinder is symmetrical about the plane of its motion.

Following the usual analysis we may presume that the vorticity which is formad in the boundary layer of the body and fluid, is carried rearwards into the broader layer until presumably the local value of Reynold' number becomes so great that instability sets in, and the vorticity is discharged into the wake. Experimental evidence by Fage and Johansen at the National Physical Laboratory seeems

(1) Since this paper was read a description has appeared in Z. F. M., nov. 1928 of a number of such experiments.

(2) FAGE and JOHANSEN, Phil. Mag., Feb. 1928.

to indicate that in the case of cylinders at least, approximately 60 per cent only of the vorticity discharged is involved in the formation of discrete eddies, the remainder diffusing itself throughout the wake and possibly being neutralised by coalescing with vorticity of opposite signs from other parts of the boundary.

Just as in two dimensional flow the eddies are shed off in symmetrical pairs, initially at least, so it is reasonable to expect that in the case of symmetrical motion in three dimensions before the symmetry is permanently altered by disturbances, separate vortex rings will be shed periodically. There is some evidence to indicate that in fact this does occur. Report Advisory Committee for Aeronautics for 1911, gives a photograph showing four or five such vortices behind a plate past which water streams. Unfortunately no accuratey measurements are given which would enable the value of Reynolds' number or the dimensions and spacings of these rings to be determined. The experiment was of course not designed for their study but merely to illustrate the fact of similarity in flow at rougly corresponding values of Reynolds' number in air and water. Nisi and Parter ([1]) however, working with very small spheres, have made some measurements of the position of such rings as they are shed and also illustrate the phenomenon by a photograph.

The first analogous problem, therefore, in three dimensions is an examination of the stability of a long row of equal parallel vortex rings evenly spaced. Remembering the two dimensional results it is to be expected that these will not be completely stable. This investigation has been carried through ([2]) and it has been found that if the rings are spaced closer than a certain definite amount the system is always unstable. For a wider spacing the system is unstable only for disturbances which alter the actual spacing, but could still maintain vibrations of the filaments of the ring. Such a result is of course to be expected, remembering the analysis of the stability of a single ring ([3]). It seems reasonable to conclude therefore that the early stages of the motion representing the formation of a series of vortex rings is essentially a transient one, which may persist for a time dependent on the nature of the accidental disturbances that may arise, and on the circumstances that determine the actual spacing.

The question now arises what state of motion and vortex arrangement corresponds in three dimensions to the alternate arrangement of vortices in two dimensions. It might appear at first sight that this should correspond to a rearrangement of the ring system since the alternate arrangement in two dimensions arises even when the vortices are shed off in pairs, but as we shall see in a moment this is not the case.

([1]) Phil. Mag., vol. 46, p. 754 (1923).

([2]) Roy. Soc. Proc. A., vol. 114, p. 594 (1927) and vol. 116, p. 352 (1927).

([3]) J. J. THOMSON: *Motion of Vortex Rings.*

Consider the case of an elongated rectangular plate $ABCD$ lying broadside to the direction of flow, the long edges being AB and DC. According to the KÁRMÁN analysis a vortex filament should be shed from AB and, moving down the fluid, should be followed by one shed from DC, and that again is followed by one from AB and so on. There is some evidence to suggest that these filaments in the case of a plate long but finite are not actually vertical but are inclined to the direction of motion (1). With a plate of finite dimensions the vortex which is shed from AB cannot terminate at B but still continues round the edge of the plate along BC, during which time the vortex AB moves down fluid. By the time the filament has reached C the vortex CD is reaching maturity and also moves down the fluid, the filament continuing round DA and then on to AB, corresponding to the second vortex from that edge. If this process is continued it becomes clear that in the wake of a fluid, instead of the alternate arrangement of vortices which arises in the two dimensional case, a continuous spiral vortex should be formed which unwinds itself from the edge of the plate. Thus we may expect that when a surface of revolution moves steadily through the fluid along its axis of symmetry, and even rotates about that axis, there should be formed in its wake either a system of circular vortex rings or a uniform helical vortex.

Whatever experimental evidence is forthcoming seems to indicate that the system of vortex rings is formed when the body possesses no rotation. The next problem therefore, is an examination of the slability of a helical vortex. This involves the study of the normal modes of oscillation of such a filament corresponding to periodic oscillations about the central axis, to periodic compressions and rarefactions of te spiral in planes of right angles to the axes, and periodic distortions of the filament radially outwards.

Since the filament is now no longer rectilinear a definite cross-sectional area has to be adopted. For purposes of computation, the diameter of a section has been chosen as one-fifth the diameter of the cylinder on which the helix is conceived as wound, although it can be shown that the actual value does not much influance the final result.

If K is the strength of the vortex filaments, a the radius of the cilinder on which it is wound, ε the cross-sectional area of the filament, then the self-induced axial velocity of the spiral is given by

$$V = \frac{K}{2\pi a} \int_0^\infty \frac{(1 - \cos \lambda) d\lambda}{[2(1 - \cos \lambda) + \lambda^2 \tan^2 \alpha + \varepsilon^2/a^2]^{\frac{3}{2}}}$$

and its angular velocity by

$$\omega = \frac{K}{2\pi a^2} \tan \alpha \int_0^\infty \frac{1 - \cos \lambda - \lambda \operatorname{sen} \lambda}{[2(1 - \cos \lambda) + \lambda^2 \tan^2 \alpha + \varepsilon^2/a^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

(1) NAYLOR and FRASER: *Advisory Committee for Aeronautics*, 1919.

These are plotted in Fig. 1 on a base tan α, where $\pi/2-\alpha$ is the angle between the helix and the generator. Thus tan $\alpha=0$ would correspond to a spiral wound infinitely close, and tan α infinite, to a straight filament. It is to be deduced that at a pitch given by tan $\alpha=0.33$ approximatly, the angular rotation of the spiral in zero, the sense of the rotation changing sign at this position.

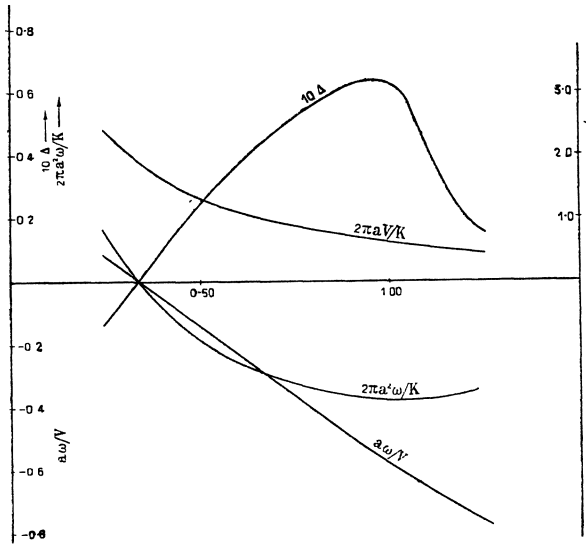


Fig. 1.

The possible inclination of the of oscillation of the three fundamental modes leads to a cubic equation whose descriminant Δ is plotted on the same diagram; when Δ in positive the periods are real and the spiral is stable, when Δ is negative the spiral is unstable. The remarkable result shows itself that this curve crosses the axis of tan α at precisely the same point where it is crossed by curve for ω, the angular velocity (1).

At first sight the analogy with the KÁRMÁN configuration appears to break down, since there does not occur a particular pitch which is stable. In Fig. 1 there is also plotted a curve showing the variation of $\frac{a\omega}{V}$ with tan α. If now we can assume that there exists a unique correspondence between the values of $\frac{a\omega}{V}$ for the spiral and $\frac{b\Omega}{v}$ for the rotating body where b is a standard length of the body, Ω is its angular velocity and v is its forward velocity, then corresponding to each such state of motion of the body there will correspond a definite pitch of spiral generated.

If the correspondence between $\frac{a\omega}{V}$ and $\frac{b\Omega}{v}$ is such that they both vanish together then the steady non-rotational motion of the body, if it gave rise to a spiral at all, would give rise to a spiral with the limiting pitch that can just be maintained stably.

This seem to imply that the state of motion behind a three dimensional body which does not spin is likely to be less permanent and less stable than than behind the rotating body. In point of fact this is already suggested by the

(1) LEVY and FORSDYKE, Roy. Soc. Proc. A., vol. 120, 1928.

numerous valus which have been found by different experimenters for the resistance of such a symmetrical body of revolution as a sphere. It is not impossible that over the same range of Reynolds' number three different states of flow might possibly exist, viz., that corresponding to the Stokes' motion, that corresponding to the production of vortex rings, and that corresponding to a spiral formation. It is merely a question of all three motions appearing to be partially unstable and possibly persisting, over a common range. On the other hand, it is to be anticipated that if the sphere were set spinning about the direction of motion the multiplicity of values obtained for ist resistance would disappear, the spiral vortex being alone formed. We anticipate, therefore, that the state of affairs in theree dimensional motion, strictly analogous to the KÁRMÁN alternate arrangement, is that involved in the spiral vortex and that it is formed in all probability only when the body possesses a rotational motion.

It may be here remarked that the foregoing analysis might throw some light on the phenomenon of auto-rotation. In the case of the two dimensional vortex formation it is evident that if the forces on the body could be continuously recorded there would occur as a counter-part to the alternate production of vortices, a force on the body of varying direction, now from one side, now from the other, the mean effect being the ordinary resistance measurement. When such a body is an elongated wire, it is known that in certain circumstances this oscillating force sets up a vibration. In the case of three dimensions a similar state of affairs should occur. Remembrering how we have conceived the spiral vortex to have been formed we would expect that at each position at which the filament leaves the body, the point of departure moving round the edge, an asymmetrical force would come into play associated with the asymmetry of the motion. In the case of a non-symmetrical body at least, this should give rise to a torque which should operate to set up a rotaton in the body about the axis of motion. Just as it is immaterial in two dimensions which of the two alternate vortices may be regarded as the first of the series, so in the three dimensional motion the spiral vortex may be conceived as generated by the filament being formed clock-wise or anti-clock-wise round the body. Thus there are two possible spiral vortices, differing only in their direction of turning. Which of the two will be formed in any given case will depend on the direction of rotation of the body. Thus, a slight initial start in either direction should give rise to the motion, and the phenomenon of auto-rotation will have set in.

Further analysis of the problem of resistance is proceeding from momentum and energy considerations.

L. MUZZIOLI (Modena - Italia)

CONSIDERAZIONI TEORICHE, RICERCHE SPERIMENTALI, SULLA FORMAZIONE E CADUTA DI GOCCE D'INCHIOSTRO NEI RIGUARDI DEL « LOGOGRAFO MUZZIOLI »

Introduzione.

Sulla formazione e caduta di gocce da orifizi di piccole dimensioni, moltissimi autori, quali il SAVART, il RAYLEIGH, il POEKELS, il RENARD, il MAGNUS, l'OLLIVIER, il PLATEAU, il MAJORANA, il VANNI, hanno parlato.

Ritengo opportuno riassumere brevemente considerazioni, in parte personali, di ordine qualitativo sul fenomeno, tenendo in particolare conto quelle che interessano il funzionamento dell'apparecchio « Logografo Muzzioli ».

a) Se si esamina la formazione di gocce uscenti da un orifizio ad esempio circolare e di piccolo diametro, si vede che il liquido si accumula all'orifizio formando una piccola massa arrotondata in basso; tale piccola massa va ingrandendo fino ad un certo limite, dopo di che si allunga fino a staccarsi in guisa di una goccia costantemente seguita da un'altra ma di minor diametro. Dopo l'avvenuto distacco delle due gocce predette, la piccola massa di liquido rimasta aderente all'orifizio, si solleva bruscamente, per riprendere poi la forma arrotondata, per allungarsi, per lasciare altre due gocce, una relativamente grande l'altra molto più piccola per poi sollevarsi bruscamente per il ripetersi del fenomeno. La goccia, poi dopo essersi formata, cioè durante la caduta, si deforma, raggiungendo ora un diametro trasversale massimo ed un diametro longitudinale minimo, ora un diametro longitudinale massimo ed un diametro trasversale minimo.

Sono appunto le variazioni periodiche del diametro trasversale della goccia che per effetto della persistenza delle immagini sulla retina danno l'apparenza « varicosa » del getto.

b) Se si esamina ora una vena liquida uscente da un orifizio ad esempio circolare, si vede che è composta di due parti; una parte continua, calma trasparente il cui diametro va sempre assotigliandosi, ed una parte sempre agitata non trasparente, ma che ha una forma abbastanza regolare essendo divisa in un certo numero di rigonfiamenti, il cui diametro massimo è sempre maggiore di quello dell'orifizio. Questi rigonfiamenti anulari, sono generati da una successione periodica di pulsazioni che hanno luogo all'orifizio; in guisa che (e questa è

una considerazione interessante enunciata dal SAVART) la velocità di efflusso e quindi la portata, invece di essere uniforme, è periodicamente variabile. Nei riguardi del « Logografo Muzzioli » hanno importanza anche queste due ultime considerazioni: Il numero delle pulsazioni è dell'ordine di quelle che possono dare suoni percettibili; sotto l'influenza di vibrazioni estranee, le dimensioni e lo stato della vena possono cambiare di molto, e la parte continua può ridursi fino ad annullarsi; i ventri e i nodi diventano più regolari e trasparenti.

PARTE PRIMA

Considerazioni teoriche sul periodo di deformazione di una goccia che cade e di una vena liquida nei riguardi del « Logografo Muzzioli ».

Come si è già accennato, una goccia che cade, oscilla intorno alla sua forma di equilibrio (la sferica) prendendo forma di sferoidi alternativamente schiacciati ed allungati (vedi fig. 1 *a*, *b*, *c*).

Con molta approssimazione possiamo ritenere che gli sferoidi siano degli ellissoidi, e possiamo anche ritenere che l'equazione della curva meridiana della superficie di rivoluzione sia (vedi fig. 1 *a*, *b*, *c*)

$$r = a_0 + a_1 P_1[\cos(\theta)] + a_2 P_2[\cos(\theta)] + \ldots\ldots + a_n P_n[\cos(\theta)] \tag{1}$$

in cui r è il raggio vettore della curva meridiana, $P_n[\cos(\theta)]$ è la funzione sferica di LEGENDRE dell'ennesimo ordine il cui argomento è $\cos(\theta)$ dove θ è la colatitudine ed a_1, a_2,....., a_n sono delle grandezze che in rapporto ad a_0 (raggio originario della sfera) sono piccolissime e funzioni del tempo t. Ora il volume della goccia incluso nella superficie (1) è:

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{-1}^{+1} r^3 d\cos\theta = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \left[1 + 3\Sigma(2n+1)^{-1}\frac{a_n^2}{a_0^2}\right] = \frac{4}{3}\pi R_0^3 \tag{2}$$

da cui si ha:

$$R_0^3 = a_0^3 \left\{ 1 + 3\Sigma \frac{a_n^2}{a_0^2}\frac{1}{2n+1} \right\}. \tag{3}$$

Si vede di qui che a_0 differisce di una quantità piccola di secondo ordine da R_0 e quindi può considerarsi come avevamo prima accennato uguale ad R_0 (raggio originario della sfera).

Il moto della goccia è detto *irrotazionale* in quanto la deformazione consiste in dilatazioni e in contrazioni secondo gli assi principali dell'ellissoide, senza rotazione della goccia; dobbiamo perciò ammettere la esistenza di un potenziale Φ di velocità, e quindi l'equazione che esprime l'incompressibilità del liquido è espressa da

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \Delta\Phi = 0 \tag{4}$$

ora la velocità di deformazione sulla direzione del raggio vettore è:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \tag{5}$$

questa stessa velocità è espressa da:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=R_0} = v_2. \tag{6}$$

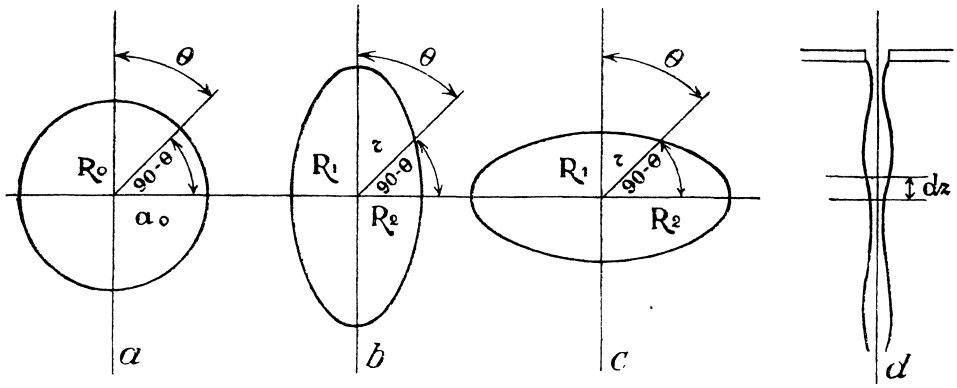


Fig. 1. — *a*, *b*, *c*, sezioni delle superficie di una goccia nelle sue forme principali; *d*, sezione della vena liquida.

La soluzione dell'equazione differenziale (4), si ha in una serie sviluppata secondo le funzioni sferiche nello spazio:

$$\Phi = b_0 + b_1 r P_1(\mu) + b_2 r^2 P_2(\mu) + \ldots\ldots + b_n r^n P_n(\mu). \tag{7}$$

In base alle (5) ed alle (6), fra i coefficenti della (7) e della (1) deve sussistere la relazione:

$$n b_n R_0^{n-1} = \frac{da_n}{dt}. \tag{8}$$

Considerando le condizioni al contorno:

Dalle equazioni generali del moto dei liquidi vischiosi:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\mu}{\varrho} \Delta u - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + X \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{\mu}{\varrho} \Delta v - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + Y \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{\mu}{\varrho} \Delta w - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + Z \end{cases} \tag{9}$$

posto $Z = -z$, $X = 0$, $Y = 0$, $\mu = 0$ (senza attrito o viscosità) si ha:

$$dp = -\varrho d \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g dz. \tag{10}$$

Integrando e trascurando l'azione della gravità, si ha:

$$p-p_0=-\varrho\frac{\partial\Phi}{\partial t}. \tag{11}$$

La (11) esprime la pressione idrodinamica alla superficie della goccia; questa pressione deve fare equilibrio alla variazione subita dalla pressione capillare

$$T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$$

rispetto al suo valore di equilibrio $\frac{2T}{R_0}$. In altri termini:

$$p-p_0=T\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}-\frac{2}{R_0}\right). \tag{12}$$

La (12) esprime appunto la condizione del fenomeno.

Ora considerando le due curvature principali della goccia $\frac{1}{R_1}$ ed $\frac{1}{R_2}$; sostituendo nella condizione limite, tale condizione superficiale; ponendo per Φ ed r le serie delle funzioni sferiche (7) ed (1) e facendo uso della (8), si arriva al periodo di deformazione della goccia:

$$\tau_n=2\pi\sqrt{\frac{\varrho R_0^3}{Tn(n-1)(n+2)}}=\sqrt{\frac{3\pi}{n(n-1)(n+2)}\frac{P}{gt}}. \tag{13}$$

Per $n=1$, non si ha alcun moto in quanto

$$r=a_0+a_1P_1[\cos(\theta)]=a_0+a_1\cos\theta \tag{α}$$

che esprime una sfera, in guisa che la goccia ha un solo moto di trascinamento; il periodo è in tal caso:

$$\tau_n=2\pi\sqrt{\frac{\varrho R_0^3}{T\cdot 1\cdot 0\cdot 3}}=\infty. \tag{α}$$

Per $n=2$, si hanno le oscillazioni più lente; esse sono ellissoidiche:

$$r=a_0+a_2P_2[\cos(\theta)]=a_0+a_2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right) \tag{β}$$

che esprime all'incirca l'equazione di un ellisse; il periodo è in tal caso:

$$\tau_n=2\pi\sqrt{\frac{\varrho R_0^3}{T\cdot 2\cdot 1\cdot 4}}=\pi\sqrt{\frac{\varrho R_0^3}{2T}}. \tag{β}$$

Per $n=3$, 4, 5, si hanno oscillazioni più rapide, ossia oscillazioni parziali di ordine più elevato delle ellissoidiche, che però non sono armoniche, cioè non stanno in alcun rapporto razionale con la durata di esse.

Con metodo simile a quello adoperato per determinare il periodo proprio di oscillazione di una goccia, si può trovare il periodo proprio di oscillazione di una vena liquida sottoposta alla forza capillare, trascurando la vischiosità. Per mancanza di spazio non possiamo svolgere anche questa lunga analisi che come

la precedente è ottenuta dall'insieme dei metodi di RAYLEIGH e di POCKELS con qualche semplificazione.

Notiamo solamente il risultato esprimente il periodo di scillazione della vena:

$$\tau_n = 2\pi \sqrt{\frac{\varrho R^3}{(n^3 - n)t}}.$$

PARTE SECONDA

Ricerche sperimentali sulla formazione e caduta di gocce d'inchiostro nei riguardi del « Logografo Muzzioli ».

Per indagare sperimentalmente la formazione e la caduta di gocce da vari ugelli e per vari tipi di inchiostri si è adoperata la disposizione che si vede nella fig. 2.

La lampada ad arco fatta agire da corrente continua per un'illuminazione uni-

Fig. 2. — Disposizione sperimentale adottata.

forme dell'erogazione da studiare era a cm. 23 dal sistema di lenti piano convesse funzionante da condensatore. A cm. 68 dal condensatore un sistema ottico Koriska, e a cm. 159 da questo il quadro smerigliato dove si formava l'immagine reale delle gocce cadenti da un microfono tipo Majorana a ugelli intercambiabili, posto vicino al condensatore. A cm. 120 dal vetro smerigliato una macchina cinematografica da presa tipo Tek. La posa della macchina si è posta di $\frac{1}{1000}$, la velocità di marcia 14 giri al secondo, ritenuta la più opportuna in base ad esperienze

fatte con lo stroboscopio, apertura focale $\frac{1}{4,5}$. Dopo varie lunghe e brigose esperienze preliminari si sono impressionati 48 metri di pellicola, metri 6 per lo sgocciolamento da ognuno di 4 diversi ugelli: il primo col diametro di mm. 4, il secondo di mm. 2, il terzo di mm. 1,5, il quarto di mm. 1; e per due tipi di inchiostri (molto denso, poco denso). Le pellicole sopra nominate sono state presentate mediante una macchina cinematografica da proiezione durante la comunicazione, ma non possono (nemmeno brani di esse) trovar posto in questa memoria per mancanza di spazio. Le pellicole cinematografiche ed in particolare certe istantanee della film sperimentale confermano luminosamente le considerazioni dette nell'introduzione e nella parte prima.

Parte Terza

Il « Logografo Muzzioli ». Principio, particolari tecnici, schema generale di circuiti, usi ed utilità dell'apparecchio.

Il « Logografo Muzzioli » serve a fissare con inchiostro su carta, la parola detta o telefonata. Mi piace di insistere sul fatto fondamentale « fissare con inchiostro su carta la parola detta » in quanto già altri apparecchi; il fonografo di Edison, il telegrafono di Poulsen, il fotografofono del Simon, fissano la parola detta, ma tale parola è fissata (sfruttando principi diversi) o su un rullo di cera, o su un filo di acciaio o su una pellicola cinematografica, materiali tutti costosi, ma sopratutto ingombranti e quindi non archiviabile, in guisa che tali apparecchi non poterono entrare negli usi comuni. Il « Logografo Muzzioli » consiste essenzialmente in un serbatoio speciale, contenente inchiostro, comunicante con un tubo munito di un ugello di piccolo diametro chiuso normalmente mediante rubinetto. Il tubo nelle vicinanze dell'ugello ha una soluzione di continuità colmata in modo speciale da guttaperca collegata rigidamente con una lamina telefonica messa in corrispondenza di un megafono. Questo sistema, corrispondente ad un microfono tipo Majorana, è disegnato schematicamente nella fig. 3. Fino a che non interviene nessuna causa esterna che perturbi il sistema a rubinetto aperto escono gocce d'inchiostro con leggi studiate teoricamente e sperimentalmente nelle parti I e II di questa comunicazione. Le gocce d'inchiostro suddette cadono su una striscia di carta, svolgentesi da un rullo ed avvolgentesi in un altro per effetto di un normale motorino a molla da grammofono. Fino a che dunque non interviene nessuna causa esterna perturbante il sistema, sulla striscia di carta si forma una traccia d'inchiostro, di larghezza costante. Quando invece con la parola detta o telefonata si perturba il sistema mediante le vibrazioni della lamina telefonica trasmesse mediante la guttaperca, allora sulla striscia di carta si forma una traccia d'inchiostro di larghezza variabile. Le variazioni di

larghezza nella traccia d'inchiostro corrispondono esattamente alle vibrazioni della lamina telefonica. Creato in tal guisa il rullo di carta con varie tracce (secondo la larghezza della striscia di carta), varie tracce che si possono ottenere spostando opportunamente il microfono ad inchiostro tipo Majorana, si mette il rullo nelle condizioni iniziali, e si fa girare nella guisa di prima; una lampada elettrica avente un'intensità luminosa regolabile, munita di un conden-

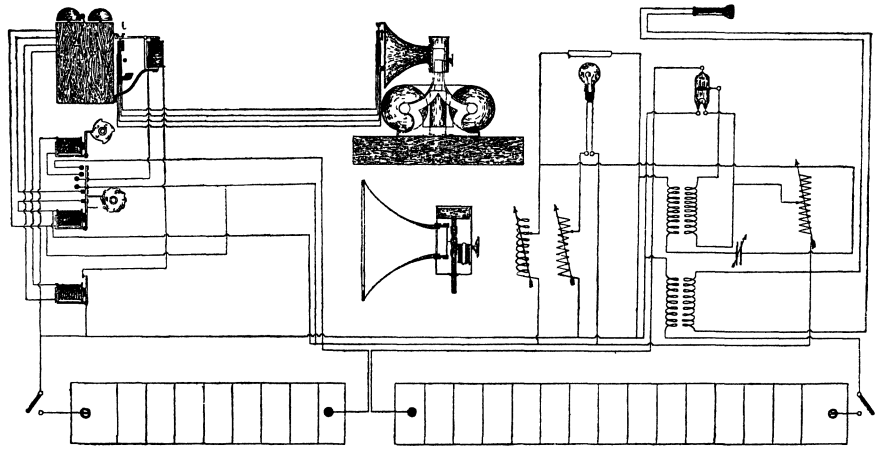


Fig. 3. — Schema generale dei circuiti del « Logografo Muzzioli »

satore a lenti, posto sotto alla carta che scorre, illumina più o meno (essendo la traccia d'inchiostro di larghezza variabile) una cellula fotoelettrica posta al disopra della carta in corrispondenza della lampada. Tale cellula variamente illuminata, mediante uno speciale circuito d'amplificazione può riprodurre in un telefono la parola, il discorso, prima detti o telefonati. Naturalmente anche il complesso lampada cellula fotoelettrica si può spostare opportunamente secondo la larghezza della striscia di carta se si sono ottenute varie tracce di registrazione. Dallo studio della fig. 3 (contenente anche lo schizzo d'ingombro del « Logografo Muzzioli ») si potrebbe vedere come lo schema dei circuiti permette l'automaticità assoluta di tutte le operazioni, tanto per la fissazione della conversazione telefonica quanto per la ripetizione della stessa, dovendo evidentemente l'apparecchio funzionare senza la presenza di alcuno. Ma oltre che nella telefonia il « Logografo Muzzioli » potrà avere una diffusione enorme per la registrazione di discorsi, corrispondenza, deposizione di testi ecc., abolendo la stenografia, fissando con carta e inchiostro (binomio che nei secoli si è dimostrato il più adatto per fissare il pensiero) la parola detta o telefonata.

Sezione Settima

ETTORE BORTOLOTTI (Bologna - Italia)

I LIBRI GEOMETRICI (1) DE « L'ALGEBRA » DI RAFAEL BOMBELLI DA BOLOGNA

(Dal Codice B. 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna)

L'Algebra di Rafael Bombelli raccoglie e coordina tutto ciò che, in fatto di idee, di risultamenti, di metodi aveva tumultuariamente prodotto la feconda genialità novatrice degli algebristi italiani, nella prima metà del secolo XVI.

Ha pregi singolari, che la distinguono da ogni altro trattato di quell'epoca.

Non solo, infatti, essa presenta una compiuta sistemazione logica delle equazioni dei primi quattro gradi; ma il concetto informatore di tutta l'opera, la disposizione e l'ordine della materia, i procedimenti costruttivi e dimostrativi essenzialmente analitici in essa seguiti costituiscono un passo notevole verso la *aritmetizzazione della scienza matematica.*

Il primo dei 3 libri che compongono l'opera, con concetto che si direbbe moderno, è interamente dedicato alla successiva estensione del campo aritmetico di razionalità. Qui, per la prima volta, vengono considerati come enti numerici i numeri immaginari, si rappresentano questi con simbolismo opportuno al loro calcolo e le leggi di questo calcolo vengono effettivamente poste con indirizzo aprioristico, ampiamente sviluppate ed applicate ad un procedimento che vale a liberare dall'immaginario le formule cardaniche per la risoluzione delle equazioni cubiche nel caso irriducibile, quando per tali equazioni esista una radice nel campo euclideo di razionalità.

La teoria delle equazioni, trattata nel libro II, espone in lucida sintesi le scoperte del DAL FERRO, del TARTAGLIA, del FERRARI, del CARDANO, le estende al campo complesso, le completa con una geniale dimostrazione di esistenza, nel campo reale, delle radici delle equazioni cubiche, che non esclude il caso irreducibile, e pone in vista le relazioni di dipendenza fra il problema della risoluzione della equazione cubica ed i problemi classici della duplicazione del cubo e della trisezione dell'angolo.

---

(1) Inediti, tratti dal Ms. B. 1569 della Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna, e pubblicati nel Vol. VII della Collezione *Per la Storia e la Filosofia delle Matematiche*, diretta da FEDERICO ENRIQUES e promossa dall'*Istituto Nazionale Italiano per la Storia delle Scienze.*

Le equazioni biquadratiche, che prima erano state risolute solo per alcuni casi, che a quel tempo si consideravano come particolari, con completa ed ordinata discussione vengono sistemate a teoria compiuta e perfetta. Infine si costruiscono equazioni algebriche i cui coefficienti sono funzioni di una quantità indeterminata (il Tanto) e si risolvono con formule che esprimono i valori della incognita in funzione della indeterminata che figura nei coefficienti.

Il terzo libro dell'Algebra costituisce un'interessantissima raccolta di problemi dei primi quattro gradi che il BOMBELLI risolve, dando prova di vera virtuosità con la eleganza dei procedimenti analitici, con la semplicità della interpretazione geometrica, con l'arte con cui sa evitare, anche nei più intricati problemi del terzo e del quarto grado, i procedimenti analitici che danno luogo a costruzioni spaziali, nella interpretazione geometrica.

Fra questi problemi sono compresi tutti quelli dei primi quattro libri e la maggior parte di quelli del quinto libro di DIOFANTO, problemi che il BOMBELLI per primo ha fatto conoscere in occidente, dando così il primo impulso alla rinascita fra noi della Teoria dei numeri.

Anche il simbolismo e la tecnica dell'algoritmo presentano, nell'*Algebra* di BOMBELLI, notevoli progressi: per l'uso delle parentesi nelle formule algebriche, e (specialmente nel manoscritto) degli indici dei radicali, e per una rappresentazione delle potenze della incognita, che, adottata poi da A. GIRARD, da A. ROMANO, dallo STEVIN..., per successivi adattamenti, ha dato luogo alla odierna rappresentazione esponenziale delle potenze.

Il libro del BOMBELLI è stato per più di un secolo testo universale di Algebra Superiore. L'HUYGENS stimava di fare un grande elogio al LEIBNIZ, scrivendogli: « Vous avez plus fait que BOMBELLI..... » (1).

Lo stesso LEIBNIZ, che sul libro di lui aveva compiuta la sua educazione algebrica (2), lo considerava come maestro egregio (Egregium certe artis analyticae magistrum..... (3)), ed apprezzava principalmente le ricerche da lui fatte sul caso irreducibile delle equazioni cubiche, che egli pone a fondamento di ulteriori progressi (4).

---

(1) Cfr. « Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern » herausgegeben von C. F. GERHARDT, Berlin 1899, p. 565.

(2) BRIEFWECHSEL, loc. cit., pag. 528: « Er hatte sich bis dahin aus den elementaren Lehrbüchern von LANTZ und CLAVIUS unterrichtet, welche das algebraische Rechnen bis zur Wurzelausziehung des zweiten und dritten Grades enthalten. Zur Fortzetzung dieser Studien, namentlich in Betreff der Auflösung der cubischen Gleichungen, wählte LEIBNIZ das, für seine Zeit berühmte Werk von BOMBELLI: *L'Algebra, parte maggiore dell'Aritmetica divisa in tre libri,* Bologna 1572, zum Führer ».

(3) Ibidem, pag. 559.

(4) Ibidem, pag. 552. « Haec difficultas omnibus hactenus algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisdam eorum est, qui non professus sit regulas CARDANI in hoc casu exceptionem

L'opera inedita. - Alla fine del II libro, e nell'atto di incominciare il libro III, il BOMBELLI avverte:

« Farò fine di ragionare di queste agguagliationi e dignitadi, ma verrò alle operationi di esse, le quali saranno quelle dimostrazioni matematiche (o problemi che dir si vogliano) tanto da' scrittori commendate; che sarà l'ultima parte di quest'opera, riserbandomi con più mio agio e commodità, di dare al mondo tutti questi problemi in dimostrazioni geometriche » (pag. 411).

Nelle ultime pagine del volume si scusa di non poter dar subito in luce la parte geometrica della sua opera, « ..... perchè non è ancora ridutta a quella perfettione che la eccellentia di questa disciplina richiede, mi son risoluto di volerla prima meglio considerare avanti che la mandi al conspetto degli uomini ».

« Goda dunque il lettore di presente di questa mia prima parte, delle mie fatiche, che in breve l'altra darogli..... ».

Questa seconda parte, poi, non fu più pubblicata, e si credeva perduta. Fu invece ricuperata, avendone io trovata copia manoscritta nel Codice B. 1569, della Biblioteca dell'Archiginnasio in Bologna, che contiene la intiera opera di BOMBELLI, cioè la parte algebrica e la geometrica, entrambe in quella prima stesura che il BOMBELLI dice non ancora ridotta alla perfezione che la eccellenza di questa disciplina richiede.

Il Codice B. 1569 della Biblioteca comunale dell'Archiginnasio in Bologna, è un grosso volume di grande formato (27,5×41) di 260 carte, delle quali le prime XVI non numerate, contengono il frontespizio e l'indice, cui seguono 212 carte numerate dall'1 al 212, e 32 carte non numerate, di testo.

L'indice, dettagliato e preciso, si estende solo agli argomenti trattati nelle 212 carte che erano numerate; quando cessa la numerazione delle pagine, cessa anche l'indice, il che è segno di men accurata elaborazione.

Il frontespizio porta la intitolazione:

L'Algebra - di Raffaello Bombello - Cittadino Bolognese - al Reverendissimo - Monsignore, il Signore - Alessandro Rufini - Vescovo di - Melfi suo Signore. -

Seguono due carte bianche, destinate alla prefazione, poi la « Tavola di quello che ne l'opera si contiene », che occupa 10 carte, si estende alle 212 carte del testo che erano numerate, e comprende la materia dei primi quattro libri.

Il libro V non ha indice, e le carte ad esso pertinenti non furono numerate.

Col verso della carta 243 termina il manoscritto, senza che apparisca terminata l'opera.

---

pati. Primum omnium RAFAEL BOMBELLI, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editum vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio..... ».

Il Codice è scritto con posato, elegante, chiarissimo carattere, degno della scuola di amanuensi onde uscì quel FRANCESCO DA BOLOGNA che incise gli *aldini*, e per la perspicua disposizione e la sicurezza con cui sono trattate le formule algebriche, dimostra in chi scrisse speciale educazione matematica (1).

Alcune pagine portano, nei larghi margini, postille, fatte in epoca posteriore, che commentano e completano il testo, avvicinandolo alla lezione del libro a stampa. In qualche punto vi sono correzioni che evidentemente sono di mano dell'autore.

Nella Biblioteca Universitaria di Bologna ho trovato un secondo esemplare, che contiene il solo III libro dell'opera di BOMBELLI, della stessa mano, ed identico, nella parte che contiene, a quello dell'Archiginnasio. I due manoscritti sono evidentemente copie sincrone di uno stesso originale, e fanno fede della diffusione che ebbe l'opera bombelliana, pur nella edizione manoscritta.

Data del manoscritto. - Abbiamo sicuri argomenti che ci permettono di assegnare al nostro manoscritto una data di parecchi anni anteriore alla pubblicazione (1572).

Nella prefazione dell'opera a stampa il BOMBELLI racconta infatti di avere tradotto insieme col PAZZI i primi 5 libri di DIOFANTO (2). Ora il raffronto fra i due testi ci dà la certezza che la edizione manoscritta fu composta dal BOMBELLI prima che egli avesse conosciuto DIOFANTO.

Troviamo infatti che a pagina 201 del testo a stampa il BOMBELLI dichiara di non voler usare per l'incognita la voce « cosa » essendo quella voce universalissima e comune « ad ogni sostantia, così ignota come nota »; ma di voler usare la voce « tanto », perchè meglio appropriata a quantità di numeri e per aver trovato « che DIOFANTO così lo noma, il che non è piccolo argomento, questa essere la sua propria e vera voce ».

Similmente (pagina 202), dice di non voler più usare la voce « censo »..... « tanto sconvenevole che più dir non si potrebbe..... però mi son risoluto di seguitare DIOFANTO (come ho fatto del restante) e chiamarlo potenza ».

Ma le nuove voci diofantee non compariscono che nel testo a stampa, dove infatti sono costantemente usate; nel manoscritto, invece, non si vedono affatto (se non per correzioni posteriori) e si continuano ad usare gli antichi, deprecati vocaboli cossici.

Più oltre, nella prefazione al libro terzo, il testo a stampa esorta il lettore

---

(1) Se, come appare dalla lettera dedicatoria, il manoscritto è di mano di F. M. SALANDO, torna a proposito l'elogio di: « Scrittore de' nostri tempi rarissimo e persona giudiciosa », che di lui fa il BOMBELLI.

(2) ANTONIO MARIA PAZZI fu a Roma lettore dal 1567 al 1576: (Cfr. « Bibl. Modenese » del Tiraboschi, tomo IV, pag. 77).

a volerlo difendere « quando lo audisse accusare per aver deviato dall'uso de' scrittori di questa disciplina, i quali quando hanno voluto trattare di problemi aritmetici mai sempre sotto velame di attioni e negotj humani l'hanno fatto »: e di non scandalizzarsi trovando che alcuni fra i problemi del terzo libro furono tolti da DIOFANTO.

Conseguentemente a queste premesse, vediamo nell'opera a stampa, il BOMBELLI costantemente rifuggire da questioni pratiche e materiali, e presentare i suoi problemi sotto la più austera forma speculativa, e troviamo inseriti in questo terzo libro non meno di 143 problemi diofantei, mentre nella edizione manoscritta, non troviamo nemmeno uno di questi 143 problemi di DIOFANTO ed i quesiti quivi trattati hanno tutti quella veste di pratica materialità, che ad essi solevano dare i matematici medioevali.

Non cade dunque alcun dubbio che la edizione manoscritta non sia stata composta dal BOMBELLI prima di aver avuto cognizione dell'opera di DIOFANTO.

E, siccome il BOMBELLI è stato il primo che in occidente abbia inteso e divulgato DIOFANTO, così dal confronto delle due lezioni si potrà vedere quale precisamente sia stata l'influenza di DIOFANTO sullo sviluppo delle teorie algebriche in Italia.

Aggiungeremo, per maggiore precisione, che il Codice diofanteo fu mostrato al BOMBELLI dal PAZZI nel tempo in cui questi era lettore a Roma, cioè posteriormente al 1567.

Proseguendo l'esame del testo troveremo altri argomenti che ci permetteranno di fissare entro limiti più ristretti la data della compilazione del nostro manoscritto.

Vediamo infatti a pag. 297 del testo a stampa, ricordato un passo del *Commento del Barbaro ai dieci libri dell'Architettura di Vitruvio*, ove si espongono le « inventioni di PLATONE ed ARCHITA tarentino..... nel voler duplare l'altare ». Questa invenzione di PLATONE è esposta dal BOMBELLI alla pag. 49 del testo a stampa, come seconda dimostrazione del « Modo di trovare il lato cubico di un numero in linea », ed è largamente usata nel libro secondo, per costruire quelle « dimostrazioni in superficie piana », che il BOMBELLI dice di aver trovato dopo aver tanto investigato, e che ci danno, in particolare, la dimostrazione della esistenza di radici reali per la equazione cubica nel caso irreducibile.

Ora tutta questa materia non è contenuta nel manoscritto, ove non si dà la costruzione di PLATONE, non si espongono dimostrazioni in superficie piana e non si nomina il BARBARO.

Da tuttociò è manifesto che, al tempo in cui compilava il manoscritto, il BOMBELLI non conosceva il commento del BARBARO, e, poichè questo commento è uscito per le stampe l'anno 1556, così par ragionevole far risalire ad epoca anteriore l'età del manoscritto medesimo.

Altrettanto si dica a proposito dei problemi sui *poliedri regolari*, che il

BOMBELLI risolve nel libro sesto. La incertezza che dimostra sul numero di questi poliedri e sul modo onde essi si possono pensare generati, ci prova che al tempo in cui si componeva il suo libro non conosceva ancora il passo di PAPPO, ove i poliedri archimedei sono enumerati e descritti. E, poichè la celebre traduzione di PAPPO fatta dal COMANDINO, è stata pubblicata nel 1558, abbiamo un altro argomento in favore della opinione superiormente esposta.

Altri non trascurabili elementi, si ricavano dalle notizie che ci dà lo stesso BOMBELLI sulla sua attività scientifica, i quali, concorrono nel fissare la compilazione del manoscritto a data anteriore al 1551.

Infine osserveremo che ad analoghe conclusioni porta l'esame esterno, estrinseco del Codice. Il carattere è stato dagli intendenti assegnato alla metà del secolo XVI, e la filagrana della carta (magnifica carta bambacina, spessa, quasi tutta di una risma), è registrata nel manuale del BRIQUET con la indicazione: « Lucca, 1548, Archivio di Stato ».

D'altra parte il manoscritto è certamente posteriore alla pubblicazione della *Ars Magna* (1545), e risente ancora del fervore di battaglia destato dalle dispute del FERRARI col TARTAGLIA (1547, 1548), ritengo quindi di non essere lungi dal vero se lo dico composto intorno al 1550.

Analisi del manoscritto. - I primi due libri sono nel manoscritto sostanzialmente identici a quelli contenuti nell'opera a stampa. Il libro terzo differisce da quello che si legge nel testo a stampa, per la mancanza di problemi indeterminati (diofantei) che sono sostituiti da problemi di pratica applicazione. Notevole in questo libro il senso di generalizzazione, per cui, dopo aver risoluto algebricamente ogni proposto problema, il BOMBELLI enuncia la regola di risoluzione che vale per tutti quei problemi che differiscono dal proposto solo per i valori numerici delle quantità note, ed in secondo tempo, si propone il medesimo problema, dove per altro i dati non si suppongono numericamente determinati, ma dipendenti da quantità indeterminata (il Tanto) che egli rappresenta coi simboli da lui introdotti per le potenze della incognita, e risolve il problema con espressioni che sono funzioni esplicite di quella indeterminata.

I libri quarto e quinto contengono la *Parte Geometrica*, rimasta fino ad ora inedita.

Il libro quarto si presenta come diviso in tre parti, che diremo capitoli. La divisione risulta, oltre che dalla diversità della materia, dalle pagine bianche intercalate fra capitolo e capitolo.

Al primo capitolo si può dare il titolo di « Algebra Geometrica », o, come dice il BOMBELLI, di *Algebra linearia.* Dopo una breve introduzione, dove sono ricordate le costruzioni geometriche elementari, definisce le operazioni aritmetiche sui segmenti. Insegna cioè a: « *sommare de linee, sottrarre, moltipli-*

care, partire, trovare il creatore (estrarre la radice), e *la lunghezza delle dignità* (cioè innalzare a potenza) ».

Il CARTESIO, che quasi un secolo dopo di lui iniziava con gli stessi principii la sua geometria, sente il bisogno di scusarsene..... « *je ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmétique en la Géometrie* ».

Del pari, e come più tardi fece il CARTESIO, per rendere possibile la moltiplicazione, il quoziente, le potenze dei segmenti, il BOMBELLI introduce nelle sue costruzioni il *segmento unitario*: e, più ardito dello stesso CARTESIO, non teme la introduzione nella sua Algebra linearia di segmenti negativi e di aree negative o nulle.

L'estrazione di radice quadrata, che: « nell'algebra linearia non patisce la difficoltà che pate nel numero », è eseguita con la costruzione che serve a trovare la media proporzionale fra il dato segmento e l'unità. *L'estrazione di radice cubica* è costruita mediante una delle costruzioni instrumentali che servono a « trovare due medie proporzionali fra la comune misura et la linea di che se ne ha da pigliare il creatore ».

La risoluzione geometrica delle equazioni è fatta dal BOMBELLI con procedimento analitico; egli rappresenta con un segmento arbitrariamente scelto la incognita della equazione (o, se occorre, una potenza della incognita), eseguisce su questo e sui segmenti che figurano come coefficienti, le operazioni indicate dalla equazione; ne risulta così una relazione fra figure geometriche che permette di costruire il segmento incognito.

Rappresentando le quantità note con segmenti e questi con lettere dell'alfabeto, le equazioni che scrive il BOMBELLI assumono forma letterale e, quando si prescinda da quelle note numeriche che il BOMBELLI pone, come esemplificazione pratica, accanto ai coefficienti letterari (sottoposti alle potenze della incognita) si vedranno in esse i prodromi della *logistica speciosa*, più tardi introdotta dal VIETA.

Il capitolo secondo, ad imitazione del libro decimo di EUCLIDE, tratta geometricamente della struttura del campo di razionalità che si ottiene aggiungendo al campo euclideo una irrazionalità cubica.

Nel capitolo terzo il BOMBELLI riprende tutti quei problemi che aveva trattato nel libro terzo dell'Algebra e dei quali, come già ho detto, egli aveva dato due gradi di successiva generalizzazione analitica, e li traduce in altrettante questioni geometriche, li porta cioè nell'Algebra geometrica, ove figurano coefficienti letterali, che conferiscono al problema massima generalità.

Ma il suo procedimento è l'inverso di quel che segue l'algebra geometrica degli antichi; egli infatti non risolve direttamente il problema geometrico per ricavare la risoluzione analitica dalla interpretazione aritmetica della costruzione

eseguita, ma si vale della risoluzione algebrica da lui svolta nel libro secondo, per ricavarne la costruzione geometrica, ed invece di considerare la costruzione geometrica come procedimento necessario alla giustificazione della validità dei resultamenti ottenuti per via analitica, fa consistere la dimostrazione della costruzione geometrica nella corretta interpretazione delle deduzioni logiche ottenute con la regola d'algebra (« la dimostratione nasce dalla sua operatione algebrica »). Parmi superfluo il far rilevare l'importanza storica di questo fatto, mentre perfino il VIETA riteneva di non potersi esimere dal dare dimostrazione geometrica di ogni suo procedimento analitico.

Il libro quinto tratta della applicazione dell'algebra a problemi di geometria. Questo libro, che certamente è il più imperfetto nella elaborazione, si compone di due capitoli. Il primo tratta della inscrizione di poligoni nel cerchio, della divisione delle figure piane in parti aventi fra loro rapporto assegnato, e degli elementi di topografia. Il secondo, dei poliedri regolari e di tre poliedri semiregolari.

In questa trattazione si ha esempio della determinazione di un punto del piano di un dato triangolo mediante coordinate ortogonali, ed è notevole, a proposito della inscrizione nel cerchio dell'ennagono regolare, la riduzione del problema della trisezione dell'angolo alla risoluzione di una equazione cubica nel caso irriducibile.

La presente edizione riproduce dal Codice B. 1569 la introduzione al libro terzo (diversa da quella che si legge nel libro a stampa), ed i libri quarto e quinto che sono tratti ora dall'inedito.

La trascrizione è integrale, fu rispettata la grafia e furono conservati anche gli idiotismi, caratteristici del dialetto bolognese, che l'autore ha profuso con generosa prodigalità.

Le aggiunte al testo dell'editore (contrassegnate, da parentesi quadra), consistono quasi esclusivamente nella numerazione dei capoversi e delle carte del libro quinto.

Le figure, che solo in infima parte si trovano nel manoscritto, furono tracciate in modo che rispondessero al testo; e fu questa non breve, nè lieve fatica.

La note a piè di pagina sono dell'editore, e furono poste a chiarimento del testo, specialmente nei punti ove questo si richiama a passi dei primi tre libri del manoscritto.

Considerando poi che anche la edizione del 1572 è rara e mal nota, mentre d'altra parte la cognizione del contenuto di essa è necessaria alla comprensione dell'inedito, l'editore ne ha fatto una analisi accurata e minuta che ha premesso, come introduzione, alla riproduzione del testo.

ETTORE BORTOLOTTI (Bologna - Italia)

LA PUBBLICAZIONE DELLE OPERE MATEMATICHE DI PAOLO RUFFINI

PAOLO RUFFINI è universalmente conosciuto come il primo assertore della insolubilità algebrica delle equazioni algebriche generali di grado superiore al quarto; benchè non tutti conoscano il grado di evidenza che, attraverso alle molteplici successive redazioni, egli seppe dare alla dimostrazione del suo teorema. Ma pochi ricordano che egli fu anzitutto il fondatore della teoria dei gruppi di sostituzioni, e che le idee fondamentali ed i più importanti principii di quella teoria si debbono a lui. Nè meno è risaputo che anche la teoria generale dei gruppi di operazioni, almeno per operazioni commutabili, fu iniziata e promossa dal RUFFINI con procedimenti al tutto moderni.

Il RUFFINI, matematico e medico reputatissimo, per molti anni presidente della Società dei XL, membro dell'Istituto Nazionale napoleonico, uomo influente presso la corte estense, e presso le autorità politiche ed ecclesiastiche degli altri staterelli di Italia, favorevolmente noto alla corte di Vienna, fu in relazione epistolare con gli uomini del suo tempo che ebbero maggior grido nelle scienze e nella politica. Ebbi io stesso la fortuna di rintracciare parecchie centinaia di lettere a lui dirette, le quali furono da me raccolte, coordinate ed accompagnate dalle minute delle risposte, in modo da ricostruire, per ogni singolo argomento, il completo sviluppo della corrispondenza.

La scoperta di questo carteggio, dei manoscritti autografi di tutte le opere matematiche del RUFFINI e di un copioso materiale di annotazioni, modificazioni, correzioni, aggiunte inedite ed importanti, consigliarono la ristampa delle opere edite e la pubblicazione delle inedite. A ciò si accinse, con generoso entusiasmo, il compianto prof. G. GUCCIA, fondatore del Circolo Matematico di Palermo. Il primo Tomo è uscito nel 1915, in splendida veste tipografica, ornato da un ritratto dell'autore, tolto da un quadro ad olio esistente nella Università di Modena, egregiamente riprodotto in eliotipia. Questo Tomo contiene, dopo una breve prefazione, la *Teoria Generale delle Equazioni, in cui si dimostra impossibile la soluzione algebraica delle equazioni generali di grado superiore al quarto,* riprodotta dalla edizione del 1799, con le modificazioni indicate dall'autore stesso. Quest'opera occupa le prime 324 pagine del testo. Fa seguito un opuscolo di *Rischiarimenti e risposte alle Obiezioni,* composto dal RUFFINI intorno al 1802;

ma rimasto inedito, e di speciale importanza per lo sviluppo storico dell'argomento. Infine viene riprodotta, dalle « Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze », la Memoria: *Della soluzione delle equazioni algebraiche determinate particolari di grado superiore al quarto*, che occupa le pagine dalla 343 alla 406. Il volume si chiude con le *Annotazioni di Ettore Bortolotti al Tomo primo delle Opere Matematiche di Paolo Ruffini*, nelle quali si interpretano con linguaggio moderno i risultati del RUFFINI, e si danno le notizie storiche, critiche e bibliografiche opportune alla illustrazione del testo.

Il manoscritto del secondo Tomo è dal 1914 completato in ogni sua parte e pronto per la stampa. Ma la morte del compianto prof. GUCCIA e lo svolgimento della guerra mondiale fecero sospendere la pubblicazione (che ora pare si possa riprendere).

Tale volume comprenderà le seguenti memorie:

1ª) *Della Insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto* (dalle Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo X, Parte II, Modena 1803, p. 410-470, con la data 18 Dicembre 1802);

2ª) *Risposta di Paolo Ruffini ai dubbi propostigli dal Socio G. Fr. Malfatti sopra la insolubilità algebraica delle equazioni di grado superiore al quarto* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo XII, Parte I, Modena 1805, p. 213-267, con la data 21 Giugno 1805);

3ª) *Riflessioni intorno al metodo proposto dal consocio Malafatti per la soluzione delle equazioni di 5° Grado* (Ibidem, p. 321-336, con la data 21 Settembre 1805);

4ª) *Alcune proprietà generali delle funzioni* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo XVI, Parte I, Modena 1807, p. 292-335, con la data 27 Giugno 1806);

5ª) *Della insolubilità delle equazioni algebraiche generali di grado superiore al quarto, qualunque metodo si adoperi, algebraico esso siasi o trascendentale* (Memorie dell'Istituto Nazionale Italiano, Classe di Fisica e Matematica, Tomo I, Parte II, Bologna 1806, con la data 22 Novembre 1806);

6ª) *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali* (Modena 1803, Appresso la Società Tipografica, p. VIII-140);

7ª) *Intorno al metodo generale proposto dal signor Hoené Wronski onde risolvere le equazioni di tutti i gradi* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo XVIII, parte contenente le memorie di Matematica, Modena 1820, p. 56-68, con la data 20 Marzo 1816);

8ª) *Memoria sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado* (Modena 1804, appresso la Società Tipografica, Memoria coronata dalla Società Italiana, p. 1-204);

9ª) *Di un uuovo metodo generale di estrarre le radici numeriche* (Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, Tomo XVI, Parte I, Modena 1813, p. 373-429, con la data 30 Settembre 1812).

Non credo necessario di insistere su l'importanza storica di queste memorie. Nelle prime 7, che trattano della risoluzione algebrica delle equazioni, si vede generare e svolgersi il concetto fondamentale di gruppo di operazioni, e quello particolare di *Gruppo di una equazione.* Il RUFFINI distingue, enumera, classifica, studia i gruppi che intervengono nelle sue considerazioni, scuopre i concetti fondamentali di *transitività* e di *primitività*, e le relazioni di dipendenza fra la irreducibilità di una equazione e la transitività del gruppo di essa, fra la risolubilità con equazioni di grado inferiore e la imprimitività del suo gruppo; traccia e segue entrambe le strade che di poi furono più ampiamente percorse da ABEL e da GALOIS, e, nelle successive redazioni, la sua dimostrazione raggiunge il massimo grado di semplicità e di perspicuità, tanto da essere tutt'ora seguita, nelle sue linee generali, nei trattati scolastici.

Notevole poi, nei riguardi della risoluzione approssimata numerica, la memoria 8ª; nella quale si espone quel metodo, cui impropriamente vien dato il nome di HORNER, e quelle regole per il calcolo delle successive trasformate razionali di una equazione, che prendono appunto il nome dal RUFFINI.

Il volume sarà illustrato da Note storico-critiche, allo stesso modo, e dallo stesso autore che ha curato la stampa del primo volume.

Non minore importanza avrà il terzo Tomo delle opere, destinato al *Carteggio di Ruffini coi matematici del suo tempo.*

Speciale interesse avranno le lettere relative alla risoluzione algebrica della equazioni; da esse si rileveranno i contributi che altri scienziati italiani, fra cui principalmente il PAOLI ed il MALFATTI, diedero a quel ramo importante di scienza, e si risolverà la questione storica che il BURKHARDT si era posta, al termine della sua dotta monografia su le opere di RUFFINI, quando si chiedeva se al CAUCHY, cui d'ordinario si attribuiscono anche tutte le scoperte che nella teoria dei gruppi di sostituzioni e nella applicazione alla risoluzione delle equazioni furono fatte dal RUFFINI, si chiedeva, dico, se al CAUCHY erano note le ricerche del RUFFINI.

La lettera del Carteggio ci dirà che il CAUCHY era a piena cognizione delle opere del RUFFINI, e che ne faceva tal conto, da farle valere come titolo per la nomina a membro della Accademia di Francia, da egli stesso proposta.

Il RUFFINI non limitava le sue ricerche matematiche al teorema della impossibilità ed alla teoria dei gruppi; egli aveva profonda cultura in ogni ramo delle discipline matematiche, e, dalle discussioni con gli scienziati che ebbero con lui commercio epistolare, apparisce il suo fine spirito critico, ed il sicuro senso di intuizione che gli faceva antivedere la verità, anche quando le condizioni della

scienza non consentivano la deduzione perfettamente rigorosa delle sue affermazioni.

Una fortunata disposizione del regolamento dell'*Istituto Nazionale Italiano*, fondato a Bologna dal BONAPARTE, prescriveva che, per ogni opera presentata per esame, o composta da autori che bramassero fregiarsi del titolo di membri dell'Istituto, dovessero nominarsi due censori che ne dessero giudizio. Il RUFFINI fu molte volte fra i censori, ed ogni volta compì il suo ufficio con impegno e scrupolosità davvero rari, anche in quei tempi. E, benchè per disposizione di regolamento la censura dovesse essere anonima, egli entrava direttamente in lizza con gli autori da lui esaminati, e, prima di stendere il giudizio, o di fare la relazione al segretario, con esauriente discussione convinceva i proponenti della esattezza delle osservazioni e delle obiezioni che intendeva di fare. Egli conservava le minute delle lettere e delle relazioni, i quaderni degli appunti, dei calcoli da lui fatti, e le risposte che a lui pervenivano. Abbiamo così, per ogni argomento messo in discussione, un intero carteggio, d'onde si ricava la genuina espressione delle cognizioni, delle idee, dei metodi, dei risultamenti, che in materia si avevano al tempo del RUFFINI.

Non aggiungo parole sul più copioso ed importante di questi carteggi, di quello cioè che si riferisce alla risoluzione algebrica delle equazioni, ed alla teoria dei gruppi di sostituzioni, perchè già più volte ho avuto occasione di parlarne estesamente (1); farò solo osservare che in questo argomento, allora nuovissimo e quasi sconosciuto fuori d'Italia, i geometri italiani si muovono con perfetta sicurezza. Non solo il RUFFINI da Modena, ma il MALFATTI da Ferrara, il PAOLI da Pisa, il CANTERZANI da Bologna, ne trattano da maestri, e mostrano che le nostre facoltà matematiche erano allora vividi fari di cultura algebrica.

Fra i commerci epistolari totalmente inediti ricorderò, per ordine di data:

1°) quello relativo ai fondamenti del calcolo infinitesimale, che si compone di 16 lettere e di vari opuscoli e quaderni manoscritti, scambiatisi fra il RUFFINI, il SALADINI, il PAOLI ed il BARBIERI dal 1803 al 1806;

2°) quello sulle trascendenti ellittiche, che comprende 14 lettere del RUFFINI, del CARDINALI, dell'ARALDI, del CAGNOLI, dal 1808 al 1810;

3°) sulla risoluzione numerica delle equazioni, che si compone di 6 lettere scambiate fra il RUFFINI ed il GUGLIELMINI dal 1809 al 1811, e di vari quaderni di appunti e discussioni;

4°) sulla meccanica e sulla idraulica, che contiene annotazioni ed osservazioni del RUFFINI e 8 lettere del VENTUROLI, dal 1809 al 1817;

---

(1) Cfr. E. BORTOLOTTI: *Influenza dell'Opera matematica di P. Ruffini.* (Annuario R. Univ. di Modena, 1902-1903). — *Carteggio di P. Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo relativo al teorema della insolubilità.* (Mem. Società dei XL, Serie 3ª, T. XIV, 1906). — *Sulla risolvente di Malfatti.* (Mem. Acc. di Modena, 1906).

5°) sugli sviluppi in serie, che furono poi detti del FOURIER, che comprende 16 lettere e lunghe disquisizioni, scambiatesi dal RUFFINI, dal FRULLANI e dal PAOLI, dal Gennaio 1817 al Dicembre 1821;

6°) commercio epistolare di minore importanza, ebbe il RUFFINI col GIORGINI dal 1815 al 1820 sulle superfici del secondo ordine, col FRANCHINI, sulla scienza del calcolo, dal 1818 al 1820; col BRUNACCI, sopra vari argomenti di meccanica, del calcolo delle derivazioni e del calcolo delle variazioni, dal 1805 al 1818.

Senza entrare per ora nell'esame di questi carteggi, mi contenterò di osservare la tendenza all'esame critico dei fondamenti della analisi, che fin d'allora si palesa nelle lettere del RUFFINI circa la convergenza delle serie, ed in quelle del SALADINI sulla continuità delle funzioni, sui contatti delle curve piane, e sugli ordini di infinitesimo, e, d'altra parte gli sviluppi assintotici, prediletti dal FRULLANI.

Ritengo che, per ragioni di opportunità e di spazio, non si potranno pubblicare che le lettere aventi interesse matematico, ma per chi ricerchi la storia anedottica ed i particolari biografici, la raccolta delle lettere al RUFFINI offrirà una ricca messa di notizie inedite ed assolutamente autentiche, insieme con una grandissima varietà di circostanze relative a fatti ed a condizioni economiche, politiche, sociali, nel burrascoso periodo della dominazione napoleonica e nei primi anni della restaurazione ducale in Modena, e vedrà documentate le più interessanti vicende delle massime nostre società accademiche: L'Istituto Nazionale Italiano, e la Società Italiana delle Scienze, detta dei XL.

ETTORE BORTOLOTTI (Bologna - Italia)

LA SETTIMA SERIE DI « AGGIUNTE ALLA BIBLIOTECA MATEMATICA DI P. RICCARDI »

La *Biblioteca Matematica Italiana di Pietro Riccardi*, fin dal suo primo apparire (1870-1880) fu annunciata come un' « Opera monumentale, per merito della quale l'Italia veniva dotata di un inventario completo delle fonti stampate per la sua storia della matematica a tutto il secolo XVIII, quale nessun'altra nazione possiede » (1).

L'Opera ha oggi più che un mezzo secolo di vita: sottoposta al cimento di mille riscontri da matematici, da storici, da bibliofili, da librai di tutto il mondo, ha mostrato la sua intima, costante non mai smentita perfezione. La sicurezza, la precisione e la assennata disposizione delle notizie storico-bibliografiche sulle opere e sugli autori, ne fanno un testo incontrastato in materia di fonti per la storia della matematica in Italia. Chi non riesce ad avere diretta visione di qualche rara opera matematica italiana, ricorre al RICCARDI, e la citazione della *Biblioteca Matematica del Riccardi*, in fatto di bibliografia, vale quanto la stessa citazione dell'opera originale.

Ma il RICCARDI avrebbe voluto che la sua « *Biblioteca* » fosse perfetta e compiuta, non solo nei particolari di ogni opera e di ogni autore, ma nell'inventario di tutte le opere e di tutti gli autori. Ed a questa perfezione, quasi impossibile a raggiungersi, egli si era di tanto accostato, che la annotazione: « *non registrata dal Riccardi* » vale anche oggi ad esprimere la estrema, quasi incredibile rarità di un'opera matematica italiana.

Di ciò non soddisfatto, seguendo l'alto suo concetto di ideale perfezione, il RICCARDI fin che ebbe vita non tralasciò cure e fatiche, per completare, rifinire, perfezionare in ogni suo menomo particolare la sua opera classica.

Già, lui vivente, si pubblicarono sei serie di « *Correzioni ed aggiunte* »; ma egli lasciò manoscritta una settima serie, che nelle sue 550 voci comprende, insieme con opportune rifiniture al testo, una lunga categoria di opere già « *non registrate dal Riccardi* », cioè di estrema rarità bibliografica, delle quali, ora

---

(1) Cer. A. FAVARO: *Notizie sulle fonti bibliografiche per gli studi di Storia della matematica in Italia* [Biblioteca matematica von *G. Enestrom* (1889)].

che la sua biblioteca è andata dispersa, sarà ben difficile aver altre notizie all'infuori di quelle che il RICCARDI ci ha qui lasciate.

Questa ultima serie di « *Correzioni ed aggiunte* », che completa e corona l'opera del RICCARDI, era rimasta fino ad ora inedita, con grave danno degli studi sulla storia della matematica in Italia. Ne ha promosso la pubblicazione la fortunata coincidenza, in quest'anno, del *Centenario della nascita di Pietro Riccardi* col *Congresso Internazionale dei matematici di Bologna.*

L'*Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena*, di cui il RICCARDI fu per molti anni e successivamente segretario, direttore di Sezione, presidente, si è assunto il patrocinio di questa pubblicazione, che ha avuto l'appoggio dell'*Istituto Nazionale per la Storia delle Scienze Fisiche e Matematiche*, della *R. Università di Modena*, della *R. Scuola di Ingegneria di Bologna*, e quello personale di munifici accademici modenesi.

La stampa è stata fatta a cura del Dr. L. L. TARDINI, coi tipi di quella stessa « Società Tipografica Modenese » che negli anni dal 1870 al 1880 pubblicò l'opera originale.

Lo stampatore e l'editore non risparmiarono le più diligenti, assidue, disinteressate premure; ogni passo di dubbia interpretazione, ogni parola di incerta lettura, ogni data, ogni nome che presentasse qualche apparenza sospetta, furono oggetto di attento esame, di faticosi riscontri; ed in quest'opera fu prezioso il consiglio del segretario dell'Accademia di Modena, prof. G. CANEVAZZI, ed il concorso dell'eruditissimo prof. G. BERTONI.

A. W. STERN (Brooklyn N. Y. - U. S. A.)

THE ROLE OF MATHEMATICS IN MODERN PHYSICAL THEORY

At no time is science so much talked about and as little understood by the layman as now. It is a commonplace that science has been making tremendous progress, but it is not so generally known that physics, the most exact and developed of the experimental sciences, has, in the last decade undergone a metamorphosis. The tendency of this new physics is to operate with mathematical symbols and not with physical ideas and concepts derived from sense experience. Having transcended our ordinary perceptions, and abandoned space-time description, physics has taken on a very abstract and formal character. It is impossible to clothe the conceptions of the new physics in picturesque language, because these conceptions are predominantly concerned with relations and not with the properties of things. The calculus used is a general matrix calculus which, instead of dealing with magnitudes that can be reduced to a numerical quantity, operates with an array of terms:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\ldots\ldots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\ldots\ldots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\ldots\ldots \end{pmatrix}$$

That this array is not a magnitude or a number as we know it, is shown by the fact that the commutation rule is not obeyed. If you let « x » represent a matrix, and « y » another matrix, then the multiplication of the two matrices « x » and « y » results in a matrix « xy » whose terms are not the same as those of the matrix « yx ». « x » times « y » in this calculus is not equal to « y » times « x ». Thus matrices are extremely difficult to deal with. A radical and highly significant advance has carried the subject not only beyond the intellectual powers of the average man, but also beyond his perception and intuition. And this at a time, ironically enough, when science is not only changing the conditions of our living, but is taking on a humanistic and cultural significance. A reviewer in Nature asks « whether the intellectual gulf separating the great physical scientists from the rest of their fellows is not greater now than at any previous time in history; whether they have not usurped the place of the metaphysician ». Physics by becoming a more profound and purer science has audaciously left our world of common sense and its concepts whose essential obviousness was

the bond between science and the layman. Matter as we know it has disappeared. Motion isn't what we think it is, and our conceptions of space and time are too crude to deal with quantum phenomena.

Recent developments have emphasized the autonomous aspect of science. The popular view of science as something that can be verified by common sense, or as a collection of facts, is not tenable. The aim of the scientist is to understand the world; to show that the universe is thinkable and amenable to reason, not primarily to establish facts. The Edisons and the Burbanks are the discoverers of facts, the Newtons, the Maxwells and the Einsteins are the inventors of theories.

Engaged in getting-at-the truth, not in a passive contemplation of Truth, the great scientific investigators have combined speculation with activity, and have give the world the only true methaphysics. Its concepts always changing and becoming more precise as it strikes deeper into the roots of reality, science is the most original creation of the human mind, and also the most unpredictable. Nobody knows with what fundamental entities science will operate next. Theoretical physics has already escaped from the bonds of sense, and has become non sense for the nineteenth century materialist and rationalist who, forgetting the essential nature of science, tried to envelop it with a creed that mistook the limitations of their own minds for the limitations of science. Astronomy has been called by Bernard Shaw « a monstrous exaggeration and a fairy tale ». With that healthy rationalism and common sense characteristic of the popular dramatist, he has told Henderson, his biographer, that he cannot see how « our neighbor the sun, so close to us that a cloud between us can make the difference between a hot day and a cold one is 93,000,000 miles off, or even 93,000 ». What would Bernard Shaw make of modern physics which has given up hope of ever visualizing and reducing atomic phenomena to common sense? He would probably find himself as much out of place in the modern scientific world as Lord KELVIN or Plato.

Contemporary physics which began by discarding pictures, models, and finally common sense, finding that these could not give a correct explanation of physical phenomena, has learnt, as Prof. MAX BORN has well expressed it that, « the world of our imagination is narrawer or more special in its logical structure than the world of physical things ». Physics has taken on a more rigorous and decidedly intellectual character, shifting its emphasis from content to form. « Give me matter and motion », said Descartes, « and I will construct the universe ». « Give me relations, and I will construct matter and motion », says Eddington. What was Newtonian physics and Maxwellian electrodynamics has become unified and absorbed into the general theory of continuous manifolds of four dimensions. From a few assumptions all the physics, with the possible exception of the quantum theory can be deduced mathematically.

At one time physics looked very much like organized common sense. It began with coordinating sense experience of the everyday world; it was concerned with the commonplace, and for this reason its results, once they were arrived at, appeared essentially obvious. Physical theories were metaphors, and physical phenomena were visualized, intuited, and felt to be understood when we compared them to the working of common things: pulleys, inclined planes, falling bodies, levers, water waves, etc. Physics was concrete. The mind became infatuated with the simple laws which governed matter in bulk, and assumed because it could not imagine any other possibilities regarding the laws of nature that these statistical and mechanical laws were the fundamental laws of nature.

In this concrete physics understanding a physical process means comparing it with some familiar things, or constructing a mechanical model after it. This gives us what is essentially an « as if » knowledge based on the assumption that nature uses only those patterns of behaviour which the human mind is familiar and finds it easiest to deal with. Because concrete physics takes cognizance of our mental state, we get the feeling that it gives us more knowledge than « abstract » physics which tells us nothing concerning what things are. It is not generally realized that a knowledge of what things are is a knowledge with reference to our sense impressions and intuitions, and therefore a knowledge which is clearly limited and inexact to the point of vagueness. Not that our senses do not know, but, to paraphrase Artemus Ward, what they do know isn't quite so.

In the beginning physical concepts were derived from touch, muscular effort, sight, bodily experiences, and innate prejudices of the mind. Mass was first defined as resistance to touch, force was muscular effort; matter was something solid and permanent, etc. One of the first achievements of modern physics was to define mass mathematically and more abstractly as the ratio between force and acceleration. By defining mass in this manner, we are enabled, to quote Prof. COHEN, « to perceive an element identical in mechanical inertia as well as in light, electricity, and gravitation ». We have correlated diverse phenomena, and can therefore understand each the better. The poet invents a world of relationships that are important for their psychological content, while the scientist discloses relationships that are not only significant for their intellectual form, but seem to reveal the order and unity of nature. Reality which is not the static abstraction of philosophers can be grasped only by mathematical concepts that are invariant throughout change. Reality cannot be understood in any other way. The chances are the ultimate elements are infinitely complex and probably not definable to the human mind. But although we cannot know the content of reality (this phrase is probably meaningless) we can know its form. We can know the relations that exist, and so get at its structure. Eddington calls our attention to the fact that even if we did know, say, the nature of the electron,

this knowledge would be irrelevant, because it does not tell us anything about the role played by the electron in physical phenomena. In a recent important contribution to the new quantum theory HEISENBERG has shown that the very idea of an individual particle or an individual electron is an abstraction. An individual electron or particle can never be observed. Their properties are known only through their interaction with other systems.

Concrete physics becomes the victim of its own abstractions. Reality, being infinitely complex, cannot be dealt with concretely except by abstracting. When we get down to the ultimates, as we do in atomic theory, the validity of mechanics or concrete physics becomes questionable. « Mechanics is not a fundamental thing », Prof. BRIDGMAN has said, « but in some way an effect produced by the aggregate action of a great many elementary quantum processes ». Mechanical terms and notions are derived from our percepts which are ill-defined and hazy. They fit nature only approximately, if at all, due to the fact that our immediate experience is with statistical effects, not with reality. Our ideas, concepts, percepts, and mental images are but processes of the mind designed to secure an adequate response to the external world. These, together with the innate prejudices of our minds, such as its intense desire for permanence in time (our invention of potential energy in physics to save the principles of conservation, or, to take a more familiar example, our almost pathological confidence in the immortality of our own soul) and its fondness for constancy in space (our concept of a regular solid) (1) have become an hindrance when thinking about atomic phenomena. When we are trying to learn the secrets of a world of things with which we have no immediate contact, we must guard against explanations in terms of the familiar. How are we going to surmount this handicap? The answer has been given by the new quantum theory-by a purely mathematical formulation.

Mathematics, whose symbolism has alone remained free of our mental habits of thought, of our conditioned reflexes, of our sense organs, of our language, and of our limited and narrow logic is the medium through which physics expresses the order, the unity and the harmony of nature. By revealing the perfect pattern, the form of nature, mathematics reveals the beauty of creation itself. Even an amoeba becomes a divine achievement from the point of view of mathematical physics. With mathematics the mind is enabled to enter the realm of pure reason, and extract the logical essence of physical phenomena stripped of all preconceptions. Physics has plunged too deeply and has become too profound to be grasped concretely. Scientists can go further with a mechanistic theory concerning man's behaviour than they can go with mechanical

---

(1) *Probably due to the intimate connection between the brain and the eye.* Mr. T. SMITH (Nature, 2-18-28) has held that vision is so constituted as to bring out the sharpness of contours of bodies.

explanations concerning the behaviour of the atom. Dead, dull, inert matter has been found excited, unpredictable, active, and not material. And even contradictory! The recent discovery by DAVISSON and GERMER, of the Bell Telephone Laboratories, of the diffraction of electrons by crystals has demonstrated that particles do not always act like particles, but behave like waves. In some instances « matter » keeps together, and we have an individual particle, and in other instances it spreads out like a wave, and loses all its individuality. The waves should not be taken too seriously. All we can say is that at times a particle seems to act like an individual and at other times it loses its individuality. The waves exist only in an abstract non-Euclidian configuration space. It is the logical essence of the idea of waves, not the pictorial representation that is the basis of the new wave mechanics. Visualization of atomic phenomena has been definitely abandoned in the new quantum theory. « The origin of this new theory », to quote Dr. BIRTWISTLE, « was an attempt to break away from the usual kinematical and mechanical concepts, and in their place, to substitute relations between definite numbers given by experiment ». The new quantum mechanics has brought out the fact that the essence of the Bohr theory is not the picture of the electron going around a nucleus (this is really superfluous); it is the mathematical expression, the Hamiltonian Function, which the theory starts with. This mathematical expression when subject to certain mathematical operations gives the results secured. The difference between a mathematical proposition and a physical proposition is not one of form, both are of the nature « p implies q ». The difference is that in mathematics the properties of « p » are given by definition, while in physics, the properties of « p » are discovered by observation.

Dynamic models and concepts are not the permanent elements in a scientific theory — the Newtonian world picture is not a first approximation to the Einstein world picture — but the Newtonian equations are a first approximation to the Einstein equations. It is in the mathematical equations that we find the permanent structure of science, and it is mathematics that gives science its culminative aspect. The Newtonian equations constitute relations that will always be true on that particular level of experience. When we plunge more deeply, we get a more profound set of truths which have embodied in them the original truths. Einstein's gravitational equations degenerate into Newton's when the field is weak, and the velocity small. Mathematics is the connecting link between past and present science. This is not to say that pictures and models are not useful in the exact sciences. They are essential if we desire to get an intuitive grasp of the phenomena.

But all pictures and models imply a causal space-time description which has only a limited validity in quantum phenomena. Space and time are very likely only approximate conceptions. The very ingenious and picturesque assumption of the spinning electron which had such remarkable success in clearing up

certain difficulties of the quantum theory has been found to be but an approximate concrete distillation of a very general and abstract principle. The internal spin of the electron may indeed be a myth. The requirement that the SCHROEDINGER wave equation, after satisfying the general transformation theory of quantum mechanics have the invariance demanded by the relativity theory is enough to give certain additional terms which describe some general internal motion of the electron, that, to a first approximation, may be taken for the spin of the electron.

Physics at the same time keeping in closest union with experience, now moves in the realm of pure intellect and reason. It is this duality without which contemporary physics is impossible, which is one of the supreme achievements of the human mind. Physics has become intellectualized. It is only as an intellectual system that modern physical theory succeeded in transcending space-time description which was so necessary for a rational formulation of the quantum theory. Mathematics has lifted us to an ideal world of pure thought which is not subordinated to the limitations of words and qualitative concepts. We ascend the heights where the pattern and order of the whole is revealed to us.
Many philosophers from Plato down have tried to make a similar excursion, but they did not succeed in bringing back any knowledge. Has not the scientist also lost contact with reality? We begin to grow skeptical when suddenly he makes a prediction so novel and daring, that had it not been for his flight, he would never have conceived it. The existence of quanta, the Einstein shift of the lines in the spectrum of the sun, and the diffraction of electrons by crystals are recent examples of such predictions. Here at last is an intellectual system that is giving us an understanding of the universe. And because quantum physics deals with some basic fact of the universe, it is beginning to throw light on some of the most fundamental philosophical questions of all time. Free Will, Determinism, Causality, Space and Time are beginning to receive some clarification.

Although verbalization is indeed much easier, the path to an understanding of nature, the path to a knowledge of the changeless in the midst of change is only by reason and experiment. In mathematics the mind is free to reason, and man here achieves what Strachey calls his most characteristic virtue, complete detachment from his immediate environment. Contemporary physics, having found our concepts and language inadequate, must henceforth express itself in a medium as pure as music. Happily, in mathematics science has found a perfect fusion of form and content that even surpasses music.

G. LORIA (Genova - Italia)

BOMBELLI E DIOFANTO

Fra le opere algebriche che videro la luce durante il glorioso Secolo XVI raggiunse grande e ben meritata diffusione quella che reca la firma di RAFFAELE BOMBELLI (1), non soltanto dopo che ottenne l'onore della stampa (2), ma sino da quando (1500) cominciò a girare manoscritta. Va segnalato il fatto che, benchè l'autore si proclami bolognese, non fu sinora possibile rinvenirne l'atto di nascita; ne tampoco se ne conosce l'atto di morte, la qual cosa si può spiegare considerando che, essendo il Bombelli di professione ingegnere idraulico, può avere finita la vita in qualche città, ove trovavasi per doveri d'ufficio. Perciò si può dire che oggi *tutto* Bombelli, lo scienziato e l'uomo, sia compendiato nel volume che lo consacrò all'immortalità, eventualmente completato da quanto si desume dall'esame dei manoscritti di quell'opera, l'importanza del quale è dimostrata dall'avere essi già rivelata l'esistenza d'un'intera sezione geometrica di quell'opera, rimasta sinora inedita per ragioni ignote, ma che fra poco uscirà dagli scaffali dell'Archiginnasio di Bologna, per cura del prof. BORTOLOTTI che l'ha ivi scoperta (3).

Per scrivere il suo volume il Bombelli si giovò di lavori anteriori che egli enumera coscienziosamente. Uno è un libretto del notissimo scienziato arabo Mohammed ibn Musa, che egli ricorda perchè da esso traggonsi gli elementi per stabilire l'etimologia del vocabolo « algebra »; si trova poi la *Summa* di LUCA

---

(1) *L'Algebra*, Opera di RAFFAELE BOMBELLI da Bologna, divisa in tre Libri. Colla quale ciascuno da sè potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica (Bologna, 1579).

(2) La Prefazione è datata 22 Giugno 1572. Il RICCARDI nella sua *Biblioteca Matematica Italiana* ne cita due edizioni, una del 1572, l'altra del 1579; a me sta sott'occhio un esemplare recante quest'ultima data, senza nessuna indicazione che si tratti di una nuova edizione, giacchè reca la seguente dichiarazione: « Posta hora in luce a beneficio delli studiosi di detta materia »; d'altra parte sembra strano che a soli sette anni di distanza siasi sentito il bisogno di una ristampa; è quindi naturale ammettere che si tratti di un semplice cambiamento di frontispizio.

(3) Vedi: *L'Algebra, opera di Rafael Bombelli. Libri IV e V ecc. Pubblicata per cura di Ettore Bortolotti.* Bologna, 1930. (Nota aggiunta durante la stampa; Aprile 1932).

PACIOLI, gli scritti di CARDANO, TARTAGLIA (1) e LUDOVICO FERRARI, mentre vi si cerca indarno il nome del famoso suo concittadino SCIPIONE DAL FERRO, fatto questo che attende una ragionevole spiegazione; tra i francesi Bombelli ricorda Oronzio Fineo e un Boglione di malagevole identificazione; seguono i tedeschi Stefel e Schreiber (se così deve interpretarsi il nome Scribellie). Da ultimo egli ricerca « un'opera greca.... composta da un certo Diofanto Alessandrino Autor Greco, il quale fu a tempo di Antonin Pio », la quale egli imparò a conoscere nella Biblioteca Vaticana, di cui anzi tradusse, con l'ajuto di un amico, i primi cinque libri. Riguardo a questa importante citazione va osservato che sino dal febbraio 1464 il celebre Regiomontano aveva scoperta l'*Aritmetica* di Diofanto in una Biblioteca di Venezia ed erasi affrettato a segnalarla al suo amico Giovanni Bianchini, il bel noto astronomo di Ferrara; ma quasi un secolo era trascorso senza che si avesse alcuna prova che di essa fosse stato intrapreso lo studio (2), onde è merito indiscutibile e grande del Bombelli l'aver riconosciuto quanto utile fosse il riporre in circolazione idee e metodi che da secoli giacevano negletti e dimenticati. Notisi poi che, secondo il Bombelli, l'opera di Diofanto sarebbe stata in *sette* Libri, ma si tratta di una semplice svista, dal momento che il più recente editore di Diofanto (P. Tannery) non ha riscontrato alcun disaccordo fra il Codice Marciano in sei Libri, visto dal Matematico di Königsberg, e quello Vaticano, studiato dall'ingegnere Bolognese. Più strana e meno spiegabile è l'asserzione bombelliana che Diofanto avrebbe appresa dagli Indiani la scienza che espone.

Dei tre Libri in cui è ripartita l'*Algebra* del Bombelli il I è interamente dedicato al calcolo con potenze e radici; queste se non siano applicate a numeri che non siano potenze corrispondenti, danno origine alle quantità dette *sorde* o *indiscrete*. Nelle ultime pagine di detto Libro il nostro Autore fa compiere all'algebra un mirabile sbalzo in avanti, assurgendo al grado di creatore del calcolo con numeri complessi: a tale scopo egli introdusse le celebri locuzioni *più di meno* o *meno di meno* per indicare le due unità $+i$ e $-i$. Le regole da lui date per operare con questi nuovi enti aritmetici gli permisero, fra l'altro, di spiegare come, nel caso irriducibile delle equazioni cubiche, una quantità reale potesse presentarsi sotto forma immaginaria.

Il II Libro dell'opera in esame tratta della teoria e della risoluzione delle

---

(1) Il Bombelli non entra nella famosa disputa fra questi due celebri matematici relativa alla risoluzione delle equazioni cubiche; ma si limita a notare che Tartaglia « di sua natura era così asuefatto a dir male, che all'hora egli pensava di haver dato honorato saggio di sè, quando di alcuno avesse sparlato ».

(2) Ci esprimiamo sotto questa forma riservata perchè il Libro (*Histoire des Sciences Mathématiques en Italie*, T. III, Paris, 1840, p. 182, nota) dice esistere nella Biblioteca Palatina di Firenze una versione italiana di Diofanto, anteriore all'opera del Bombelli. Questo manoscritto, dietro mia preghiera, venne cercato e rintracciato dal ch.mo prof. L. CAVAZZONI

equazioni algebriche. Per meglio caratterizzarne il contenuto giova ricordare che il NESSELMANN (1) ha, con piena ragione, distinti tre stadi attraversati dall'algebra nella sua evoluzione storica, che egli caratterizzò con gli epiteti di *retorica*, *sincopata e simbolica*, attribuendo il primo all'epoca in cui le equazioni erano espresse completamente a parola, il secondo a quella in cui certi termini tecnici di uso continuo erano surrogati da abbreviazioni costanti e il terzo al tempo in cui fu introdotto metodicamente il simbolo: ora mentre con titubanza si attribuisce all'opera di Diofanto l'aggettivo di sincopata, questo spetta di pieno diritto all'*Algebra* del Bombelli.

Gli è nel II Libro di quest'opera che si comincia ad avvertire nel modo più chiaro l'influenza esercitata da Diofanto sul nostro Autore. Essa si manifesta anzitutto nella nomenclatura: mentre per l'incognita era da circa tre secoli usata (e non soltanto in Italia) la parola *cosa*, Bombelli, inspirandosi all'esempio dato dall'autore greco, adopera ora la parola *tanto* ed ora *quantità*; e mentre prima di lui il quadrato dell'incognita era chiamato *censo*, egli preferisce il termine *potenza*, a cui seguono *cubo*, *potenza di potenza*, ecc. La medesima influenza è percepibile nelle notazioni: è noto che per designare l'incognita Diofanto si serve di un segno che i moderni editori hanno riprodotto con una σ finale, Bombelli nelle copie manoscritte della sua opera si serve allo stesso scopo di un carattere somigliante a una v; ma, nella stampa, egli preferì un segno creato « ad hoc », cioè un piccolo semicerchio concavo all'insù, entro il quale scriveva i numeri 1, 2, 3,.... per indicare le potenze successive dell'incognita. Il progresso così compiuto è immenso, chè si può dire che da questo momento gli esponenti facciano il loro ingresso nella scienza. È chiaro che la simbolica bombelliana presenta il medesimo inconveniente della diofantea, quello cioè di essere applicabile ad un'unica incognita; nei problemi in cui se ne hanno parecchio, Bombelli, al pari di Diofanto, è costretto a ricorrere a svariati artifici per esprimere mentalmente tutte le incognite della questione in funzione di una; nell'escogitare espedienti che le guidino in ogni caso al risultato voluto, Bombelli si è mostrato degno discepolo del grande aritmetico greco. L'utilità, sia pure limitata ma innegabile del simbolismo bombelliano, si constata anzitutto nell'estensione ai polinomi delle regole date precedentemente per operare sopra i numeri interi. Essa è luminosamente confermata dalla trattazione delle equazioni (cioè dell'operazione da lui chiamata *dello uguagliare*).

Notisi che Bombelli, conformemente all'uso dell'epoca, esclude sempre le radici nulle e considera esclusivamente equazioni con coefficienti positivi, il che esige

---

nella Biblioteca Nazionale di quella città, ove reca la seguente segnatura: Palatina 625 (432. E. 5, 6, 36). Il prelodato professore ne ha già intrapreso lo studio e a suo tempo farà conoscere le sue osservazioni al riguardo.

(1) NESSELMANN: *Die Algebra der Griechen* (Berlin, 1842) p. 302.

la distinzione di un numero di casi, il quale va crescendo in modo allarmante col crescere del grado delle equazioni considerate; merita di essere rilevato che, in un passo della sua opera, egli s'imbatte in un'equazione il cui secondo membro è 0, ma egli non seppe raccogliere la gemma casualmente caduta ai suoi piedi. È estraneo al tema della presente comunicazione il riferire i metodi usati dal Bombelli per risolvere le equazioni algebriche dei primi quattro gradi. Soltanto va notato che, riguardo alle equazioni biquadratiche, egli manifesta il convincimento che Diofanto avesse insegnato a risolverle nei Libri perduti della sua grande opera, opinione di fronte a cui non si può che applicare l'antica massima: « quod gratis asseritur, gratis negatur ». Fortuna volle che la lacuna sia stata felicemente colmata da Lodovico Ferrari, la cui invenzione il nostro autore applica a tutti i vari tipi possibili di equazioni di quarto grado. Non si può negare che l'impiego costante di un medesimo artificio a tante equazioni, differenti fra loro soltanto per i segni dei coefficienti, renda pesante questa parte dell'opera che esaminiamo; ed è da lamentare che il Bombelli, il quale diede prova di ammirabile coraggio nel trattare i numeri immaginari, siasi mostrato tanto timido di fronte ai numeri negativi. Se, oltre che dalle opere arabe, egli avesse avuta notizia degli scritti indiani, avrebbe certamente misurata l'utilità di ammettere che i coefficienti delle equazioni potessero assumere anche valori non positivi e così avrebbe fatto compiere all'algebra un progresso di cui è superfluo dimostrare l'importanza.

Mentre nel II Libro della sua *Algebra* il Bombelli espose i metodi per trattare le equazioni letterali suscettibili di risoluzione algebrica, nel III ha mostrato come si applicano i metodi esposti alla risoluzione di non meno di 273 (1) questioni con dati numerici. In una prima stesura della sua opera (tuttora inedita), egli, uniformandosi alle consuetudini del tempo, si occupò di problemi enunciati « sotto velame di attioni o negotij humani » cioè « vendite, compere, restitutioni, permute, scambij, interessi, deffalcationi, leghe di monete, di metalli, pesi, compagnie, o con perdite, o con guadagno, giochi, e simili altre infinite ationi, e operationi humane ». Ma, subìta che ebbe l'influenza di Diofanto (nella cui *Aritmetica* notoriamente un solo problema è enunciato sotto forma concreta) decise di trattare esclusivamente problemi ove i dati fossero numeri astratti, innovazione alla quale egli fu certamente sospinto anche dalle difficoltà che avrebbe incontrato nell'immaginare fenomeni sociali traducentesi nelle questioni elevate che egli ambiva di trattare. Ma l'influenza esercitata sul nostro matematico dal sommo aritmetico greco non si arresta alla superficie; essa, infatti è talmente profonda che, in un certo senso, può dirsi che il III Libro dell'*Algebra* del Bombelli rappre-

(1) Giova osservare che l'ultimo dei problemi dell'*Algebra* del Bombelli porta il n. CCLXXII; ma due di essi portano il n. XLIX e per compenso mancano i nn. CCLVI e CCLVII. In Diofanto non si trovano che 189 problemi.

senti un rifacimento dei Libri superstiti dell'antica opera e un tentativo di divinazione di quelli perduti.

Già dicemmo che la simbolica bombelliana presenta indiscutibili analogie con la diofantea, e che, benchè il volume del bolognese appartenga all'algebra sincopata, mentre quello dell'alessandrino abbia piuttosto i caratteri dell'algebra retorica, pure gli inconvenienti provenienti dal non potere rappresentare simbolicamente che una incognita, si manifesta egualmente in entrambe, se la parola « inconveniente » può applicarsi ad uno stato di cose che spinse due matematici di genio a escogitare artifici ammirandi. Più grave e meraviglioso è il fatto che in entrambi manchi completamente la visione della necessità di metodicamente distinguere i problemi determinati dagli indeterminati; perciò nelle opere di ambedue, gli uni sono frammisti agli altri; inoltre essi si ritennero in diritto di trasformare questi in quelli, introducendo arbitrariamente nuove condizioni fra le incognite. Ancora: il problema dell'analisi indeterminata consiste per Bombelli come per Diofanto nella ricerca di *una* soluzione razionale positiva delle corrispondenti equazioni, mentre si ritiene oggi che scopo di quella bianca della nostra scienza sia la ricerca di *tutte* le soluzioni intere di una data questione.

Chi conosce l'*Aritmetica* di Diofanto sa che i problemi ivi risoluti si seguono in modo di cui è difficile determinare il fondamento dottrinale; l'apparente disordine viene spiegato da storici benevoli con lo stato dei manoscritti; ora questo comodo argomento non si può invocare per spiegare lo stesso fenomeno nell'*Algebra* del Bombelli. Questo disordine è tale che se si volesse presentare un quadro del contenuto di quest'opera, il quale fosse giudicato soddisfacente per un lettore moderno, sarebbe necessario abbandonare quasi completamente la successione adottata dall'ingegnere bolognese; diciamo « quasi » perchè in alcuni casi una questione segue ad altra perchè nella risoluzione di questa è applicata la soluzione di quella.

Un grande numero di problemi trattati dal Bombelli si traducono in sistemi determinati di equazioni lineari, i quali appartengono a tipi che s'incontrano già nell'opera greca o che ne derivano per il semplice aumento del numero delle incognite. La medesima osservazione può farsi riguardo ai sistemi di gradi superiori, ma risolubili mediante equazioni di 1° e 2° grado. Non più di quattro sono le questioni di analisi indeterminata di 1° grado risolute dal Bombelli; molto più numerose sono quelle di grado più elevato, in gran parte tratte da Diofanto; fra esse meritano una speciale menzione quelle che si riferiscono alle « doppie equazioni ». Le citiamo per aggiungere che il Bombelli è andato più oltre del matematico greco, avendo risolto dallo stesso punto di vista le questioni che possono ben chiamarsi « equazioni triple » o « quadruple », nonchè alcune equazioni doppie o triple di grado superiore al secondo.

Nel 1575 Xylandro pubblicava a Basilea la prima versione latina di Diofanto; nel 1621 il testo greco vedeva per la prima volta la luce per merito di Bachet

de Méziriac e da questa pubblicazione Fermat traeva ispirazione per gettare le basi dell'odierna teoria dei numeri. Per conseguenza nessuno pensò, nè durante il Secolo XVII, nè poi, di ricorrere al geniale ingegnere bolognese per addestrarsi nel maneggio dei concetti e dei metodi dovuti al sommo aritmetico bolognese. In conseguenza l'influenza esercitata dal Bombelli sullo sviluppo della teoria dei numeri non è paragonabile a quella che risentì da lui la teoria dei numeri immaginari. Ma la storia della scienza — funzione massima della quale è di « unicuique suum tribuere » — riconosce in Bombelli il primo che siasi assimilato le idee e le procedure diofantee, sepolte da secoli, e siasi sforzato di ravvivarne la virtù feconda, riponendole in circolazione ed estendendone la portata. Se questo merito non gli fu generalmente riconosciuto, gli è che le investigazioni sopra la « chimica dei numeri » (Kummer) per merito del famoso senatore tolosano si orientarono verso nuovi campi, che sono quelli appunto che vengono oggi coltivati; donde la ragione per cui ben pochi dei cultori di questa disciplina conoscono le benemerenze dell'eminente matematico, al quale, con la presente comunicazione, intesi di tributare un modesto, ma doveroso omaggio.

G. LORIA (Genova - Italia)

QUO VADIMUS?

In un volume recente, dovuto a un celebre fisiologo francese (1), CARLO RICHET, stanno scritte le seguenti parole: « Un geometra prende una penna, un foglio di carta e, senza libri, senza documenti, svolge delle formole che si presentano al suo genio. Egli improvvisa cose belle e feconde, giacchè la potenza del suo spirito matematico gli permise, in un tempo relativamente breve, di conoscere all'incirca tutto quanto fecero i suoi predecessori ». Leggendo queste frasi, chiunque abbia un'infarinatura storica relativa alla nostra scienza, penserà a PASCAL, che, non appena conosciuta la definizione della geometria, ricostruisce l'intero I Libro degli *Elementi* di Euclide; a PONCELET che, prigioniero a Saratow, località semi-barbara situata sulle rive del Volga, getta le basi del suo *Traité des propriétés projectives des figures*; e ad EVARISTO GALOIS il quale, nella notte precedente il fatale duello che doveva condurlo a morte poco più che ventenne, traccia con mano rapida e nervosa ma altrettanto sicura le prime linee della teoria delle sostituzioni, base indispensabile per uno studio profondo delle proprietà delle equazioni algebriche.

Ma chi conosce con qualche precisione la tecnica della ricerca matematica, osserva che nella letteratura della nostra scienza s'incontrano numerosi tipi di ragionamento, applicabili in moltissimi casi e che bisogna conoscere al modo istesso che un fisico deve avere famigliarità con la macchina elettrica e il barometro, per poterne usare in ogni caso; nota ancora che la storia insegna che molte importanti generalizzazioni furono il prodotto dell'osservazione che certe argomentazioni sussistono integralmente in ipotesi assai più larghe di quanto prima erasi creduto. Perciò, riflettendo a mente riposata sopra le schizze delineate dal brillante scienziato parigino, si è naturalmente condotti a giudicare che i casi ora citati sono fenomeni eccezionali, che forse non si ripresenteranno mai più; se enumeriamo poi quante volte a noi stessi, o a qualche amico o discepolo accadde di ri-inventare involontariamente cose note da secoli e di urtarsi contro difficoltà che sarebbe stato agevole sormontare conoscendo una certa teoria e anche un certo teorema, si conclude, contrariamente a quanto è

(1) *La savant* (Paris, Hachette, 1920) p. 106.

affermato nelle frasi surriferite, che per il matematico, come per il cultore di qualunque disciplina, la conoscenza di quanto fu pensato e scritto dai predecessori è condizione indispensabile per un fruttifero lavoro.

Nè si manca di aggiungere che, anzi, per lui tale compito riesce più grave che per chi si dedica ad altre branche dello scibile, giacchè la matematica è una scienza eminentemente conservatrice, la quale da secoli eleva, allarga, approfondisce il proprio dominio senza mai far gettito del retaggio del passato. E ciò a differenza delle altre scienze. Chè un astronomo può darsi il lusso di ignorare il sistema tolemaico, a un fisico non è necessario sapere come la pensassero Platone e Aristotele sulla luce e il calore, e un chimico odierno non ha mai occasione di ricorrere alle dottrine flogistiche; ma quale matematico può ignorare che cosa contengano gli *Elementi* di Euclide e gli scritti di Archimede?

Ora la invidiabile e invidiata caratteristica della matematica di essere immune dalle rivoluzioni che, per altre discipline, ebbero quale conseguenza una rinnovazione « ab imis fundamentis », questa dote di eternità che la rende giustamente orgogliosa, contrariamente a quanto affermò il succitato pensatore, impone a chi la coltiva còmpiti oltremodo gravosi. Si pensi, infatti, che dalla fondazione del Museo d'Alessandria (e scelgo questa data perchè è da allora che comincia la letteratura matematica europea) sono scorsi non meno di ventidue secoli, pochi dei quali si mostrarono incapaci di accrescere di una l'elenco delle verità matematiche, mentre in molti altri vissero e operarono pensatori di meravigliosa fecondità; ed è con profonda ammirazione che io ricordo per l'Italia il periodo che, iniziatosi con CARDANO e TARTAGLIA, proseguitosi con GALILEO, si chiuse con CAVALIERI e TORRICELLI; per la Francia quello che, con cortigianesca denominazione, suol chiamarsi Secolo di Luigi XIV; per l'Inghilterra l'epoca newtoniana; e per la Germania l'éra che s'inizia con colui che a ragione viene chiamato « princeps mathematicorum ».

Per formarsi un esatto concetto di quanto fruttifero sia stato questo più volte secolare lavoro è sufficiente avere presente che la più vasta e esatta Bibliografia matematica relativa alla produzione matematica a tutto il Secolo XIX, quel colossale lavoro compiuto dal VALENTIN e che attende ancora la comparsa di un Mecenate che la sottragga ai pericoli che sovrastano alle opere manoscritte (1), quel lavoro, dico, registra all'incirca centocinquantamila lavori, tanti quanti coi loro titoli riempirebbero non meno di quindici grossi volumi in 4°. Ora, sia pure che fra essi trovinsi nuove edizioni, che non tutti contrassegnino un passo in avanti nella scoperta della verità, che anzi taluni, per l'onore dello spirito umano, sarebbe stato ben meglio che non fossero stati neppure scritti; ma molti sono gemme preziose e fulgide di cui l'umanità va giustamente superba e buon nu-

(1) In una posteriore seduta il Congresso, dietro proposta del Prof. ARCHIBALD, emise un voto per la pubblicazione di questo colossale lavoro.

mero di essi rappresentano utili svolgimenti di produzioni classiche, mentre in altri lo storico ravvisa germi che mostraronsi poi inaspettatamente fecondi.

Errerebbe chi credesse che la produzione matematica siasi andata rallentando durante il periodo storico nel quale viviamo. Malgrado la distruzione di tante preziose energie, su cui fondavansi le più rosee speranze (e in questo momento il mio memore pensiero si volge con indicibile commozione a te, diletto collega ed amico, EUGENIO ELIA LEVI, che facesti gettito volontario della tua promettente esistenza nel momento in cui l'Italia entrò nella recente conflagrazione europea); benchè le accresciute difficoltà della vita materiale e l'esagerata ammirazione che oggi tributasi alla forza fisica allontanino gran parte della gioventù dalla faticosa e poco remunerativa ricerca del vero; pure l'impero matematico si accresce secondo tre direzioni in modo che alcuni giudicano allarmante, mentre per altri è motivo di compiacimento. Una prova mi è offerta da un ottimo manuale dovuto alla penna infaticabile del mio amico prof. VIVANTI (1): l'edizione del 1901 si chiude con un elenco di lavori relativi alle funzioni analitiche, comprendente poco più di 200 numeri; ora quella del 1928 avrebbe potuto offrirne ai lettori uno analogo di 700, se l'autore, per necessità di spazio, non avesse trovato necessario di sopprimerle. Ne credasi essere questo un fatto sporadico; lo prova una semplice considerazione statistica che giudico opportuno di svolgere.

Nel I Volume del « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik » è reso conto di circa 1200 lavori; nel XLVIII, il quale comprende gli anni 1921-22, si dà notizia di circa 6000; ammesso — è un postulato che reputo accettabile da tutti — che l'aumento di produzione abbia avuto luogo con legge uniforme, l'applicazione della formola che dà la somma dei termini di una progressione aritmetica porta a concludere che nel periodo che va dal 1868 al 1922 inclusivi, l'elenco dei lavori matematici si è arricchito all'incirca di 120000 numeri; aggiungendo i nuovi a quelli registrati dal VALENTIN, questo verrebbe a comprendere non meno di 25 poderosi volumi.

A siffatto cospicuo aumento di ricchezza contribuirono validamente, non soltanto i paesi della vecchia Europa, ma anche nuove reclute arruolate nelle altre parti del mondo. E prima d'ogni altra l'America del Nord, paese esuberante, febbrile, nobilmente ambizioso, pieno di slancio e (circostanza non trascurabile) di mezzi materiali; ora quanto intenso sia il contributo che danno alla scienza nostra i matematici viventi al di là dell'Atlantico risulta da una semplice constatazione di fatto, essa pure offerta dalla statistica. L'America settentrionale possiede due grandi corporazioni matematiche, ognuna delle quali ha branche isolate in tutti gli stati componenti l'Unione; sono l'« American mathematical Society » e la « Mathematical Association of America »; ora nel corso dell'anno 1927 (il quale

(1) *Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere.* (Milano, 1928).

non ha nulla di anormale) a questa furono presentate circa 300 memorie e a quella più di 400; onore a una nazione che mostra per la nostra scienza un così fattivo interesse!

Se — per amore di simmetria — investighiamo quanto accade nell'Estremo Oriente, c'imbatteremo in un popolo ancor più meraviglioso dell'Americano; un popolo il quale, pur disponendo di una matematica tradizionale non priva di qualità, non esitò ad abbandonarla, assumendo il modesto aspetto di discepolo delle più progredite nazioni europee; ma questa condizione di noviziato fu di breve durata; perciò oggi, chi intende rendersi conto dei progressi che vanno facendo incessantemente le scienze esatte, ha il dovere di volgere lo sguardo a quanto viene pubblicato nella Terra del Sole levante.

Ma il Giappone non è l'unico paese asiatico che abbia mostrato ai dì nostri di possedere spiccate attitudini alla ricerca matematica, che uno scienziato indiano (SRINIVASA RAMANUJAN), vera meteora paragonabile a ABEL e GALOIS, fornì la prova evidente del fatto che molto si può ragionevolmente attendere dalla stirpe che inventò le cifre di cui tuttora ci serviamo.

D'altra parte va tenuto conto di un altro fenomeno preoccupante: la recente guerra mondiale sembra avere acuito quel sentimento che G. B. VICO chiamava « boria nazionale » nei popoli che di recente conseguirono autonomia e indipendenza, i quali sembrano pervasi dall'ammirando sentimento di mostrarsi degni, anche dal punto di vista che a noi interessa, della conseguita dignità politica; e poichè spesso — forse sospinti dal medesimo sentimento — amano servirsi del loro idioma, risorge nell'animo nostro il rimpianto per l'imprudente abbandono del Latino che, ancora durante buona parte del Secolo XVIII, disimpegnò l'importante ufficio di mezzo generale di comunicazione fra i dotti.

Ora non v'ha chi non percepisca la gravità di questo stato di cose, nel quale si cela una grave minaccia per l'avvenire della nostra scienza; ad esso, ad esempio è indubbiamente dovuto il fatto, deplorevole e deplorato, che alcune importanti teorie sono lasciate dai giovani in abbandono ingiustificato, solo perchè la relativa letteratura è di tale ampiezza che il prenderne notizia esige un lavoro di anni, mentre dai neofiti viene accordata la preferenza a branche meno importanti, ma riguardo alle quali è più facile l'orientarsi.

A porre un argine ai danni in conseguenza paventati furono già suggeriti e applicati rimedi di vario genere.

Alcuni di questi hanno l'intento di informare chi già conosce una teoria dei progressi che essa va annualmente compiendo. È superfluo che io dichiari che fra essi il primo posto spetta al « Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik » e sono sicuro di avere consenzienti i miei ascoltatori rivolgendo un plauso riconoscente a coloro che foggiarono e poi perfezionarono questo prezioso ordigno di lavoro e all'Accademia di Berlino, la quale, assumendone ora la tutela, ne assicurò per sempre l'esistenza. Giustizia vuole che si aggiunga un doveroso

elogio alla « Revue semestrielle des pubblications mathématiques », la quale, con un programma un po' differente, persegue uno scopo informativo della medesima specie.

Più ardua è la questione di rendere edotto chi vuole dedicarsi allo studio di un determinato argomento, dello stato in cui esso presentemente si trova. Il desiderio di risolverla ispirò coloro che intrapresero il « Répertoire bibliographique des sciences mathématiques », ma ignoro a qual punto si trovi l'effettuazione di questo progetto. Analogo intanto hanno gli indici bibliografici relativi a speciali teorie, che già esistono per merito di vari benemeriti specialisti; essi sono certamente giovevoli, ma più lo sarebbero se vi fosse indicata l'importanza relativa dei lavori registrati; per ciò auguriamo che coloro che in avvenire intraprenderanno lavori del genere distinguano con appositi contrassegni gli scritti fondamentali, da quelli secondari e anche da quelli che si possono lasciare in disparte, almeno in un primo studio sull'argomento.

Di maggiore utilità riescono i Rapporti, pure sopra argomenti particolari, specialmente se redatti da persone di indiscutibile competenza; alcuni di essi rasentano, per importanza e valore, le opere originali e per mostrare la fondatezza di questo apprezzamento basta ricordare quelli, veramente magistrali, che videro la luce sotto gli auspici della British Association e della Deutsche Mathematiker-Vereinigung. Allo stesso genere letterario appartengono il Repertorio del PASCAL, il Mémorial de Sciences mathématiques e persino la grande Enciclopedia delle quattro Accademie; infatti che cosa è questa se non una raccolta di Rapporti sopra le varie branche della matematica pura ed applicata? Splendido bilancio che le altre scienze contemplano con ammirazione non scevra d'invidia, non desta esso forse nel novellino un senso di sgomento del genere di quello che prevedeva LAGRANGE quando felicitavasi di essere contemporaneo di EULERO, perchè così prendeva notizia delle memorie che questi andava incessantemente pubblicando, una per volta al loro apparire, e non raccolte in innumerevoli volumi?

Ora tutti questi ausiliari possiedono un valore indiscutibile che io non voglio negare; ma bisogna badare a non esagerarne la portata. In una scienza di ragionamento quale è la nostra il conoscere una serie di risultati non è sufficiente per porre in grado di raggiungerne altri, al modo istesso che tutti gli atlanti geografici esistenti non costituiscono un corredo sufficiente per chi vuole intraprendere esplorazioni in regioni sconosciute. Il matematico che aspira a far progredire il nostro sapere deve conoscere, oltre la direzione in cui procedettero le relative ricerche e il punto a cui giunsero, ancora i metodi, che gli possono servire, non solo nella loro struttura generale ma anche nei particolari del loro funzionamento; ora tutto ciò gli scritti storici e bibliografici non sono in grado d'insegnare.

A tale importante funzione sono invece destinati i lavori di sintesi, cioè le esposizioni rigorosamente metodiche e veramente complete delle teorie che rag-

giunsero un soddisfacente grado di maturità, esposizioni che esonerino, chi non compie ricerche storiche dal faticoso lavoro di ricerca, di critica, di scarto e di coordinazione dei numerosi materiali relativi, i quali di regola sono sparsi qua e là e spesso sepolti in pubblicazioni difficilmente accessibili. Nell'interesse della scienza sarebbe utile che da un'assemblea, quale è quella oggi qui raccolta, uscisse la solenne affermazione che lavori dell'indicata specie, se scritti senza spirito d'intolleranza, ma in base a un ben inteso eclettismo, costituiscano per chi li compie un titolo di onore non minore di una ricerca originale. A mostrare la fondatezza di siffatta proposta basta osservare che alla fama di EULERO servirono, forse più delle sue innumerevoli memorie originali, le opere con cui egli diede assetto definitivo all'analisi infinitesimale, uscita ancora informe dalle mani di NEWTON, di LEIBNIZ, dei BERNOULLI. Grazie ad opere di quel genere il patrimonio adunato da secoli darà tutti i frutti di cui è suscettibile; potranno venire eliminati i numerosi duplicati che costituiscono un inutile ingombro per la scienza; e saranno segnalate, ed eventualmente colmate, le lacune che ne costituiscono altrettante imperfezioni. Inoltre certe discipline, coltivate sinora con intenti discordanti, epperò prive di un andamento regolare, assumeranno l'apparenza rigorosamente euclidea e procederanno chiaramente verso una determinata mèta; apparenza e andamento donde trarrebbesi soddisfacente risposta alla tormentosa domanda *Quo vadimus?* che viene spontanea alle labbra di chi contempla nel suo insieme il poliedrico e policromo patrimonio matematico odierno.

Con le semplici osservazioni esposte io mi lusingo di avere manifestato un sentimento che turba tutti i matematici a cui sta a cuore di allontanare i pericoli che minacciano l'avvenire delle scienze esatte. Non sono del pari sicuro di avere colpito nel segno proponendo i mezzi per evitarli. Ciò non ostante ho ritenuto di giovarmi della presente occasione per dirigere la mente di persone competenti verso un ordine di questioni dalla cui soluzione sembra dipendere l'esistenza stessa del ramo dello scibile a cui, noi qui presenti, dedicammo la vita.

E in questo momento si affaccia alla mia mente il ricordo di un articolo dello statuto della più antica società matematica inglese: i membri di essa solevano tenere periodiche riunioni per bere, fumare e proporsi reciprocamente questioni interessanti; per raggiungere questo intento a ciascuno dei partecipanti era fatto obbligo di portare ad ogni seduta il proprio bicchiere, la propria pipa e il proprio problema. I tempi sono mutati; io mi sono sentito esonerato dal recare meco pipa e bicchiere; ma un problema devevo ben-portarlo. Ne ho dato l'enunciato; spetta a voi il risolverlo.

R. MARCOLONGO (Napoli - Italia)

SULLO STATO ATTUALE DELLA PUBBLICAZIONE ITALIANA DEI MANOSCRITTI DI LEONARDO DA VINCI ED IN PARTICOLARE SU QUELLA DEL CODICE ARUNDEL

La edizione nazionale dei manoscritti vinciani, invocata dai nostri più grandi studiosi dell'opera di Leonardo e primo fra tutti G. B. Venturi e poi G. Uzielli e G. Govi, è rimasta fino a questi ultimi anni un vivo ma insoddisfatto desiderio degli italiani. Non mancarono tuttavia egregi collaboratori che, in mezzo a gravi difficoltà, cercarono integrare l'opera che si compiva all'estero, colle monumentali pubblicazioni del *Codice Atlantico* fatta dal Piumati, del *Codice Trivulziano* dal Beltrami e dal Piumati, del *Codice Leicester* dal Calvi, del Codice sul *Volo degli uccelli* fatta dal Sabachnikoff e Piumati.

Istituita con decreto reale la Commissione vinciana per la completa pubblicazione dei manoscritti e disegni di Leonardo, dopo varie vicende e una lunga preparazione e sotto l'impulso illuminato e poderoso del suo presidente prof. Mario Cerminati, così presto rapito alla scienza e alla cui memoria io reverentemente m'inchino, coadiuvato dai nostri maggiori studiosi, essa potè, appena otto anni or sono, venuta in possesso delle riproduzioni fotografiche dei manoscritti conservati all'estero, formulare un elaborato progetto per la auspicata edizione nazionale. Esso consisteva prima di tutto nella pubblicazione indispensabile e urgente di quei manoscritti che fossero completamente inediti: p. e. i tre codicetti del Museo Vittoria e Alberto di Londra; oppure editi (e non bene) solamente in parte, come il Codice Arundel 263 del Museo Britannico. Stabilite tutte le modalità della pubblicazione e fatto tesoro di tutte le antecedenti esperienze, la oculare diligenza della sottocommissione e del comitato esecutivo della R.e Comm. vinciana, la valentia di un grande stabilimento industriale romano, permisero di iniziare subito l'attuazione del grandioso progetto. Ora la pubblicazione del Codice Arundel è finalmente compiuta! Essa costituisce il primo volume della grande edizione nazionale de « *I manoscritti e i disegni di Leonardo da Vinci pubblicati dalla R.e Commissione vinciana sotto gli auspici del Ministero della Istruzione Pubblica* »; volume diviso in tre parti, e contenente appunto « *Il Codice Arundel* 263 *nel Museo Britannico* »: con riproduzione fototipica, con trascrizione diplomatica e critica. L'edizione, veramente meravigliosa è del Danesi di Roma.

Le tre parti in cui si divide questo primo volume sono le seguenti:

Parte 1ª da fol. 1 a fol. 116; Roma 1923.
Parte 2ª da fol. 117 a fol. 220; Roma 1926.
Parte 3ª da fol. 221 a fol. 283; Roma 1928.

Il comitato esecutivo che ha curato la trascrizione diplomatica e la parte interpretativa o critica, composto di Cerminati, Venturi, Fedele, Gentile, Favaro, Ruffini e Carusi, alla morte del Cerminati, Favaro e Ruffini si ridusse al Presidente senatore Gentile, al vicepresidente senatore Venturi, a M.r E. Carusi ed al sottoscritto.

Il volume sarà completato da una appendice contenente la descrizione del Codice, alcune note e un particolareggiato indice di tutta la voluminosa ricca materia (in gran parte di meccanica) del prezioso codice e che è già in corso di stampa (1).

La R.e Commissione vinciana ha voluto raggiungere tre scopi. Prima di tutto presentare una fedele riproduzione fototipica del codice. Tutto è stato riprodotto con arte somma, con perfetta imitazione del colore delle pagine, in cui a volte sono due o tre tricomie; si vedano ad esempio i fol. 253 v; 254 r; 255 v; 256 r; ecc. Il Codice stesso, lo si può ben dire, è posto sotto gli occhi di tutti gli studiosi; e viene per sempre e forse per la nitidezza meravigliosa delle fototipie, sottratto alle ingiurie del tempo, ai pericoli di qualsiasi distruzione.

Ma ciò non basta: se non si pubblicassero che queste fototipie la lettura del Codice, colla quasi costante scrittura speculare di Leonardo, esigerebbe una pratica specialissima e non poco tempo; e forse non potrebbe essere affrontata che dagli specialisti. Seguendo l'esempio di precedenti pubblicazioni, la R.e Commissione ha provveduto alla trascrizione delle pagine (più di 500 tra recto e verso) del Codice; ma con questo essenziale, importantissimo miglioramento: la trascrizione diplomatica (senza le figure) è rigorosamente topografica; è il rovescio in stampa della pagina leonardiana; per modo che il riscontro con quanto fu vergato dalla « *ineffabile sinistra mano* » di Leonardo è dei più rapidi e facili. Chi ha pratica del Codice Atlantico o dei manoscritti dell'Istituto di Francia pubblicati dal benemerito Ch. Ravaisson-Mollien, sa per esperienza quanto sia difficile tale riscontro (a volte assolutamente necessario) in queste pubblicazioni e soprattutto nella prima col sistema ivi seguito. Dovendo rispettare le sigle, le abbreviazioni ecc. fu necessaria la costruzione di speciali punzoni.

Con ciò certamente la lettura dello scritto leonardiano è facilitata; ma resta ancora limitata ad un piccolo cerchio di studiosi. Il più delle volte Leonardo scrive rapidamente il suo pensiero con frasi monche o abbreviate, senza segni

---

(1) Anche questa Parte 4ª è stata pubblicata, coi tipi del Danesi, nel 1930.

di interpunzione. A chiarificare tale lettura serve quella trascrizione detta impropriamente interpretativa o critica; la quale non ha affatto la pretesa di essere un comento al pensiero e alle scoperte di Leonardo; ma ha lo scopo senza dubbio importante e utilissimo di sciogliere le abbreviazioni, mettere la punteggiatura e di esporre fedelmente in lingua moderna quanto contiene il manoscritto ed è certamente stato scritto da Leonardo. È questa forse la parte più faticosa cui ha dovuto provvedere il Comitato esecutivo; che ha richiesto il maggior tempo, anche per la riproduzione delle numerosissime figure; e in cui l'opera paziente e preziosa del paleografo deve essere integrata da quello del tecnico.

Dopo questi cenni, non mi è permesso di entrare in particolari sulla grande importanza di questo codice le cui prime pagine sono state scritte a Firenze nel marzo 1508 e contengono vari tentativi per la soluzione del problema delle tensioni di un filo, teoremi famosi sui centri di gravità, ecc. e debbo riferirmi a quanto ho esposto in una mia memoria di *Acta Mathematica*; nella mia conferenza generale in questo stesso Congresso; e ad un libro sulla meccanica di Leonardo cui attendo da qualche anno (1).

La R.e Commissione sta ora attendendo alla pubblicazione dei tre codicetti del Museo Vittoria e Alberto, e per cui, ferme restando le direttive principali, la trascrizione diplomatica sarà opportunamente fusa con quella critica, per modo che la stampa possa avvenire con ritmo più accelerato (2).

Sono ben note le fortunose vicende del codicetto sul Volo degli uccelli, consistente in 18 fogli, asportati da G. Libri al ms. *B* dell'Istituto di Francia. Cinque di essi andarono dispersi; gli altri furono pubblicati, come fu detto, dal Sabachnikoff e dal Piumati. Il Codice è ora nella Biblioteca reale di Torino. Ma fortunatamente e in varie epoche furono ritrovati gli altri fogli (uno fu pubblicato ancora dal Sabachnikoff); il possessore degli ultimi, il sig. Fazio di Ginevra, ne permise la riproduzione e donò gli altri a S. M. il Re. M.r Enrico Carusi per incarico della R.e Commissione ha nel 1926, coi tipi Danesi, pubblicato i « *Fogli mancanti al Codice di Leonardo da Vinci su 'l Volo degli uccelli* nella Biblioteca reale di Torino »; con norme del tutto identiche a quelle seguite pel Codice Arundel. Anche tali fogli sono di un interesse ed importanza capitale per la storia della dinamica e dell'aviazione.

La R.e Commissione provvede del pari alla pubblicazione dei disegni di Leonardo sotto la direzione del nostro maggiore critico di arte, l'illustre professor

---

(1) Vedasi: *Le ricerche geometrico-meccaniche di L. da V.* Mem. di matem. e fisica della Soc. ital. delle Scienze detta dei XL; s. 3a, t. XXIII, p. 49-101 e quattro tavole. Roma, 1929. — *La meccanica di L. da V.* Atti R. Accademia delle Sc. fis. e mat. di Napoli, s. 2a, v. XIX (1932); p. 150 e 116 figure e facsimili.

(2) Ne è stato pubblicato il primo: *Il codice Forster I* nel « Victoria and Albert Museum ». Roma, 1930.

Adolfo Venturi; ed il Danesi in magnifica edizione ci presenta già un primo fascicolo di trenta disegni.

Un'altra grande benemerenza del compianto Cerminati, la quale purtroppo dopo la sua scomparsa minaccia completa rovina, è quella della fondazione dell'Istituto vinciano. Costituito per munifiche elargizioni di vari industriali lombardi, doveva provvedere ad incoraggiare speciali studi e alla pubblicazione di monografie per la illustrazione delle opere vinciane, e l'opera stessa di alcuni vinciani. E la già spettacolosa bibliografia vinciana cui attende con zelo infaticabile il Verga (1), si arricchì dei volumi del Adolfo Venturi, del Malaguzzi-Valeri, del De Lorenzo, del compianto De Toni, del De Rinaldis, del Calvi; del *Trattato sul moto e misura dell'acqua*, fatta secondo il codice archetipo barberiniano da E. Carusi e A. Favaro; e delle monografie su G. B. Venturi, su G. Govi e su B. Oltrocchi.

Mi sia permesso far il voto che tale Istituto, che certamente sarebbe il più bel monumento da erigersi alla cara memoria del Cerminati, non abbia a morire e continui la sua opera efficace per l'incremento degli studi vinciani; soprattutto ora che l'Italia ha ripreso in essi quel posto di avanguardia che pareva avesse perduto. E vada il nostro pensiero memore e riconoscente a coloro che prepararono la grande impresa e ai quali non arrise la ventura di vederla realizzata.

---

(1) *Bibliografia Vinciana*, 1493-1930. Due tomi. Bologna, Zanichelli, 1931. E fu l'ultima fatica del dotto e compianto amico.

G. ALBENGA (Bologna - Italia)

LA SCIENZA DELLE COSTRUZIONI E LEONARDO DA VINCI

La storia della teoria dell'elasticità si inizia di solito con Galileo e con il suo problema della mensola: per limitarci ad opere classiche da questo problema prendono le mosse I. TODHUNTER e K. PEARSON nella loro voluminosa: *History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials* (Cambridge, 1896) e LOVE nel succoso cenno storico che precede la: *Treatise on the mathematical Theory of Elasticity* (Cambridge, 1927). Giustificato dal punto di vista puramente matematico, questo modo di procedere trascura le ricerche, pure importanti, che prepararono la posizione del problema galileiano; in particolar modo dimentica gli studi di Leonardo da Vinci che della resistenza e della deformabilità dei materiali si occupa con una certa larghezza.

Il contributo vinciano a questo ramo dell'ingegneria è stato accennato da più di un autore: per esempio dal GROTHE nel suo volume, un po' confuso, su Leonardo ingegnere, da TEODORO BECK nelle comunicazioni sopra la storia dell'ingegneria e più specialmente negli interessanti estratti dal Codice Atlantico; in ultimo da FRANZ MARIA FELDHAUS nell'opera divulgativa e riccamente illustrata, ch'egli dedica a Leonardo inventore.

Non mi pare tuttavia che l'opera del nostro Grande sia stata posta in evidenza così da renderne manifesta tutta l'estensione e la profondità.

Gli argomenti principali, discussi con più ampio respiro e con predilizione indubbia sono:

a) i metodi per determinare la resistenza alla rottura dei materiali da costruzione;

b) il comportamento, tanto nei riguardi della resistenza quanto in quelli della deformazione, di travi sottoposte a diverse condizioni di carico e di vincolo. Egli studia la mensola soggetta ad un peso all'estremo o in posizione intermedia, la trave caricata in mezzeria e in altri punti, i solidi caricati di punta;

c) l'arco.

L'esame della prima questione lo porta ad ideare una macchina di prova dei fili, schematicamente disegnata nel Codice Atlantico, che presenta una singolare analogia, già rilevata dal MAGANZINI, con la macchina di Michaelis, oggi usata nelle prove dei cementi. Il carico vi è ottenuto gradualmente col versare

sabbia in un vaso apposito, e l'arresto della sabbia si ottiene automaticamente all'atto della rottura. La descrizione dell'apparecchio viene accompagnata da un breve programma di esperienze, che espone anche le vedute di Leonardo, geniali ma in alcuni punti inesatte, sopra la rottura dei corpi omogenei.

Assai maggior sviluppo ha lo studio della trave inflessa che riassume certo i risultati di esperienze numerose e ripetute con metodo. Vi è nel Codice Atlantico un accenno abbastanza evidente ad un periodo di proporzionalità tra il carico e la freccia d'inflessione, tanto per il caso della mensola, quanto per quello della trave posata agli estremi; vi è anche discussa l'influenza della luce sulla resistenza, con apprezzamenti interessanti, esposti talora in forma curiosa. Larga trattazione vi riceve la ricerca della freccia per diverse posizioni d'un carico concentrato e per diversi valori della luce. Leonardo trovò che la freccia era, in questa ipotesi di sollecitazione, direttamente proporzionale al cubo della luce.

Meno felici, e in qualche punto non chiare, sono le poche osservazioni sul carico di punta.

Tutte queste ricerche fan parte di un capitolo intitolato « Dei sostentacoli » che è prova di un tentativo di ordinare in modo razionale gli argomenti relativi alla meccanica delle costruzioni.

Dell'arco, Leonardo da Vinci si occupa in alcune pagine del Codice Arundelliano; il problema è assai complesso, male si presta ad un'analisi sperimentale con mezzi semplici e i risultati delle prove dirette sono di meno agevole interpretazione che nel caso della trave. Leonardo domanda la soluzione del problema a quegli stessi criteri che han durato fino alla prima introduzione dei concetti di minimo (minimo della spinta compatibile con l'equilibrio, MOSELEY e MÉRY; minimo della tensione unitaria massima nella sezione più sollecitata, CULMANN; minimo del lavoro di deformazione, CASTIGLIANO). Egli ricerca i giunti di rottura dell'arco e ne fissa la posizione, utilizzando di certo osservazioni pratiche e tenta infine una impossibile dimostrazione di quanto afferma utilizzando alcuni teoremi della stereostatica. Su due casi di carico Egli si sofferma: il carico in mezzeria e un carico simmetrico costituito da due forze verticali applicate secondo le trisecanti della luce. Con acute considerazioni esamina il comportamento dei piedritti e di eventuali catene e paragona l'arco semicircolare con quello a ferro di cavallo.

G. A. PLIMPTON (New York - U. S. A.)

THE HISTORY OF ELEMENTARY MATHEMATICS IN THE PLIMPTON LIBRARY

When CHRISTOPHER PLANTIN and his successor, JOHN MORETUS, sought to develop their great printing establishment at Antwerp in the 16th century, they collected a large number of specimens of the best medieval and renaissance manuscripts and of representative products of the leading presses of Germany, France and Italy. This collection was increased by their successors and now forms one of the best libraries extant for the study of the history of book making. Plantin felt that, in order to be a master printer he must know thoroughly the history of his art. He wished to make the best books possible, and to do this he must know the best that had already been accomplished.

It was a similar circumstance that led me, fifty years ago, to begin collecting books for my own library. I am a publisher of textbooks; my firm (Ginn and Company of Boston, New York and London) seeks to make the best textbooks possible, and I felt that, to do this it was necessary to know thoroughly the historical development of books of this nature. I, therefore, began to collect such material, both in the manuscript form used in the middle ages and in the printed form beginning in the Renaissance Period. As a result, my library covers the entire field of education, the mathematical textbooks being merely one division, although one of the most important.

It is impossible, in the few minutes at my disposal, to do more than refer to a few of the important features of the section devoted to the early history of elementary mathematics. The subject was treated more than twenty years ago by Professor DAVID EUGENE SMITH in his *Rara Arithmetica*, and various references to my later acquisitions are mentioned in his *History of Mathematics* (1923, 1925). When the *Rara Arithmetica* was written he found that while De Morgan was able to examine less that 100 arithmetics printed before 1601, and while Boncampagni secured for his own great library less than 300, and Libri a still smaller number, my own collection was even then in excess of Boncampagni's, and in the last few years it has been very much enlarged.

Of the mathematical manuscripts in the library something over 100, only a few of the most important can be mentioned at this time. They are as follows:

1°) In Euclid Elements, the library is rich. It has the translation of Euclid

by Campanus, directly from the Arabic manuscript, which Campanus presented to the Patriarch of Jerusalem, who afterwards became Pope Urban IV. He was Pope from 1261-1264. This is supposed to be the earliest known Latin manuscript, and it is written on vellum. The translation of the theorems is thought to be the same as that made by Adelard of Bath about 1120. He is supposed to have made a translation, but no copy is known.

2°) Another very interesting manuscript is dated 1294, and happens to be bound with the manuscript of Boethius. It seems to be complete, and is fully illustrated.

3°) Euclid, fragment of the Elements, vellum, c. 1350.

4°) Euclid, the first five books of the Elements, paper, c. 1375.

5°) Euclid, Book I, paper, c. 1460. German hand.

6°) Euclid, Books I-III. Manuscript, vellum, c. 1500, being Zamberto's translation from the Greek, Ms. of Theon. The translation was printed in 1505 (Venice).

7°) Gerbert (Sylvester II). Manuscript copy on paper, c. 1600. It includes his geometry.

8°) Boethius, *Arithmetica.* Manuscript, vellum, 10th century.

9°) Boethius, *Arithmetica.* Manuscript, vellum, c. 1294.

10°) Boethius, *Arithmetica.* Manuscript, vellum, c. 1300.

11°) Boethius, fragment of *De Musica,* vellum, c. 1300. Arithmetic based largely on Nicomachus who lived 100 A. D. He gives elaborate theory of ratios and devotes considerable attention to figure numbers such as the triangular, square pantagnal and cubic. It was the standard of church schools throughout the middle ages.

12°) Mohammed ibn Musa. *Algebra.* Manuscript paper, 1456. So far as known this manuscript hes never been published. It differs in many particulars from the Robert of Chester Manuscript.

13°) Venerable Bede b 673-735. Manuscript, vellum, written in 1129 and stated by the scribe to have been copied from Bede's own manuscript. An unusually well-written and carefully preserved manuscript. Treast of the division of time, finding of Easter, division of months and their names in Anglo Saxon. Burke calls him the father of English learning.

There is also an early 15th Century English Language manuscript on arithmetic, that has the four subjects of addition, subtraction, multiplication and division.

A rather interesting *anonymous manuscript* of about 1565 was written right here in Bologna. It opens with a set of column multiplication tables.

14°) Isidorus of Seville, B 570-d 636, *Etymologies.* Manuscript on vellum 12th century. The library also has the early printed editions of the work. The third one of twentybooks is on mathematics. The manuscript is a sort of an

Encyclopedia. The council of Toledo designated him as the « most learned man of the ages ».

15°) Anianus, Computus Manualis. Manuscript on paper, bearing the date 1384, and written about that time. Important as being apparently the oldest manuscript of this work that can be rather definitely dated. The library contains a considerable number of the early printed editions, including what seems to be a unique copy of the Poitiers edition of 1527-1528, as shown in Professor Smith's recent (1928) bibliography of this notable work.

16°) *Paolo Dagomari.* Paolo Dell'Abaco, Paolo Astrologo, Paolo Geometra, Paolo Arismetra, Paul of the Abacus. He was born in Prato in 1281 and died at Florence in 1374. The manuscript was written about 1339. It is primarily a treatise on arithmetic. Part of this manuscript is an ordinary commercial arithmetic such as the Florentine teacher usep in the 14th and 15th centurios. It is interesting as showing some tendency towards the use of percentage.

17°) This manuscript of *Albertus Magnus* was written about 1350. He was called « Doctor Universalis ». The first folio contains part of the calendar, and a few random memoranda, including an old price mark of three ducats.

18°) Giovanni, son of Luca of Florence. *Trattato di Aritmetica.* Manuscript, paper, 1492. One of the best sources for the history of commercial arithmetic of the 15th century.

19°) Benedict of Florence. *Trattato d'aritmetricha.* Manuscript on vellum, c. 1460. Also an excellent source for the study of arithmetic at that period. Here are the problems: grain of wheat on chessboard; the hare and hound; jealous husband; testament of the dying man.

20°) In my collection there is a manuscript by *Rollandus*, who was a native of Lisbon and canon of Sainte-Chapelle, Paris in 1425. The date of this manuscript is 1924. It was prepared at the command of John of Lancaster, Duke of Bedford, son of Henry IV of England, at one time Protector of England and Regent of France. Rollandus dedicated this treatise to him. It is a long dedication and sets forth Lancaster's interest in France, and the status of mathematics at that time. In his manuscript Rollandus covers all the theoretical arithmetic then known, but takes up no practical problems. He treats of irrational numbers, a topic which is now considered algebra. It is doubtful whether there is a manuscript extant which throws more light upon the nature of French university mathematics at the time this was written.

In addition to the manuscripts already mentioned there are many others of equal importance. These relate to arithmetic, algebra, geometry, and astronomy, and include works of such men as Joannes de Gmunden, Sacrobosco, Bradwardin, Raymond Lullius, Vergerius, Johannes Ross, Leonardo of Pisa (extracts), Nicolò de Orbelli, Canacci and Leonardus Maynardus.

Now when we come to the printed books that deal with these subjects, the

library has the *first arithmetic* printed at a small town called « Treviso », in Italy, in the year 1478. There are in all, perfect and imperfect, 6 or 7 copies known. This work is commercial in character, the fundamental processes being taken up in common order and followed by the Rule of 3. It has the calendar for church purposes. The book contains the mathematics necessary for business requirements and used Hindu Arabic numerals.

There is also the *first printed edition of Isidorus of Seville*, supposed to have been printed about 1469. The date is uncertain. It is a book of *Etymologies*. We have already spoken about his manuscript. This is the first authority we have on the learning of that period. We do not call this the first printed arithmetic because it has other chapters besides arithmetic; in fact, as I have said before a sort of encyclopaedia of that time.

In addition to this one, I have another very interesting first edition of the Tractatus Proportionum by Albert of Saxony, which was printed about 1478.

The mathematical activity in Italy during this period between 1472 and 1480 was very considerable. During this time there were 38 mathematical works printed in the country. In the next decade there were 62 and in the next 100, with 13 of uncertain dath between 1472 and 1500, making a total of 213 appearing in a period of less than thirty years.

In 1480 an anonymous work was issued from the Caxton press in London, entitled: *The Mirrour of the World or Thymage of the same.* This has the first chapter on arithmetic.

Here is the first commercial arithmetic ever printed. It is by Giorgio CHIARINI, 1481. While this is not strictly speaking an arithmetic, it is the first printed book to give the customs relating to exchange in use among the Florentine merchants at the close of the fifteenth century. It is the source from which several later writers drew their material, and is particularly valuable in showing the nature of the practical problems of the time. Copies of this first edition are extremely rare.

Prosdocimo de Beldamandi, and Liverius. First edition, 1483. Prosdocimo de Beldamandi was born in Padua about 1370, and died about 1428. He was educated at the University of Padua, and also taught there. He wrote on arithmetic, music and astronomy. This book was written for the Latin Schools, and is a good example, the first to appear in print, of the non-commercial algorisms of the 15th century.

Pietro Borghi. First edition, 1484. Borghi, a Venetian arithmetician, died about 1494. This is the first edition which I have, and it is really the second treatise of commercial arithmetic to be printed in Italy. This is much more elaborate than the Treviso Arithmetic. Moreover, it set the standard for arithmetic in the early centuries, and nome of the early textbooks deserves more careful study. He pays considerable attention to Rule of 3, which was developed

many centuries earlier by the Oriental mathematicians, and was not improbably learned by the Venetian traders through their contact with the East. Partnership was to the fifteenth what the corporation is to the twentieth century. The subject of barter is treated more or less, and was common in our own American text-books until about fifty years ago. The library is especially rich in different editions of this.

I have an interesting early printed book on *Ars numerandi.* Many have questioned whether it was not printed by Fust and Schoeffer, about 1470. This is a treatise on grammatical usage as applied to numbers, and a considerable portion of the text is devoted to the distinction between ordinals and cardinals and the methods of using them.

There is also the first edition of the *Boethius Arithmetic,* printed at Augsburg in 1488. The library is particularly rich in editions of the Boethius books.

It also has the first printed edition of *Anianus* and *Johannes Sacrobosco.* Strasburg, 1488. Anianus was a 15th century astronomer and poet of Strasburg; and Sacrobosco was born in Halifax, Yorkshire, and died in Paris in 1244 or 1256. Sacrobosco wrote on astronomy and algorisms. In the book of Anianus appears for the first time in print:

« Thirty days hath September », etc.

This probably is also the first book on mathematics printed in Strasburg. There are a great many different editions of Anianus as well as Sacrobosco.

The library possesses also the first book printed in Germany on arithmetic by *Johann Widman.* Widman was born in Bohemia, in 1460, and was educated at Leipzig. The interesting feature about this book, the first printed work on calculation by the aid of counters, is that it contains the device of Martin of Würzburg and was probably printed by him about 1488. After a brief introduction on the use of counters, he takes up the subjects of division, subtraction, multiplication, progression, etc. There are many different editions of Widman in my library.

Another rare and interesting book is that of *Philippi Calandri,* which was printed in Florence in 1491. This is the first arithmetic with illustrations. My library happens to have two copies of this. I found this on a book-stall in Rome and paid one Lira for it.

One of the rarest of the early printed books is *Francesco Pellos* or *Pellizzati,* Turin 1492. Pellos was a native of Nice. Pellos first considers the fundamental operations with integers, following this by a treatment of proportion, square root, and cube root. He then discusses the subject of fractions in moch the same order, the rule of three, certain rules relating to weights, time money, and other measures, and such topics as partnerships, barter, interest, alloys, and the rule of false position, single and double. He closes the work with a chapter

on mensuration, ar as he calls it, « De la art de jeumentria », and gives a number of interesting woodcuts. The chief interest of the book attaches, however, to the fact that Pellos came very near the invention of decimal fractions, and that he actually used the decimal point. It cannot be said, however, that he had any conception of the real value of the decimal fraction as such, Pellos simply used the decimal point to indicate division by some power of ten, writing a common fraction in the quotient.

Thus, to divide 425 by 70, Pellos would divide 42.5 by 7, writing the result 65/70. Professor David Eugene Smith first discovered this book, and always takes a great deal of interest in saying that I paid for it as many dollars as there are days in the year.

The library has also the first edition of *Luca Paciuolo, di Borgo San Sepolcro*. This has arithmetic, algebra, and geometry, being treated largely from the scientific rather than from the practical standpoint. Here is included an interesting chapter on finger symbolism. The arithmetic, for example, gives the various methods in multiplication and division, instead of emphasizing the one or two most prominent in business circles. In the same way Paciuolo's treatment of the rule of three, the rule of false (El cataym), partnership, pasturage, barter, exchange, and interest, while nominally practical, was too elaborate for the mercantile schools. His was the first printed work to illustrate the finger symbolism of number.

Thomas Bradwardin, first edition, 1495. Bradwardin, Archbishop of Canterbury was a professor of theology at Oxford. He was the first really great mathematician after Beda and wrote four different works on arithmetic, largely based on the theory of numbers.

Martianus Mineus Felix Capella, first edition, 1499. Capella was born at Carthage about 1475 and lived in Rome. This worh is more or less an encyclopaedia and treats of the various classes of numbers, such as plane and solid. It is one of the great textbooks of the Middle Ages.

Gregorius Reish, Margarita Philosophica, first edition, 1503. Reisch was born in Würtemberg, anp died in Freiburg, 1523. He was a Carthusian monk and was prior of the cloister at Freiburg. This is a sort of encyclopaedia also. It contains a compendium of the trivium, the quadrivium, and the natural and moral sciences. It is made up of twelve books. The arithmetic closes with a treatment of line reckoning, giving the four fundamental operations and the rule of three.

The first edition of *Juan de Ortega* (1512), a Spanish priest of the Dominican Order in Aragon. This arithmetic was one of the most celebrated written in Spain in the sixteenth century. It is a purely commercial text, beginning with notation, taking up the four processes with integers, the progressions, the roots, and the checks on operations, and the same operations in the same order with

fractions, and then discussing the business rules. There are several editions of it in my library.

An interesting arithmetic is that by *Jacob Köbel*, first edition, 1514. Köbel was born at Heidelberg in 1470, and died in 1533. He studied at Cracow, and one of his fellow pupils was Copernicus. This book appeard under very many different titles. It was a celebrated work and became a very famous arithmetic.

I have a number of arithmetics by *Girolamo and Giannantonio Tagliente*, the first edition of which was issued in 1515. The work opens with a brief statement of notation and finger symbols, followed by the multiplication table, the proof of sevens, various methods of multiplication, division by the galley method, addition chiefly of denominate numbers, subtraction, the operations with fractions in the same order, exchange, rule of three, and applied problems. There are very few arithmetics that have exerted the influence that this did in the shaping of subsequent arithmetics.

I have a very interesting *collection of various authors*, bound in one volume, Joannes De Muris (born in Normandy 1310, died in 1360), Thomas Bradwardin, about whom I have already spoken, Nicolaus Horem (born at Caen 1323, died in 1382), Georg Von Feurbach (born 1423, died 1461) and Johannes de Gmunden (born 1380, died in 1442).... dated 1515. The work consists of five parts.

The Library contains the first edition of *Gaspar-Lax* (1515), who was born in Spain in 1487 and died at Saragossa in 1560. He was a famous teacher in Paris and Saragossa. His book is largely theoretical arithmetic, based on Boethius and his medioeval successors.

Henricus Grammateus. First edition in 1518. This book is really a mercantile arithmetic, and the operations are both according to the abacus and by Hindu-Arabic numerals. It has a chapter on bookkeeping, and gives a good deal of consideration to the theory of numbers, the rules of the Coss (algebra), music, bookkeeping, and gauging. The signs « plus » and « minus » are here first found in the rnle of false position. He differs from Widman in that he uses them for a different purpose.

Estienne de la Roche. First edition, 1520. This is really the best of all the early French arithmetics, and is semimercantile in character. Here is a very complete treatment of the operations with integers, fractions, and compound numbers, and a large number of business applications. Much of his work, however, is taken from his teacher, Chuquet. I have several editions of this.

I have the first arithmetic printed in England by *Cuthbert Tonstall*, 1522. Tonstall was born at Hackforth, Yorkshire, in 1474; and died in 1559. He was educated at Oxford, Cambridge, and at Padua. He was bishop of London, and later of Durham. His object in writing the book, he said, was to check certain goldsmiths whose accounts he suspected were incorrect. It is in Latin, but is

based larely on Italian models, and includes many business applications such as partnership, profit and loss, and exchange. He dedicates the book to his friend, Sir Thomas More. More speaks of Tonstall in the opening lines of his Utopia: I was colleague and companion to that incomparable man Cuthbert Tonstall, whom the king with such universal applause lately made Master of the Rolls: but of whom I will say nothing; not because I fear that the testimony of a friend will be suspected, but rather because his learning and virtues are too great for me to do them justice, and so well known, that they need not my commendation unless I woulp, according to the proverb: « Show the sun with a lanthern ». The Utopia was first printed in 1516, so this sonorous praise was written some years before Tonstall's arithmetic appeared.

There was also the *Arithmetic of Adam Riese*, first edition, 1522. Riese was born in 1489, and died in 1559. He was one of the most celebrated of the mathematical teachers of the 16th century. So firmly did he impress himself upon the schools that « nach Adam Riese », is a common espression in Germany today. His books were to Germany what Borghi's book was to Italy, and what Records was to England. The library has most of the many editions of Adam Riese.

It has also the first edition of *Orontius Finaeus*, 1530-1532. He was supposed to be the most pretentious French mathematician of his time. The library has a great many different editions of this.

I have also several editions of *Michael Psellus*, 1532. He was one of the last Greek writers on arithmetic, and his work was largely devoted to the theory of numbers. It covers the mediaeval Quadrivium: arithmetic, music, geometry, and astronomy.

Then I have the first edition of *Nicomachus*, 1538, which is the most celebrated of the few Greek treatises upon the subject. Nicomachus was born 100 A. D. He tried to do for the Greek theory of numbers what Euclid did for geometry.

Gemma Frisius, first edition, 1540. I have many different editions of this, which was one of the most popular arithmetics of Germany in the 16th century. It combined the older science of numbers with commercial arithmetic, so that it appealed remarkably to the teachers of that time.

The library has numerous editions of *Robert Records*, the first noteworthy arithmetic printed in the English language, 1542. Records was born about 1510 and probably died about 1558. He was educated at Oxford and Cambridge. It was in the form of a dialogue between master and student. The student thinks the study of number is useless and vain; that people can get along just as well without it, and that hence it is a waste of time. The master replies: « If number were so vile a thing as you did esteem it, then need it not be used so much in men's communication. Exclude number, and answer to this question. " How many years old are you? „ »

« Mum », the student replies.

« How many days in a week? » « How many weeks in a year? » « What land has your father? » « How many men doth he keep? » « How long is it since you came from him to me? »

« Mum », answers the student.

« So that if number want, you answer all by mummes ».

Michael Stifel, Arithmetic, 1544. Stifel was reformer and one of the most skilful arithmeticians of his time. The library has several editions of his books.

Johann Scheubel, first edition, 1545. Scheubel was born in 1494 and died in 1570. He was Professor of Mathematics at Tübingen. He wrote on arithmetic, and algebra, and edited part of Euclid.

I have also the first edition of the rare Spanish arithmetic by *Gaspar de Texeda*, 1546. Here the fundamental processes with integers, fractions, and denominate numbers are given.

Nicolo Tartaglia, General Trattato, first edition, 1556. Tartaglia was born at Brescia in 1506 and died at Venice in 1559. He was one of the best mathematicians of his time, and his connection with the general solution of the cubic equation is well known.

Jean Trenchant, first edition 1566. One of the best of the 16th century textbook makers of commercial arithmetics in France. The book was divided into three parts, the first dealing with the fundamental operations with integers and fractions; the second treats of the rule of three in its various forms; and the third treats of the properties of numbers, including figurate roots, and progressions, and has some work on discount.

The second important arithmetic printed in the English language was by *Humphrey Baker*, 1568. It is called « The Well Spring of Sciences, which teacheth the perfect worke and practise of Arithmeticke, both in whole Numbers and Fractions ». Baker's work was a rival to Robert Recorde's « Ground of Arts ». He has chapters on Merchandise, Fellowship, Barter, Alligation, False Position, and the like.

A rather interesting edition of *Petrus Ramus's* Arithmetic, which has on the title page in the handwriting of the author the inscription, giving it to his pupil Johannes Sturm, the famous German scholar.

Another interesting arithmetic is that by *Leonard and Thomas Digges*, first edition, 1572. There are only about twentypages that are arithmetic. Then follows a brief treatment of algebra, after which are certain matters relating to military affairs. Leonard Digges was born at Barham, Kent, and studied at Oxford. He died in 1571. Thomas was a son of Leonard, and was also born in Kent and educated at Oxford. He died in 1595.

There was a very interesting arithmetic by *Thomas Masterson*, London, 1592. This book, however, does not make any particular contribution to the subject of arithmetic. Book I is on the fundamental operations with integers and fractions;

Book II is a collection of practical problems representing the mercantile activities of London: and Book III refers chiefly to irrational numbers, which would now be considered algebra.

Frisius, Cardan, Trenchant, and Bombelli, of the 17th and 18th century writers, the most important ones, judged from the standpoint of their textbooks, are generally included. There are first editions of most of their works, but the list is too long to be given at this time.

The library has always been open freely to scholars and for many years it has been used by them in the preparation of theses and of books.

I am often asked what my plans are for the future of this library, and the the matter is so important for students of the history of mathematics, that the question deserves a reply. I do not believe that it is for the best interest of the world, at least for the United States, that such libraries as are now in my country should be dispersed. Collectors and booksellers may wish them to go to the auction rooms, but it seems to me that a library like mine should be hept intact for the use of scholars. This I propose shall be done in this case, provision being made for its preservation and growth in one of our large universities.

U. CASSINA (Milano - Italia)

SU DUE QUESITI PROPOSTI DA CARDANO A TARTAGLIA

1. - È inutile che io stia ricordare a loro i tratti essenziali della storia della risoluzione algebrica delle equazioni di 3° e 4° grado, perchè la letteratura intorno ad essa è assai vasta e conosciuta, ed anche in studi recenti se ne è occupato l'illustre storico bolognese, qui presente, prof. Ettore BORTOLOTTI (1).

Ma ogni storico, per quanto sereno, non può fare a meno di interpretare i documenti che ha a disposizione secondo il proprio punto di vista personale; cosicchè avviene che, dall'esame dello stesso materiale, storici diversi giungano ad apprezzamenti diversi. Così, a proposito della risoluzione algebrica dell'equazioni di 3° grado e delle grandi dispute fra TARTAGLIA da una parte e DEL FIORE, DA COI e principalmente CARDANO e FERRARI dall'altra, non vi è storico che non simpatizzi — seppur larvatamente — per l'uno o l'altro avversario.

Ma si è concordi nel ritenere che qui a Bologna, sul principio del sec. XVI, venne per la prima volta risolta l'equazione cubica $x^3+px=q$, ove p ed q sono numeri positivi. E il risolutore di essa fu SCIPIONE DEL FERRO; ciò per testimonianze multiple e varie, sebbene purtroppo questo antico professore bolognese non ci abbia tramandata nessuna opera stampata, nè manoscritta.

Cosicchè rimane, a mio avviso, per certo: 1°) che TARTAGLIA, intorno al 1534, ha ritrovato per suo conto la risoluzione dell'equazione cubica $x^3+px=q$ ed insieme dell'altra $x^3=px+q$ (sebbene non fosse in grado di sormontare lo scoglio del *caso irriducibile*); 2°) che CARDANO è ricorso a lusinghe od a minaccie di vario genere per farsi consegnare dal TARTAGLIA le regole per la risoluzione delle equazioni cubiche.

Una prima volta (2 gennaio 1539), chiede il CARDANO al TARTAGLIA la risoluzione delle equazioni cubiche, inviandogli per mezzo del suo editore sette quesiti (2); ma, avendone avuta ripulsa, gli indirizza poco dopo (12 febbraio 1539)

---

(1) Ettore BORTOLOTTI: *I contributi del Tartaglia, del Cardano, del Ferrari, e della Scuola matematica bolognese alla teoria algebrica delle equazioni cubiche.* (Estr. vol. IX degli « Studi e memorie per la storia dell'Università di Bologna »).

(2) N. TARTAGLIA: *Quesiti ed inventioni diverse* (libro IX delle *Opere del famosissimo N. Tartaglia*, Venezia, 1606); *quesito* XXXI, p. 250.

una seconda lettera, assai vivace per non dire ingiuriosa (1): invero egli taccia il Tartaglia di *discortese e presuntuoso di sè stesso* ed aggiunge ch'egli *è più appresso alla valle che alla sommità dell'ingegno*; ed infine, per provare la sua abilità nel risolvere quesiti difficili (ed a dirittura portanti ad equazioni cubiche), lo sfida alla risoluzione di due quesiti che frattanto gli manda; quesiti dei quali dice di essere in possesso delle risoluzioni, che però non avrebbe fatte consegnare al Tartaglia se non dopo che questi avesse consegnato al suo messo le proprie risoluzioni dei quesiti stessi.

È su questi due quesiti che io desidero richiamare l'attenzione dei miei illustri ascoltatori. Eccoli:

1°) *Feme de* 10 *quattro parti continue proportionale, che li loro quadrati gionti insieme facciano* 60: *una simile pone Frate Luca, ma non solve.*

2°) *Dui feceno compagnia, e posseno non so quanti ducati, e guadagnorno il cubo della decima parte del suo capitale, e se havessero guadagnato* 3 *meno di quello che guadagnorno haveriano guadagnato tanto quanto fa il suo capitale. Aponto se domanda il suo capitale e guadagno.*

Il primo quesito è risolubile per radicali quadratici, e di esso mi occuperò fra poco; il secondo, se indichiamo con x il capitale richiesto, si traduce nella equazione cubica:

$$x^3 = 1000x + 3000. \tag{1}$$

Poteva essere il CARDANO in possesso della risoluzione d'un'equazione cubica, quando implorava dal TARTAGLIA la comunicazione delle sue regole per la risoluzione di esse? Ecco ciò che suscita il riso di TARTAGLIA e che lo porta, nella sua lettera di risposta (18 febbraio 1539), a tacciare di fraudolente e di mentitore il suo avversario, e a dirgli di ritenere falsissimo ch'egli avesse saputo risolvere la seconda questione da lui proposta ed a prova di ciò di esser pronto a scommettere dieci ducati contro uno (2).

Ora, che il CARDANO non sapesse risolvere, all'epoca della sua lettera (12 febbraio 1539), le equazioni cubiche generiche, è indiscutibile; ma ciò che non ha imaginato il TARTAGLIA, e che è sfuggito al COSSALI e — se non erro — a tutti gli storici che si sono occupati dell'argomento fino al 1923, in cui io ebbi occasione di rilevare la cosa nell'edizione litografata del mio *Calcolo numerico* (che proprio oggi invece esce per i tipi della Casa Zanichelli) (3) è che il secondo quesito proposto da CARDANO porta ad un'equazione cubica avente una radice

---

(1) *Quesito* XXXII, op. cit., p. 254.

(2) *Quesito* XXXII, p. 261.

(3) Cfr. U. CASSINA: *Calcolo numerico* (ed. N. Zanichelli, Bologna, 1928), p. 393).

razionale intera, e quindi è risolubile elementarmente (mentre invece, risolta col metodo di TARTAGLIA conduce al cosidetto « caso irriducibile »).

Che CARDANO, ideatore del problema, conoscesse la radice razionale dell'equazione (1), e perciò sapesse risolvere completamente la sua seconda questione, parmi lecito supporre; e questa mia supposizione diventa certezza col constatare che il CARDANO, anche in seguito (cioè dopo che il TARTAGLIA gli aveva comunicate le sue regole), propone all'avversario un'equazione cubica della stessa natura, cioè con tre radici reali di cui una razionale, per la quale cadeva in difetto — allora che non si era ancora in possesso della teoria dei numeri imaginari — la formola risolutiva tartaleana (1).

Riconosciuto adunque che l'equazione (1) ammette la radice $x=-30$, si trovano subito le altre sue radici $x=15\pm\sqrt{325}$. Di modo che il capitale richiesto dal secondo quesito è di ducati $15+\sqrt{325}=15+5\sqrt{13}$.

2. - Il primo quesito proposto dal CARDANO al TARTAGLIA dà pure luogo ad alcune osservazioni interessanti.

Dice il CARDANO: « una questione simile pone Frate Luca mà non solve »; ed il TARTAGLIA, nella sua lettera di risposta, risolve il quesito in modo che è in vero sommamente elegante e preciso; ma senza citare affatto frate LUCA PACIOLI, sebbene — si può dire — segua passo passo la risoluzione di frate LUCA, che propone e dà il procedimento generale per risolvere una questione della stessa natura.

Ecco invero la questione originale di frate LUCA (*Summa, carta* 95 *verso*, ed. 1523):

Famme de 15 *quattro pti cõtinue proportionali che li lor quadrati gionti insieme facino* 85. *Dimando che sia ciascuna pte.*

Frate LUCA dà la regola generale per la risoluzione della sua questione, sebbene non conduca il calcolo alla fine (assegnando effettivamente le parti richieste) e commetta un errore materiale di calcolo (2); il che però non ha nessuna importanza nel suo problema particolare, ch'egli ha preparato a bella posta prendendo come parti i numeri semplicissimi 1, 2, 4, 8, per modo che i calcoli lasciati al lettore (che corregga l'errore banale in cui egli è incorso) sono semplicissimi sì da giustificare il suo « sequita tu per te ».

Ora, la *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et proportionalità*, era stata stampata una prima volta nel 1494, ma una seconda edizione veniva ristampata a Toscolano sul lago di Garda nel 1523, quindi era un'opera che non poteva non essere familiare ai nostri, che disputavano nel 1539.

---

(1) Nel *Quesito* XXXVIII, p. 271, lettera del 4 agosto 1539, CARDANO propone a TARTAGLIA l'equazione $x^3=9x+10$, che ammette la radice -2.

(2) Rilevato da P. COSSALI, vedi: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'Algebra* (due vol., Parma, 1797-1799), vol. II, p. 111.

E perciò io non so ben spiegarmi il motivo per cui CARDANO proponesse una simile questione a TARTAGLIA, perchè non richiedeva — da uno studioso dell'opera di frate LUCA — se non padronanza del calcolo algebrico e del calcolo sui radicali, e pare impossibile che il Milanese non ritenesse il Bresciano abbastanza sicuro in ciò. Ma se così fosse avvenuto, il TARTAGLIA non sarebbe certo stato il distinto scienziato che conosciamo, nè avrebbe meritato il titolo di « famosissimo » con cui il suo editore fregia le sue opere. E appunto, nella sua risoluzione, TARTAGLIA dà prova di una singolare perizia nel calcolo algebrico e sui radicali, ch'egli anche scrive in forme strane e non naturali, per trarre forse in inganno il suo rivale.

La questione originale posta da CARDANO è dunque:

Feme de 10 *quattro parti continue proportionale, che li loro quadrati gionti insieme facciano* 60.

Perciò, se indichiamo con a il numero da dividere in parti e con b la somma dei quadrati delle parti, ad uno scolaro moderno si presenterebbe forse spontaneo di risolvere la detta questione indicando con x la prima parte e con y la ragione della progressione geometrica. Così perverrebbe al sistema:

$$\begin{cases} x(1+y+y^2+y^3)=a, \\ x^2(1+y^2+y^4+y^6)=b. \end{cases}$$

Da cui otterrebbe l'equazione di 6° grado:

$$(a^2-b)y^6-2by^5+(a^2-3b)y^4-4by^3+(a^2-3b)y^2-2by+(a^2-b)=0;$$

dalla quale, eliminando le radici imaginarie $\pm i$, dedurrebbe l'equazione reciproca di 4° grado:

$$(a^2-b)y^4-2by^3-2by+(a^2-b)=0.$$

E allora ricaverebbe la y risolvendo le due equazioni:

$$(a^2-b)z^2-2bz-2a^2=0$$

ed

$$y^2-zy+1=0;$$

dopo di che, per trovare la x, dovrebbe ricorrere all'eguaglianza:

$$x=a/(1+y+y^2+y^3);$$

ed infine le quattro parti richieste sarebbero date dai prodotti x, xy, xy^2, xy^3.

Per tale via i calcoli si presentano assai complicati, anche nei casi numerici particolari considerati da CARDANO e da frate LUCA, e perciò difficilmente lo scolaro moderno riuscerebbe a dare effettivamente le quattro parti richieste, cioè — secondo CARDANO — a *risolvere veramente* la questione.

Vediamo invece come procede il frate minore di Borgo S. Sepolcro.

Egli è profondo conoscitore d'ogni tipo di proporzione, ed al pari degli antichi sa che il problema della inserzione di due medie proporzionali equivale a quello della duplicazione del cubo; e perciò, se quattro numeri a, b, c, d sono in proporzione continua (in progressione geometrica), cioè se

$$b/a=c/b=d/c,$$

egli sa che:

$$b^3=a^2d$$
$$c^3=ad^2,$$

da cui:

$$b^3+c^3=ad(a+d)=bc(a+d),$$

ed infine:

$$(b+c)^3=bc[3(b+c)+(a+d)] \quad (^1).$$

Relazione questa che gli permette di trovare i numeri di una proporzione continua della quale egli conosce la somma del secondo e terzo e quella del primo e quarto, ed a risolvere poi il quesito riproposto da CARDANO.

Infatti, riferendoci a questo, se indichiamo ancora con a il numero da dividere in parti e con b la somma dei quadrati delle parti e con x la somma della seconda e terza parte, abbiamo che la somma della prima e quarta parte vale $a-x$; ed allora le seconda e terza parte sono le radici dell'equazione:

$$t^2-xt+x^3/(2x+a)=0, \tag{1}$$

e la prima e quarta parte sono le radici dell'equazione:

$$t^2-(a-x)t+x^3/(2x+a)=0. \tag{2}$$

Quindi, per la seconda condizione del problema, si ha da risolvere l'equazione:

$$2[x^2-ax-2x^3/(2x+a)+a^2/2]=b,$$

ossia:

$$2ax^2+2bx-a(a^2-b)=0; \tag{3}$$

dopo di che le (1) e (2) daranno, senz'altro, le parti richieste.

Nell'esempio originale di frate LUCA $a=15$ e $b=85$. Cosicchè si ha da risolvere l'equazione:

$$3x^2+17x-210=0,$$

da cui, trascurando la radice negativa, si ha $x=6$.

Ed allora la seconda e terza parte sono le radici di:

$$t^2-6t+8=0,$$

cioè sono rispettivamente 2 e 4.

---

(1) Frate LUCA PACIOLI: *Summa de Arithmetica....* (ed. 1523), carta 87 verso.

E la prima e quarta parte sono le radici di:

$$t^2-9t+8=0,$$

cioè sono rispettivamente 1 e 8.

Per modo che le quattro parti del problema di LUCA PACIOLI sono 1, 2, 4, 8; che è il più semplice esempio di numeri in proporzione continua, ed a cui egli si riferisce di solito nei suoi esempi.

E nel caso, proposto da CARDANO a TARTAGLIA, si ha $a=10$ e $b=60$. Cosicchè si ha da risolvere l'equazione:

$$x^2+6x-20=0,$$

da cui, trascurando la radice negativa, si ha $x=-3+\sqrt{29}$.

Ed allora, tenendo presenti le (1) e (2), si ha che la seconda e terza parte valgono:

$$\frac{1}{2}\sqrt{29}-\frac{3}{2}\mp\sqrt{\frac{19}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{29}-\frac{28\sqrt{29}-144}{2+\sqrt{29}}},$$

e che la prima e quarta parte valgono:

$$\frac{13}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{29}\mp\sqrt{\frac{99}{2}-\frac{13}{2}\sqrt{29}-\frac{28\sqrt{29}-144}{2+\sqrt{29}}};$$

che coincidono con i valori dati dal TARTAGLIA:

$$2^a \text{ e } 3^a \text{ parte}=\sqrt{7\tfrac{1}{4}}-1\tfrac{1}{2}\mp\sqrt{9\tfrac{1}{2}-\sqrt{65\tfrac{1}{4}}-\frac{\sqrt{41876}+\sqrt{9396}-288}{\sqrt{116}+4}},$$

$$1^a \text{ e } 4^a \text{ parte}=6\tfrac{1}{2}-\sqrt{7\tfrac{1}{4}}\mp\sqrt{49\tfrac{1}{2}-\sqrt{1225\tfrac{1}{4}}-\frac{\sqrt{41876}+\sqrt{9396}-288}{\sqrt{116}+4}},$$

perchè il radicale:

$$56\sqrt{29}=\sqrt{90944}$$

è eguale alla somma dei due radicali:

$$\sqrt{41876}+\sqrt{9396}=38\sqrt{29}+18\sqrt{29},$$

che figura nell'espressione del TARTAGLIA, e della quale non so spiegarmi l'origine.

G. M. SITTIGNANI (Genova - Italia)

SULL'INFINITO MATEMATICO ELEMENTARE (1)

I.

1. - Il concetto di numero naturale richiede quello di successione. Se tale affermazione è ovvia quando il numero si pensa ordinalmente, non lo è altrettanto se si considera il numero sotto l'aspetto cardinale, cioè come aggregato di unità. Si consideri per esempio la nota definizione: « Se a è una classe, numero degli a è la classe delle classi b che sono in corrispondenza biunivoca con a ». Il concetto di successione qui non interviene esplicitamente; ma in realtà è implicito in quello di corrispondenza biunivoca. Infatti la corrispondenza non esiste fuori della nostra mente, tanto è vero che non si tratta di *una* determinata corrispondenza, ma di *una fra più* possibili (dato il principio di invarianza del numero). Ciò posto, la corrispondenza si può pensare formando le associazioni, o successivamente, o simultaneamente. Nel primo caso la successione si ha nell'atto dell'associare, nel secondo, poichè si tratta di una associazione fra altre possibili, occorre un preordinamento, o almeno l'enunciazione di una legge per questa corrispondenza biunivoca. Ora io non conosco leggi di questo genere, che prescindano dal concetto di numero e di successione (2).

2. - È poi facile vedere che una definizione del tipo di quella citata, qualora la corrispondenza biunivoca si pensi soltanto simultaneamente, dà sì l'idea di classi che hanno egual numero, ma non permette di concepire alcun numero determinato, di distinguere cioè un numero da un altro, onde il numero, ridotto ad un vuoto genere, resta privo di quella individualità che per esso è essenziale, e alla quale fin dai primi studi aritmetici è stato dato rilievo (3). Sarebbe per esempio come se due squadre si venissero incontro mantenendo la formazione in linea e si sapesse che di fronte ad ogni individuo della prima, sta uno della

---

(1) Questa Comunicazione può stare a sè, ma in realtà segue una Nota preliminare sulla differenza fra l'estensione di una classe e l'infinito di una successione, esposta alla Sezione Genovese dell'Associazione « Mathesis » nel giugno scorso e svolge il successivo sommario formulato in quell'occasione.

(2) Qui non si afferma che il concetto di ordine sia sufficiente per ogni corrispondenza.

(3) V. per esempio G. LORIA: *La legge dell'evoluzione propria delle matematiche,* Scientia, 1927, p. 323; oltre scritti precedenti.

seconda. Si ha la corrispondenza biunivoca (1), si sa che le due squadre hanno egual numero, ma non è dato alcun mezzo per determinare che numero sia, finchè non si conta, cioè finchè non si ricorre alla successione.

È questa soltanto che conferisce a ciascun numero la propria individualità. In realtà mentre gli oggetti di ciascuna classe si pensano indifferenziati, le tappe della corrispondenza e dell'ordinamento (indipendentemente dai nomi ad essa dati o non dati) sono così diverse, ciascuna essendo preceduta da un diverso numero di altre, che il numero, sia pur cardinale, è diverso a seconda dell'ultima tappa a cui si perviene. Insomma i numeri si creano ad uno ad uno e non tutti in blocco. Unico è semplicemente l'atto intuitivo per cui si vede la possibilità di crearli.

Vero è che nei trattati, dove il numero è considerato cardinalmente, alla definizione succitata segue la definizione di $n+1$ per mezzo di n, per n qualunque. Non avendo $n+1$ alcun significato se già non lo ha n, risulta che anche in queste trattazioni i numeri non si hanno davvero se non quando interviene la successione.

Con tutto questo io non ho inteso criticare le citate definizioni, ma soltanto rilevare che anche in queste, implicita od esplicita, è la successione, e che il numero, sia pur considerato cardinalmente, è nella sua genesi, essenzialmente temporale.

II.

3. - La genesi di cui sopra, astrazione della pura successione, implica pure il concetto di *eguaglianza*, degli intervalli, o delle unità, secondo che si considera l'aspetto ordinale o cardinale del numero. È opportuno osservare quale è il genere di questa eguaglianza. Le unità sono come atomi chiusi, entro i quali, in quanto unità, non è ammesso scandaglio, e gli intervalli della successione sono come i vuoti nella « durata » Bergsoniana. L'omogeneità che si richiede si riduce a questo astrarre dalle differenze, all'infuori della distinzione, che sola si considera. È in rapporto alla pratica ed a costruzioni scientifiche già formate che interessa vedere quando convenga o no fare questa astrazione, e in generale è il rilievo di un carattere comune (agli oggetti) che serve di guida.

4. - Nel numero cardinale questo concetto delle unità eguali, di cui il numero è l'aggregato, emerge tanto da far quasi dimenticare quello di successione (2)

---

(1) Non senza un preordinamento.

(2) Si potrebbe viceversa osservare che il potere di cardinazione dell'unità tende a zero per $n \to \infty$, essendo

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

(mentre, sotto l'aspetto ordinale, $\omega + 1$ è diverso da ω) (CANTOR).

necessaria alla genesi, e il numero viene in certo qual modo spazializzato. L'originaria distinzione temporale sembra tradursi in distinzione spaziale. In realtà sono gli oggetti che si pensano nello spazio, non il loro numero. È solo per l'associazione dell'idea di ordine con quella di simultaneità e quindi di estensione che si concepisce il numero cardinale come una grandezza, concezione agevolata da tante sensazioni spaziali vere e proprie date dagli oggetti.

5. - Nel numero sotto l'aspetto ordinale l'attenzione si porta sopra tutto sulla diversità dei momenti della successione. La successione, anche se è scritta, non si spazializza che in apparenza. Dati anche solo due oggetti, se si considerano in successione, in una direzione qualsiasi, e indipendentemente dalle parole che si usano per indicarla, si pensano effettivamente uno *prima* dell'altro. La « coppia » ha il suo carattere specifico *se ha verso*, sia pure solo sottinteso, e giustamente, a questa condizione, è stata considerata come l'elemento primordiale dell'aritmetica (1). Altrimenti se si considera la « coppia » spazialmente, cioè i due elementi simultanei, essa è una nuova unità, in cui il significato intrinseco della parola « coppia » si oblitera e quello di ente unico prevale. La simultaneità non può dare che unità.

III.

6. - La successione implica pure, per il principio d'iterazione, il concetto di infinito potenziale. Se si ammette l'esistenza logica di $n+1$, *qualunque sia* n, si ammette questo infinito. È stato detto che l'infinito matematico si riduce a questo: dopo un numero ve n'è un altro; ma bisogna riconoscere che quel presente indica appunto l'iterazione senza limite (2). JULES TANNERY stesso riconobbe in un secondo tempo che questo infinito si può palliare, ma non eludere.

Poco importa che il principio d'iterazione si ponga nel casellario della logica, anzichè in quello della matematica. Vero è che il numero è un'astrazione fondamentale e che il *sempre* unito alla *distinzione* è un elemento essenzialmente numerico (3). Il « sempre » senza la distinzione, o è un mistero imperscrutabile o è il nulla.

7. - L'infinito matematico elementare, cioè la successione naturale, potenzialmente infinita, si lega intrinsecamente al principio d'induzione. Nei trattati questo o si enuncia come postulato, o si dimostra dopo aver ammesso una successione infinita, o si include in una definizione, che segue quella di $n+1$ mediante n,

---

(1) V. per esempio A. PADOA, Atti del Congresso di Cambridge, 2° vol., 1913, p. 476 e Revue de Métaphysique et de Morale, 1911, pp. 549-554.

(2) Cfr. E. BOUTROUX, R. M. M., 1911, p. 425 e 1914, p. 577.

(3) Cfr. per quest'ordine d'idee per esempio G. PEANO, Riv. di matem., 1891, pp. 256-257.

per n qualunque. Preferisco i primi modi all'ultimo, anche se questo non implicasse quell'infinito attuale, che ha già portato a note antinomie. La definizione nominale formalmente è appagante. Ma perchè l'ente definito, in questo caso l'N_0 del RUSSELL, o l'ω di CANTOR, abbiano esistenza logica, occorrono o teoremi di esistenza, o diretti appelli all'intuizione. In un campo così preliminare solo a questi si può far capo. Quale vantaggio presenterebbe la definizione se il secondo membro dell'eguaglianza definitoria contenesse implicitamente alcun che di incompatibile con altri concetti, e tale da non potersi riconoscere se non nel corso dello sviluppo scientifico (1)? Ed anche ammesso che contraddizione non risulti, se si definisce un ente matematico fondamentale, sottintendendo, *se esiste*, allora si fa apparire tutto l'edificio matematico come puramente convenzionale. Perchè non mettere in luce che vi sono principî matematici caratteristici che realmente s'impongono al nostro spirito (2)? Gli stessi principî logici fondamentali non hanno altra base che l'intuizione. Lo ammette anche il RUSSELL (3).

Il dare e l'accentuare nella trattazione l'apparenza convenzionalistica ha già creato malintesi non lievi nel campo filosofico.

8. - Si può ora osservare che ammettere l'esistenza logica di $n+1$, se esiste n per n qualunque, cioè l'infinito potenziale, è già ammettere un principio, distinto nella forma, ma identico nello spirito, al principio d'induzione (4). Ossia è il principio d'induzione applicato in modo singolarissimo, poichè non si tratta di riconoscere una proprietà qualunque agli elementi di una successione, se questa proprietà spetta ad un primo elemento e se un elemento qualunque la trasmette al successivo, ma l'*esistenza logica* della successione, posto che esista un primo elemento e che l'esistenza di un elemento implichi quella del successivo. Onde *ammettere una successione potenzialmente infinita è ammettere un principio che implica quello d'induzione.* E questo è tanto vero, che il principio d'induzione si dimostra, a partire da un primo elemento in poi, senz'altro supporre, all'infuori del concetto di numero finito (5), o per esempio con un facile ragionamento per assurdo, riconducendolo al principio della « discesa » di FERMAT o col sistema del PIERI, anch'esso molto semplice. Il PIERI riconosce esplicitamente che si deve ammettere una successione infinita (6).

Io non debbo qui entrare in particolari sulle forme che si possono dare al

---

(1) Cfr. F. ENRIQUES: *Questioni*. Vol. I, p. 402; cfr. R. M. M., 1917, pp. 149-163.

(2) Cfr. ad esempio H. POINCARÉ, S. H., pp. 9-28; V. S., cap. I; S. M., libro II, cap. 3, 4 e 5, op. 153-114; D. P., p. 94.

(3) V. ad esempio R. M. M., 1906, p. 630.

(4) Il caso della successione limitata qui non interessa.

(5) V. ad esempio F. ENRIQUES, citato in « Periodico di Matematiche », art. di M. T. ZAPELLONI, 1928, p. 184.

(6) V. « Boll. Accad. Gioenia », serie 2ª, fasc. 2°, Catania, 1908; cfr. R. M. M., 1906, p. 206.

principio, sulle denominazioni che più ad esso convengono, sui principî ad esso affini e i relativi rapporti (1), sul confronto fra induzione matematica e induzione fisica, e sulle considerazioni di genere didattico che lo studio di questo principio suggerisce.

Sono tutti argomenti suggestivi, sui quali gli studiosi ritornano, benchè su di essi vi sia già una importante e non scarsa letteratura.

9. - Qui rilevo soltanto:

a) Che l'immediatezza della dimostrazione, almeno in certe forme, e quindi la fondamentalità del principio, è naturale abbia indotto menti molto sintetiche, quella del POINCARÉ, per esempio, ad affermarne l'indimostrabilità. In realtà l'atteggiamento del pensiero che crea la successione dei numeri naturali non è per natura diverso da quello per cui si concepisce il principio d'induzione matematica applicato ad ogni successione in cui i numeri naturali sono indici.

Più che di dimostrazione si tratta di un utile scandaglio sugli elementi, che collega aspetti diversi di uno stesso principio.

b) È poi da rilevare la straordinaria importanza di questo principio. Si possono certo indicare metodi, forme, orientamenti per la generalizzazione matematica, ma quando si vanno a cercare le leve logiche che permettono di generalizzare, e si esce dal vago, dal discutibile, dal semplicemente opportuno, addentrandosi oltre certe apparenze formalistice, ciò che resta al di sopra di ogni critica, come nucleo e chiave di volta della generalizzazione in senso proprio (2), è in ultima analisi questo principio, naturalmente combinato con altri elementi e a parte variazioni di forma.

c) Giova infine osservare che ogni qual volta esso si applica, si pensa geneticamente una successione che è in corrispondenza biunivoca con quella dei numeri naturali, onde si fa ogni volta quella che è stata chiamata « corsa all'infinito », non nel senso di creare un infinito attuale, ma di pensare un modo di crescere caratteristico, il più semplice e fondamentale dei modi di tendere ritmicamente all'infinito. Il principio d'induzione non dispensa da questo movimento del pensiero, così proprio della nostra ragione, legata all'elemento « tempo », e così abituale da indurci quasi a vedere la successione, come se esistesse fuori di noi.

Il « principio » una volta consapevolmente ammesso, non fa che legittimare questo procedimento. Se mi è permessa una similitudine con un fatto comune, è come il biglietto ferroviario, che non sostituisce e non dispensa dal viaggio, ma autorizza a compierlo.

---

(1) V. per esempio G. VACCA, « Boll. di bibl. e st. delle sc. matem. », 1909, fasc. 2° e R. M. M., 1911, pp. 30-252; A. PADOA, R. M. M., 1911, p. 246 e seg.

(2) Non la semplice estensione, e naturalmente escludendo i casi in cui la dimostrazione generale è indipendente dal caso particolare.

Conviene all'economia trattatistica non rilevare ad ogni passo la linfa intuitiva che vi circola, o internamente ai principî, o come vincolo e motivo di scelta fra questi e quegli elementi logici. Ma non si deve perder di vista questo elemento che è l'intima forza motrice di ogni costruzione scientifica.

Formalmente, nel trattato matematico, ossia nella veste deduttiva che la scienza assume sistemandosi, si procede sempre *dal generale al particolare.* Ma *intrinsecamente*, sotto il velo di certi « principî » o di certe « matrici », la matematica è anche e sopratutto *costruzione di nuovi enti* e *processo di generalizzazione*, nel quale, l'infinito matematico elementare, geneticamente pensato, combinandosi con altri elementi (o costruzioni matematiche già formate, o nuove intuizioni, specialmente spaziali, su cui imprime la forma aritmetica), è come un agente vivo che si moltiplica in mille creazioni.

L. C. KARPINSKI (Ann Arbor, Mich. - U. S. A.)

EARLY ALGORISMS IN FRENCH

The introduction into Europe of the system of computation which we use today was effected largely by Latin translation and adaptations of the arithmetic in Arabic written by the AL-KHOWARIZMI. These algorisms which appeared before the invention of printing included several in the vernacular. There are three published in Hebrew, one in German, one in Icelandic, one in French, and two in English (1).

On a recent sabbatical year in Europe the writer made a special search for unpublished arithmetical treatises. No less than three French algorisms are located and it may be said with little hesitation that these are far more important than the ancient algorisms published in the Boncompagni Bollettino by M. CHARLES HENRY (2) and later a second time in the Bibliotheca Mathematica by M. VICTOR MORTET (3).

The earliest of these three French algorisms is the one in verse found in MS. Selden, Supra 26, at the Bodleian Library. This has been transcribed and translated by Professur E. G. R. WATERS of Oxford University. This algorism, with an introduction by the writer, is published in Isis (4) and will be found to be of great interest both from the mathematical and from the linguistic view point. Unlike the two English algorisms published by Steele (5) this algorism does not follow either Sacrobosco or Alexander de Villa Dei nor does it follow any other known Latin treatise. There are many points of similarity with the Carmen of Alexander de Villa Dei, with additions as from Sacrobosco and other writers.

In the section on multiplication, the writer gives two rules for simplifying

---

(1) See the list of these algorisms as given by S. R. BENEDICT, A Comparative Study of the Early Treatises Introducing into Europe the Hindu Art of the Reckoning. s. l. et s. s. (Thesis, University of Michigan, 1914).

(2) Bollettino di bibl. e di storia delle scienze mat. e fisiche, Vol. XV, p. 53 et seq.

(3) *Le plus ançien traité français d'algorisme*, Bibl. Math., 3d series, Vol. 9, pp. 55-64.

(4) *Isis*, Vol. XI, pp. 49-84.

(5) Early English Text Society, Extra Series, N.o CXVIII (1922), The Earliest Arithmetics in English.

the learning of the multiplication table between 5×5 and 10×10. These two rules corresponding to rules given using the figure 2 are not found together in any of the published algorisms. The first rule states that to multiply a digit by itself substract from the digit the difference between the given digit and ten, this remainder is multiplied by 10 and to the result is added the square of the difference mentioned

$$d^3=10\times[d-(10-d)]+(10-d)^2.$$

The second rule states that to multiply one digit by another, substract the difference between ten and the lesser digit from the greater digit; multiply by 10; to this add the product of the two differences,

$$a\cdot b=10[a-(10-b)]+(10-a)(10-b).$$

This first rule is in fact a special case of the second. This general rule appears in the Salem Codex with the same square of eight as an illustration. The rule appears again in the twelfth century Algorism by Frater Sigsboto of the Cloister Prüfning at Regensburg, published by CURTZE (1), and also in the Egerton Manuscript 2261 in which there is a twelfth century (or early thirteenth) Latin algorism (2). M. O' CREAT (3) gives the rule for the square but not the general rule, as an illustration of the rules ascribed to Nicomachus,

$$a^2=(a+b)(a-b)+b^2.$$

The only numerical illustrations given in the French algorism consist of the applications of the applications of these rules to 8 times 8, and to 8 times 7.

Another peculiarity not so clearly found in other algorisms, is the explanation of the forms of the digits. Thus the figure 2 « always looks like a siccle », and 3, « like a pair of eyebrows placed sideways », while 4 « is an " *o* „ with two feet ». Ten lines from this French algorism are quoted by J. O. HALLIWELL (4) in connection with the Carmen de Algorismo.

As a whole the character of the treatise indicates that it was based upon one or several of the Latin treatises extent in the thirteenth century with the possibility that the author had before him some early treatise which has not survived. The operations are of the earliest type, before the development of improved methods.

A second French algorism composed in the first half of the fifteenth century is found in Brussels at the Royal Library, MS. 10461, in the handwriting of JEAN DE

---

(1) Abhandlungen zur Geschichte der Math., Vol. VIII, pp. 1-27.

(2) SEE KARPINSKI: *Two Twelfth Century Algorisms*, Isis, Vol. III, pp. 396-413.

(3) In Abhandl. zur Geschichte der Math., Vol. II, p. 131-139, article by Ch. HENRY.

(4) Rara Mathematica (London, 1839), p. 74.

STAVELOT (1388-1449). This algorism, written in the dialect of Liège, has also been transcribed and traslated by Professor WATERS and will appear in Isis.

The Brussels' manuscript begins somewhat like the Carmen de Algorismo. The text of about five hundred lines of verse follows in some parts quite closely the Algorismus vulgaris of Sacrobosco. There are given eight operations (espises), including « numeration », « addition », « substraction », « duplication », « dimidiation », « multiplication », « division », and « progression ». In the margin some of the corresponding Latin terms are given as « additio » and « subtracio ». So far as the mechanical operations these follow along ordinary lines of this period. In addition the sum is written in the place of the smaller number, which is a variation from most algorisms, and both addends disappeaur. Similarly in the other operations the given numbers disappears as usual, in the process.

The writer has such a delightful soliloquy in his conclusion that it seems worth giving. « The man who is eager to learn shoul be careful to study; for study causes one to know more than one thinks, and to retain more than one realizes. Study is a store and a treasury which is quite fitted with jewels of all kinds, and one can never take so much from it as to cause it to diminish. For when a clerk has studied in the learning which suits him, until his head is full of it, he has done no hurt to the learning; he has in no degree exhausted study because of the amount of it that he has mastered ».

The third of this series of algorisms is found at the Bibliothèque Nationale in Paris. Nouv. Acq. fr. 4140. This long treatise in Provencal was written in a hand evidently of the late fifteenth century. This occupies two hundred pages (15 rec to 117 verso), running 26 or more lines to the pages and about ten words to the line.

Doubling and halving are omitted as separate operations. Arithmetical progressions and geometrical progressions, most briefly, are introduced after multiplication. Checks are, in general, by the contrary operation.

A few words of the technical vocabulary follow:

aplegament for numeration;
aivstament for addition;
substractio (and the popular form, *sostrayre*) for substraction;
multiplicatio for multiplication;
devisio and *partir* for division;
progressio for arithmetical progression.

Doubling or *duplicatio* is included in the list of the fundamental operations but in giving the actual operations this is not given. The word « *milions* » is also worthy of note.

Doubtless a complete study of this whole manuscript will establish its connections with Sacrobosco and some other of the early writers. In any event the manuscript is of great importance for the history of arithmetic and as a linguistic monument.

An algorism in Italian by Magister Jacobo de Florentia is found in MS. Latin 4826 at the Vatican, the algorism being dated 1307 in the month of September. The work opens with a statement that there are nine operations (species) but in giving the process of the operations doubling and havling are not included. This is an interesting text with considerable commercial material with work on fractions. It is to be hoped that it will be added to the not very extensive list of early algorisms available to historians of the mathematical sciences.

T. GREENWOOD (London - Inghilterra)

GEOMETRICAL ONTOLOGISM

The extraordinary development of pure geometry and of scientific method compel the attention of the philosopher, who must find a place for them in his systems if he wishes to give of the world of our knowledge a picture as complete & adequate as possible. In order to do so, one must give an interpretation of geometry not only « in esse » but also « in fieri »; because there seems to be a difference between these two aspects of geometry. Indeed, the technique of hypothetico-deductive systems of geometry has been imagined long after the discovery of various kinds of geometries. In fact, the hypothetico-deductive method seems to have been established so as to put some order in the widely different and apparently contradictory systems of geometry. But it cannot give us direct means of penetrating the essence of geometry or of explaining its infrastructural content.

The hypotetico-deductive method ignores the essence of the objects it deals with, and confines itself to the forms of the relations they have between themselves. Yet, even when applied to geometry, the hypotetico-deductive method has no scope whatever without some kind of objects or facts which could be used as terms of these relations. A relation presupposes at least two terms; and it does not suffice to say that these terms are essentially formed of relations, because the difficulty arises further back, when one has to give an account of these relations by means of other terms. Which comes first, the term or the relation? The question might seem insoluble; yet common sense is powerfully inclined to give the term the first chance.

This gives the angle under which we consider the problem of the essence of geometry. And though the hypothetico-deductive method is fully justified by the exactness of geometry, it hardly suggests as such any metaphysical views on the nature of « geometrical facts » which, as we hope to show, condition the very relations which make the hypothetico deductive method possible and useful. It might be that the aggressive attitude of traditional logic towards the new systems of geometry & their interpretation, has estranged these two branches of learning the one from the other. But after all, in these days when cooperation is to the fore, the feud to which we alluded should give way to an harmonious working together of logic and geometry.

* * *

1. - *In order to characterize the essence of a geometrical fact, a distinction must be drawn first between the two aspects under which geometry is presented to us: As a body of undefined relations which are to be discovered, geometry takes the form of an objective implication which develops analytically according to conditions partly independent from the mind. But as a body of relations already determined, geometry takes an hypothetico-deductive form.*

There is no need to show that, as a systematized science, geometry has taken an hypothetico-deductive form. But this methodological progress does not affect in any way the experimental origin of geometry, and it has little influence upon its development. The evolution of geometry illustrates the fact that it was not always hypothetico-deductive, but rather a vast implication of unknown relations which the mind had to study by degrees. Psychologically speaking, when our mind creates new theories, or analyses geometrical relations still imperfectly known, it does not obey blindly the rigid laws of logistic, nor is it guided by an arbitrary imagination. Its specific activity is conditioned either by a *sensible intuition* which helps its progress by means of analogies suggested by the extrenal world, or by a *rational intuition*, which carries it further by means of analogies suggested by abstract relations already known or tested. In both cases, a kind of instinct shows us the importance or necessity of these analogies in the development of our research. And only when the mind sees a possible goal to reach, does it begin to build up a synthesis, or, in other words to construct an hypothetico-deductive system. But even in its synthetic activity, the mind chooses among the various possible hypotheses, those which will make easier its way to the goal. And this choice itself is not arbitrary but rather conditioned by the terms of the problem under consideration, or by the implications of the relations which the mind has found or has in view to find.

Why this necessity? Because our mind cannot embrace with a single act the totality of the propositions which must be established in order to link up synthetically the relations it has in view with the initial point of its research. The mind has to study these propositions successively, and therefore partially, being at the same time fully conscious of these limitations. And although the psychological reasons of this partial study have nothing to do with the formal qualities of an hypotetico-deductive theory, yet the conclusions to which they lead are strengthened by some most important considerations suggested by an analysis of the hypothetico-deductive method itself.

Such an analysis would show that the primitive concepts of geometry have a restricted field of variability which is correlative with the limitation of the indetermination of the primitive propositions involving these concepts. And this

character gives both the primitive concepts & propositions, a kind of rational antitypy which prevents them so to say, from entering into combinations essentially incompatible with their very nature. It presupposes further the existence of some kind of hypostases underlying both of them (1). We must therefore admit that *geometrical facts* exist independently of the usual process of construction or logical presentation of geometry. It follows that geometry can be considered as an objective implication which develops analytically according to conditions partly independent from the mind. This dualism however, does not affect the unity of the nature of geometry. Because of its material limitation, our mind manifests its activity analytically and synthetically. But when applied to geometry, these two movements seem to point functionally to a higher reality which we shall try to fix by means of its principal characteristics.

2. - *A geometrical fact is richer and more complex than all the definitions we can give of it; it is richer than all the forms or combinations of signs and propositions by means of which we express it. It has therefore a certain objectivity which we propose to call « intrinsic » in order to discriminate it from the relative objectivity of experimental knowledge.*

We have showed that geometrical facts are independent of the usual process of scientific construction. Behind the hypothetico-deductive scaffolding of geometry however, we feel the existence of certain laws or rather of certain beings which we try to translate or represent in algebraico-logical language. But we feel also that our translation or representation is never adequate to its pattern, that the expression we give of it, is never all-embracing. Besides, notwithstanding the esthetic attraction of the algebraico-logical scaffolding, we feel that it does not represent the goal of the creative efforts of the mind; we realise in a way, that this scaffolding cannot absorb all our attention, because our efforts converge really towards a pattern which we try to actualise, and which is like a final cause exerting a powerful attraction on the potentialities of expression if not of conception, of our mind. But is not this hopelessness of our efforts a proof of the intrinsic objectivity of the geometrical fact? Hence the conventional character of the expression of geometrical facts, notwithstanding their positive unity. But if we confuse the fact with its expression, then it is not possible to account for the development and progress of geometry. On the contrary, the perfectibility of that science is a permanent proof of the objective essence of geometrical facts.

Besides, the results sought for by the geometrician in his research, have almost nothing in common with the formal qualities of the axiomatic method. Indeed, a geometrical fact is independent of the order of consecutive propositions

---

(1) See our paper on: *The Nature & Function of Geometrical Concepts*, in the « Acta » of the Congress of Philosophy, 1921, Paris. (A. Colin, Paris, 1924).

which condition its expression; it has no definite comprehension; because all its properties are simultaneous. Let us consider the idea of an ellipse or of the parallels as an illustration. The various definitions which are given of these two notions are all equally good, because they all express some aspect of them. When we speak of the best definition, it is rather a matter of convenience, of simplicity, perhaps as a shorter way to the solution of certain problems. What we do when we are constructing a theory of the ellipse or of the parallels, is to dissect a whole which is given as such to our mind, into a series of properties arranged according to the requirements of scientific method. There lies the difficulty which faces the geometrician in his work: the thing he is studying is one in itself, yet he cannot see it all at once in its various details. And the hypothetico-deductive method only gives him a means of expressing methodically his partial discoveries: whence the variability and often the indetermination of geometrical methods.

Systematisation is not the immediate & principal care of the seeker. The hypothetico-deductive method tends to a perfect synthesis: but we cannot construct anything before discovering the elements of our construction. Notwithstanding the remarkable progress of mathematical logic, the modern mathematician wishes to enjoy unfettered the boundless wonderland of abstract science.

3. - *A geometrical fact is an ideal, and therefore a universal entity, the origin of which is rooted directly or indirectly in the external world, though its actual form may not correspond adequately to the real object which caused its conception. But this empirical element, though inseparable from our method of knowing, is not an essential element of the geometrical fact itself.*

It is obvious that geometrical facts differ from sensible things, even from those which caused their conception. On the other hand, one can hardly admit that they spring up ready-made from the mind, in which case it would seem difficult to account for their rational antitypy. They are rather a kind of mixture of empiricism and apriorism: they are the result of the activity of the mind working on the suggestions offered by the external world. They are therefore ideal entities, notwithstanding the empirical element contained in them.

The role of creative imagination in the construction of geometry is also interesting, because some kind of picture is necessary to the active mind in order to form representations, either through abstraction proper or through analogy. But this material cause of our mental activity is contingent and particular, while our deductions are universal and necessary. During the reign of Euclidian geometry, it was said that geometrical intuition, reason and reality had contracted a powerful alliance. It can be claimed today that this alliance still exists, in spite the unlimited possibilities of geometrical intuition, and the fact that our imagi-

nation must canalise its activity when applying geoometry to the external world. We might add however, that if creative imagination is indispensable when seeking geometrical results, it is not necessary when arranging or constructing the results otherwise obtained. As geometrical objects are ideal in themselves, they can be easily handled by the hypothetico-deductive method, which is itself independent from experience. But this procedure does not imply the banishment of intuition from geometry.

Geometrical facts, being ideal, are also universal entities. As they belong to the conceptual order, there is no principle of individuation to diversify them. Therefore when we consider a particular geometrical fact in a demonstration, because of our mode of knowing, we think all the time of the universal type it represents. There is the difference between experimental and mathematical induction: experimental induction proceeds from the particular to the universal, from reality to abstraction, so to say; while mathematical induction proceeds from a particular universality to a general universality, always in the abstract realm. It follows also that geometrical reasoning proceeds mainly from the less complex to the more complex, and not from particular to universal, as is the case with empirical notions. The hierarchy of geometrical concepts is only analogous to the hierarchy of empirical notions; because genus and species as well as individuals are identified in geometry with equally universal elements. Consequently, the subordination of empirical notions is essential to the order of nature; while it is only accidental in the case of geometrical notions: the method by which we express their relations, does affect the geometrical facts themselves.

4. - In conclusion, we submit that the geometrical facts are not parts of the external world, nor are they elements of our mind. They belong to a world of their own which may have certain analogies with the world of the first hypostases of Plotinus. They emanate in a certain way from the external world; while they are a sort of prolongation of the mind in its attempt to express the relations between natural things. Yet they are not the expression of these relations, but of the entities which underly them, entities which in their essence, though not in their origin, are independent of both nature and mind. These geometrical entities are a kind of universals, though not of the same order as universals in the general sense of the word. The latter are immediately obtained by abstraction from data of our perception and imagination; while geometrical facta are abstracted from entities already abstracted themselves from data of the external world. Geometrical facta indeed are universals in the second degree, as they result from two consecutive abstractions. For instance, the universal idea of a circle is of something round, of vague dimensions and without any specific properties, obtained by stripping round objects of their sensible qualities and generalising the residue of this operation. But the geometrical circle is an entity perfect and complete in

itself, containing specifically though virtually within itself a mass of properties which intuition or deduction make actual. This entity is conceived through a second abstraction of the already universal idea of a circle; and in this second abstraction, the intellect perfoms not only an active, but also a creative operation. And this creative operation is indeed an « invention », in the etymological sense of the word. Because the intellect does not create out of nothing, but discovers virtual properties of an entity which has existed before the human intellect and the external world itself.

This pre-eminence of being over its idea is we call *geometrical ontologism.* Equally distant from realism and idealism, geometrical ontologism outreach not only the experimental origin of geometry, but also the hypothetico-deductive aspect under which that science is presented to us. It should not be identified however, with the views of Malebranche or with the contemplative attitude of the mind adopted by Plato. Geometrical ontologism is more active, because of the creative role of the mind. Finally it is interesting to note that this special ontological theory is not confined to geometrical entities alone. We have expounded it with special reference to geometrical facts; but it can be extended to a general theory of an all-embracing mathematical ontologism, which would open new avenues to a discussion concerning the origin and value of mathematical ideas and methods, and which could provide us with a means of defining the psychological and epistemological limits of empiricism and logicism.

R. C. ARCHIBALD (Providence - R. I. - U. S. A.)

GEORG HERMANN VALENTIN (1848-1926)

Since the last Congress of Mathematicians in 1924, when an International Committee on Bibliography was appointed, Georg Valentin the greatest of mathematical bibliographers has died. It seems fitting, therefore, that a member of the International Committee should briefly survey his life and accomplishment (1).

Georg Hermann Valentin spent his whole life in Berlin. Born there on December 9, 1848, he received his early education at the Friederich-Werder Gymnasium, and during 1869-79 was a student of mathematics at the University, under Kummer, Kronecker, and Weierstrass. He became a doctor of philosophy in 1879, his dissertation under Weierstrass dealing with the problem of the transformation of algebraic equations in two variables into the normal form.

He began his long connection with the Royal State Library as an Assistant in 1874; promoted to be Kustos in 1884, he became Bibliothekar in 1893, Oberbibliothekar in 1894, and was a Direktor from 1908 to 1920, when he retired on pension. Under circumstances to be referred to later, he was granted a room in the State Library for his Bibliography of Mathematics over which he was wont after his retirement to work for eight or ten hours a day. He died on 24 November 1926, a few days before his seventy eighth birthday, and in the forty second year of labor on his Bibliography. He left hehind a widow and five daughters (2). Valentin was married in 1880 to Kate, daughter of the late August Hirsch, Professor of medicine at the University of Berlin.

Valentin's publications were comparatively few: a complete list of them is given at the close of this paper. His first publication was in 1875, the eleventh revised edition of S. Sachs's *Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen etc., enthaltenen Gleichungen und Aufgaben*; the thirteenth edition,

---

(1) Valentin's Bibliography was the subject of a communication by the late lamented Eneström to the « first » International Mathematical Congress of Mathematicians at Zürich in 1897 (*Bibliotheca Math.*, s. 2, vol. 11, 1897, p. 65-72). Valentin's three published communications in this connections are listed below.

(2) Hedvig Beck, Berlin; Else Valentin, Munich; Ruth Lienan, Berlin; Dora Koster, Hamburg; Dr. med. Irmgard Valentin, Berlin.

in 1892, contained an original 40 page appendix. His second publication was the Latin dissertation, already referred to.

Nineteen articles and notes from his pen appeared between 1885 and 1914, and dealt almost wholly with bibliographic questions. Three of these articles, in *Bibliotheca Mathematica*, describe the status of his Bibliography in the years 1885, 1900, and 1911. Of ten other notes or articles in this periodical, the longest is the one which gives a bibliography of « Die Frauen in den exakten Wissenschaften ». His identification of the position of Euler's house in Berlin during the years 1744-66, as on the south side of Behrenstrasse, in the position now occupied by number 21, was first announced in the *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, for 1906. An extensive account of « Euler in Berlin » appeared, in the following year, in the twenty fifth Abhandlung zur *Geschichte der Mathematik.*

Valentin wrote also sixteen reviews of which six were published, 1881-1890, in the *Deutsche Literaturzeitung.* Seven other reviews were in *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, 1905-1912, and dealt entirely with bibliographic works, two of which, however, were non-mathematical bibliographies, by Paul Hirsch, of German and French military history. The longest review, of Wölffing's *Mathematischer Bücherschatz*, appeared in *Zeitschrift f. Mathematik und Physik* and showed up the defects of this work with relentless thoroughness.

All of Valentin's writings display great clarity of presentation and statement; geniality and graces of literary expression will be sought for in vain.

But Valentin's great contribution to Mathematics was in connection with the preparation of his marvellous manuscript General Bibliography of Mathematics from the dawn of printing to 1900, on which he worked incessantly from 1884 to the time of his death. References may here be found to about 200000 titles recorded on slips of paper of uniform size about 10×12 cm. (On some slips as many as a score or more of titles or editions are sometimes recorded). These are assembled in 76 specially made wooden boxes, each about $27\frac{1}{5}$ cm. long., 56 for pure and 20 for applied mathematics.

With few exceptions Valentin designed that his Bibliography should list every separate mathematical publication, all academy or periodical articles of a purely mathematical nature, as well as similar kinds of material in the fields of theoretical physics, theoretical astronomy, theoretical actuarial science, technology, etc. Mathematical literature of the elementary schools is omitted, for the most part; no elementary arithmetics of the 19th century are listed. Problems proposed for solution in numerous Dutch, English, French, German and other periodicals are not catalogued.

For the first few years of his work Valentin listed, whenever possible, all titles of independent publications with bibliographic exactness, also the year of publication, the name of the publisher or printer, the number of pages and plates,

and the format. As the work progressed certain abbreviations of titles of publications after 1700 were introduced; the titles of periodical articles are practically never abbreviated.

The assemblage of the material was achieved not only through personal handling of thousands of volumes in the great Staatsbibliothek in Berlin but also through the use of all sorts of bibliographies and by making trips to other libraries. Shortly before his death Valentin told me that he had spent about $ 10,000 in making his catalogue and I have every reason to believe in the accuracy of this statement. Towards this amount at different times the Prussian Academy of Sciences contributed $ 2300. Already in 1886 we find in the Academy's records a document of four folio pages in the handwriting of Weierstrass who set forth what Valentin had done and hoped to do in the near future and recommended that the Academy make a grant of 4500 marks to assist him. This was done and in a document dated 3 November 1886, Valentin made the following declaration: « Ich erkläre hiermit dass falls ich durch irgend welche Umstande der Fortfuhrung und Vollendung meiner von der königlichen Akademie der Wissenschafter unterstutzten Bibliotheca Mathematica verhindert werden sollte, das gesammte fur die Bibliographie gesammelte Material in dem Besitz der Akademie ubergehen soll, und dass ich eine dahin zielende schriftliche Erklärung bei mir so niedergelegt habe, dass meine Familie geeigneten Falls Kentniss daran nehmen muss ».

In 1897 Valentin obtained leave of absence from the Staatsbibliothek and, on the recommendation of Schwarz and Frobenius, the Academy made a further grant of 2500 marks towards the cost of a journey to libraries in Belgium, Denmark, England, France and Sweden. With the same recommendation in 1909 the Academy made a further grant of 1500 marks which assisted Valentin in other journeys, to Rome, Florence, London, Paris, Brussels, Amsterdam, Copenhagen, Lund, Vienna, Pest and Bucharest. Especially in the library of the Academy of the Lincei did Valentin discover a fine collection of Polish and Russian serials, whichwere of great importance in rounding out his work. While German mathematical literature is probably most completely dealt with in his Bibliography, such journies made sure that the output of other countries should be well represented, though the literature of Poland and Russia was not as well covered as that of other countries. Such widespread search for material revealed many editions of works which could scarcely be learned of in any other way; for example, Valentin lists more than twenty editions of Lacroix's *Éléments d'Algèbre* and its *Complément*, and Dutch, English, German, Greek, Italian, Polisk, Portugese, and Russian translations. He also lists fifty-three editions of the arithmetics of Adam Ries.

In two respects especially Valentin's Bibliography contributes much of interest: firstly, in references to articles in thousands of volumes of out-of-the-way

serials where the ordinary mathematician would never dream of finding anything of special interest to him; and secondly, in listing thousands of reviews, even in such serials as *Journal des Savants, Acta Eruditorum Lipsiensis, Literarisches Centralblatt,* and *Athenaeum,* the last of which contains so many of De Morgan's contributions, most of them unsigned.

Until 1910 Valentin's material was arranged, so far as possible, alphabetically according to authors. He then started to rearrange it in the form of a subject catalogue which, it was estimated, would fill six royal octavo volumes of about 700 pages each. Roughly speaking, the material in volume 1 was to consist of works devoted to History, Philosophy, Study and Teaching, Mathematics in general; volumes 2-3, Arithmetic, Algebra, Theory of Numbers, Analysis, Theory of Functions; volume 4, Geometry and Geodesy; volume 5, Mechanics and Balistics; and volume 6, Applied Mathematics (that is, mathematical physics, theoretical astronomy, technology, etc.). A seventh volume of about 700 pages was planned as an author index for the six volumes. At the time of his death Valentin completed for publication the arrangement of volumes 1-3 only, and the part devoted to Balistics of volume 5.

I have with me the sixty-page typewritten table of contents for the most extraordinary volume 1. It may be of interest to give some suggestions as to what may here be found.

I (pages 2-5) Serials: Giving headings under which are listed all serials indexed, and abbreviations therefor. These include, for example, headings for the publications of astronomical, engineering, architectural, railway, shipbuilding, electrotechnical and telegraph, mineralogical, botanical, forestry, medical, pedagogical and philological societies and unions; and for insurance, philosophical, theological, historical and other periodicals.

II (p. 6-7) giving headings for Bibliographic Literature of a general nature (bibliographies of special subjects not treated in volume 1 being listed with the subjects in other volumes).

III (p. 8-14) devoted to headings in connection with the general History of Mathematics. This includes sections on congresses, and the founding of various mathematical organizations in different countries; challenges, claims of priority, and other discussions; biographies, general and individual, lightning calculators; portraits (e. g. under the letters A-C of his Bibliography Valentin refers to nearly 300 portraits).

IV (p. 15-26) Collected works, including correspondence; most of these pages are devoted to listing of headings for works of the ancient Greeks.

V (p. 27-33) Introduction to Mathematics, under which are such special headings as: Mathematics and reality, Mathematics and experience, meaning, importance, relation to other fields such as aesthetics, chemistry, ethics, music, poetry, theology; terminology; esperanto; space; time; number words in 45 different languages.

VI (p. 34) Philosophy of mathematics.

VII (p. 35-40) Study and teaching.

VIII (p. 41-56) Instruments, alphabetical list.
IX (p. 57) Models.
X (p. 58) Encyclopaedias and Treatises.
XI (p. 58-60) Problem-collections, theses, recreations and games, paradoxes.
XII (p. 60) Formulas and formula collections and tables of a general nature.

Such are brief indications of the remarkably rich contents of the proposed volume one.

The question of the publication of Valentin's work has been discussed at various times. In January, 1911, Schwarz and Frobenius reported to the Prussian Academy of Sciences that the cost of publication would likely be 15,000 marks a volume for the first six volumes. This was the sum mentioned in Eneström's article in *Bibliotheca Mathematica* for that year, when he recommended that the Deutsche Mathematiker Vereinigung should take up the matter vigorously. It would seem as if the Prussian Academy of Sciences was seriously considering the publication of volume 1 when the Great War commenced.

In the spring of 1926 Valentin allowed me to take a large number of his Zetteln to a Hamburg firm which estimated that the cost at that time of printing the complete work of 7 volumes would be $ 30000. The editorial expenses would be considerable. In order to take care of these and the possible purchase of the Bibliography with a view to its publication with English subject headings in America it was estimated that fifty thousand dollars was desirable. At its meeting held in Philadelphia in December, 1926, the Trustees of the Mathematical Association of America voted « That it is the sense of the Trustees that the publication of the great Mathematical Bibliography of Georg Valentin covering the period from the beginning of printing to 1900 would be of great value to mathematicians throughout the world, and that such publication in America with English sub-headings would be very desirable if funds therefor can be secured ». In visualizing the publication problem the difficulty of securing a competent editor who would be willing to devote five or six years to seeing such a work through the press was probably the chief factor in preventing the Association from following the matter up.

Through the presentation of the matter by Professor Bieberbach, the Prussian Academy of Sciences in November, 1927, and March, 1928, authorized grants amounting to 700 marks to a life long friend of Valentin, namely Professor Schoenflies of the University of Frankfurt that a portion of his expenses might be met while he surveyed the situation with a view to making recommendations. The recommendations he made to the Academy only shortly before his death, last May, were as follows: *a*) That the Academy publish volume 1 as it stands. *b*) That a second volume be published to contain that portion of the Bibliography devoted to pure mathematics and that this portion be reduced in size by the elimination of those titles already recorded in *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.*

These recommendations are still to be acted up on by the Academy. They provide for two large volumes without any author index. Anyone interested in mathematical bibliography and history must hope that some way be found to publish Valentin's work as he planned it, *without any abridgement.* Possibly the members of this section will care to present some resolution in this connection (1).

On 1 August 1925, Valentin requested the Prussian Academy to allow his Bibliography to be placed in a room of the Staatsbibliothek where it could be readily at hand for use by officers of the library and inquiring scholars. This permission was granted by the Academy on the understanding that the Bibliography could be called back to its control at any time. There the Bibliography lies at the present time.

With the greatest pleasure do I recall several days of 1926 spent with Valentin working on his Bibliography, his kindliness of spirit, his genial welcome, and his generosity in allowing the use of material he had spent more than half of his long life in collecting. To the man of indomitable perseverance and high idealism, great in his conceptions and achievement, hail, and farewell!

---

(1) « The members of Section VII of the International Congress of Mathematicians at Bologna desire to place on record their conviction: 1) that the publication of Valentin's General Bibliography of Mathematics would be of very great value to mathematicians throughout the world; and 2) that it is highly desirable for the work to be issued in unabridged form, amplified by an author index, as planned by Doctor Valentin ».

BIBLIOGRAPHY

SEPARATE PUBLICATIONS

1. S. SACHS: *Auflösungen der in Meier Hirsch's Sammlung von Beispielen etc. enthaltenen Gleichungen und Aufgaben....*, Berlin, 1810; 11 verm. und verb, Aufl. von G. Valentin, Altenburg, 1875, 316 pp. 13 verb. und mit einem Anhang Verm. Auflage von G. Valentin, Altenburg, 1892, 4+356 p.
2. *De Aequatione Algebraica, quae est inter duas variabiles, in quandam forman canonicam transformata*, Dissertation, Berlin, 1879, 4+28+1 p.

ARTICLES AND NOTES

1. " *Vorläufige Notiz über eine allgemeine mathematische Bibliographie* „. Bibliotheca Mathematica, vol. 2, 1885, p. 90-92.
2. " *Einige Bemerkungen über vollkommene Zahlen* „. *Archiv der Mathematik und Physik*, s. 3, vol. 3, 1886, p. 100-103. [See Jahrbuch ü. d. Fort. d. Math., vol. 18, p. 136].
3. " *Die beiden Euclid-Ausgaben des Jahres* 1482 „. Bibliotheca Mathematica, s. 2, vol. 7, 1893, p. 33-38.
4. " *Eine seltene Schrift über Winkeldreitheilung* „. Bibliotheca Mathematica, s. 2, vol. 7, 1893, p. 113-114.

5. "*Die Frauen in den exakten Wissenschaften*„. Bibliotheca Mathematica, s. 2, vol. 9, 1895, p. 65-76.
6. "*Beitrag zur Bibliographie der Euler'schen Schriften*„. Bibliotheca Mathematica, s. 2, vol. 12, 1898, p. 41-49.
7. "*Die Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie*„. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 1, 1900, p. 237-245.
8. "*Filippo Ferrari* (1761)„ Anfrage 81. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 1, 1900, p. 275.
9. "*Über den geometrischen Quadranten* (1594)„ Anfrage 93. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 2, 1901, p. 360.
10. "*Resumé af det nedenfor aftrykte Brev fra Dr. G. Valentin*„. *Oversigt over Videnskabs-Selskabets Moder i* 1901, Christiania, 1902, p. 3-9.
11. "*Über einen auscheinenden Defekt im sechsten Bande von Boncompagnis « Bollettino »*„. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 3, 1902, p. 131-132.
12. "*Ueber die Bewertung des Y in Chronogrammen*„ p. 193-198 of *Beiträge zur Bücherkunde und Philologie August Wilman's zum* 25 *Marz* 1903 *gewidmet*, Leipzig, 1903.
13. "*Der Realkatalog*„. *Mitteilung des Österr. Vereins für Bibliothekswesen*, vol. 9, 1905, p. 76-89.
14. "*Leonard Eulers Wohnhaus in Berlin. Auszug aus einem briefe an P. Stäckel in Hanover*„. *Jahresbericht d. deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. 15, 1906, p. 270-271.
15. "*Leonhard Euler in Berlin*„. *Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*, Heft 25, 1907, p. 1-20.
16. "*Über den gegenwärtigen Stand der Vorarbeiten für die allgemeine mathematische Bibliographie*„. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 11, 1911, p. 153-157. [In the same volume appeared: « Wie soll die Herausgabe der Valentinschen mathematischen Bibliophile gesichert werden? » by G. Eneström].
17. "*Zwei Briefe von Desargues und Bosse*„. Bibliotheca Mathematica, s. 3, vol. 13, 1912, p. 23-28.
18. "*Über die Ausgaben der Kegelschnittlehre von Mydorge*„ Anfrage 158. Bibliotheca Mathematica, vol. 13, 1912, p. 82-83.
19. "*Eine Ausgabe des « Liber de triplici motu » des Alvarus Thernös*„. Bibliotheca Mathematica, vol. 14, 1914, p. 249-252.

REVIEWS

1. R. BALTZER: *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5 Aufl. Leipzig, 1881, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1882, cols. 619-620.
2. F. PRYNI: *Untersuchungen über die Riemannsche Thetaformel*...., Leipzig, 1882; A. KRAZER: *Theorie d. zweifach unendlichen Thetareihen*...., Leipzig, 1882, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1882, cols. 1833-1834.
3. O. RAUSENBERGER: *Lehrbuch der Theorie der periodischen Functionen*...., Leipzig, 1884, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1884, cols. 993-994.
4. L. EULER: *Einleitung in die Analysis des Unendlichen*, I. Teil, Berlin, 1885, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1885, cols. 239-241.
5. *Bibliotheca Mathematica*, 1885, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1886, p. 608-609.
6. *Journal für die reine und angewandte Mathematik, Inhalt und Namen-Verzeichnis der Bande* 1-100, 1826-1887, Berlin, 1887, *Bibliotheca Mathematica*, s. 2, vol. 1, 1887, p. 112-113.
7. J. THOMAE: *Abriss einer Theorie der Functionen*...., 3 Aufl., Nalle, 1890, *Deutsche Litteraturzeitung*, 1890, cols. 432-433.

8. E. WÖLFFING: *Mathematischer Bücherschatz*, Leipzing, 1903, *Zeitschrift f. Mathematik und Physik*, vol. 50, 1904, p. 335-340.
9. W. ERMAN and E. HORN: *Bibliographie der deutschen Universitäten...., Zentralblatt für Bibliothekswesen*, Leipzig. 1904, vol. 21, 1904, p. 287-288; vol. 25, 1905, p. 278-280.
10. P. HIRSCH: *Bibliographie der deutschen Regiments-und Bataillons-Geschichte*, Berlin, 1905, *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 22, 1905, p. 588-599.
11. P. HIRSCH: *Bibliographie der französischen Truppengeschichten. Nebst einem Anhange....*, Berlin, 1906, *Zentralblatt für Bibliothekswesen,* vol. 23, 1906, p. 417.
12. Stadtbibliothek, Frankfurt a. M., *Verzeichniss der mathematisches Handbibliothek des Lesesaals und der mathematischen Zeitschriften*, Frankfurt, 1907, *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 24, 1907, p. 268-269.
13. F. MÜLLER: *Führer durch die mathematische Literatur*, Leipzig, 1909, *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 26, 1909, p. 230.
14. Stadtbibliothek, Frankfurt a. M., *Katalog der mathematischen Abteilung*, Frankfurt a. M., 1909, *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 27, 1910, p. 373.
15. [Bibliographic remark regarding a review by W. Ahrens], *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 28, 1911, p. 229.
16. G. ENESTRÖM: *Verzeichniss der Schriften Leonhard Eulers*, Teil 1, Leipzig, 1910, [*Jahresb. d. Deutschen Math. Ver.*, Ergänzungsband 4, Teil 1], *Zentralblatt für Bibliothekswesen*, vol. 29, 1912, p. 462.

R. C. ARCHIBALD (Providence - R. I. - U. S. A)

PLANS FOR REVIVING BIBLIOTHECA MATHEMATICA

In this paper Professor Archibald reported on steps taken by the Mathematical Association of America which had organized a large advisory international committee for the purpose of reviving Bibliotheca Mathematica. It is hoped that the first volume of the new series may be published during 1929.

A. DENIZOT (Poznań - Polonia)

SUR UN PHÉNOMÈNE OBSERVÉ PAR GUGLIELMINI À BOLOGNE EN 1791

Qual pare a riguardar la Garisenda
Sotto il chinato, quando un nuvol vada,
Sovr'essa sì, ch'ella in contrario penda.
Tal parve Anteo a me che stava a bada
Di vederlo chinare.

DANTE, *Inferno*, XXXI.

Voici comment chante le plus grand poète du monde des vers consacrés à une des tours penchantes qui font l'orgueil de Bologne. Pour un physicien, le géant Antée comparé avec la tour Garisenda d'une hauteur de 47,50 mètres ne présente pas beaucoup d'intérêt: c'est plutôt le fait que ces vers immortels comprennent un théorème de physique qui attire son attention.

En observant d'en bas, du côté où la tour penche, un nuage s'approchant de celle-ci, on aura l'impression que le nuage reste immobile et la tour va en s'inclinant vers lui. Voilà le problème du mouvement relatif: Le nuage se mouvant vers la tour présente le mouvement « vrai » ou « absolu » par rapport à la tour, et en prenant le nuage comme système de référence, c'est la tour qui, par rapport au dernier, exécute le mouvement « apparent » ou « relatif ».

La seconde tour, Torre degli Asinelli, qui penche beaucoup moins que la Garisenda, mais qui est deux fois aussi haute que celle-ci, n'est pas éternisée dans la « Divina Commedia », mais elle est devenue célèbre par des expériences qui vers la fin du XVIII siècle ont été exécutées par l'abbé GUGLIELMINI (1) dans cette tour sur la chute libre des corps. Poursuivant une idée de NEWTON, il a constaté que les corps en chute dévient vers l'est et en outre il a le premier observé une rotation des corps pendant leur chute. Ce dernier phénomène, confirmé plus tard par BENZENBERG à Hambourg et étudié en 1831 plus exactement par REICH (2) en Saxe, est resté jusqu'à ce jour sans explication.

Il me semble que celle-ci peut être donnée, si l'on considère le corps en chute non comme un point matériel, mais comme un système de points maté-

(1) JO. BAPTISTAE GUGLIELMINI: *De diurno terrae motu experimentis physico-mathematicis confirmato opusculum*, Bononiae, 1792, p. 12.

(2) T. REICH: *Fallversuche ueber die Umdrehung der Erde*, Freiberg, 1832.

riels. A cet égard, en poursuivant mes recherches (1) sur le mouvement relatif d'un point matériel, j'ai publié (2), il y a quelques années, un mémoire, où se trouvent des équations différentielles se rapportant au mouvement relatif d'un système de points matériels et définissant la différence des deux vecteurs d'impulsion, dont l'un, « le vecteur relatif », correspond au mouvement progressif, et l'autre, « le vecteur instantané », au mouvement rotatoire du corps. La forme de ces équations rappelle les équations qui se rapportent au mouvement d'une toupie et passent dans les équations d'EULER, en les appliquant au cas du repos relatif. Dans le mémoire en question, j'ai appliqué les mêmes équations au gyroscope de Foucault et en les intégrant on parvient immédiatement à la loi de Foucault, savoir que l'extremité de la résultante des vecteurs sus-mentionnés décrit un cercle autour de l'axe instantané, c'est-à-dire autour de la ligne des pôles, dans le sens du mouvement apparent des étoiles.

Dans le mémoire présent j'ai recours aux mêmes équations différentielles relatives à la chute libre d'un corps, considéré également comme un système de points matériels. Aussi dans ce cas l'intégration de ces équations s'effectue d'une manière simple, par quoi j'entends la représentation du vecteur envisagé en fonction du temps.

Les résultats auxquels je suis parvenu donnent immédiatement une explication de la rotation des corps en chute, observée par GUGLIELMINI et confirmée plus tard par d'autres savants.

§ 1. - Les équations, dont il s'agit dans ce problème, sont les suivantes (3):

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= (L+L_0)+(rQ-qR) \\ \frac{dQ}{dt} &= (M+M_0)+(pR-rP) \\ \frac{dR}{dt} &= (N+N_0)+(qP-pQ). \end{aligned}$$

Ces équations se rapportent à un système d'axes mobiles qui par rapport à un système fixe tourne autour de l'axe instantané avec la vitesse angulaire ω, dont les composantes sont p, q, r. P, Q, R sont les composantes de la différence du vecteur relatif et du vecteur instantané. L, M, N, sont les composantes du moment rotatoire des forces extérieures, L_0, M_0, N_0 celles d'une force fictive qui se détermine par la position de l'origine mobile par rapport au système fixe.

---

(1) A. DENIZOT: *Das Foucaultsche Pendel und die Theorie der relativen Bewegung*, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner), 1913.

(2) A. DENIZOT, Sitzungsberichte der Akad. d. Wiss. in Wien, 123, II^a, p. 903, 1914, v. a. Jahresbericht d. Dtsch. Mathem.-Vereinigung, Leipzig und Berlin (B. G. Teubner), p. 452, 1914.

(3) Dans ce qui suit je me rapporte au mémoire cité auparavant dans la note précedente.

§ 2. - En appliquant les équations (1) à la libre chute d'un corps à la surface de la Terre, nous nous servons d'abord du système d'axes $O\xi\eta\zeta$, défini de la manière suivante : Prenons comme origine O un point de la verticale du lieu d'observation, l'axe des ξ dans le plan du méridien, perpendiculairement à la ligne des pôles et dirigé dans le sens opposé à celle-ci, l'axe des η normalement au méridien, dirigé vers l'Est, l'axe des ζ parallèlement à la ligne des pôles, dirigé vers le pôle boréal. L'axe instantané coïncide avec l'axe des ζ, et les composantes de la vitesse angulaire seront $p=0$, $q=0$, $r=\omega$, cette dernière étant la vitesse angulaire de la Terre.

En désignant par G l'attraction de la Terre, ses composantes par rapport à l'unité de masse seront

$$-G\cos\varphi, \qquad 0, \qquad -G\sin\varphi,$$

où φ est la latitude géocentrique du lieu d'observation, et il vient

$$\begin{aligned} L&=\sum(yZ-zY)=\sum(-mG\sin\varphi\cdot y)\\ M&=\sum(zX-xZ)=\sum(-mG\cos\varphi\cdot z-mG\sin\varphi\cdot x)\\ N&=\sum(xY-yX)=\sum(mG\cos\varphi\cdot y). \end{aligned}$$

En y introduisant les coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité et en désignant par m la masse du corps, on obtient

$$\begin{aligned} L&=-mG\sin\varphi\cdot\eta\\ M&=-mG\cos\varphi\cdot\zeta-mG\sin\varphi\cdot\xi\\ N&=mG\cos\varphi\cdot\eta. \end{aligned}$$

La force agissant sur l'origine est dans ce cas la force centrifuge engendrée par la Terre en rotation. En nommant h la distance de l'origine de la ligne des pôles, les composantes de cette force seront

$$m\omega^2h, \qquad 0, \qquad 0$$

et les moments correspondants

$$\begin{aligned} L_0&=0\\ M_0&=m\omega^2h\xi\\ N_0&=-m\omega^2h\eta. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} L+L_0&=-mG\sin\varphi\cdot\eta\\ M+M_0&=-m(G\cos\varphi-\omega^2h)\zeta+mG\sin\varphi\cdot\xi\\ N+N_0&=m(G\cos\varphi-\omega^2h)\eta. \end{aligned}$$

En y posant

$$\begin{aligned} G\cos\varphi-\omega^2h&=g\cos\psi\\ G\sin\varphi&=g\sin\psi, \end{aligned}$$

où g est la pesanteur du lieu d'observation sous la latitude géographique ψ, il vient

$$\begin{aligned} L+L_0 &= -mg \sin\psi \cdot \eta \\ M+M_0 &= -mg \cos\psi \cdot \zeta + mg \sin\psi \cdot \xi \\ N+N_0 &= mg \cos\psi \cdot \eta. \end{aligned}$$

Quant aux coordonnées ξ, η, ζ du centre de gravité, on peut les représenter comme fonctions du temps de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{g\cos\psi}{\omega^2}(1-\cos\omega t-\omega t\sin\omega t) \\ \eta &= \frac{g\cos\psi}{\omega^2}(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t) \\ \zeta &= -\frac{1}{2}g\sin\psi\cdot t^2. \end{aligned}$$

§ 3. - Par conséquent les équations différentielles (1) peuvent s'écrire:

$$(1') \qquad \begin{aligned} \frac{dP}{dt}-\omega Q &= -\frac{mg^2}{\omega^2}\sin\psi\cos\psi(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t) \\ \frac{dQ}{dt}+\omega P &= \frac{mg^2}{\omega^2}\sin\psi\cos\psi\left(1+\frac{1}{2}\omega^2t^2-\cos\omega t-\omega t\sin\omega t\right) \\ \frac{dR}{dt} &= \frac{mg^2}{\omega^2}\cos^2\psi(\sin\omega t-\omega t\cos\omega t). \end{aligned}$$

§ 4. - Avant d'intégrer ces équations, supposons qu'à l'instant $t=0$ le centre de gravité coïncide avec l'origine O, et les axes principaux d'inertie avec les axes des ξ, η, ζ. Alors, à l'instant $t=0$, les moments centrifuges du corps étant $D_0=E_0=F_0=0$, et A_0, B_0, C_0 désignant les moments principaux d'inertie, les composantes initiales du vecteur instantané seront:

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= -Ap+Fq+Er=0 \\ \mathrm{M}_0 &= Fp-Bq+Dr=0 \\ \mathrm{N}_0 &= Ep+Dq-Cr=-C_0\omega. \end{aligned}$$

Les valeurs initiales des composantes du « vecteur relatif », s'exprimant en général dans la forme

$$\lambda=\sum m(y\dot{z}-z\dot{y}), \qquad \mu=\sum m(z\dot{x}-x\dot{z}), \qquad \nu=\sum m(x\dot{y}-y\dot{x}),$$

sont $\lambda_0=\mu_0=\nu_0=0$, parce que le corps est abandonné sans vitesse relative.

Par conséquent l'état initial est défini par les valeurs suivantes:

$$(2) \qquad \begin{aligned} P_0 &= \lambda_0-\Lambda_0=0 \\ Q_0 &= \mu_0-\mathrm{M}_0=0 \\ R_0 &= \nu_0-\mathrm{N}_0=C_0\omega. \end{aligned}$$

Le corps a donc dans son état initial une impulsion qui s'exprime par $C_0\omega$, en conséquence de quoi il tourne autour de l'axe instantané.

Nous voyons que l'état initial du corps conçu comme un système des points matériels n'est pas défini seulement par la position initiale et la vitesse initiale du centre de gravité, mais encore par sa rotation relative autour de l'axe instantané.

Tant que le corps est soutenu par le centre de gravité, son énergie de rotation est donnée par l'expression

$$T_0 = -\frac{1}{2}(p\Lambda_0 + q\mathrm{M}_0 + r\mathrm{N}_0) = \frac{1}{2} C_0 \omega^2.$$

En projetant le vecteur de rotation instantanée $(\overline{\omega})$ sur le vecteur instantané $(\overline{\Sigma}_0)$, il s'ensuit la relation

$$\omega \cos(\overline{\omega}, \overline{\Sigma}_0) = -\frac{2T_0}{\Sigma_0} = -\omega, \quad \text{donc} \quad \cos(\overline{\omega}, \overline{\Sigma}_0) = -1.$$

On y reconnaît un théorème de POINSOT [1] concernant le mouvement d'une toupie, en conséquence de quoi le corps, soutenu par son centre de gravité et tournant autour de l'axe instantané avec la vitesse angulaire ω peut être considéré de même comme une toupie.

§ 5. - Intégration des équations (1'). A cet effet, nous différentions la première des équations (1') selon t, en y substituant dQ/dt de la seconde équation et nous obtenons ainsi la suivante équation différentielle linéaire non homogène du second ordre:

$$\frac{d^2P}{dt^2} + \omega^2 P = \frac{mg^2}{\omega} \sin\psi \cos\psi \left(1 + \frac{1}{2}\omega^2 t^2 - \cos\omega t - 2\omega t \sin\omega t\right). \tag{3}$$

Selon un procédé connu nous posons

$$P = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t \tag{4}$$

et il s'ensuit

$$\frac{dP}{dt} = -C_1\omega \sin\omega t + C_2\omega \cos\omega t, \tag{5}$$

où les fonctions C_1 et C_2 doivent satisfaire aux conditions

$$\cos\omega t \cdot \frac{dC_1}{dt} + \sin\omega t \cdot \frac{dC_2}{dt} = 0 \tag{6}$$

$$-\sin\omega t \cdot \frac{dC_1}{dt} + \cos\omega t \cdot \frac{dC_2}{dt} = \gamma, \tag{6'}$$

où

$$\gamma = \frac{mg^2}{\omega^2} \sin\psi \cos\psi \left(1 + \frac{\omega^2 t^2}{2} - \cos\omega t - 2\omega t \sin\omega t\right).$$

Les équations (6) et (6') donnent

$$\frac{dC_1}{dt} = -\gamma \sin\omega t, \qquad \frac{dC_2}{dt} = \gamma \cos\omega t \tag{7}$$

---

[1] v. APPEL: *Cours de mécanique rationnelle*, Paris 1911, II, p. 163.

et en intégrant ces équations, on obtient à l'aide de l'expression pour γ:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= m\frac{g^2}{\omega^3}\sin\psi\cos\psi\left[\frac{1}{2}\omega^2t^2(1+\cos\omega t)-\omega t\sin\omega t-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\cos 2\omega t-\frac{1}{2}\omega t\sin 2\omega t\right]+c_1,\\
C_2 &= m\frac{g^2}{\omega^3}\sin\psi\cos\psi\left[-\frac{1}{2}\omega t+\frac{1}{2}\omega^2t^2\sin\omega t+\omega t\cos\omega t-\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{2}\omega t\cos 2\omega t\right]+c_2.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Pour déterminer les constantes c_1 et c_2 nous posons (8) dans (4), et en tenant compte de ce qu'à l'instant $t=0$ selon (2) devient $P_0=0$, il résulte

$$c_1=\frac{1}{2}m\frac{g^2}{\omega^3}\sin\psi\cos\psi$$

et

$$P=m\frac{g^2}{\omega^3}\sin\psi\cos\psi\left(\frac{1}{2}\omega^2t^2-\omega t\sin\omega t+\frac{1}{2}\omega^2t^2\cos\omega t\right)+c_2\sin\omega t. \tag{9}$$

§ 6. - Pour obtenir Q nous formons

$$\frac{dP}{dt}=m\frac{g^2}{\omega^2}\sin\psi\cos\psi\left(\omega t-\sin\omega t-\frac{1}{2}\omega^2t^2\sin\omega t\right)+c_2\omega\cos\omega t$$

et en posant ceci dans la première des équations (1') on obtient

$$Q=m\frac{g^2}{\omega^2}\sin\psi\cos\psi\cdot t\left(1-\cos\omega t-\frac{1}{2}\omega t\sin\omega t\right)+c_2\cos\omega t. \tag{10}$$

Quant à la constante c_2 nous la déterminons à l'aide des équations (2) et trouvons $c_2=0$. Nous intégrons encore la troisième des équations (1'), ce qui nous fournit R comme fonction du temps et nous avons

$$
\begin{aligned}
P &= m\frac{g^2}{2\omega^2}\sin\psi\cos\psi\cdot t(\omega t-2\sin\omega t+\omega t\cos\omega t)\\
Q &= m\frac{g^2}{\omega^2}\sin\psi\cos\psi\cdot t\left(1-\cos\omega t-\frac{1}{2}\omega t\sin\omega t\right)\\
R &= 2m\frac{g^2}{\omega^3}\cos^2\psi\cdot\left(1-\cos\omega t-\frac{1}{2}\omega t\sin\omega t\right)+C_0\omega.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Les expressions pour Q et R donnent encore cette simple relation:

$$\frac{Q}{R-C_0\omega}=\frac{1}{2}\omega t\,\mathrm{tang}\,\psi.$$

§ 7. - En développant les fonctions trigonométriques en séries, et en tenant compte de ce que ωt est petit, il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
P &= -\frac{1}{12}mg^2\omega t^4\sin\psi\cos\psi\\
Q &= \frac{1}{24}mg^2\omega^2t^5\sin\psi\cos\psi\\
R &= \frac{1}{12}mg^2\omega t^4\cos^2\psi+C_0\omega.
\end{aligned}
\tag{11'}
$$

§ 8. - Transformons encore P, Q, R par rapport au système de coordonnées $Oxyz$, dont l'axe des x est parallèle à la tangente au méridien du lieu d'observation et dirigé vers le Nord, l'axe des y coïncide avec le précédent des η et celui des z avec la verticale du lieu, dirigé vers le bas. Alors nous aurons entre P, Q, R et P', Q', R' qui correspondent à ce nouveau système les relations suivantes :

$$\begin{aligned} P' &= -P\sin\psi + R\cos\psi \\ Q' &= Q \\ R' &= -P\cos\psi - R\sin\psi. \end{aligned}$$

Par suite, à l'égard de (11'), on trouve

$$(12)\qquad \begin{aligned} P' &= \left(C_0 + \frac{1}{12}mg^2t^4\right)\omega\cos\psi \\ Q' &= \frac{1}{24}mg^2\omega^2t^5\sin\psi\cos\psi \\ R' &= -C_0\omega\sin\psi. \end{aligned}$$

Les termes $C_0\omega\cos\psi$ et $-C_0\omega\sin\psi$ sont les impulsions initiales du corps par rapport à l'axe horizontal (x) et à l'axe vertical (z).

Nous voyons que l'impulsion donnée par R' ne varie pas pendant le mouvement du corps, tandis que celle exprimée par P' augmente de

$$\frac{1}{12}mg^2t^4\,\omega\cos\psi = \frac{1}{3}mz^2\,\omega\cos\psi,$$

où

$$z = \frac{1}{2}gt^2$$

désigne la hauteur de chute du centre de gravité du corps. Cette augmentation dépassera l'impulsion initiale à un degré considérable, quand le corps tombe d'une grande hauteur. Aussi dans la direction vers l'Est l'impulsion Q' atteint-elle une valeur appréciable.

§ 9. - Les expériences de REICH. Pour avoir une notion des valeurs des moments d'impulsion (12), je me sers des données numériques citées par REICH [1].

Les boules de zinc avaient le diamètre de $2a = 4{,}034$ cm, la masse $m = 270{,}45$ gr, la hauteur de chute $z = 15850$ cm, la durée de chute $t = 5{,}7$ sec, ($g = 981$ cm sec^{-2}, $\omega = 0{,}000073$ sec^{-1}, $\psi = 50°53'$).

On trouve

$$C_0 = \frac{2}{5}ma^2 = 440{,}2 \text{ gr cm}^2$$

$$C_0\omega = 0{,}0213, \qquad C_0\omega\cos\psi = 0{,}0203, \qquad C_0\omega\sin\psi = 0{,}0249 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-1}$$

$$P' = 0{,}0203 + 1{,}05\cdot 10^6, \qquad Q' = 170, \qquad R' = -0{,}025 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

---

[1] T. REICH, l. c., pag. 14.

De là s'ensuit pour le moment résultant par rapport à l'axe horizontal

$$\sqrt{P'^2+Q'^2}=1{,}05\cdot 10^6 \text{ gr cm}^2 \text{ sec}^{-1},$$

où le moment initial $C_0\omega\cos\varphi=0{,}0203$ est sans importance.

La valeur trouvée pour le vecteur résultant nous donne une explication du phénomène observé pour la première fois par GUGLIELMINI en 1791 à Bologne, notamment de la rotation des corps pendant leur chute.

REICH observa non seulement une plus grande rotation autour de l'axe horizontal, mais parfois aussi une plus petite rotation autour d'un axe vertical, ce qui correspondrait à l'effet du plus grand moment P' et du plus petit R'.

Cependant il faut remarquer que dans ces expériences les boules n'étaient pas suspendues par leur centre de gravité, comme je suppose dans ce qui précède. Plutôt on prit soin « de poser artificiellement le centre de gravité au-dessus du centre des boules suspendues, afin d'empêcher leur rotation ». Mais ces efforts devaient être vains, car les boules saisies au début de leur chute par une impulsion de rotation relative autour de l'axe instantané, ne pouvaient être empêchées de tourner. A cet égard la remarque de REICH: « Nous n'étions pas en état d'observer avec sûreté si cela a été obtenu », mérite d'être soulignée.

Si cet observateur, de même que GUGLIELMINI, avait constaté que les boules ne tournaient pas, il aurait en même temps constaté que la Terre ne tourne pas. Sous ce rapport le phénomène de GUGLIELMINI est une preuve de plus en faveur de la doctrine de COPERNIC et en même temps l'accomplissement des paroles légendaires: « Eppure si muove ».

N. N. PARFENTIEFF (Kazan - U. S. S. R.)

LA PHILOSOPHIE DE LA NATURE CHEZ N. J. LOBATCEWSKI

Plus notre moderne pensée mathématique et philosophique se plonge dans ses problèmes actuels, plus nous nous persuadons que diverses pensées, idées et méthodes de LOBATCEWSKI, de ce génie puissant et profond, pénétrent dans toutes les branches des sciences physico-mathématiques, influencent sur leur développement, et plus nous voyons quelle grande valeur a et continuera à avoir la géométrie Non-Euclidienne de LOBATCEWSCKI en général pour la philosophie de la Nature.

Je dois noter encore qu'il n'y a pas longtemps, ont été trouvés dans les Archives de l'Université de Kazan quelques nouveaux matériaux scientifiques (manuscrits) relatifs aux idées de LOBATCEWSKI sur l'enseignement et sur les programmes de quelques cours qu'avait professés LOBATCEWSKI à l'Université de Kazan pendant l'époque 1824-1826 et 1839.

Ces manuscrits, quoique simples remarques explicatives aux cours de l'Analyse, de la Mécanique analytique et de la Physique mathématique, sont frappants par leur profondeur mathématique et philosophique: presque chaque ligne porte en elle-même des traces de génie et d'esprit pénétrant. Quelques mots au sujet du caractère de ma communication que j'ai l'honneur et l'audace de présenter au Congrès International des Mathématiciens à Bologne. Je ne puis pas traiter le problème de la philosophie de la Nature chez LOBATCEWSKI en le développant jusqu'au bout: le manque du temps ne me le permet pas! Je voudrais seulement donner quelques traits typiques pour la philosophie du pénétrant génie de LOBATCEWSKI, tels qu'on peut les soupçonner à la base de tout ce que nous savons de LOBATCEWSKI et par LOBATCEWSKI, en confirmant mes conclusions par laconiques remarques et démonstrations.

* * *

1. - Depuis que la science est née, les savants de toutes les époques tâchaient de comprendre d'où vient l'Univers et comment il est fait. La plus grande valeur du système de la géométrie Non-Euclidienne de LOBATCEWSKI consiste en ce que LOBATCEWSKI peut-être pour la première fois a posé le problème au sujet de l'Univers dans la partie qui touche le problème de l'espace et du temps:

pour lui, il s'agit de décider non pas comment est fait notre espace, mais il s'agit de décider *comment il aurait pu être.*

« Inutile problème », disent les savants de toutes les époques du monde! Mais le fait que le système de la géométrie Non-Euclidienne, de nos jours, est devenu presque un instrument précieux et puissant dans les traitements des problèmes les plus actuels et peut-être les plus pratiques (j'ai en vue la géométrie et la mécanique des atomes p. e.), nous persuade très bien que des systèmes et des théories scientifiques, quoiqu'ils portent en eux-mêmes des élévements *d'arbitraire* et *de pure fantaisie* bridée par la logique, tout de même, un jour dans l'avenir pourront devenir tout à fait utiles au point de vue pratique et nécessaires au point de vue du réel en élargissant et en faisant plus exactes nos conceptions du réel qui existaient déjà dans nos constructions scientifiques. C'est le fait de la grande portée philosophique et scientifique!

2. - Est ce qu'il y a, selon LOBATCEWSKI, des connaissances d'un caractère absolu? Oui, ce sont les Mathématiques, parce qu'elles sont basées sur les lois de notre pensée, et j'ose affirmer que selon LOBATCEWSKI *ces lois de notre pensée ce sont des lois de la Nature elle-même.*

Or, selon LOBATCEWSKI, les Mathématiques sont absolument certaines, c'est la vérité absolue. Voilà pourquoi nous devons tâcher d'élaborer le monde extérieur avec des méthodes mathématiques. Mais ici nous rencontrons une difficulté insurmontable. LOBATCEWSKI a décrit et caractérisé cette difficulté avec un génial succès. Aucune branche de la science n'est imaginable et n'est possible, si notre esprit n'a pas créé pour cette branche des fondements correspondants, mais aucun système scientifique ne peut pas être construit sans admettre certains postulats, certains principes. Voilà pourquoi même les sciences telles que la géométrie, la mécanique analytique, la physique mathématique sont exactes autant qu'elles se développent déductivement et mathématiquement sur les bases mathématiques, mais au point de vue de leurs correspondances à la réalité elles sont seulement approximatives.

Or, nous voyons que selon LOBATCEWSKI la réalité, que nous devons empiriquement étudier, nous aide à créer par abstraction, des postulats, des bases, mais, comme la science est déjà créée, elle n'est en son essence nullement empirique.

En développant ses vues générales au sujet de l'enseignement de la physique mathématique dans son cours de 1825-1826 LOBATCEWSKI a dit: «... les bases plus ou moins vraies ou plutôt vraisemblables existent en Astronomie et en quelques parties de la physique, mais très souvent on prend pour le développement de ces branches physiques, comme base, des postulats et des principes pas assez fondés. Mais c'est un grand défaut, sur lequel le professeur doit toujours attirer l'attention de ses élèves, autrement un tel professeur ne fera que compro-

mettre les Mathématiques faussement appliquées pour le développement mathématique de ces parties physiques ».

Voilà pourquoi LOBATCEWSKI dans son enseignement de la physique mathématique étudiait beaucoup d'abord des faits expérimentaux, des cas particuliers d'un phénomène, pour qu'il fut possible un peu plus tard, à la base des principes admis dans la forme mathématique, de donner un système abstrait et idéalisé qui pourrait prétendre à être une image du réel, mais un tel système est celui des conceptions des rapports entre des choses, mais pas du tout celui des choses elles-mêmes.

3. - D'après ce que nous avons dit, on peut conclure que LOBATCEWSKI a donné beaucoup d'importance au rôle des hypothèses pour les sciences physico-mathématiques. Et réellement, même aux théories mathématiques basées sur des principes contradictoires, LOBATCEWSKI donnait beaucoup d'attention, parce que ni l'une, ni l'autre de ces théories contradictoires très souvent ne peut pas être annoncée comme fausse, tandis que et l'une et l'autre très souvent fait réfléchir le savant au sujet des fondements du phénomène.

On peut soupçonner qu'en exprimant une telle opinion au sujet du rôle de l'hypothèse dans la science, LOBATCEWSKI avait devant ses yeux les théories de la lumière de NEWTON et de FRESNEL : et c'est justement parceque l'une et l'autre hypothèse permettait d'expliquer le réel et prédire le réel. Or, nous voyons que LOBATCEWSKI, au contraire de Newton, regarde le principe « Hypotheses fingo » comme un instrument qui peut être très utile pour l'étude du phénomène physique à nous inconnu !

4. - Mais est ce qu'il y a d'absolu, que nous saisissons quelquefois, *seulement* dans les lois logiques de notre pensée, de notre esprit ? Non, il y en a quelque chose supralogique qui nous permet quelquefois de deviner des vérités ou nous approcher de celles-ci. En méditant au sujet des pensées développées par LOBATCEWSKI sur les traits caractéristiques de la méthode analytique et de celle synthétique, je crois que je ne me trompe pas, si je dis que LOBATCEWSKI donnait beaucoup d'importance au rôle de l'intuition. Je regrette beaucoup de ne pouvoir reproduire ici textuellement les pensées profondes et en même temps claires de LOBATCEWSKI au sujet des méthodes synthétique et analytique. LOBATCEWSKI pense que la méthode synthétique est celle d'invention, de la découverte d'une vérité ou d'une loi $\kappa\alpha\tau'\grave{\varepsilon}\xi o\chi\acute{\eta}\nu$; pour lui, il est tout à fait clair que sans doute la vérité ne peut jamais être découverte par la méthode analytique et il souligne que, dans la synthèse « se cachent toujours des richesses qu'il est possible de découvrir exclusivement aux génies ». Mais comme le génie ne sait pas très souvent s'il a atteint une telle ou une autre vérité, je crois que LOBATCEWSCKI croyait à l'intuition, comme telle, qui est opposée à l'intelligence.

A la méthode synthétique, à cause de son caractère spécifiquement opposé à celle analytique, LOBATCEWSKI donnait beaucoup d'attention et, dans son enseignement universitaire, il jugeait la méthode synthétique comme inévitable et unique jusqu'à un certain moment dans des questions des fondements de l'une ou de l'autre branche de la science et pour les problèmes de la nature axiomatique.

5. - Comme les lois logiques de notre pensée sont une chose unique qui porte en elle-même quelque chose d'absolu, LOBATCEWSKI certainement, on peut le dire, tenait pour véritable la proposition suivante, très générale et très belle: « *les plus vraies démonstrations ce sont celles basées sur l'arithmétique ou sur l'idée du nombre dans le sens le plus large de ce mot* ». Et LOBATCEWSKI l'a contrôlé de son immortelle géométrie Non-Euclidienne, l'irréprochabilité logique dont il a démontré entre d'autres vérifications par ses remarquables applications de la géométrie « imaginaire » au calcul des intégrales définies. En passant, je ne puis m'abstenir de remarquer que les méthodes développées dans le mémoire cité n'ont pas encore dit, à mon opinion, leur dernier mot.

Je crois que, par ce mémoire, LOBATCEWSKI a démontré inconsciemment la proposition suivante, que je soutiens toujours:

« *Dans les Mathématiques il n'existe aucune branche tout à fait abstraite qui ne puisse pas être appliquée un jour à certains phénomènes dans le monde réel* ».

6. - LOBATCEWSKI, possédant une grande puissance d'abstraction, en même temps était très grand réaliste: c'est ce que montrent ses célèbres paroles seulement de nos jours devenues tout à fait compréhensibles et intelligibles: « *Dans la Nature nous ne connaissons que des mouvements, sans lesquels toutes nos perceptions sensibles sont impossibles..... Il ne faut jamais douter que des forces produisent tout: mouvement, vitesses, temps, masses, et même distances et angles* ».

Je ne veux pas développer ces pensées au point de vues des théories géométriques, mécaniques et physiques des nos jours, parce que c'est un sujet immense et parce que je l'ai fait déjà dans mon mémoire: « Le système Non-Euclidien de LOBATCEWSKI et son rôle dans le développement des sciences physico-mathématiques » (*Ad annum centesimum* MCMXXVI *a geometra Kasaniensi N. J. Lobatcewski Non-Euclideae geometriae systematis inventi concelebrandum.* Edidit Physico-Math. Soc. Univ. Kazaniensis, 1927).

Et seulement je veux noter ici un fait assez singulier: du fait que la géométrie Euclidienne est valable également et pour l'horisphère de LOBATCEWSKI, découle la pensée devenue banale de nos jours, qu'il doit exister des squelettes géométriques qu'on peut revêtir et transformer dans des espaces de diverse structure extérieure, mais ces derniers (espaces) auront la même géométrie.

Je reproduis ici cette proposition exclusivement pour noter que cette belle et abstraite vérité de la géométrie formelle n'a pu pendant longtemps attirer l'attention des géomètres.

7. - Que LOBATCEWSKI ait été un très grand réaliste, le démontre sa relation contraire à la conception « l'infini »! L'infini c'est une chose insaisissable selon lui et par conséquent à l'exception de la conception « limes », qui est basée sur cette notion, il ne faut ni opérer, ni introduire dans les Mathématiques des méthodes basées sur cette conception. Cela peut nous sembler un peu étrange, pour nous qui possédons de toutes nouvelles branches des Mathématiques telles que la théorie des ensembles ou des nombres transfinis. Mais, à son époque LOBATCEWSKI a été tout simplement choqué par des démonstrations, p. e. basées sur l'idée « l'infini » et des démonstrations encore tout à fait fausses, dans la théorie des parallèles.

8. - De ces mêmes « Remarques explicatives » aux cours de LOBATCEWSKI on peut voir qu'il était plutôt véritable atomiste dans ses vues sur la structure de la matière. A cause de cela LOBATCEWSKI, au fond ne croyait pas pour admissible d'opérer dans la physique mathématique toujours avec des équations différentielles, et il pensait qu'il serait peut être plus préférable d'opérer avec des équations aux différences finies.

A cause de ce fait LOBATCEWSKI encore une fois souligne que les lois de la Nature découvertes mathématiquement avec l'aide de l'analyse infinitésimale peuvent être seulement approximatives, même chez lui se rencontre déjà une conception de loi de la Nature du caractère statistique, il parle déjà des lois, comme de lois moyennes.

Or LOBATCEWSKI était, comme Poisson, atomiste et à ce point de vue ils appartenaient tous les deux à l'école atomistique Laplacienne. Je répète encore une fois que ses « Remarques explicatives » frappent le lecteur par la largeur et la profondeur des pensées. LOBATCEWSKI s'intéressait toujours plutôt pour des problèmes de la nature principielle et par conséquent il n'est pas du tout étonnant qu'en causant sur le programme de l'enseignement de la mécanique analytique, il soulève des problèmes des postulats de la mécanique et de ses principes en s'élevant dans ses jugements critiques jusqu'au problème des liaisons. Ni Lagrange, ni Laplace ne satisfont LOBATCEWSKI; il apprécie davantage Poisson et Fourier qui ont fait dans ces buts presque tout: « ils ont regardé tous les cas qui peuvent se présenter dans la Nature ». Mais LOBATCEWSKI ajoute de suite: « Il me semble que je pourrai éloigner des défauts, mais je préfère attendre les opinions d'autres géomètres et jusqu'à un certain moment je suivrai tout simplement dans mon enseigement les illustres mathématiciens Poisson et Fourier ».

Il faut noter que LOBATCEWSKI a présenté ses programmes à l'approbation

de la Faculté Physico-Mathématique de l'Université à Kazan; en passant, on peut noter, à quelle hauteur se trouvait justement, grâce à LOBATCEWSKI, l'enseignement mathématique, pendant les premières années de l'existence de l'Université de Kazan.

9. - En terminant ma communication, je voudrais m'arrêter sur quelques points d'un caractère général et un peu philosophique. LOBATCEWSKI, en passant dans ses remarques explicatives au sujet de la philosophie et de son utilité pour les Mathématiques, s'exprime ainsi : « Les mathématiques doivent être tout à fait indépendantes de la philosophie. À un certain point de vue, on peut dire que la philosophie s'achève là où les Mathématiques doivent commencer ». Cette phrase nous montre clairement que les Mathématiques selon leur nature spécifique englobent déjà la philosophie. Je ne veux pas discuter le problème, si la philosophie comme telle, est nécessaire ou inutile, mais on peut affirmer une chose, c'est que la philosophie sans les Mathématiques ne peut exister. Et de ce point de vue on peut dire que justement de nos jours toutes les sciences se mathématisent, se géométrisent et s'axiomatisent et même la philosophie, comme nous le voyons dans les ouvrages de Bergson. Et ici, en passant, je remarque que beaucoup de propositions de Bergson peuvent trouver un certain soutien dans les idées de LOBATCEWSKI.

De tout ce que j'ai dit, on peut conclure que LOBATCEWSKI a été un grand penseur, un grand géomètre et un très habile analyste et en même temps un grand philosophe et que, peut être, à notre grand regret, nous ne le connaissons pas tout à fait bien.

D. RIABOUCHINSKY (Paris - Francia)

VALEUR ET ORIGINE D'UN NOMBRE

1. - Nous considérons comme un axiome la proposition suivante: A toute opération effectuée sur un nombre, correspond une opération inverse qui, effectuée sur le résultat de l'opération directe, redonne le nombre primitif. L'évidence de cette vérité découle probablement de l'intuition que l'on a qu'après avoir effectué l'opération directe, il suffirait d'invertire le cours du temps pour effectuer cette opération en sens inverse, et revenir aux conditions initiales. On pourrait appeler ce principe, principe de la reversibilité des opérations algébriques.

2. - Soit f le symbole d'une opération bien déterminée qui, étant effectuée sur le nombre x, conduit au nombre y

$$y=f(x) \tag{1}$$

et f^{-1} le symbole de l'opération inverse

$$x=f^{-1}(y). \tag{2}$$

Il résulte de l'axiome fondamentale que le nombre x est complétement défini, et d'une façon univoque, par l'opération f^{-1} effectuée sur le nombre y.

On a évidemment en raison de (1) et de (2)

$$y=f(x)=f(f^{-1}(y)), \tag{3}$$

$$x=f^{-1}(y)=f^{-1}(f(x)). \tag{4}$$

Si l'opération f est bien déterminée pour l'ensemble E des nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n$ on pourra faire correspondre à chaque élément de cet ensemble un élément, et un seul, de l'ensemble E' formé par la suite des nombres:

$$y_1=f(x_1), \quad y_2=f(x_2), \ldots, \quad y_n=f(x_n). \tag{5}$$

En désignant par x l'un quelconque des éléments de l'ensemble E et par y l'élément correspondant de l'ensemble E', nous conviendrons de dire que y est une fonction f de l'argument x pour l'ensemble E et x une fonction f^{-1} de l'argument y pour l'ensemble E'.

Les éléments des ensemble E et E' peuvent être des nombres quelconques, réels ou imaginaires, pourvu qu'ils soient suffisamment définis pour qu'on puisse les employer sans ambiguité.

3. - Il peut se produire évidemment que quelques-uns des éléments de l'ensemble E', par exemple, aient une même valeur numérique, tandis que les valeurs des éléments correspondants de l'ensemble E sont différents. On dit dans ce cas que la fonction f^{-1} est non uniforme et on applique ensuite un raisonnement qui peut être résumé comme suit:

Si la fonction f fait correspondre à ν éléments $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ de l'ensemble E, ν nombres de l'ensemble E' qui, ayant tous une même valeur numérique, se réduisent à un seul nombre y_c,

$$y_c=f(x_\alpha), \quad y_c=f(x_\beta), \ldots, \quad y_c=f(x_\lambda), \tag{6}$$

la fonction inverse f^{-1} fera correspondre au nombre y_c les ν nombres $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ et on doit en conclure que la fonction inverse peut être décomposée dans ce cas en ν fonctions uniformes, les branches ou les déterminations de la fonction non uniforme $x=f^{-1}(y)$,

$$x_\alpha=f_1^{-1}(y_c), \quad x_\beta=f_2^{-1}(y_c), \ldots, \quad x_\lambda=f_\gamma^{-1}(y_c). \tag{7}$$

Toutes les ν déterminations (7) vérifient la relation

$$f\{f_i^{-1}(y_c)\}=y_c, \qquad i=1, 2, \ldots, \nu, \tag{8}$$

mais ce n'est que leur ensemble qui constitue la fonction inverse de la fonction

$$y=f(x).$$

Pour démontrer la nécessité d'une pareille décomposition de la fonction f, il peut sembler suffir de remarquer qu'il serait impossible d'obtenir ν nombres différents $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ en effectuant ν fois la même opération f^{-1} sur le même nombre y_c. Par conséquent pour définir complétement le nombre $x=f^{-1}(y)$, il faut indiquer la valeur numérique du nombre y et la détermination de la fonction f^{-1}.

On peut cependant se placer aussi à un point de vue différent.

4. - Il est certainement impossible d'obtenir ν nombres $x_\alpha, x_\beta, \ldots, x_\lambda$ en effectuant ν fois la même opération f^{-1} sur le même nombre y_c, mais on peut remarquer qu'il n'est pas indispensable de dire que y_c exprime toujours le même nombre. En effet, la valeur numérique des nombres y_c est la même, mais leur origine, définie par les équations (6), peut être différente. Par conséquent, pour définir complétement le nombre

$$x=f^{-1}(y)$$

il faut indiquer la valeur numérique et l'origine de l'argument y, c'est-à-dire qu'il faut donner ce dernier sous la forme $y=f(x_k)$.

Il n'est donc plus nécessaire de donner des précisions complémentaires sur la fonction elle-même ; l'argument y conserve mieux ainsi le caractère de variable indépendante.

Soit l'équation

$$\arcsin y+y-1-\frac{\pi}{2}=0. \tag{9}$$

En se plaçant au point de vue que nous venons de discuter, on peut dire que cette équation a comme racine l'unité

$$y=\sin\frac{\pi}{2}=1. \tag{10}$$

En appliquant la méthode généralement admise, discutée dans le n.° 3, il faudra dire, pour exprimer la même chose, qu'on peut satisfaire à l'équation (9) en donnant à y la valeur un et en prenant la détermination de l'arc sin qui se réduit à $\frac{\pi}{2}$ pour $y=1$.

La première de ces méthodes a l'avantage de remplacer les commentaires verbaux par un symbolisme clair et simple.

Nous discuterons quelques exemples de l'application des principes que nous venons de définir.

5 - En cherchant à condenser dans une seule expression les solutions multiples des équations de la forme

$$a|x-a|+bx+c=0, \tag{11}$$

$$a|x-a|+b|x-\beta|+cx+d=0, \tag{12}$$

$$||a_2x+b_2|+a_1x+b_1|+ax+b=0, \tag{13}$$

. . . . . .

j'ai été conduit à interpréter le symbole $|x|$ non pas simplement comme la valeur absolue de x, mais comme le symbole d'une opération élémentaire qui, effectuée sur des nombres relatifs, conduit aux nombres absolus. En raison de l'axiome fondamentale cette opération détermine une opération inverse. J'ai exprimé cette dernière par le symbole $\overline{|}$ pour souligner l'analogie avec le radical $\sqrt{\ }$ de l'extraction d'une racine carrée :

$$\begin{aligned} y&=x^2, \qquad x=\pm\sqrt{y} \\ y&=|x|, \qquad x=\pm\overline{|y}. \end{aligned} \tag{14}$$

Nous nommerons ces deux opérations élémentaires : passage à la valeur absolue, et retour à la valeur relative.

L'opération $\overline{|y}$ n'est déterminée que pour les valeurs positives de y et n'a pas de sens lorsqu'on donne à y des valeurs négatives. C'est cette circonstance

qui détermine l'utilité du nouveau symbole, l'apparition du nombre imaginaire $\sqrt{-1}$ dans l'expression de la solution d'une équation est le signal que cette équation n'a pas de solution.

Nous emploierons la lettre j pour exprimer la nouvelle unité imaginaire

$$j=-\sqrt{-1}=1, \qquad |j|=-1. \tag{15}$$

Cette expression montre qu'on peut toujours remplacer j par l'unité et *vice-versa*, mais à l'exclusion du cas où cette grandeur figure sous le symbole du passage à la valeur absolue et si ce symbole la concerne directement (1). La valeur numérique de j est égale à l'unité et son origine est déterminée par le symbole $-\sqrt{-1}$. Les propriétés des fonctions $|x|$ et $\sqrt{x}$ découlent des relations fondamentales (2):

$$|x|^2=x^2, \qquad \sqrt{x}=x.$$

Pour se rendre compte de l'utilité du simbole $\sqrt{\ }$ on peut discuter, par exemple, les solutions des équations (11), (12) et (13) qui, comme je l'ai démontré dans les mémoires déjà cités, s'expriment comme suit:

$$x=a\pm\sqrt{-\frac{c+ba}{a\pm b}} \tag{16}$$

$$x=\beta\pm\sqrt{\pm\left(a-\beta(\pm)_1\sqrt{-\frac{\pm b(a-\beta)+ac+d}{a(\pm)_1(\pm b+c)}}\right)} \tag{17}$$

$$x=-\frac{b_2}{a_2}\pm\frac{1}{a_2}\sqrt{\frac{a_1b_2-a_2b_1}{(a_2\pm a_1)}(\pm)_1\frac{a_2}{(a_2\pm a_1)}\sqrt{\frac{(ab_2-a_2b)\pm(ab_1-a_1b)}{a_2\pm a_1\pm(\pm)_1a}}} \tag{18}$$

. . . . . .

où il faut prendre, dans les expressions (17) et (18), les quatre combinaisons possibles des signes $\pm$ et $(\pm)_1$.

6. - Dans une courte note « Prerivistaja Géométria » (Géométrie discontinue) N. V. BOUGAIEFF (3) avait envisagé la possibilité d'établir entre la théorie des fonctions et la géométrie discontinue un lien pareil à celui qui existe entre l'analyse et la géométrie. Comme illustration de cette idée, Bougaieff donne des équations de régions, de systèmes de droites et de points isolés en employant la fonction discontinue $E(x)$, définie comme le moindre des deux nombres entiers entre lesquels se place la valeur de x.

Dans son mémoire « Sur l'emploi de valeurs absolues dans la géométrie analytique » (4) A. SÖDERBLOM montre, sur un grand nombre d'exemples, la diversité

---

(1) *La fonction* $|x|$. Bulletin de l'Institut aérodynamique de Koutchino, fasc. V, Moscou, 1914. — *Calcul des valeurs absolues*, Copenhague, 1919, p. 25.

(2) Compte Rendu du Congrès des Mathématiques, Strasbourg, 1920, p. 239.

(3) Mathematicheski Sbornik, T. XV, Moscou, 1891.

(4) Göteborg, 1906.

des lieux géométriques qu'on obtient en utilisant le symbole $|x|$. Söderblom n'avait pas remarqué une distinction essentielle entre les équations des polygones convexes et concaves. Cette lacune fut comblée par H. GRAUERS (1).

Mais pour qu'il puisse effectivement être question d'une géométrie analytique des figures polygonales ou discontinues, il est certainement indispensable d'introduire l'opération inverse de l'opération $|x|$. On se représente très bien qu'il n'aurait guère été commode de renoncer à tenir compte dans les recherches mathématiques des indications que fournissent les racines carrées sur l'existence ou la non-existence d'une solution.

7. - Considérons deux exemples numériques très élémentaires. Les racines de l'équation (11) peuvent être interprétées comme les abcisses des points d'intersection de la ligne brisée

$$y=a|x-a|+bx+c$$

avec l'axe $y=0$. Il est évident qu'il peut y avoir deux points, un seul point ou aucun point d'intersection. Il peut aussi arriver que l'une des demi-droites formant la ligne brisée, se confonde avec l'axe des x et le point d'intersection devient indéterminé. Mais, pour des motifs analogues à ceux qui conduisent à considérer qu'une équation de second ordre a toujours deux racines réelles ou imaginaires, nous conviendrons de dire que l'équation (11) a toujours deux racines qui peuvent être réelles, imaginaires, ou, l'une d'elle, indéterminée.

Par exemple, en appliquant la formule (16) à l'équation

$$\frac{1}{4}|x|+\frac{3}{4}x-1=0 \tag{19}$$

on trouve comme racines de cette équation :

$$x_1=1, \qquad x_2=2j=2$$

où $j=-\sqrt{-1}$ (voir les formules (15)). Il est utile de remarquer l'analogie qui existe entre la façon dont la racine imaginaire x_2 vérifie l'équation (19) et la façon dont la racine $y=\sin\frac{\pi}{2}=1$ vérifie l'équation (9) du n.° 4. Pour donner un exemple d'une racine indéterminée prenons l'équation :

$$|x-1|+x-1=0.$$

En appliquant la formule (16) on a comme racines de cette équation :

$$x_1=1, \qquad x_2=1-\sqrt{\frac{0}{0}}.$$

---

(1) Nyt Tidsskrift for Matematik, A. n.° 4, Kopenhagen, 1909, p. 109. Le travail de GRAUERS m'a été obligeamment indiqué par J. HJELMSLEV.

Nous pouvons donner au nombre indéterminé $\frac{0}{0}$ une valeur positive ou négative quelconque, mais la racine x_2 n'est réelle que lorsqu'on donne à $\frac{0}{0}$ une valeur positive.

La considération des coordonnées imaginaires et indéterminées des points anguleux permet de discuter la théorie générale des polygones dans le jour du principe de la continuité géométrique.

8. - Nous passerons maintenant à une autre application des principes établis au début de cette communication. Soit l'expression:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$$

qu'on interprête en disant que la fraction $\frac{a}{n}$ tend vers zéro ou a comme limite zéro, lorsque n tend vers l'infini. On peut considérer l'opération

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0 \tag{20}$$

comme une nouvelle opération fondamentale, l'opération du passage à la limite. On peut, en effet, annihiler la distance a entre deux points, en effectuant sur a l'opération du passage à la limite, c'est-à-dire, en rapprochant ces deux points jusqu'à la superposition; l'intuition géométrique nous enseigne que c'est possible, mais il serait certainement impossible d'annihiler l'ultime partie de a par de simples divisions répétées, on ne peut qu'éliminer cette ultime partie et c'est ce que fait l'opération du passage à la limite. Il existe, par conséquent, une différence essentielle entre cette dernière opération et la division.

On emploie souvent l'expression « passage à la limite » [1] mais sans préciser qu'elle renferme l'idée du rapprochement de deux points jusqu'à la superposition et surtout sans préciser que cette opération est une opération fondamentale sui generis.

9. - Nous désignerons par L^{-1} l'opération inverse de L, deux points qui se superposent peuvent être éloignés l'un de l'autre:

$$y = L(x) = 0, \qquad x = L^{-1}(y) = L^{-1}(0). \tag{21}$$

Cette opération inverse est multiforme. On a, en effet,

$$L(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0, \qquad L(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{n} = 0, \ldots.$$

---

[1] Je rappellerai à ce propos une remarque due à JULES TANNERY (*De la méthode dans la Science*, p. 57, Paris, 1910): « Il convient de se défier de certaines expressions vagues et commodes comme « passer à la limite ». Au début de cet article, je me suis permis de dire que les notions de ligne droite, de plan,.... résultaient d'une sorte de passage à la limite. A coup sûr, j'aurais été incapable de préciser ma pensée; j'ai cherché une expression vague pour la rendre; je n'employais nullement un langage scientifique.... ».

où a, b,.... sont des nombres quelconques, et par conséguent

$$a=L^{-1}(0), \qquad b=L^{-1}(0),....$$

Mais en précisant l'origine du zéro qui figure dans la seconde partie de

$$x=L^{-1}(0) \tag{22}$$

on obtient une valeur bien déterminée:

$$0=L(a), \qquad x=L^{-1}L(a)=a.$$

Nous dirons que les zéros

$$0=L(\sqrt{-1}), \qquad 0=L(|\overline{-1}), \tag{23}$$

ont une origine imaginaire et considérons qu'un point dont l'abcisse ou l'ordonnée est un zéro d'origine imaginaire, est un point imaginaire. Mais les carrés des zéros (23) sont réels (1).

Il existe donc une infinité de nombres dont la valeur est zéro, mais dont l'origine est différente. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, dans l'expression $5\cdot 0=0$, l'origine des deux zéros est différente.

À ce point de vue, le calcul infinitésimal et la règle de la détermination des vraies valeurs des formes indéterminées peuvent être caractérisés comme des méthodes basées sur, ou conduisant à, la précision de l'origine de zéros (2).

---

(1) Les nombres complexes $a+\sqrt{-1}b$ ont été d'abord considéré comme nombres imaginaires ou symboles exprimant qu'un problème n'a pas de solution. Mais on se rendit bientôt compte qu'ils présentaient un intérêt plus général et des recherches furent entreprises en vue de trouver d'autres nombres complexes possédant des propriétés analogues à celles des nombres $a+\sqrt{-1}b$. HAMILTON, GRASSMANN et CAUCHY établirent la théorie générale des nombres complexes de n unités et, dans le cas des nombres complexes à deux unités, on fut amené à considérer en plus des nombres $a+\sqrt{-1}b$ les nombres $a+jb$ et $a+kb$, où j et k sont respectivement des racines des équations $x^2=1$ et $x^2=0$.

On peut se demander si les nombres complexes introduits par HAMILTON, GRASSMANN et CAUCHY ne pourraient pas suggérer la définition de nouvelles opérations fondamentales, dont les opérations inverses conduiraient à ces nombres, qui apparaitraient alors comme nombre imaginaires, c'est-à-dire comme symboles qu'un problème n'a pas de solution?

Les résultats que nous avons obtenu plus haut (voir les n.os 5 et 9) permettent de dire que dans le cas des nombres complexes vérifiant les équations $x^2=1$ et $x^2=0$, il en est effectivement ainsi. Nous avons trouvé, en plus des racines réelles $x=\pm 1$ et $x=0$, des racines d'origine imaginaire, $x=\pm|\overline{-1}$ et $x=L(\sqrt{-1})$, vérifiant ces équations.

(2) Il est intéressant de rappeler à ce propos quelques citations que j'emprunte à *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, de L. BRUNSCHWICK (p. 245). Dans une lettre écrite en 1713, LEIBNIZ s'est exprimé comme suit; « nous concevons les infiniments petits non comme des riens absolument, mais comme ayant une existence relative, c'est-à-dire comme s'évanouissant dans le néant, tout en conservant cependant le caractère de ce qui s'évanouit »....
(Je donne la traduction du texte original latin qui figure dans l'ouvrage cité de L. BRUN-

10. - L'opération L est déterminée pour toutes les valeurs finies de x, l'opération inverse n'est définie que pour la valeur $x=0$, et par conséquent les expressions de la forme

$$A=L^{-1}(a), \qquad a\neq 0, \tag{24}$$

n'ont aucun sens si on ne parvient à les définir comme de nouveaux nombres, car dans l'ensemble des nombres finis on ne trouve pas de nombres tels, qu'en effectuant sur eux l'opération du passage à la limite, on obtienne des nombres non nuls.

Il est cependant facile de se rendre compte qu'une expression de la forme (24) pourrait être interprétée comme nombre transillimité. En effet, appliquant l'opération du passage à la limite à un nombre $A=na+a'$, on a

$$L(na+a')=\lim_{n\to\infty}\frac{na+a'}{n}=a$$

et par conséquent

$$L^{-1}(a)=(na+a')_{n\to\infty} \tag{25}$$

où a et a' sont des nombres finis et n est un nombre indéfini. Il est évident qu'on peut considérer aussi des nombres transillimités d'ordre supérieur. Par exemple :

$$A'=L^{-1}A=n(na+a')+a''.$$

En raison de cette convention, nous pouvons écrire pour tout nombre A, fini ou transillimité,

$$L^{-1}L(A)=LL^{-1}(A)=A.$$

Les opérations L et L^{-1} par suite des conventions faites, sont commutatives. Les opérations L et L^{-1} rentrent comme éléments constitutifs dans les opérations d'un ordre plus élevé de la différentiation et de l'intégration. On a en effet, conformément au point de vue de LEIBNIZ et d'EULER,

$$dx=0, \qquad So=Sdx=x.$$

Si l'on introduit les nombres transillimités Sx, les opérations d et S deviennent commutatives,

$$Sdx=dSx.$$

11. - Pour que l'opération du passage à la limite qui, effectuée sur un nombre fini quelconque, conduit à zéro, reproduise aussi bien que possible l'opération

---

SCHWICK). Dans ses *Institutiones calculi differentialis* (1755) EULER a écrit : « Une quantité infiniment petite n'est rien d'autre qu'une quantité évanouissante, et c'est pourquoi, en réalité, elle sera égale à 0 ». Dans le résumé du cours d'analyse infinitésimale de l'Université de Gand (1887), MANSION a employé l'expression suivante : « Le calcul infinitésimal, dans cette manière de voir, est un calcul sur des zéros, mais sur des zéros qui gardent la trace de leur origine, si l'on peut ainsi parler ».

idéale suggérée par l'intuition de la continuité, il est indispensable de définir les règles d'opération avec les symboles $L(x)$ et $L^{-1}(x)$ comme étant en tout point pareilles à celles des nombres $\frac{x}{n}$ et $nx+x'$ respectivement, le nombre n étant aussi grand qu'on le voudra et par conséquent indéterminé, mais fini, et ce n'est que dans le résultat final qu'on fera effectivement le passage à la limite. La continuité dans la représentation géométrique ne sera ainsi nulle part interrompue et il n'y aura jamais lieu de donner tort à l'intuition.

En appliquant cette règle à une expression de la forme

$$y=\lim_{n\to\infty} f(x, n)$$

on voit qu'elle peut être considérée comme équivalente à l'expression symbolique

$$y=f(x, L^{-1}).$$

Par exemple, au lieu de

$$y=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{1+e^{nx}}\right) \tag{26}$$

on peut écrire

$$y=1-\frac{2}{1+e^{L^{-1}x}} \tag{27}$$

où

$$(\lim_{n\to\infty} nx)_{x\neq 0}=L^{-1}x=\pm\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} no=\lim_{n\to\infty} n\frac{a}{n}=L^{-1}La=a. \tag{28}$$

L'équation (27) exprime par conséquent une ligne brisée constituée par les deux demi-droites $y=1$, $x>0$ et $y=-1$, $x<0$, et par le segment de droite reunissant le point $x=0$, $y=-1$ au point $x=0$, $y=1$.

A l'abcisse $x=0$ correspond une infinité de points de la ligne (26) ou (27) dont les ordonnées varient de -1 à $+1$. La fonction (26) est, par conséquent, multiforme.

En se plaçant au point de vue des définitions de DIRICHLET, il faudrait écrire:

$$(\lim_{n\to\infty} nx)_{x\neq 0}=L^{-1}x=\pm\infty, \qquad \lim_{n\to\infty} no=L^{-1}Lo=0,$$

et l'équation (26) exprimerait dans ce cas une ligne effectivement discontinue, constituée par les deux demi-droites $y=1$, $x>0$ et $y=-1$, $x<0$ et par le point isolé $x=0$, $y=0$. Le point d'abscisse $x=0$ serait un point de discontinuité régulier d'après DIRICHLET.

Dans l'interprétation de DIRICHLET, on ne considère donc pas la fonction (26) dans tout son domaine d'existence, mais on ne prend en quelque sorte, que la détermination principale de cette fonction multiforme (1).

---

(1) Dans certains cas particuliers on peut utiliser telle ou autre portion d'une courbe, mais il est certainement indispensable de pouvoir considérer aussi la courbe dans tout le domaine de son existence.

On obtient une courbe avec un point de discontinuité régulier en considérant la varia-

Dans une lettre bien connue, adressée il y a 30 ans au journal « Nature » A. MICHELSON (1) avait déjà formulé l'idée qu'il n'était guère, rationnel d'interpréter toujours les discontinuités des courbes exprimées par des séries de FOURIER comme des discontinuités régulières dans le sens de DIRICHLET, et il avait montré qu'on pouvait faire disparaitre les discontinuités effectives en faisant tendre simultanément x vers zéro et n vers l'infini, mais de façon que le produit $xn = \text{const.}$ Ce procédé correspond à celui qui est exprimé par les formules (28), mais l'interprétation que nous en donnons est très différente de celle de MICHELSON.

L'idée de MICHELSON fut sévèrement critiquée par LOVE (2), mais elle conduisit GIBBS, et vers la même époque POINCARÉ, à la découverte du phénomène qu'on désigne sous le nom du phénomène de GIBBS et que MICHELSON et STRATTON avaient déjà remarqués sur les courbes obtenues avec leur analysateur harmonique permettant d'obtenir la somme des 80 premiers termes d'une série de FOURIER.

Nous pouvons maintenant caractériser la divergence des points de vue de MICHELSON et de LOVE en disant que MICHELSON considérait les fonctions représentées par les séries de FOURIER dans tout leur domaine d'existence et LOVE, en défendant le point de vue de DIRICHLET, ne considérait que l'une des déterminations de ces fonctions multiforme.

12. - Les points essentiels de cette communication peuvent être résumés comme suit. Toutes les opérations mathématiques vraiment bien définies sont reversibles. Pour définir complétement un nombre il faut indiquer sa valeur et son origine. Les opérations du passage à la valeur absolue et l'opération du passage à la limite, ainsi que leur opérations inverses, devraient être comprises dans la liste des opérations fondamentales de l'Algèbre.

---

tion que subit la valeur de l'intégrale de GAUSS étendue à une surface fermée S, lorsqu'on suit une courbe coupant la surface S en un point non singulier, et en exprimant cette variation en fonction de la longueur de la courbe.

Mais si, en ce point d'intersection, la surface n'admet pas un plan tangent unique, l'intégrale est égale à la mesure de l'angle solide formé par les tangentes à la surface issues de ce point et peut varier, par conséquent, de 0 à 4π. L'ensemble de toutes les valeurs possibles forme une ligne du genre de la ligne brisée déterminée par la fonction (26) mais ce n'est qu'une seule détermination de cette fonction multiforme qui correspondra à chaque point de S.

(1) « Nature », 6 october 1898, London.

(2) « Nature «, 13 october 1898.

Q. VETTER (Praha - Cecoslovacchia)

RAPPORTO SULLE LETTERE INDIRIZZATE AL DOTTOR TADDEO HAGECIUS DA HAYCK, ASTRONOMO, MEDICO E MATEMATICO CEKO CONSERVATE A BRESLAVIA

Il signor L. A. BIRKENMAJER, Professore all'Università di Cracovia, nella sua bella opera *Nikołaj Kopernik*, parte I (1900), attrasse l'attenzione degli storici delle matematiche sulle lettere, che Andrea Dudich e Tomaso Savile scrissero all'astronomo ceko Taddeo Hagecius da Hayck o Tadeáš Hájek z Hájku. Occupandomi già da diversi anni collo studio di questo scienziato ceko del cinquecento (1), sono molto felice che queste lettere furono fotografate a Breslavia per l'osservatorio di Praga, che volonterosamente me le prestò per lo studio. Secondo la gentile communicazione del signor M. Hippe, Direttore della biblioteca comunale di Breslavia, quelle lettere si trovano ancora con altre in un volume, originario dalla cosidetta biblioteca « Rhedigeriana ». Peccato, che questo volume fu rilegato di nuovo nel secolo decimonono, tanto che dalla rilegatura non si può giudicare sulla provenienza del volume. Il carteggio, di cui parlo, è formato da 44 lettere d'Andrea Dudich su 58 fogli in 8° e da 2 lettere di Tomaso Savile su 2 fogli in 8°. La prima lettera del Dudich è in data del 17 febbraio 1572, l'ultima del 16 gennaio 1589, le due lettere del Savile furono scritte nell'anno 1589. Dal contenuto si può giudicare che non vi sono tutte le lettere scritte dal Dudich al Hájek.

Andrea Dudich, nato il 16 febbraio 1533, morì il 23 febbraio 1589. Benchè fosse noto come politico e teologo, manifestò sempre un grande interesse per l'astronomia. Ed è per questo interesse che ha cercato colla sua prima lettera d'entrare in corrispondenza col Hájek, già abbastanza famoso pei suoi scritti astronomici, dalla quale si è sviluppata una profonda amicizia, che durò sino alla morte del Dudich.

L'autore delle due ultime lettere, Tomaso Savile, è fratello del celebre professore di matematiche Enrico Savile. Quest'ultimo mandò Tomaso al Dudich,

---

(1) Q. VETTER: *Poznámka k astronomické činnosti Tadeáše Hájka z Hájku.* Čas. mus. Král. čes. XCI, 330). — *Tadeáš Hájek z Hájku.* (Říše hvězd, VI, 169). — *O Tadeáši Hájkovi z Hájku,* (Zeměměřický věstník, XIV, 17).

che cercava un maestro per i suoi fanciulli e un socio per i suoi studi matematici. Tomaso Savile restò dal Dudich sino alla morte del medesimo.

Il destinatario delle lettere, Dottore Taddeo Hagecius da Hayck, fu il più significante rappresentante di quel ceto patrio ceko, che ha reso possibile l'azione d'uomini così insigni, come Ticone Brahe e Giovanni Keplero. Taddeo Hájek z Hájku, figlio del dotto baccalauro Simeone Hájek e di Caterina di nobile origine, nacque fra gli anni 1525 e 1527 a Praga. Dopo gli studî all'Università di Praga passò all'Università di Vienna, dove fu discepolo di Perlachius. Nell'anno 1552 studiò all'Università di Bologna, nella sede di questo Congresso, da dove visitò Geronimo Cardano a Milano. Ritornato nella patria Hájek fu da prima professore nell'Università di Praga, poi medico pratico. Più tardi fu nominato medico ordinario dell'imperatore Massimiliano II e poi di Rodolfo II, del quale fu spesso consigliere in questioni matematiche e d'alchimia, e protomedico del Regno boemo. Hájek morì il 1 settembre 1600. Del suo impulso fu anche chiamato alla corte di Rodolfo II il suo amico Ticone Brahe. Il più famoso dei molti scritti di Taddeo fu al suo tempo la « Dialexis ecc. » sulla nuova stella dell'anno 1572, il più popolare la traduzione ceka dell'erbario di Mathioli. Nella storia dell'astronomia si rese celebre essendo stato il primo, che — nell'anno 1572 — determinasse la posizione d'una stella col tempo del trapasso per il meridiano e che pubblicasse questo metodo. L'altro suo merito fu quello d'aver conservato, come ha mostrato il signor Professor BIRKENMAJER, il « Commentariolus » di Copernico e la lettera al Wapowski dello stesso astronomo. L'eccellente storico delle matematiche, il poco fa defunto Padre H. Bosmans ha attratto l'attenzione sul fatto, che anche Taddeo Hájek diede ad Adriano van Roomen l'apografo della traduzione d'uno degli scritti dell'Al-Chovaresmi (1). Hájek fu un conoscitore e collettore degli scritti antichi e non soltanto degli scritti matematici, ma anche religiosi. In questo tempo tutti gli insigni uomini ceki erano presi dal movimento religioso. Il Hájek ebbe grandi connessioni e una larga corrispondenza col mondo scientifico di quel tempo. La sua biblioteca e corrispondenza pervenne al suo figlio Venceslao, che fu un impiegato imperiale nella Slesia. Forse fu questa la via, per la quale la nostra corrispondenza arrivò a Breslavia.

Le lettere sopradette contengono molte notizie della vita privata tanto del Dudich quanto del Hájek e degli scritti dell'ultimo. Perciò esse sono di gran significato per le biografie d'entrambi gli uomini. Ma queste lettere sono anche importanti in un riguardo storico più largo.

Anzitutto vi si parla anche d'altri uomini, che si occuparono od almeno interessarono dell'astronomia, come dei loro scritti. Si fanno i nomi: di Albate-

(1) H. BOSMANS: *Le fragment du Commentaire d'Adrien Romain sur l'Algèbre de Mahumed ben Musa el-Chowârezmî.* (Ann. de la Soc. scient. de Bruxelles, XXX, 2e partie, pag. 5 de l'extrait).

gnius († 929), Ticone Brahe (1546-1601), Maurizio Bressius († 1608), Cristoforo Clavius (1537-1612), Giovanni Dee (1527-1607), Tomaso Digges († 1595), Paolo Fabritius (1529?-1588), Luigi Lilio († 1576), Gerhardo Mercator (1512-1594), Michele Moestlin (1550)-1631), Pedro Nuñez (1492-1577), Giovanni Praetorius (1537-1616), Giovanni Regiomontanus (1436-1476), Giorgio Rhaeticus (1514-1576), Enrico Savile (1549-1622), e di suo fratello Tomaso, di Giuseppe Scaliger (1540-1609), Abramo Scultetus (1566-1625), Giovanni Vögelin, Paolo Wittichius († 1588), Guglielmo Xylander (1532-1576), ed altri uomini meno conosciuti.

In secondo luogo Dudich vi parla delle questioni, moventi il mondo matematico di quel tempo. Cioè in primo luogo della nuova stella nella Cassiopeia dell'anno 1572, della letteratura della stessa e delle disputazioni che la toccano. Le opinioni sull'astrologia furono parimente oggetto di una viva discussione. La riforma del calendario di papa Gregorio XIII ha altresì assorbito l'interesse di ambedue i nostri scienziati. Vi troviamo menzioni delle eclissi nell'anno 1579 e sul principio dell'anno 1582, poi le notizie sulle osservazioni delle comete degli anni 1580 e 1582. Ciò diede anche l'impulso a discutere del metodo per determinare la paralasse dei corpi celesti e dell'affermazione del Melanchthon sulla posizione del sole. Ci troviamo anche la « Aequatio dierum ». Il Dudich ci si occupa anche della trigonometria e specialmente delle tavole trigonometriche.

Spesso Dudich chiede il parere del Hájek su qualche questione scientifica o su qualche scienziato o su un libro o risponde alle opinioni del Hájek. Perciò è un gran peccato, che conosciamo soltanto le lettere del Dudich e non le risposte del Hájek. Oltre qualche lettera, pubblicata negli scritti del Hájek ed oltre il carteggio fra il Hájek ed il Brahe, pubblicato nella bella edizione degli scritti dell'ultimo, non sono riuscito di trovare che pochissime lettere del Hájek. Perciò mi rivolgo agli stimati investigatori pregandoli caldamente, di avvisarmi gentilmente, se venissero a sapere di qualche nuovo materiale su Taddeo Hagecius da Hayck, specialmente su qualche lettere del suo carteggio.

K. RYCHLÍK (Praha - Cecoslovacchia)

LA THÉORIE DES FONCTIONS DE BOLZANO

J'ai été chargé par la Société Royale des Sciences de Bohême de préparer pour l'édition la théorie des fonctions de Bolzano d'après le manuscrit découvert par M. JAŠEK (1) dans la Bibliothèque Nationale de Vienne. M. JAŠEK suppose que ce manuscrit a été écrit en 1834.

D'abord quelques mots sur le caractère général de l'oeuvre de Bolzano. Bolzano s'interesse très peu de calcul formel qui ne pourrait s'occuper que de « fonctions raisonables » au sens de Jacobi. Ce sont surtout les différents « cas pathologiques » de la théorie des fonctions réelles qui attirent son attention. Et puis il faut accentuer sa tendance à arithmétiser toutes les considérations, de sorte qu'on ne trouve nulle part une mention de représentation géométrique.

Du contenu très interessant de la théorie des fonctions de Bolzano je ne peux mentionner que quelques détails. Elle se compose d'une introduction, « Les rapports entres les nombres variables », de la première partie intitulée « Les fonctions continues et discontinues » et de la deuxième partie, « Les fonctions dérivées ». L'introduction contient une discussion de la notion de fonction et les commencements du calcul des différences finies.

Bolzano définit la fonction continue de la même manière que Cauchy. Mais il considère aussi les fonctions continues à droite et à gauche et dans la deuxième partie les dérivées à droite et à gauche où, comme il dit, par rapport aux accroissements positifs et négatifs.

Bolzano démontre tous les théorèmes sur les fonctions continues d'une variable, même le théorème sur la borne supérieure et inférieure.

Parmi les différentes fonctions construites par Bolzano, c'est la suivante qui est la plus intéressante.

Soit $y=F(x)$ la fonction représentée par le segment M_0M_1

$$M_0(a_0, a_1)$$
$$M_1(a_0+\delta, a_1+\Delta).$$

(1) *Aus dem handschriftlichen Nachlass Bernard Bolzanos*, Sitzungsbericht d. kön. böhm. Ges. d. Wiss., 1921-22, Kl. II.

$y=BF(x)$ soit la ligne polygonale $M_0M_{11}M_{12}M_{13}M_1$

$$M_{11}\left(a_0+\frac{3}{8}\delta,\ a_1+\frac{5}{8}\Delta\right)$$
$$M_{12}\left(a_0+\frac{1}{2}\delta,\ a_1+\frac{1}{2}\Delta\right)$$
$$M_{13}\left(a_0+\frac{7}{8}\delta,\ a_1+\frac{9}{8}\Delta\right).$$

Si $y=F(x)$ est une ligne polygonale, on obtient $y=BF(x)$, en répétant la construction indiquée pour chaque ségment composant $y=F(x)$.

Soit maintenent $y=f_0(x)$ le segment M_0M_1,

$$M_0(0,0), \qquad M_1(1,1).$$

Posons $$f_1(x)=Bf_0(x), \quad f_2(x)=Bf_1(x), \quad f_3(x)=Bf_2(x),....$$

On peut démontrer (1) que la suite

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x),....,$$

converge uniformement dans l'intervalle $[0,1]$, $(0\leqq x\leqq 1)$, de sorte que sa limite $f(x)$ est une fonction continue.

Mais Bolzano démontre seulement la convergence de la suite

$$f_0(x), \quad f_1(x), \quad f_2(x),....,$$

et pense comme Cauchy que la limite d'une suite de fonctions continues est elle même une fonction continue.

Dans la première partie, Bolzano démontre que la fonction $f(x)$ n'est monotone dans aucun intervalle partiel et dans la deuxième partie qu'elle n'a pas de dérivées dans un ensemble partout dense de l'intervalle $[0,1]$.

Mais on peut démontrer que la fonction $f(x)$ n'a de dérivées finies dans aucun point de l'intervalle $[0,1]$ et qu'elle n'a pas même de dérivées infinies à signe déterminé dans l'intervalle $[0,1]$, $(0\leqq x\leqq 1)$. Au point 0 la dérivée à gauche est $+\infty$ (2).

On peut obtenir une expression paramétrique

$$x=\varphi(\xi), \qquad y=\Phi(\xi)$$

de la courbe $y=f(x)$, où les fonctions $\varphi(\xi)$, $\Phi(\xi)$ sont du type considéré par M. STEINITZ (Math. Ann. 50, 1899).

---

(1) RYCHLÍK: *Über eine Funktion aus Bolzanos handschriftlichem Nachlasse*, Sitzungsbericht d. kön. böhm. Ges. d. Wiss., 1921-22, Kl. II.

(2) *Sur les propriétés des nombres dérivés de* $f(x)$. v. JARNÍK: *O funkei Bolzanově*, Časopis pro pěst. mat. a fys., 51.

Mais il faut avouer que le manuscrit de Bolzano contient aussi des propositions incorrectes.

On y trouve par exemple le théorème suivant:

Si la fonction $f(x)$ est continue dans un intervalle, et si les valeurs de x pour lesquelles on a $f(x)=M$ ont un point limite à l'intérieur de cet intervalle, la fonction $f(x)$ est constante et $=M$.

La classification des maxima et des minima basée sur ce théorème est naturellement incomplète.

Note. — Jusqu'à présent (10-IV-1932) ont paru deux volumes des oeuvres de Bolzano: *Functionenlehre* et *Zahlentheorie* (Prague, Král. č. spol. nank, Société r. des Sciences de Bohême).

HUSNY HAMID (Stamboul - Turchia)

SUR L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES EN TURQUIE

Le développement des Sciences mathématiques dans les différents pays musulmans se ressemble plus ou moins. Pendant plusieurs siècles nous sommes témoins de grands progrès scientifiques, pour nous trouver devant une décadence à la suite. L'explication de cette décadence se rattache à de grands événements historiques. Pour les sciences mathématiques deux raisons, à mon avis, doivent être mises en avant:

1°) Après avoir occupé une place importante, la philosophie a donné naissance à des désaccords religieux et sociaux. Les théologiens dogmatistes, dédaignant la philosophie, ont réussi à la suppression dans les universités musulmanes d'une grande partie de l'enseignement philosophique et par suite des sciences y relatives comme la mathématique et la physique.

2°) Chez les mathématiciens musulmans (à tort appelés arabes) ni l'algèbre (fondée par eux), ni la géométrie n'ont pris une orientation nette et definitive. Ces mathématiciens sont restés d'une part fidèles à la conception spéculative des Grecs; d'autre part à la conception pratique et utilitaire des Indiens.

Les mathématiciens turcs du 15ème et du 16ème siècles tels que KADI-ZADÉ (1352-1437), ALI-KOUCHDJI (1400-1474), MAHMOUD-MIRÈME TCHÉLÉBI (mort en 1525), TAKIÉDDIN RASID (1521-1585) n'abandonnaient pas la conception esthético-logique d'Euclide pour donner la préférence à la méthode algébrico-technique d'Alkhwarizmi, comme beaucoup de mathématiciens du 15ème et 16ème siècles. Vers 1600, dans les Facultés turques, les programmes ont subi une restriction et à partir de cette époque jusqu'à la fin du 18ème siècle la mathématique musulmane est restée stationnaire et elle fut complètement abandonnée ensuite.

* * *

La mathématique occidentale a pénétrée en Turquie vers la fin du 18ème siècle par la traduction des tables astronomiques de JACQUES CASSINI (1677-1757).

CALFA-ZADÉ fut chargé en 1778 de la traduction de ces tables. Dans un des passages de son livre, Calfa-Zadé dit: « Jusqu'à présent on utilisait chez nous

les tables d'OULOUG BEY (1393-1449) pour rédiger les calendriers. Dernièrement un savant de l'Occident, Cassini, a publié de nouvelles tables; celles-ci rectifient et complètent les tables d'Ouloug bey; à mon avis, dorénavant, on devrait utiliser les tables de Cassini. On nous a chargé de la traduction et nous tâchons de l'executer de notre mieux. Nous avons ajouté au commencement de la traduction les tables de logarithmes ».

Avant Calfa-Zadé, les logarithmes n'étaient pas connus en Turquie. On n'employait pas, comme aujourd'hui, les logarithmes pour résoudre les problèmes trigonométriques.

La traduction des tables de Cassini était terminée en 1780. A partir de cette date l'attention de nos savants se dirigea vers l'occident. Ainsi, GÉLÉNBEVI ISMAIL EFFENDI a écrit un ouvrage sur les logarithmes et HUSSEIN HUSNI EFFENDI a traduit les tables astronomiques de Lalande.

Chez nous, la fondation de l'Académie du Génie (1795) a contribué au développement des sciences mathématiques.

HODJA ISHAK EFFENDI fut entre 1816 et 1836 professeur de cette académie. Il a publié un traité de mathématiques générales en puisant aux sources orientales et européennes. Son traité comprenait l'Algèbre W'l Mucabala, les éléments de Géometrie, la trigonométrie plane, la construction géométrique, l'application de l'algèbre à la géométrie, les sections coniques, le Calcul différentiel et intégral, les éléments de mécanique, la physique, la trigonométrie sphérique, l'astronomie et la chimie. Cet ouvrage fut pendant plus de 40 ans la base de l'enseignement mathématique en Turquie. Nous pouvons considérer que Hodja Ishak Effendi fut le chef de l'école moderne et les deux mathématiciens comme Tevfik Pacha et Salih Zéki sont ses disciples.

TEVFIK PACHA (1832-1898) officier d'État-major est un grand mathématicien turc du 19ème siècle. Son activité, son érudition, ses travaux personnels et sa situation sociale ont contribué beaucoup au développement des sciences mathématiques en Turquie.

Tevfik Pacha fut directeur d'études à l'Académie du Génie. Il a consacré aux mathématiques tous les moments dont il pouvait disposer dans sa vie officielle et privée. Il suivait de près les travaux des mathématiciens occidentaux. Il a approfondi les théories basées sur les quantités complexes et inventées par ARGAND, GRASSMAN, HAMILTON, BELLAVITIS et d'autres.

Dans son « Linear algebra » écrit en anglais, Tevfik Pacha expose un calcul qui ressemble aux Quaternions. Il a suivi l'idée d'Argand et a pu généraliser la méthode de celui-ci aux figures de l'espace.

SALIH-ZÉKI (1863-1921) a fait ses études à Paris. Il a enseigné à la Faculté des Sciences de Stamboul alternativement l'algèbre supérieure, la géometrie analytique, le calcul différentiel et intégral, l'astronomie, la physique mathématique et le calcul des probabilités.

Ses principaux ouvrages sont:

1°) *Encyclopédie mathématique* (Camoussou-Riaziate);

2°) *Asari-Bakié* (L'auteur dédie ce livre à ABOU'R RIHAN BIRONI et étudie dans les 4 volumes qui le composent, le développement de la mathématique musulmane en cherchant ce que les musulmans ont puisé dans les sources grecques et indiennes et ce qu'ils ont ajouté eux-mêmes);

3°) *Traité de physique*;

4°) *Calcul des probabilités*;

5°) *Logique mathématique.*

Grâce à Salih Zéki l'école encyclopédique du Hodja Ishak Effendi et de Tevfik Pacha a atteint son apogée. Après la rédaction de « Camoussou-Riaziate » la mathématique moderne fut complètement introduite en Turquie.

Pour conclure, je puis dire que chez nous l'histoire des mathématiques est entrée dans une phase nouvelle. Nous passons par une période de transition; nous avons renoncé aux notations arabes pour les remplacer par les notations internationales. Ce changement, connexe avec la réorganisation récente de l'enseignement, nous permettra d'être en contact plus étroit avec la mathématique actuelle, et de prendre part à l'activité générale.

C. BONACINI (Modena - Italia)

NEL PRIMO CENTENARIO DALLA FONDAZIONE DELL'OSSERVATORIO DI MODENA

Ho l'onore di presentare al Congresso una pubblicazione fatta dalla Università di Modena in una recente occasione.

Nella fine del 1927 ricorreva il primo centenario dalla fondazione dell'Osservatorio Geofisico annesso a quella Facoltà di Scienze, e che io ho l'onore di dirigere da oltre un ventennio. In previsione di quella ricorrenza, e per ricordare questa in modo non fugace, io proposi due anni fa al Consiglio di Amministrazione di fare una pubblicazione speciale, al cui disegno andavo pensando da tempo. La mia proposta fu accolta: e il volume uscì nei primi di questo anno.

Nel volume il posto d'onore è tenuto, naturalmente, dalla storia dell'Osservatorio, che sorse nel 1827 per iniziativa del duca Francesco IV d'Este, e con sede nello stesso palazzo ducale (ora sede della R. Accademia Militare). Lunga e laboriosa fu la preparazione della Specola Modenese, si che durò circa 10 anni. Ottima per quei tempi, fu la suppellettile scientifica raccolta, costruita in gran parte da G. B. Amici (che aveva officina a Modena), e pel C. M. dal Reichembach di Monaco.

Primo direttore della Specola fu Giuseppe BIANCHI: che arrivava a questo posto dopo un'ottima preparazione alle Specole di Padova e di Milano, e che già da tre anni teneva la cattedra di astronomia presso l'Università di Modena: cattedra, istituita per iniziativa del celebre matematico Paolo RUFFINI, allora Rettore.

Il Bianchi tenne la direzione per 32 anni; lasciandola nel 1859 per ragioni politiche. La sua produzione astronomica in questo tempo è seria ed austera, quanto poco nota: essa è in parte tuttora manoscritta presso gli eredi. Il Bianchi, che fu *magna pars* della Commissione che introdusse il sistema metrico negli Stati Estensi, trovò modo anche di iniziare fino dal 1830 accuratissime osservazioni meteorologiche, le quali costituiscono il primo nucleo del ricco materiale che fu poi raccolto nell'Istituto.

Dopo il Bianchi, l'Osservatorio modenese si onora dei nomi di Pietro TACCHINI, di Annibale RICCÒ, di Domenico RAGONA, di Ciro CHISTONI. Il Tacchini vi fece le sue prime armi sia in astronomia che in meteorologia, preparandosi a diventare l'astronomo di Palermo, e più tardi il Direttore dell'Ufficio Centrale di Meteorologia a Roma.

Col Ragona l'Osservatorio cambiò poi decisamente il suo indirizzo: dedicandosi più specialmente allo studio delle meteore, sì che dopo 10 anni l'Istituto cambiò anche il nome (da *astron.* in *meteor.*). Col Ragona, colto e genialissimo, l'Osservatorio di Modena divenne anzi un centro attivissimo di studi meteorologici e più in generale geofisici; forse unico in Italia in quel tempo. Di là uscirono pubblicazioni numerosissime, come opere di propaganda. E tutte con questo precipuo carattere (che mi preme qui di fissare), che la raccolta dei dati non viene fatta empiricamente, ma si fa della meteorologia razionale; cioè si illuminano i risultati coll'analisi matematica, nella quale il Ragona era coltissimo: sì che fra i suoi numerosissimi scritti uno ve n'ha, poderoso, che tratta appunto del calcolo delle osservazioni meteorologiche.

Questo carattere di serietà e di razionalità, fu, manco a dirlo, conservato dal Chistoni che successe al Ragona nel 1892, e fu da lui lasciato come tradizionale nell'Istituto.

E del resto lo stesso Bianchi, che, come dissi, fece anche e bene della meteorologia, ebbe rimproveri dal Bellani, a proposito di una vertenza nel 1834 sulla tormentata questione dei moti periodici diurni del Barometro, in quanto il Bianchi « *applicava l'analisi matematica al commento dei fatti meteorologici* » (!).

Questo carattere, che mi preme oggi qui di far risaltare, traspare del resto anche dal prospetto bibliografico della produzione dell'Osservatorio nel centennio: che ho raccolto di fianco agli appunti storici. Si che può dirsi che l'Osservatorio Modenese è stato *precursore* in questo sano indirizzo matematico, che sta rinnovando la meteorologia e la geofisica.

Oggi, nell'Osservatorio, oltre il reparto meteorologico, si ha un reparto di piroeliometria (fondato dal Chistoni), uno di ottica atmosferica e uno di elettricità atmosferica: l'Istituto è inoltre stazione principale del servizio aerologico nazionale, dalla fondazione di questo.

* * *

Alla storia dell'Osservatorio seguono alcune memorie originali, dovute a personale dell'Istituto, attualmente in servizio, o che vi appartenne. Con esse noi abbiamo voluto che la pubblicazione riuscisse più viva e significativa.

Il Chistoni, con una nota (che è l'ultimo suo lavoro), rivendica al Belli il merito di aver portato lo psicrometro a strumento di precisione, studiandone la teoria matematica.

In una mia nota io rivendico da un oblio immeritato una carta lunare di Geminiano MONTANARI. Consultando i trattatisti di astronomia in genere e di selenografia in ispecie, non si trova mai citato il nome di lui. Eppure egli è autore di una carta lunare, che fu disegnata a Modena nel 1662 nella Specola privata del Malvasia (del quale il Montanari era coadiutore per invito avutone dal duca Alfonso IV). Quando il Malvasia pubblicò in quel tempo il suo ricco

volume *Ephemerides novissima*, inserì all'ultimo, in una tavola fuori testo, l'*icon lunaris* del Montanari. Perchè questa carta sia rimasta pressochè ignorata io cerco di spiegare. E nell'occasione, ripubblicando l'immagine, io ne faccio rilevare i pregi notevolissimi che ne mostrano lo stile veramente *nuovo* per quei tempi, e dimostro inoltre che è la prima immagine lunare veramente disegnata coll'aiuto del reticolo.

In un'altra mia nota pubblico un carteggio inedito di G. B. Amici, riguardante la preparazione del materiale di cui fu fornita la Specola di Modena. Queste carte io ho potuto trovare nella raccolta di manoscritti dell'Amici donata recentemente alla Biblioteca Estense di Modena dagli eredi, a mezzo del prof. ALBERTOTTI.

In altro mio lavoro io descrivo una camera stenoscopica (a forellino) che permette di riprodurre in una immagine finita un campo di 180°. Il principio è questo: Dietro ad un foro stenopico, e centrato con questo, io dispongo un emisfero trasparente (di vetro). Così ogni raggio resta per refrazione raccolto verso l'asse; sì che il campo di 180° antistante al foro viene raccolto entro un cono di apertura uguale al doppio dell'angolo limite.

Le immagini così ottenute sono deformate: ma con deformazione regolare e nota. È la situazione delle immagini *cartografiche*. Anzi nasce qui tutta una famiglia di rappresentazioni possibili, che si potrebbero dire *da refrazione*, in quanto il modulo è legato all'indice di refrazione della sostanza costituente l'emisfero che arma lo stenope. Le applicazioni molteplici in varî campi a cui si presta la mia camera sfero-stenopica sono descritte ed illustrate.

In altra nota io e l'assistente attuale ing. L. MUZZIOLI portiamo un contributo alla variazione della pioggia coll'altezza: sfruttando un gruppo di osservazioni fatte per un quarantacinquennio in due pluviometri posti (a breve distanza orizzontale) ad un dislivello di 34^m, e discutendo i dati raccolti attraverso al metodo che gli statisti chiamano delle *mode empiriche*.

Fa pure parte del volume commemorativo uno studio del prof. Gino RONCAGLIA (già assistente) sulle meteore eccezionali ed estreme nel clima di Modena. Un altro mio lavoro, in collaborazione coll'ing. Muzzioli, tratta della distribuzione della pioggia nella provincia di Modena, desunta dai dati di 43 stazioni distribuite nel territorio modenese.

Ma il lavoro che, fra i pubblicati, ha carattere più spiccatamente matematico, e di cui accenno appunto per ultimo, è quello del dott. Michele BARUZZI (già assistente) che riguarda: « *Andamenti periodici della temperatura media diurna a Modena* ». Il Baruzzi, che aveva avuto da me incarico di studiare l'andamento della temperatura a Modena, approfittando del copioso materiale di osservazione posseduto, e raccordandosi a studi analoghi fatti in antecedenza dal Ragona, ha preso in esame accurato e minuziosissimo le osservazioni del quarantacinquennio 1881-1925. Resi dapprima i dati omogenei il più possibile, e deter-

minate le correzioni da apportare alla temperatura calcolata (dalle ore dell'osservazione ordinaria alla vera temperatura media di tutte le osservazioni orarie del giorno), l'A. ha dapprima dedotto l'andamento normale annuo della temperatura media diurna. Poi, in una seconda parte, di maggiore interesse per i nuovi e fecondi risultati, l'A. ha esaminato la regolarità delle deviazioni delle temperature dai valori normali calcolati. Ed ha riscontrato, in primo luogo, che l'andamento della media annuale nei 45 anni mostra l'esistenza di un periodo decanovennale coi massimi di temperatura negli anni 1882-1901-1902 e minimi 1891 e 1910 (analogamente a quanto aveva trovato il Rizzo a Torino); e in secondo luogo che viene ben stabilito, durante l'anno, l'esistenza di quattro anomalie termiche, che si presentano tutti gli anni (ad epoca fissa); ogni anomalia constando di un primo periodo di caldo seguito da uno di freddo della durata di circa due settimane ognuno. Due di queste anomalie, che avvengono nel periodo del massimo e del minimo annuale, sono messe in evidenza per la prima volta.

Ma ancora più interessante è la constatazione del fatto, che si verificano dei periodi di caldo e di freddo (dell'amplitudine massima di quasi 2 gradi), ritardati nei successivi anni di 4 giorni.

Questo fatto il Baruzzi è riuscito, di recente, a riscontrare anche per Parma (deducendolo da un sessantennio di osservazioni); sicchè è a credere che la cosa assuma una importanza più che locale.

Nelle sue ricerche, lunghe e laboriose, l'A. si è valso della nota formula Besseliana per la rappresentazione di un fenomeno periodico, usata fino al 12° termine; e non v'ha dubbio che il risultato felice della ricerca si deve sopratutto alla solidissima cultura matematica del Baruzzi.

Ma non posso tacere che la scoperta dell'ultimo fatto è avvenuta con un sussidio di tipo singolare. L'A. aveva raccolto in un grafico particolare i risultati delle sue analisi. In un tabellone a quadretti, rispettivamente bianchi o neri, secondochè la temperatura pentadica era inferiore o superiore alla media, era raccolto come uno specchio della situazione pentadica del quarantacinquennio. E ciò per vedere appunto di cogliere eventuali andamenti nel tempo di quelle differenze. Il tabellone fu ripetuto con criterî varî nella valutazione relativa dei valori delle pentadi.

Ebbene, seguendo un criterio da me suggeritogli, il Baruzzi ha riprodotto il quadro in fotografia con sfocamenti diversi, sì che avvenisse l'impasto dei singoli elementi. E gli è avvenuto proprio così di cogliere la particolarità sopra accennata.

Il metodo si è dimostrato propizio per isolare caratteristiche dominanti e regolari in un insieme dove queste restano come sommerse nella folla degli elementi accidentali. Il metodo stesso, che ricorda quello dei *tipi medî* del Galton, può evidentemente riuscire utile per molti altri casi congeneri.

* * *

Ringrazio l'illustre prof. BORTOLOTTI, Segretario generale del Congresso, per l'occasione offertami di far conoscere il nostro lavoro; e penso che egli nell'invitarmi a questa presentazione sia stato mosso non solo dalla benevolenza che egli ha sempre avuto per l'Osservatorio modenese, ma anche dal desiderio che un'altra voce, sia pur modestissima come la mia, si aggiungesse alle tante che in questo Congresso sono venute ad affermare, ancora una volta, essere la matematica l'unica guida sicura ed indefettibile per ogni ricercatore, il soffio potente che vivifica e valorizza ogni risultato di osservazione e di esperienze.

P. LANZAVECCHIA (Pesaro - Italia)

SUI LIMITI DELL'ATTIVITÀ DELLO SPIRITO NELLA RICERCA SPERIMENTALE

Il più diretto modo di studiare il valore dell'indagine sperimentale consiste nel ricercare qual'è l'ufficio che in essa ha lo spirito che indaga, e qual'è invece la parte che dovrebbe avere l'oggetto sottoposto all'indagine.

La concezione più comune ed immediata considera lo spirito come elemento passivo, a cui nell'atto dell'esperienza è unicamente riserbato il compito di osservare e descrivere, senza la possibilità d'una qualsiasi ingerenza o attività: ingerenza che sarebbe perturbazione dannosa falsante l'obiettività della ricerca. Ma questa è concezione insufficiente che finisce per porre la realtà, oggetto della scienza sperimentale, al difuori delle nostre possibilità conoscitive, e che riduce la ricerca del vero ad un incerto « provando e riprovando » che, solo per il fortuito avverarsi di poco probabili circostanze, potrebbe, a tratti, concederci qualche lume.

Un tale modo di intendere la ricerca sperimentale potrebbe, in parte, trovarsi accennato nel proemio ai « Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento »; dove però l'esperienza si riduce di fatto ad essere, non strumento fondamentale di ricerca che pone veramente lo scienziato di fronte a tutta la realtà cui deve attingere, ma bensì una specie di empirico ripiego che ha la sua ragion d'essere in una debolezza dell'umano intendimento, incapace di raggiungere per via sicura e certa la realtà delle cose. L'insufficienza di tale concezione appare però manifesta quando si consideri che gli stessi corpi, che per lo scienziato sono il dato da cui si deve partire, sono già il risultato d'una attività dello spirito; essendovi in essi assai di più, e assai di meno, a seconda del punto di vista da cui ci pone, di quanto è nelle sensazioni, che sono il vero dato.

Ma il solo fatto dell'esistenza dei corpi non può essere dato sufficiente per l'istituzione d'una scienza sperimentale della natura: un corpo non può essere che elemento d'un singolo fatto isolato ed unico, dove invece la scienza della natura nasce dalla considerazione di fatti generali che possono abbracciare un gran numero di differenti corpi. È ovvio che un'osservazione, affinchè possa diventare esperienza, ed avere quindi valore al di là dell'istante in cui è stata fatta, deve avere in sè un elemento di universalità che possa ritrovarsi identico

in indefiniti altri avvenimenti: e questo elemento non può trovarsi immediatamente nelle sensazioni o nella conoscenza dei singoli corpi. Tale elemento di universalità, nelle scienze fisiche, è dato dai concetti matematici, per cui esse non possono presentarsi che come scienza matematica della natura: la cosa appare palese nel fatto che se il fisico ha necessità di operare su corpi e singoli fenomeni materiali, deve nel medesimo tempo riportarsi nel campo delle matematiche, e non può che riferire le proprie ricerche sopra questa base, i cui principi hanno una validità che è al difuori di ogni contingenza sperimentale.

Tuttavia deve apparir chiaro, come non essendo possibile una scienza sperimentale in cui tutto appartenga al dato sensibile, essendo lo spirito semplice spettatore inerte, non si possa neppure attribuire a questo tutto il fatto della conoscenza, riducendosi la scienza a tale sua attività, i cui scopi sarebbero rivolti a dei fini pratici di economia di pensiero. Ma prima d'entrare in tale argomento, sarà conveniente fare una sommaria analisi del modo con cui il nostro spirito opera nella ricerca sperimentale, ed in particolare vedere come possano applicarsi a dei dati sensibili i concetti ed i principi matematici, la cui natura pare con essi così discordante.

È naturale che si siano spesso incontrate delle difficoltà a concepire l'attuazione, nel dato d'una sensibile esperienza, di concetti matematici puri, quando in questi concetti si trova una quantità di caratteri che a prima vista non possono adattarsi al modo di presentarsi delle sensazioni. Ma però è certo che, sempre che si voglia prendere contatto con la realtà del mondo fisico, sono precisamente dei concetti matematici che ci guidano, e per così dire ci fanno lume attraverso lo svolgersi dei fenomeni. Nel mondo noi vediamo continuamente delle distanze, delle direzioni, dei volumi; ciascun corpo ci appare immerso in uno spazio; il nostro stesso muoverci, il rivolgere gli occhi verso determinati oggetti, sono atti che presuppongono l'esistenza concreta di tutti quei concetti matematici che, per la loro astrattezza, dovrebbero essere estranei al mondo sensibile.

Ammettere l'incompatibilità fra matematica e natura, ponendo però quella come una sorta di immagine o correlato intelliggibile di questa, facendo in tal modo corrispondere ai vari oggetti del mondo materiale degli enti matematici puri, non sarebbe propriamente risolvere la questione, ma semplicemente spostarla e renderla meno appariscente. Secondo questo modo di intendere, non potendo la matematica riferirsi direttamente alla realtà sensibile, le leggi matematiche della natura si riferirebbero unicamente a degli enti matematici: e vi dovrebbe essere una specie di parallelismo fra la scienza matematica della natura ed il reale modo di svolgersi dei fenomeni, in modo che ad ogni relazione fra gli enti matematici cui la prima si riferisce dovrebbe corrispondere una particolare relazione fra i corpi della natura. Tale dualismo implica però l'esistenza d'un criterio che consenta di stabilire quali siano per i diversi corpi i particolari enti matematici che ad essi corrispondono: non potendo tale corrispondenza

essere arbitraria, ma bensì dovendo essere determinata da un particolar modo d'essere degli enti che si confrontano.

Senonchè l'affermazione dell'esistenza d'un tale criterio è in contrasto con la supposta irreducibile differenza fra matematica e natura, essendo evidente che affermare che fra i caratteri d'un particolare corpo v'è pure quello di corrispondere ad un certo ente matematico, equivale ad affermare che a tale corpo inerisce il concetto matematico che ad esso corrisponde. La differenza è unicamente di linguaggio. Del resto, relazioni di somiglianza possono solo darsi fra enti della stessa natura: cioè una sensazione può solo assomigliare ad un'altra sensazione, ed il dire che un ente intelliggibile può assomigliare ad un oggetto dei sensi è frase vuota di significato.

Dopo quanto si è ora accennato si presenta invece naturale l'interpretazione che pone i concetti matematici come concetti inerenti agli oggetti sensibili, cioè significanti dei particolari modi dell'esistenza di questi. Ma però occorre distinguere bene fra quelle che sono conoscenze matematiche e quelle che sono conoscenze sperimentali, perchè alle seconde non possono attribuirsi quei caratteri di assolutezza che invece ineriscono alle prime: così, per esempio, quando si afferma che un certo corpo ha la forma sferica, non si enuncia una proposizione matematica, ma bensì fisica: tale affermazione esprime una conoscenza sperimentale. Le seguenti proposizioni: il tale corpo ha la forma sferica, esso si muove secondo una determinata legge quando cade liberamente, sono della stessa natura, e la geometria, con i suoi concetti, ne ha fornito il linguaggio. Il fatto che non è possibile trovare in natura nessun corpo che possegga la forma sferica, ha lo stesso valore del fatto che pure non è possibile trovare nessun corpo che si muova secondo la legge galileiana della caduta dei gravi: questo significa soltanto che nessuna di quelle che noi chiamiamo leggi di natura è con rigore verificata nella realtà.

Del resto le leggi di natura quali da noi sono enunciate non potrebbero mai neppure trovarsi perfettamente d'accordo con l'esperienza, anche perchè in esse è sempre contenuto di più di quanto legittimamente può inferirsi dall'osservazione del dato sensibile: a conferma di questo basterebbe pensare al fatto che, dove gli strumenti di misura ci individuano solo degli intervalli e spazi, in esse invece figurano generalmente dei numeri e dei punti. Così, per illustrare la cosa con un esempio, dalle esperienze eseguite dal GALILEI sulla discesa dei gravi non poteva già dedursi la legge da esso stabilita, ma bensì unicamente una legge esprimente che, per istanti compresi in certi intervalli di tempo, la cui ampiezza era funzione della precisione con cui esso poteva misurare i tempi, il corpo grave doveva trovarsi entro certi spazi, la cui ampiezza era pure funzione della precisione degli strumenti di misura impiegati. Il criterio che ha servito al GALILEI per dedurre la particolare legge da lui scelta fra le infinite tutte d'accordo con i risultati sperimentali, è consistito in una supposizione che le

leggi di natura debbano essere semplici, cioè traducibili mediante le più elementari operazioni della matematica. Infatti egli si pose subito il problema di cercare a che grandezza fosse proporzionale la velocità d'un grave nel suo moto di caduta: dapprima fece l'ipotesi che essa fosse proporzionale agli spazi percorsi, ma poi, parendogli che da questa se ne dovessero dedurre delle conseguenze assurde, suppose che fosse proporzionale ai tempi di caduta, e non avendo incontrato nessuna difficoltà logica in questa ipotesi, ed avendo quindi osservato che non era contraddetta dall'esperienza, non esitò a dichiararla vera.

Altra attività arbitraria dello spirito nella ricerca sperimentale è costituita dal fatto che esso, facendo astrazione da numerose piccole differenze e contingenze sperimentali, viene a considerare come identici dei fenomeni che in realtà non lo sono: questa attività è rivolta allo scopo pratico di allargare il campo d'applicazione delle leggi di natura, diminuendone il numero, che diversamente sarebbe infinito. Lo spirito, in questa sua attività semplificatrice, viene per così dire a creare dei nuovi enti sensibili, cioè formati di sensazioni, i quali però non possono mai trovarsi presenti in alcunchè di materialmente sussistente, ma possono solo esistere come oggetti della nostra immaginazione, ed avere relazioni di somiglianza con i corpi della natura. A tali immagini sensibili corrispondono i comuni concetti della geometria, o meglio, esse costituiscono l'attuazione sensibile di tali concetti, che solo per tal mezzo possono da noi essere intesi.

Si tratta ora di vedere se tutto ciò che nell'atto dell'esperienza è differente dalla materiale sensazione, è soltanto opera dello spirito, il che significa che deve unicamente soddisfare alle leggi logiche della ragione ed a quelle norme che noi poniamo a scopo di economia di pensiero; oppure deve presupporre la presenza di qualche cosa di esterno a noi. Se tutto ciò che non è sensazione fosse soltanto opera nostra, l'esperienza e le dottrine sperimentali potrebbero interpretarsi come semplice sistemazione economica dei dati del mondo sensibile: le leggi di natura avrebbero il valore delle proposizioni geometriche, ossia, pur riferendosi alla realtà materiale, sarebbero nello stesso tempo arbitrarie, e si potrebbero dare differenti sistemi di leggi naturali tutti ugualmente legittimi, come i differenti sistemi di geometrie. Ma questo non è.

Del resto, accennando all'esempio della legge galileiana della discesa dei gravi, si è visto come in ogni legge di natura vi sia sempre di più di quello che il nostro spirito può attingere dall'indagine sperimentale: e questo fatto presuppone nello scienziato la certezza dell'esistenza d'una realtà che trascende quella empirica attinta dall'esperienza. Ancora, quando osserviamo la caduta di un grave e ne deduciamo la legge, siamo certi di potere, in un altro qualsiasi istante di tempo e facendo cadere il medesimo corpo, constatare che il modo di questa nuova caduta è d'accordo con la legge prima dedotta. Eppure dalla prima esperienza, e stando unicamente al dato sensibile ed alla facoltà del nostro intelletto, si potrebbe soltanto concludere che, in un determinato istante, il variare d'un

particolare gruppo di sensazioni, raggruppate dal concetto di corpo cadente, è avvenuto secondo una determinata legge. Tutto quanto oltrepassa il valore di questa affermazione deve trovare la sua legittimità in qualche differente pincipio.

Senso ed intelletto non implicano affatto che ogni istante debba essere in qualche relazione con il suo antecedente ed il suo susseguente. Infatti sensazione è tutto ciò che può colpire i nostri sensi, e come unicamente tale non può essere sottoposta che a questa sola condizione, e d'altronde non può in noi trovarsi l'esigenza che le sensazioni si debbano presentare in un determinato modo piuttostochè diversamente: cioè lo spirito può imporre delle leggi solo a sè medesimo e non alle sensazioni.

Il motivo principale per cui dimostrazioni come quelle date da ARCHIMEDE e da DANIELE BERNOULLI delle leggi della leva e del parallelogramma delle forze non raggiungono il loro scopo, consiste appunto nel fatto che esse vengono a supporre come innati o a priori, ossia come cosa propria dello spirito, dei principi che invece hanno il loro fondamento fuori di noi.

Noi abbiamo la certezza che il mondo è regolato da una sua interiore legge senonchè se tale legge fosse contenuta nella nostra ragione ci sarebbe perfettamente nota, e così pure se fosse contenuta nelle sensazioni, ossia se esse dovessero portare con sè tale necessità; invece essa, non derivando da nessuna di queste nostre fonti della conoscenza, non può essere mai conosciuta in modo preciso: abbiamo la certezza che essa esista, senza sapere quale sia veramente.

Nell'esistenza di una tale legge sta appunto il fatto dell'esistenza d'un mondo a noi esterno, cioè d'un qualche cosa che sappiamo dover avvenire, senza però esserne padroni della legge. L'esperienza sensibile costituisce il contatto fra il nostro spirito e questo mondo; e questo contatto avviene mediante le sensazioni, per il loro duplice carattere di soggettività e di oggettività: di soggettività in quanto da un lato si presentano come cosa nostra, come un modo di determinarsi del nostro spirito: e di oggettività in quanto che il modo del loro presentarsi, del loro persistere e del loro susseguirsi, non è conseguenza d'una attività nostra. Dicendo quindi che nelle sensazioni v'è un elemento oggettivo, cioè a noi esterno, non si vuol affermare la presenza d'un certo quid che ne forma il nucleo e non può da noi essere afferrato, una sostanza che, non essendo sensazione, si manifesta a noi mediante la parvenza di sensazioni; ma invece si vuol significare che ad esse è inerente un modo d'essere e di svolgersi che non dipende da noi, e che non possiamo neppure mai conoscere in modo completo.

Così l'essenza della realtà d'un mondo esterno a noi non costituisce un problema fisico relativo ad una materialità sussistente di fronte allo spirito, ma bensì un problema matematico di relazioni fra fenomeni e sensazioni.

La certezza dell'esistenza d'una legge di natura non è indubbiamente della stessa specie della certezza che noi abbiamo delle verità matematiche, e neppure di quella che noi abbiamo quando affermiamo: questo corpo è verde. Quest'ul-

tima specie di certezza è differente da quella relativa alla verità delle proposizioni matematiche perchè non è fondata su nessuna esigenza logica, e la sua negazione non sarebbe incomprensibile, nulla vietando che il corpo osservato sia rosso anzichè verde; ma è una certezza che nasce dall'osservazione d'un fatto che viene constatato così come a noi si presenta, senza che in noi vi sia nulla che lo faccia necessariamente come è. La certezza dell'esistenza d'una legge di natura non è nè logica, e neppure nasce dal fatto che essa può essere sentita da noi nello stesso modo con cui sentiamo una sensazione: è una certezza che ci proviene dalle cose, senza però potersi dire necessariamente inerente ad esse, o legittimamente dedotta da esse nello stesso modo con cui si ricava la conoscenza del colore d'un corpo: rappresenta una premessa a noi necessaria per poter concepire il mondo e vivervi come facciamo, una fede che noi abbiamo e che non ci è mai contraddetta dall'esperienza.

A. BLONDEL (Paris - Francia)

MÉTHODE GRAPHIQUE POUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU TROISIÈME DEGRÉ ET LA DISCUSSION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU TROISIÈME ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS ET APPLICATIONS AU PROBLÈME DES RÉGULATEURS

1. - Établissement d'un abaque général.

On peut discuter aisément l'influence des coefficients b_1, b_2, b_3 de l'équation différentielle du troisième ordre

$$\frac{d^2u}{dt^2}+b_1\frac{d^3u}{dt^3}+b_2\frac{du}{dt}+b_3u=0 \tag{1}$$

(à laquelle conduisent de nombreux problèmes de mécanique et de physique), en determinant graphiquement les racines réelles de l'équation caractéristique générale du troisième degré

$$x^3+b_1x^2+b_2x+b_3=0 \tag{2}$$

par l'intersection des droites

$$y_1=-b_2x-b_3 \tag{3}$$

avec une courbe cubique

$$y_2=x^3+b_0x^2 \tag{4}$$

qui est très facile à construire. C'est une courbe en zigzag, ayant deux branches allant à l'infini, l'une du côté des y positifs, l'autre du côté des y négatifs, séparées par une boucle d'amplitude plus ou moins développée suivant la valeur de b_0 et qui est tangente à l'axe des x à l'origine et à une droite parallèle en un point dont l'abscisse est $-\frac{2}{3}b_0$ et dont l'ordonnée est égale à $\frac{4b_0^3}{27}$; suivant que b_0 est positif ou négatif, la boucle se trouve dans le second quadrant ou dans le quatrième.

L'épure de la fig. 1 donne un exemple partiel d'un tel réseau d'abaques pour le cas particulier de $h_1=1$.

Mais la construction de tout un réseau de cubiques pour les diverses valeurs de b_1, quand on envisage des variations de ce coefficient, est un peu laborieuse.

On peut s'en dispenser par l'emploi d'un abaque universel formé seulement de trois cubiques et d'échelles faciles à tracer. Il suffit d'évaluer x et b_3 en

fonction de b_1 et de remplacer les équations (3) et (4) par les suivantes qui satisfont encore à (1):

$$y_1' = -\frac{1}{b_1^2}\left(b_2\frac{x}{b_1}+\frac{b_3}{b_1}\right) = -\frac{1}{b_1^2}\left(b_2x'+\frac{b^3}{b_1}\right), \tag{3'}$$

$$y_2' = \left(\frac{x}{b_1}\right)^2\left(\frac{x}{b_1}+1\right) = x'^2(x'+1), \tag{4'}$$

la nouvelle variable x' étant définie par

$$x' = \frac{x}{b_1}. \tag{5}$$

L'équation (4') représente une cubique I ne contenant que des coefficients constants, et applicable tant que b_1 est positif; cette courbe est tangente à l'axe des abscisses pour $x'=0$, et à l'horizontale $y'=\frac{4}{27}$ pour $x'=-\frac{2}{3}$; entre ces deux horizontales, la courbe décrit une boucle au-dessus de l'axe des x.

Quant à la droite, représentée par l'équation (3'), elle est déterminée par deux points sur les axes coordonnées

$$x' = -\frac{b_3}{b_1b_2} \quad \text{pour} \quad y'=0 \tag{6}$$

$$y' = -\frac{b_3}{b_1^2} \quad \text{pour} \quad x'=0. \tag{7}$$

Il suffit de mener un fil par ces deux points et de prendre ses intersections avec la cubique (4'); les abscisses x_1' correspondantes donnent les valeurs des racines. Si les trois racines sont réelles, on trouve trois intersections. S'il n'y en a qu'une, son abscisse x' donne la valeur de la racine réelle unique $a_1=b_1x_1'$; les deux racines imaginaires $\alpha \pm j\beta$ (avec $j=\sqrt{-1}$) s'en déduisent par des relations entre racines de l'équation (2)

$$a_1-2\alpha = -b_1, \tag{8}$$

$$a_1(\alpha^2+\beta^2) = -b_3. \tag{9}$$

D'où

$$a_1 = -\frac{1}{2}(b_1+\alpha) \tag{10}$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{b_3}{a_1}-\alpha^2} = \sqrt{-\frac{b_3}{a_1}-\left(\frac{b_1+a_1}{2}\right)^2}. \tag{11}$$

Cet abaque cartésien peut être transformé en abaque à points alignés (rentrant dans les méthodes générales de M. D'OCAGNE) en reportant sur la cubique elle-même les graduations correspondantes aux abscisses de ses points. On a alors trois échelles purement numériques placées respectivement sur les deux axes et sur la cubique. La graduation sur l'axe des ordonnées peut être, suivant les cas, construite à une échelle égale, ou amplifiée, ou réduite par rapport à la graduation des abscisses.

L'abaque, ainsi établi pour les valeurs positives de b_1 n'est plus valable pour

les valeurs négatives; on explicitera alors le signe en écrivant $-b_1$ et l'on obtiendra ainsi la deuxième cubique (courbe II)

$$(4'') \qquad y_2' = \left(\frac{x}{b_2}\right)^2 \left(\frac{x}{b_1} - 1\right) = x'^2(x'-1)$$

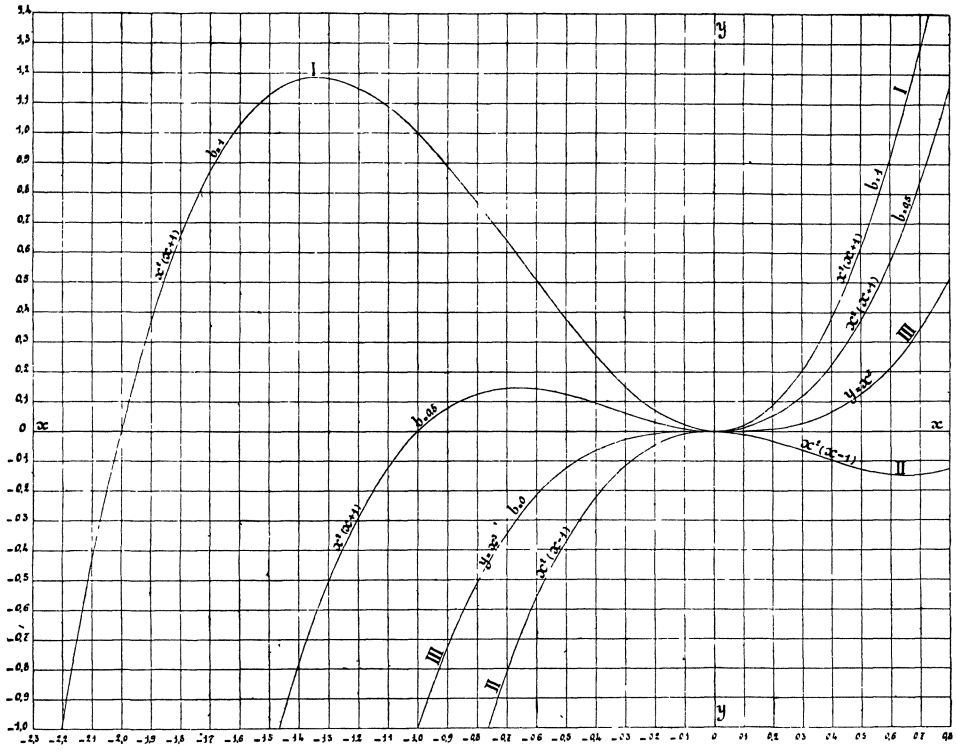


Fig. 1.

symétrique de la première par rapport à l'origine des coordonnées, donc ayant sa boucle dans le quatrième quadrant au lieu du deuxième; et une autre série de droites

$$(3'') \qquad y_1' = -\frac{1}{b_1^2}\left(b_2 x' - \frac{b_3}{b_1}\right),$$

coupant les axes aux points

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = \dfrac{b_3}{b_1 b_2} & \text{pour} \quad y' = 0 \\ y' = \dfrac{b_3}{b_1^2} & \text{pour} \quad x' = 0. \end{cases}$$

On portera de même l'échelle correspondante aux abscisses sur cette deuxième courbe. On n'oubliera pas que b_1 est alors un module et non une grandeur algébrique.

Enfin, pour le cas ou $b_1=0$, il faut tracer la troisième cubique (courbe III)

$$y_2=x^3 \tag{4'''}$$

avec son échelle proportionnelle aux abscisses x, qu'on reprend au lieu de x', et employer, pour tracer la droite, l'équation

$$y_1=-b_2x-b_3 \tag{3'''}$$

qui coupe les axes aux points

$$\begin{cases} y_1=0, & x=-\dfrac{b_1}{b_3} \\ y=-b_3, & x=0. \end{cases} \tag{13}$$

On pourra utiliser les mêmes échelles sur les axes, mais en remarquant qu'elles se rapportent alors non plus à $\frac{x}{b_1}$ et à $\frac{b_3}{b_1}$, mais à x et b_3 eux-mêmes.

Les trois courbes cubiques I, II, III, permettent donc de calculer dans tous les cas par simple alignement les racines de l'équation complète ou incomplète du troisième degré. Ce qui est important, elles permettent de discuter l'équation très facilement aux points de vue:

1°) Du nombre des racines réelles, mesuré par le nombre des intersections avec la droite auxilliaire;

2°) De la limite de réalité (cas d'une racine double) qui correspond au cas où la droite est tangente à la cubique considérée;

3°) Du signe des racines réelles et du signe de la partie réelle des racines imaginaires;

4°) Et enfin de l'influence des coefficients b_1, b_2, b_3 sur la valeur et le signe des racines; or, tandis que les cubiques sont invariables, le coefficient $-\frac{b_2}{b_1^2}$ détermine l'inclinaison de la droite et le coefficient b_3 son abscisse x' à l'origine

$$x_0'=\frac{b_3}{b_1b_2}.$$

Cas particuliers: Quand l'équation (1) représente des régions oscillatoires, la racine réelle a_1 mesure l'amortissement du terme apériodique et l'on envisagera des surfaces de niveau (qui ici sont des plans) rapportées aux trois variables b_1, b_2, b_3 en écrivant que l'équation (2) est satisfaite pour une série de valeurs a, convenablement choisies:

$$a_1^3+b_1a_1^2+b_2a_1+b_3=0. \tag{14}$$

Ces surfaces se réduisent à des droites dans un plan quand l'un des coefficients b_1, b_2, b_3 est nul ou constant. Par exemple, pour $b_1=1$, on a

$$-b_3=a_1^3+a_1^2+a_1b_2. \tag{15}$$

Les valeurs de b_2 et b_3 compatibles avec une valeur a_1 constante se placent donc sur une droite, et un réseau de droites obtennes pour diverses valeurs

de a_1 définira ainsi toutes les conditions du problème. De même, ou peut tracer un autre réseau de droites

$$b_3=(2a+1)^3-(2a+1)^2+b_2(2a+1) \tag{16}$$

correspondantes à une série de valeurs données à la partie réelle a des racines imaginaires.

Si, au lieu de $b_1=1$, on a $b_2=1$, les équations (15) et (16) sont remplacées par

$$-b_3=a_1^3+b_1a_1^2+a_1,$$
$$b_3=8a^3+4a^2b_1+2ab_1^2,$$

qui représentent encore des faisceaux de droites et de coniques faciles à construire.

L'abaque qui donne à simple vue les valeurs de a_1 permet de tracer très rapidement ces topogrammes qui traduisent l'équation différentielle (1). La comparaison des coefficients suffit alors pour qu'on puisse lire sur les topogrammes les valeurs de a_1 et a correspondantes.

2. - Applications. Réglage des régulateurs à commande directe munis d'amortisseurs.

Le remplacement de la machine à vapeur à piston par la turbine à vapeur rend désirable de compléter sur certains points la théorie des régulateurs à cataracte établie dès 1876 par VYCHNÉGRADSKY, tout en tenant compte des travaux classiques de M. LECORNU sur les régulateurs simples, amortis seulement par frottement du manchon. Pour faciliter les comparaisons, on adoptera ici (comme M.M. LECORNU (1) et CHIPART (2)) les variables réduites rapportées à l'écart de vitesse, et on les complétera par les variables réduites de CURIE pour les systèmes oscillants.

Ces derniers auteurs out borné leur étude aux régulateurs non amortis, c'est-à-dire n'ayant qu'un amortissement de frottement proportionnel au déplacement de l'organe qui commande la valve. Il est intéressant au point de vue de l'étude des machines modernes, de discuter le cas d'un régulateur présentant un amortissement proportionnel à la vitesse, produit par exemple par un dash-pot.

On posera les équations du problème en faisant les hypothèses généralement admises, c'est-à-dire:

a) que dans les limites des variations de la vitesse, le manchon du régulateur se trouve soumis à une action régulatrice proportionnelle à la vitesse (hypothèse des petits mouvements);

---

(1) Cf. LECORNU: *Régulateur du mouvement dans les machines*, Encyclopédie Léauté. *Traité des régulateurs des machines à vapeur*, Librairie Dunod, 1904. A. LECORNU: *Traité de dynamique appliquée*, Encyclopédie du docteur Toulonse.

(2) Cf. H. CHIPART: *Étude sur les régulateurs*. Bulletin des comptes-rendus de la Société de l'Industrie Minérale, 1914, page 101 et page 417.

b) que le couple moteur produit par la machine à vapeur est constant à chaque vitesse et varie linéairement avec l'ouverture de la valve;

c) que le frottement se traduit par une force F appliquée au manchon constant, mais changeant de signe avec le sens du déplacement de ce dernier.

On appellera: H, la course totale du manchon $H=z_1-z_0$; h, la fraction de H comprise dans la portion de course $z-z_0$; δ, l'écart de réglage de la vitesse du moteur, $\delta=\frac{\Omega_1-\Omega_0}{\Omega_1}=\frac{\omega_1-\omega_0}{\omega_1}$; u, la fraction relative de la levée totale du manchon $u=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}=\frac{h}{H}$; v, la fraction relative de variation de la vitesse du régulateur ω (par rapport à ses limites extrêmes $v=\frac{\omega-\omega_0}{\omega_1-\omega_0}$; τ, la période d'oscillation propre du régulateur; t', temps « réduit » $t=\frac{2\pi}{\tau}t$; a, le degré d'ammortissement du régulateur (d'après Curie), $a=\frac{A}{2\sqrt{IC}}$; η, la proportion du frottement F à la force élastique C que subit le régulateur $\eta=\frac{F}{C}$; T, la durée de mise en route à vide du moteur (d'inertie K), $T=\frac{K}{\Omega}$; $I-u$, la fraction utilisée du couple moteur M maximum $I-u=\frac{M}{M_1}$, ε, le degré d'insensibilité et v seront comptés à partir des valeurs $u_a v_a$ afférentes au régime *final* (après perturbation) en considérant les différences $u-u_a$, $v-v_a$. Le régime est défini par les équations différentielles (17) et (19), ou (18) et (20)

$$\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\tau}{2\pi}2a\frac{du}{dt}+u-v=0 \tag{17}$$

d'où, en substituant $t=\frac{2\pi}{\tau}t'$,

$$\frac{d^2u}{dt'^2}+2a\frac{du}{dt'}+u-v=0 \tag{18}$$

et

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{u}{T\delta}; \tag{19}$$

d'où, en introduisant t',

$$\frac{dv}{dt'}=-u\frac{\tau}{2\pi T\delta}=-\sigma u; \tag{20}$$

d'où, en portant dans (17),

$$\frac{d^3u}{dt'^3}+2a\frac{d^2u}{dt'^2}+\frac{du}{dt'}+\sigma u=0 \tag{21}$$

en posant $\frac{\tau}{2\pi T\delta}=\frac{1}{\delta T}=\sigma$ (coefficient de M. LECORNU).

Remarque I. - On ne peut substituer à ce système d'équations différentielles (18), (20) le système quelquefois proposé

$$\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\tau}{2\pi}2a\frac{du}{dt}+u=0, \tag{I}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{v}{\delta T};\quad \text{d'où}\quad v-v_a\left(1-e^{-\frac{t}{\delta t}}\right) \tag{II}$$

qui ne lui est nullement équivalent théoriquement. C'est seulement dans le *cas particulier exceptionnel* $2a=\sigma$ que l'équation (3) peut se décomposer en deux autres :

(III) $$\frac{du}{dt}+\frac{1}{T\delta}u=0;$$

(IV) $$\left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^2\frac{d^2u}{dt^2}+u=0.$$

On en tire

(22) $$u=Ae^{-\frac{1}{\delta}t}+S+B\sin\frac{2\pi t}{\tau}+C\cos\frac{2\pi t}{\tau},$$

solution qui n'a aucun rapport avec le système (I) et (II).

L'équation (21) a pour équation caractéristique

(23) $$w^3+2aw^2+w+\sigma=0.$$

En général, des trois racines de cette équations, une, α, sera réelle et les deux autres imaginaires conjuguées $\alpha+j\beta$ et $\alpha-j\beta$. Les coefficients de l'équation (23) sont tous positifs, on peut la discuter facilement.

1°) *Condition de convergence des oscillations.* - Il faut et il suffit que les parties réelles des racines soient toutes négatives, d'où la condition $\sigma<2a$ (d'après un théorème connu de HURWITZ).

2°) *Réglage apériodique.* - L'apériodicité est obtenue (au détriment de la promptitude de régulation) quand le discriminant est positif

(24) $$-27\sigma^2-4(8a^3-9)\sigma+4(a^2-1)>0.$$

Si donc l'on suppose connu a, toujours <1, les valeurs de σ doivent être réelles et inférieures à la valeur de la racine positive de l'équation du second degré, obtenue en égalant le premier nombre à zéro

$$\sigma=\frac{-2(8a^3-9a)+\sqrt{4(8a^3-a9)^2+108(a^2-1)}}{27}.$$

Les seules valeurs acceptables sont celles qui satisfont $\sigma\leqq 2a$, sauf pour a très petit.

3°) *Réglage exact.* - Pour déterminer les conditions du réglage dit « exact », il faut, comme l'a fait M. LECORNU dans le cas particulier $a=0$, chercher les conditions qui permettent d'obtenir l'arrêt du régulateur dans sa zone d'insensibilité par l'effet du frottement après la première alternance de ses oscillations provoquées par un changement de régime de u_iv_i à u_av_a par une modification brusque du couple résistant.

Nous pouvons déterminer facilement la fonction u qui pour $t=0$ soit nulle, ainsi que ses deux premières dérivées; c'est,

(25) $$u-u_a=\frac{(u_i-u_a)}{\xi}[Ae^{-\alpha_1 t'}+He^{-\alpha t'}(\cos\beta t'+\psi)]$$

avec

$$(26)\qquad \begin{cases} \xi=\alpha_1^2+\alpha^2+\beta^2+2\alpha\alpha_1, \\ A=\alpha^2+\beta^2, \qquad B=2\alpha\alpha_1+\alpha^2, \qquad C=\dfrac{\alpha_1(\alpha^2+\beta^2)-\alpha(2\alpha_1\alpha+\alpha^2)}{\beta} \\ H=\sqrt{B^2+C^2},\ \operatorname{tg}\psi=\dfrac{B}{C}. \end{cases}$$

Il suffit maintenant, pour déterminer une relation entre α et σ, d'écrire qu'à un temps inconnu, t_a', $u=u_a$ et $\frac{du}{dt}$ s'annulent et que $v_{t'}-v_a$ est au plus égal a $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}$, afin que l'effet du frottement puisse annuler l'accélération résiduelle du manchon au moment où il atteint la position exacte, alors que l'erreur relative sur la vitesse v_a ne dépasse pas $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\Omega}{\delta\Omega}=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}$ en valeur absolue. D'où :

$$(27)\qquad Ae^{-\alpha_1 t_a'}+He^{-\alpha t_a'}\cos(\beta t_a'+\psi)=0,$$

$$(28)\qquad -A\alpha_1 e^{-\alpha_1 t_a'}-He^{-\alpha t_a'}[\beta\sin(\beta t_a'+\psi)+\alpha\cos(\beta t_a'+\psi)]=0,$$

$$(29)\qquad \frac{\sigma}{\xi}(u_a-u_i)\left\{\frac{A}{\alpha}(e^{-\alpha t'}-1)\frac{H}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}[\cos(\beta t'+\psi+\varphi)-\cos(\psi+\varphi)]\right\}-v_a\leqq\pm\frac{\varepsilon}{2\delta}$$

avec $\operatorname{tang}\varphi=\frac{\beta}{\alpha}$.

A ces équations s'ajoutent les relations connues entre les racines de l'équation caractéristique :

$$(30)\qquad \alpha_1+2\alpha=-2\alpha, \qquad 2\alpha_1\alpha+\alpha^2+\beta^2=1, \qquad \alpha_1(\alpha^2+\beta^2)=-\sigma,$$

soit au total cinq équations qui permettent théoriquement d'éliminer t_a', α_2, α et β; et une inégalité qui établit ensuite une condition entre σ et α.

Pratiquement, cette élimination n'est pas possible et il faut donc recourir à une autre méthode de discussion.

Chacun des coefficients σ et β représente en réalité un rapport de deux fréquences d'oscillations propres; car on peut écrire

$$\sigma=\frac{\tau}{2\pi T_1}, \qquad \text{avec} \qquad T_1=\frac{K}{\delta\Omega M}$$

$$\beta=\frac{2\pi}{\theta}\frac{t'}{t}=\frac{2\pi}{\theta}\frac{\tau}{2\pi}=\frac{\tau}{\theta}.$$

En appelant Θ la période d'oscillation du régime périodique du mouvement imprimé à l'ensemble de la machine et du régulateur, par l'effet d'une variation brusque de charge, T_1 la durée d'ouverture de la valve, c'est-à-dire le temps que met la machine à passer de la plus faible vitesse Ω_1 (en pleine charge) à sa plus grande vitesse Ω_2 (à vide) quand on la décharge brusquement.

On remarquera que t' n'est pas à proprement parler un temps, mais un simple coefficient numérique de même que σ, α, u, v, etc.

D'autre part, la première et la troisième équation aux racines de l'équation caractéristique donnent

$$a_1+2a=-2a; \qquad a_1(a^2-\beta^2)=-\sigma$$

ou

$$\beta=\sqrt{-\frac{\sigma}{a^1}-a^2},$$

et cette expression montre que β doit, en général, varier avec σ et qu'il sera une fonction complexe de l'écart de réglage δ du couple moteur et de l'inertie du volant K.

Il y a seulement deux cas particuliers où l'influence du volant ne se fait pas sentir, ce sont ceux où l'on a soit $a=\sigma$ (régulateur sans cataracte), soit $2a=\sigma$ (régime limite de convergence).

On ne peut donc discuter aisément les conditions de réglage qu'en déterminant par un procédé rapide les valeurs des coefficients a_1, a et β, c'est-à-dire des racines de l'équation caractéristique du troisième degré complète

$$x^3+2ax^2+x+\sigma=0,$$

qui est un cas particulier de l'équation générale

$$x^3+b_0x^2+b_1x+b_2=0$$

obtenue en y faisant $b_0=2a$; $b_1=1$; $b_2=\sigma$.

En appliquant ce qu'on a exposé au début, on trouve que le faisceau de droites qui a pour expression $y_2=-x-\sigma$ est formé de droites parallèles à la bissectrice du second quadrant et ayant des ordonnées à l'origine proportionnelles aux valeurs du degré d'amortissement a portées en abscisses à gauche de l'origine. Ce faisceau est tracé sur l'épure de la fig. 1.

A chaque valeur du degré d'amortissement a correspond une cubique

$$y_1=x^3+2ax^2$$

qui coupe l'axe des abscisses à l'origine et au point $x=-2a$.

Pour plus de clarté, on a tracé un faisceau de telles cubiques pour diverses valeurs intéressantes de a.

Le sommet C de la boucle (coordonnées x_s, y_s) correspond à l'annulation de la dérivée $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire à $3x+4=0$, d'où l'on déduit

$$x_s=-\frac{4a}{3}; \qquad \text{et} \qquad y_s=\left(\frac{4}{3}\right)^2\frac{2a^3}{3}=\frac{32}{27}a^3.$$

En donnant à $-\sigma$ une série de valeurs différentes, on obtiendra un faisceau de droites y_1 parallèles, tracées au-dessous de l'origine et dont les intersections avec la courbe $QACOQ'$ donnent par leurs abscisses la racine a_1 toujours négative, qui est le coefficient de t dans le terme exponentiel $e^{a\cdot t}$ de l'oscillation complexe.

Par exemple, pour la droite ab, on obtient le point x_1. Quand la droite est amenée à la distance $Od = -2a$, egale à l'abscisse OA, on obtient la droite dA qui donne donc comme racine $OA = 2a$.

Pour une valeur plus grande de σ par oe, la droite ei coupe la courbe en un point i déterminant l'abscisse correspondante x_1' de la racine réelle a_1.

Dès qu'on a déterminé ainsi la racine réelle a_1 on en déduit immédiatement la partie réelle α des deux racines imaginaires $\alpha \pm i\beta$ par la formule (première équation aux racines)

$$\alpha = \frac{2a - a}{2};$$

α est représenté sur la figure par la moitié de la distance $-x_1A$ ou $+x_1'A$, suivant que la première racine est plus petite ou plus grande que $2a$.

Dans le premier cas, le mouvement sera parfaitement convergent, car les deux parties réelles des racines sont négatives. Dans le second cas, le terme périodique du mouvement oscillatoire sera divergent, tandis que le terme apériodique restera convergent.

Le frottement permet d'admettre, comme on le sait, une légère divergence pour le terme périodique (1), mais cependant, il parait préférable que ce terme périodique ne diverge pas. Le régime le plus favorable, à ce point de vue, est figuré par la droite Ad correspondant à la condition $\sigma = 2a$.

Tant que la valeur de σ est notable, il n'y a qu'une racine réelle ; par conséquent le mouvement est oscillatoire.

---

(1) Au degré d'amortissement a correspond un décrément logarithmique Δ qui lui est sensiblement proportionnel $a \backsimeq \frac{\Delta}{\pi}$ en première approximation.

Cette condition de convergence, ne s'étend pas au cas ($a = 0$) traité par M. LECORNU ; car en l'absence de l'amortissement a, le mouvement du régulateur serait toujours divergent si les oscillations n'étaient pas limitées d'autre part par l'effet du frottement F. D'ailleurs, lorsqu'il y a une longue suite d'oscillations, l'effet de frottement équivaut au remplacement de l'amortissement A considéré plus haut par un autre plus grand

$$A' = A + \frac{T}{\pi^2}\Delta'$$

caractérisé par un décrément logarithmique $\Delta' + \Delta$, avec

$$-\Delta = \log_e\left[1 - \frac{F}{Z_0}\left(1 + \frac{1}{e^{\Delta}}\right)\right] \backsimeq \log_e\left(1 - \frac{2F}{Z_0}\right).$$

La période d'oscillation n'est pas modifiée, et le degré d'amortissement total est alors, au lieu de a, sensiblement

$$a_1 + a + \frac{\Delta}{\pi'}.$$

D'où la condition approchée de convergence

$$\sigma < 2a + 2\frac{\Delta'}{\pi}.$$

Si σ devient plus petit que l'ordonnée à l'origine $oh = \sigma_1$ de la tangente à la boucle, on voit que la droite caractéristique, d'abord tangente à la courbe en i, la coupera en trois point pour toutes les valeurs de σ comprises entre cette valeur critique σ_1 et zéro. Il y a donc trois racines réelles qui seront toutes trois négatives et correspondront à trois mouvements apériodiques amortis. Dans le problème considéré, le coefficient σ ne pouvant être négatif, la branche de courbe Oq' est inutile et on n'a pas à craindre d'avoir des racines réelles positives, provenant des intersections du réseau de droites avec cette portion de courbe (1); la région totale comprise entre les deux droites à 45° tangentes à la boucle, et qui permet trois racines positives est d'ailleurs très étroite.

On peut tracer pour un même réseau des droites y_2, toute une série de courbes y_1, analogues à QOQ', mais correspondant à des valeurs différentes du degré d'amortissement $a = \frac{AO}{2}$; on voit par exemple une seconde courbe tracée en pointillé pour une valeur plus grande de $2a = OA'$.

On peut ainsi déterminer toute une série de valeurs de σ des racines correspondantes à une valeur de a. Il est plus pratique et plus facile à certains égards de représenter σ non pas en valeur numérique absolue, mais en valeur relative en fonction du coefficient d'amortissement a, c'est-à-dire de remplacer σ par σ',

$$\sigma' = \frac{\sigma}{2a}$$

$2a$ étant la valeur critique. Dans ce cas, toutes les courbes POQ' passeront par le point A qui définit la valeur $2a$ quelle qu'elle soit, et elles ne différeront

---

(1) Il peut en être autrement dans les problèmes mettant en jeu une équation caractéristique du 3e degré dans laquelle le terme tout connu et le terme en x auraient des valeurs différentes. Si, par exemple, on a une équation caractéristique de la forme

$$x^2 + 2ax^3 - bx - d = 0$$

on voit que le réseau auxiliaire des droites

$$y_2 = bx + d$$

aura un coefficient angulaire constant positif b correspondant à une droite inclinée OV tracée dans le premier quadrant sous l'angle γ, tel que $\operatorname{tg}\gamma = b$; et chaque droite aura une ordonnée à l'origine $OP = d$.

Les points de rencontre de cette droite avec la courbe QOQ' peuvent donner, dans le cas considéré, trois racines réelles dont deux négatives et une positive.

Si la droite s'élève beaucoup plus vers O pour des valeurs de d croissantes, on arrivera à n'avoir plus qu'une racine réelle positive donnant lieu à un mouvement périodique divergent.

En retranchant de l'abscisse positive correspondante OX_1, la valeur $2a$ du coefficient du terme en X_2, on obtient la distance OWl dont le point milieu donne la racine x_2 qui représente la partie positive de la racine imaginaire. Suivant la valeur relative de $2a$ et de OX_1, la racine imaginaire sera négative ou positive et donnera ainsi lieu à un mouvement convergent ou divergent.

que par leurs ordonnées (1). L'épure de la fig. 1 en représente un faisceau pour des valeurs de a variées de 0,01 à 1,3.

La construction d'un tel réseau de courbes QOQ' n'est pas aussi fastidieuse qu'on pourrait le croire à première vue, car a ne dépassera jamais en pratique la valeur $a=1$, qui correspond à l'apériodicité critique de l'oscillation du régulateur considéré isolément; et d'autre part, comme on l'a vu, σ ne doit jamais dépasser notablement la valeur $2a$, pour éviter la divergence.

On peut donc se contenter de tracer un réseau de courbes correspondant à des valeurs de a variant de 0.10 en 0.10 jusqu'à 1; puis ajouter, à simple titre de curiosité, la courbe correspondante à $a=1.5$.

Toutes ces courbes ont leur sommet C sur une même verticale, tracée, comme on l'a vu plus haut, à la distance $\frac{4a}{3}$ à gauche de l'origine.

Dans le cas particulier où $a=0$, le sommet C de la boucle vient lui-même sur l'axe des x et la courbe y_1 correspondante a simplement un point d'inflexion en O. Elle est donc différente des autres et il est intéressant qu'elle soit tracée toujours puisqu'elle représente le cas d'un régulateur sans amortissement.

Quant a est nul, σ' n'a plus de sens, car la valeur de σ ne peut plus être rapportée à a. Il faut alors mesurer σ en valeur absolue, ce qui revient à supposer pour la détermination des ordonnées à l'origine $2a=1$.

Comme σ est toujours très inférieur à l'unité, l'abscisse qui représente la valeur de la racine réelle négative dans ce régime sera toujours beaucoup plus petite elle-même que l'unité. La partie réelle des racines imaginaires qui donne les termes périodiques étant, comme on le sait, égale à la moitié de la racine réelle et de signe contraire, il y a forcément divergence du terme périodique du mouvement oscillatoire, tandis que le terme périodique est franchement amorti.

Du réseau de courbes ainsi établi et complété, on peut déduire, par voie graphique, d'autres courbes intéressantes donnant, par exemple, pour chaque valeur du rapport $\frac{\sigma}{2a}$ les valeurs des racines positives, correspondantes aux différentes valeurs de a comprises entre zéro et 1.5. Il suffit, à cet effet, de rapporter sur un axe horizontal les différentes valeurs de a qui ont servi à établir les courbes et de porter en ordonnée, au dessus de chaque point ainsi déterminé, la valeur x_1 correspondante à l'abscisse du point d'intersection, qui définit la racine positive α_1. On tracera en même temps la courbe des valeurs a de la partie réelle des racines imaginaires en portant en ordonnées la moitié du

---

(1) Les courbes y_1 ne sont pas représentées par des équations homogènes en σ et a, parce qu'ici ces deux coefficients sont des coefficients numériques; par conséquent il y a une forme différente de courbe y_1 pour chaque valeur numérique de $2a$; par contre, il n'y a qu'une seule échelle pour σ' puisque σ' représente ici un quotient de deux valeurs numériques, dont l'une est prise pour unité.

segment Ax_1. Enfin, possédant ainsi les valeurs de a_1, on déduit par un calcul algébrique très simple de la 3e « équation aux racines », les valeurs correspondantes de β

$$\beta = \sqrt{\frac{-\sigma}{a_1} - a^2} = \sqrt{\frac{\sigma}{x_1} - a^2}$$

β étant le coefficient de t' dans les termes sinusoidaux qui figurent dans l'expression du mouvement oscillatoire. Les trois courbes de a_1, x_1 et β permettent ensuite d'obtenir par interpolation les valeurs intermédiaires de a_1, σ conservant toujours même valeur relative σ' par rapport à $2a$.

En recommencant la même construction pour d'autres valeurs du rapport $\frac{\sigma'}{2a}$, on obtiendra de nouveaux groupes de courbes correspondantes aux valeurs les plus usuelles de σ.

En résumé, pour toute valeur $\sigma < 2a$, l'abscisse de l'intersection $x = a_1$ est négative et par suite aussi a (tant que a n'est pas nul), $a = -2a - a_1$. Quand $\sigma > 2a$, l'abscisse a_1 reste négative, mais a devient positif et, par conséquent, le terme oscillatoire du mouvement du régulateur devient divergent (sauf compensation par le frottement).

Si σ est petit et si a reste assez grand, on peut avoir trois racines réelles négatives (régime apériodique) pourvu que la boucle soit assez haute. La condition correspond à la réalité de l'expression de σ, et est $a > 0.974$.

On peut alors mener à la cubique una tangente de coefficient angulaire égal à -1.

An point de vue des applications pratiques, une analyse de la figure montre que :

1°) pour une valeur donnée de σ, il y a avantage à ne jamais dépasser pour le régulateur l'amortissement critique

$$2a = \sigma ;$$

toute réduction sur cet amortissement se traduit par une augmentation du décrément du terme apériodique et par une augmentation du décrément négatif du terme périodique.

2°) Dans tous les cas, l'amortissement doit être proportionné à la valeur de σ de manière à conserver à peu près toujours le même rapport $\frac{\sigma}{a}$ une fois qu'il est reconnu favorable pour une certaine catégorie d'applications.

3°) Pour des valeurs très petites de σ (qui reste toujours positif) la sécante coupe la courbe en trois points et on peut avoir trois racines réelles ; les trois amortissements seront d'ailleurs négatifs, mais on ne peut recommander ce genre de réglage parce que la rapidité d'action diminue avec le rapport $\frac{\sigma}{2A}$.

En définitive, il est bon de se rapprocher autant que possible du réglage critique de l'amortissement $2a = \sigma$; ce réglage permet de reduire beaucoup le degré d'insensibilité du régulateur, c'est-à-dire le rapport $\frac{\sigma}{a}$.

Dans le cas limite de la convergence, $\sigma=2a$, l'épure montre que la racine réelle négative $-a_1$ est alors précisément égale à $-2a=-\sigma$, et que $a=0$. La troisième équation aux racines donne alors $\beta=1$; donc $\Theta=\tau$. Les formules générales données plus haut se réduisent alors aux suivantes [1]:

$$u_{t'}-u_n=\frac{u_i-u_n}{1+a_1^2}\left[e^{-a_1 t'}+a_1\sqrt{1+a_1^2}\cos(t'-\psi)\right]; \quad \text{avec} \quad \operatorname{tang}\psi=\frac{1}{a_1}.$$

Les conditions du réglage dit « exact » sont donc

$$e^{-a_1 t'}+a_1\sqrt{1+a_1^2}\cos(t'-\psi)=0$$

$$e^{-a_1 t'}+\sqrt{1+a_1^2}\sin(t'-\psi)=0.$$

On en déduit par division et par addition (après élévation au carré)

$$\operatorname{tang}(t'-\psi)=-a_1=-e^{-a_1 t'}.$$

D'où l'on tire deux expressions de t':

$$t'=\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{a_1}+\operatorname{arc\,tang}a_1=\frac{\pi}{2}+(2m+1)\pi$$

$$t'=-\frac{\log a_1}{a_1}.$$

En traçant la courbe de cette seconde valeur de t' en fonction de a_1, on trouve, par suite, son intersection avec la droite $t'=\frac{3\pi}{2}$ avec l'abscisse commune $a_1=0.27$; d'où $\sigma=0.27$. La valeur correspondante $t'=\frac{3\pi}{2}$ définit l'époque où le manchon atteint tangentiellement, au cours de sa première période d'oscillation, l'élongation maxima correspondant à la position exacte u_n.

C'est $t=\frac{\tau}{2\pi}0.27=0.043\tau$.

On doit vérifier que la vitesse $v_{t'}$ obtenue pour cette valeur de t' ne diffère de la valeur exacte v_n que d'une quantité $\pm\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}$ représentant la marge d'insensibilité du manchon. On écrira donc, d'après l'équation différentielle du mouvement du manchon

$$v_{t'}-v_n=u_{t'}+\sigma\left(\frac{du}{dt'}\right)_{t'}+\left(\frac{d^2u}{dt'^2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}-u_n.$$

Pour que $v_{t'}$ soit dans la zone de régime, c'est-à-dire diffère de v_t de $\pm\frac{1}{2}\frac{\varepsilon}{\delta}$, il faudra que

$$0<v_{t'}-v_n-\frac{\varepsilon}{2\delta}<\frac{\varepsilon}{\delta},$$

---

[1] Nous employons ici, pour éviter toute confusion, l'indice i pour les valeur *initiales* de $u+v$, et n pour les valeurs finies correspondant au *nouveau* régime permanent. D'autre part nous mettons ici en évidence le signe de la racine réelle en l'écrivant $-a_1$; a_1 est donc un nombre positif.

en remarquant qu'au régime permanent, $v_n = u_n$. Or, en substituant dans le second membre la valeur calculée ci-dessus de $u_{t'} - u_n$, on obtient

$$v_t = v_n = \frac{u_i - u_n}{1 + a_2^1}\left[e^{-a_1 t'} - a_1^2\sqrt{1 + a_1^2}\,\sin(t' - \psi)\right],$$

ou, en remplaçant $\sin(t' - \psi)$ et $e^{-a_1 t'}$ par leurs expressions, et a_1 par σ qui lui est égal,

$$\frac{u_i - u_n}{1 + a_1^2}(e^{-a_1 t'} + a_1^3) = \sigma(u_i - u_n) \leqq \frac{\varepsilon}{\delta},$$

le maximum de $u_i - u_n = 1$ à pleine charge; d'où finalement la condition très simple

$$\sigma_0 < \frac{\varepsilon}{\delta}, \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon > \sigma_0\delta > 0.27\delta.$$

On peut comparer ces résultats à ceux que donne le cas $a = 0$ étudié par M. LECORNU. D'après un exposé de M. CHIPART (1) on a alors exactement

$$\sigma_0 = 0.235; \qquad t' = 4.5; \qquad \varepsilon > 0.386\delta.$$

Les différences sur σ_0 et t' sont donc peu importantes. Cependant les valeurs de a_1, a et β sont très différentes :

$$a_1 = -2.35; \qquad a = 1.175; \qquad \beta = \frac{a}{0{,}11} = 10.7.$$

Les cas usuels seront compris entre ces deux cas spéciaux. Mais on peut recommander comme le meilleur réglage celui qu'on vient de calculer pour $\sigma = 2a$.

Le calcul et la discussion sont beaucoup facilités par la résolution graphique indiquée au début de ce mémoire.

---

(1) Bulletin des Comptes rendus mensuels de la Société de l'Industrie minérale, 10, mai 1914, p. 417-454.

A. DURANONA Y VEDIA (La Plata - Argentina)

SOBRE EL PRODUCTO DE UNA INTEGRAL SUMABLE C_δ POR UNA INTEGRAL ABSOLUTAMEMTE CONVERGENTE

Si $\int_0^\infty u(x)dx$ es sumable C_δ con suma $u(d>0)$ é $\int_0^\infty v(x)dx$ es absolutamente convergente y su valor es $v\int_0^\infty w(x)dx$ donde $w(x)=\int_0^\infty u(\eta)v(x-\eta)dy$ es sumable C_δ con suma $u\cdot v$.

Son necesarias algunas consideraciones previas:

I). $w(z)$ es función integrable en cualquier intervalo $\widehat{Oa}$ $(a>0)$.

La demostración puede verse en nuestro trabajo « Sobre producto de integrales sumables Césàro » Volúmen IV entrega III de la « Contribución al estudio de las Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Nacional de La Plata » República Argentina.

II). Si se tiene la expresión:

$$I=\iint_T f_1(a-x)f_2(\eta)f_3(x-\eta)dxdy$$

(donde f_1, f_2 y f_3 son tres funciones integrables; y T un dominio limitado por las rectas $a-x=0$; $y=0$; $x-y=0$); y se efectúa el cambio de variables

$$x=a-x_1+y_1 \qquad y=y_1,$$

se deduce que: transformándose el dominio T en si mismo, (pues $a-x=0$ se transforma en $x_1-\eta_1=0$; $x=y$ en $a-x_1=0$; e $y=0$ en $\eta_1=0$) y siendo por otra parte $\frac{\partial x_1\eta_1}{\partial(x\eta)}=-1$ se tendrá

$$\iint_T f_1(a-x)f_2(\eta)f_3(x-\eta)dxd\eta=\iint_T f_1(x_1-\eta_1)f_2(\eta_1)f_3(a-x_1)dx_1d\eta_1.$$

III). Las dos integrales dobles de la ecuación anterior pueden efectuarse por integraciones sucesivas, quedando entonces;

$$\int_0^a f_1(a-x)\cdot\int_0^x f_2(\eta)f_3(x-\eta)d\eta\cdot dx=\int_0^a f_3(a-x)\cdot\int_0^x f_1(x-\eta)d\eta\cdot dx.$$

Pongamos: $f_1(t)=t^\delta$; $f_2(t)=u(t)$; $f_3(t)=v(t)$ entances

$$\int_0^a (a-x)^\delta \cdot \int_0^x u(\eta)v(x-\eta)d\eta \cdot dx = \int_0^a v(a-x)\int_0^x u(\eta)(x-\eta)^\delta dy \cdot dx$$

y recordando que

$$w(x)=\int_0^x u(\eta)v(x-\eta)d\eta$$

resultará

$$(1) \qquad \int_0^a (a-x)^\delta w(x)dx = \int_0^a v(a-x)\int_0^x u(\eta)(x-\eta)^\delta dy.$$

IV). Si $\int_0^\infty f(x)dx$ converge absolutamente; y es $|\varepsilon(x)|<A$ para

$$x\geqslant 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$$

demostraremos que:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(a-x)\varepsilon(x)dx=0.$$

En efecto:

$$(2) \qquad \left|\int_0^a f(a-x)\varepsilon(x)dx\right| \leqslant \int_0^b |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx+\int_b^a |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx.$$

Pero

$$\int_0^b |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx<A\int_0^b |f(a-x)|dx$$

y efectuando en el segundo miembro el cambio de variables $a-x=t$ resulta

$$\int_0^b |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx<A\int_{b-a}^a |f(t)|dt$$

más siendo $\int_0^\infty f(x)dx$ absolutamente convergente, se puede elegir N de manera que $\int_{a-b}^a |f(t)|dt<\frac{\varepsilon}{2A}$ si $a-b>N$ quedando entonces:

$$(3) \qquad \int_0^b |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx<A\frac{\varepsilon}{2A}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte, es posible elegir b de manera que $\varepsilon(x)<\dfrac{\varepsilon}{2\int_0^\infty |t(x)|^{\frac{1}{4}}|dx}$ si se toma $x\geqslant b$ entonces

$$\int_b^a |f(a-x)||\varepsilon(x)|dx<\frac{\varepsilon}{2}\frac{\int_b^a |f(a-x)|dx}{\int_0^\infty |f(x)|dx}<\frac{\varepsilon}{2}\frac{\int_0^a |f(a-x)|dx}{\int_0^\infty |f(x)|dx}$$

y efectuando en el último miembro el cambio de variables $a-x=t$ tendremos

$$(4) \qquad \int_b^a |f(a-x)|\,|\varepsilon(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{\int_0^a |f(t)|\,dt}{\int_0^\infty |f(x)|\,dx} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por medio de las (3) y (4) podemos obtener de la (2) que

$$\left|\int_0^a f(a-x)\varepsilon(x)dx\right| < \varepsilon$$

si $a-b>N$ ó sea si $a-b+N$ lo que quiere decir que:

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a f(a-x)\varepsilon(x)dx=0.$$

DEMOSTRACION DEL TEOREMA. - En el III hemos demostrado que

$$\int_0^a (a-x)^\delta w(x)dx=\int_0^a v(a-x)\int_0^x u(\eta)(x-\eta)^\delta dy\cdot dx$$

y dividiendo por a^δ quedará

$$(5) \qquad \int_0^a \left(1-\frac{a}{x}\right)^\delta w(x)dx=\frac{\int_0^a v(a-x)\int_0^x u(\eta)(x-\eta)^\delta d\eta\cdot dx}{a^\delta}.$$

Por ser $\int_0^\infty u(x)dx$ sumable c_δ con suma u podemos poner

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x u(\eta)\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^\delta d\eta=u,$$

lo que también puede escribirse

$$\int_0^x u(\eta)\left(1-\frac{\eta}{x}\right)^\delta d\eta=u+\varepsilon(x)$$

siendo $\lim_{x\to\infty}\varepsilon=(x)0$; y multiplicando por x^δ

$$\int_0^x u(\eta)(x-\eta)^\delta d\eta=ux^\delta+\varepsilon(x)x^\delta.$$

Podemos transformar entonces la relación (5) como sigue:

$$\int_0^a \left(1-\frac{x}{a}\right)^\delta w(x)dx=u\,\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta dx}{a^\delta}+\frac{\int_0^a v(a-x)\varepsilon(x)x^\delta dx}{a^\delta}$$

con lo que

$$(6)\qquad \lim_{a\to\infty}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^\delta w(x)dx = u\lim_{a\to\infty}\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta dx}{a^\delta}+\lim_{a\to\infty}\frac{\int_0^a v(a-x)\varepsilon(x)x^\delta dx}{a^\delta}.$$

Con el cambio de variables $t=(a-x)$ puede obtenerse que

$$\int_0^a v)a-x)x^\delta dx=\int_0^a v(t)(a-t)^\delta dt.$$

Dividiendo por a^δ

$$\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta dx}{a^\delta}=\int_0^a v(t)\left(1-\frac{t}{a}\right)^\delta dt$$

y tendiendo al límite

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta dx}{a^\delta}=\lim_{a\to\infty}\int_0^a v(t)\left(1-\frac{t}{a}\right)^\delta dt.$$

El segundo miembro es la suma c_δ de la integral $\int_0^\infty v(t)dt$, que por ser convergente, debe ser también sumable c_δ con igual suma y entonces

$$(7)\qquad \lim_{a\to\infty}\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta dx}{a^\delta}=v.$$

Por otra parte

$$(8)\qquad \left|\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta\varepsilon(x)dx}{a^\delta}\right|<\int_0^a|v(a-x)||\varepsilon(x)|dx$$

y recordando que $\int_0^\infty|v(x)|dx$ es convergente, $\lim_{x\to\infty}\varepsilon(x)=0$ y $\varepsilon(x)$ es función continua y por lo tanto acatada para $x\geqslant 0$ (pues tiene límite para $x\to\infty$), tendremos por el IV que

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a|v(a-x)||\varepsilon(x)|dx=0$$

y según la (8) será también

$$(9)\qquad \lim_{a\to\infty}\frac{\int_0^a v(a-x)x^\delta\varepsilon(x)dx}{a^\delta}=0.$$

Con la (7) y la (9) podemos obtener de la (6) que

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^a\left(1-\frac{x}{a}\right)^{\delta}w(x)dx=uv.$$

Lo que quiere decir que $\int_0^{\infty}w(x)dx$ es sumable c_δ con suma $u\cdot v$.

NOTA. - El autor de estas lineas ha publicado en la « Contribucion al estudio de las Ciencias Fisico Matemáticas de la Universidad de La Plata », un teorema que se enuncia asi:

« Si $\sum_0^{\infty}u_n$ y $\sum_0^{\infty}v_n$ tienen funciones asociadas $u(x)$ y $v(x)$, la serie

$$\sum_0^{\infty}(u_0v_n+u_1v_{n-1}+\ldots.+u_nv_0)$$

tiene por asociada una funcion $w(x)$ definida por la relación

$$\int_0^x w(x)dx=\int_0^x u(t)v(x-t)dt.$$

Podemos deducis un corolario immediato aplicando nuestro teorema:

« Si $\sum_0^{\infty}u_n$ tiene integral de BOREL sumable c_δ con suma u; y $\sum_0^{\infty}v_n$ tiene integral de BOREL absolutamente convergente, cuyo valor es v,

$$\sum_0^{\infty}(u_nv_0+u_1v_{n-1}+\ldots.+u_nv_0)$$

tiene integral de BOREL sumable $c_{\delta+1}$ con suma $u\cdot v$.

A. NARASINGA RAO (Madras - India)

COMPLEX CURVES ON A QUADRIC SURFACE

1. - A pair of bilinear forms in four variables

$$A=\sum a_{rs}x_r y_s \qquad (a_{rs}=a_{sr}) \tag{1.1}$$

$$B=\sum b_{rs}x_r y_s \qquad (b_{rs}+b_{sr}=0) \tag{1.2}$$

one symmetric and the other skew-symmetric, may be associated with a quadric polarity and a null system in ordinary space, and possess but one absolute invariant, namely γ^2 where

$$\gamma=M/(LN)^{\frac{1}{2}}$$

and det

$$|a_{rs}+tb_{rs}|=Lt^4+2Mt^2+N.$$

It was pointed put by PASCH (Jour. fur d. reine und ang. Math. t. 75) that when γ vanishes, the complex B is apolar to the one obtained by polarising it with respect to the quadric A. A novel interpretation for γ itself is suggested in this paper by a study of the curves of the complex which lie on the quadrie. Expressed in « generator coordinates » such curves are given by double-binary forms of rank two which admit of two cyclic homographies, one in each of the digredient binary variables. In terms of the absolute invariant γ they take the shape

$$\lambda^{\sqrt{\gamma-1}}=\mu^{\sqrt{\gamma+1}}$$

and are algebraic when γ is of the form $(m^2+n^2)/(m^2-n^2)$, m and n being integers. Such curves admit each a continuous group of automorphic collineations and have recieved attention under the name of W-curves. (Encyklopädie d. math. Wissenschaften, III, C. 9, § 58).

2. - A quadric Q in ordinary space is the home of two reguli each of which defines a binary domain, and as a point on the quadric determines two elements one belonging to each regulus, the totality of such points constitute a double-binary domain. Taking $\lambda_1:\lambda_2$ and $\mu_1:\mu_2$ as the two binary variables, a curve on the quadric is associated with a form

$$a_\lambda^m b_\mu^n=0 \tag{2.1}$$

whose partial orders m and n indicate the number of its intersections with the generating lines of the two systems. In particular, a plane is represented by a bilinear form $a^\lambda b^\mu$, and by proper choice of planes we obtain a quaternary reference system in which the point (λ, μ) has the coordinates

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \lambda_1\mu_1 : \lambda_1\mu_2 : \lambda_2\mu_1 : k\lambda_2\mu_2 \tag{2.2}$$

the equation of the quadric being

$$x_1x_4 - kx_2x_3 = 0. \tag{2.3}$$

It is clear from the equation that the edges 12, 24, 43, 31 of the reference tetrahedron form a twisted quadrilateral lying entirely on the surface. We may specialise our reference system still further by assuming that the four edges named above are also complex lines, since any complex contains two lines belonging to each regulus. The equation of the complex is now of the shape

$$p_{14} - k'p_{23} = 0. \tag{2.4}$$

Using non homogeneous binary variables λ, μ the PLUCKERIAN coordinates of the line joining $(\lambda\mu)$ and $(\lambda+\delta\lambda, \mu+\delta\mu)$ on (2.3) are obtained as the several determinants of the matrix

$$\left\| \begin{matrix} \lambda\mu & \lambda & \mu & k \\ \lambda d\mu + \mu d\lambda & d\lambda & d\mu & 0 \end{matrix} \right\|$$

and when these satisfy (2.4), we have

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{k+k'}{k-k'}\frac{d\mu}{\mu}$$

giving on integration

$$\lambda^{k-k'} = \mu^{k+k'} \times \text{a constant.} \tag{2.5}$$

For the quadric k (2.3) and the complex k' (2.4) the invariant of § 1 works out to

$$\gamma^2 = \frac{(k^2 + k'^2)^2}{k^2k'^2}$$

In terms of this invariant the curves common to the quadric and the complex admit of being expressed in the form

$$\lambda^{\sqrt{\gamma-1}} = \mu^{\sqrt{\gamma+1}} \times \text{a constant.} \tag{2.6}$$

3. - A twisted quadrilateral in space determines a pencil of quadrics through it and also a pencil (system of two terms) of linear complexes containing the four lines. The quadric pencil contains two singular members namely the two plane pairs while the pencil of complexes contains two members which are « special » i. e. which consist of lines meeting a fixed line. Taking the para-

meters as 0 and ∞ in both cases, the quadrics are given by (2.3) and the complexes by (2.4). Two complexes whose parameters $+k'$ and $-k'$ are apolar to those of the singular pair are apolar or reciprocal complexes. Two quadrics whose parameters are $+k$ and $-k$ are apolar in the sense that their joint invariants Θ and Θ' both vanish.

When the quadric and complex are both given, the complex curves on the quadric are given by (2.5), the several curves being obtained by varying the constant on the right. These curves are all seen to be projectively equivalent since the multiplication $\lambda'=a\lambda$, $\mu'=\beta\mu$ which for proper choice of a, β carries any curve into any other is equivalent to the collineation

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = a\beta x_1 : ax_2 : \beta x_3 : x_4. \tag{2.6}$$

The complex curves (2.5) are straight lines i. e. one of the reguli belongs to the complex when $k=\pm k'$ or $(\gamma^2=1)$. They are conics if $(k-k')^2=(k+k')^2$ i. e. if either the complex or quadric degenerates, as is geometrically obvious, the value of the absolute invariant being infinite in this case.

4. - The automorphic group of a twisted quadrilateral 1243 (the group of collineations which carry the four sides into themselves) is a mixed 3-parameter group consisting of eight continuous systems of collineations corresponding to the eight possible permutations of the faces which carry the two diagonals 14 and 23 into themselves. Every collineation of the group carries a quadric of the pencil (2.3) or a complex of the pencil (2.4) into another member of the same pencil, those which leave a particular member invariant forming a subgroup with 2 effective parameters. Thus corresponding to the permutation (*rstu*) of (1234) we have a family of automorphic collineations of the quadric k given by

$$x_1' : x_2' : x_3' : x_4' = a_1x_r : a_2x_s : a_3x_t : a_4x_u \tag{4.1}$$

with the relation $a_1a_4=a_2a_3$ or $a_1a_4=k^2a_2a_3$ according as the permutation carries the two pairs 14 and 23 into themselves or each other. These collineations carry the complex k' (2.4) into one or other of the four complexes

$$k', \quad -k', \quad k^2/k', \quad -k^2/k' \tag{4.2}$$

the first of which is the original complex, the second its apolar complex in the pencil and the other two the result of polarising these with respect to the invariant quadric k. We thus have the result that:

The curves determined by different complexes on the same quadric are projectively equivalent only when the complexes are apolar or reciprocals of each other w. r. t. the quadric, or each is apolar to the polar reciprocal of the other.

When the invariant γ^2 of § 1 vanishes this closed system of 4 complexes reduces to two.

Similar considerations apply to the complexes (2.4). The linear transformations which carry the quadrilateral 1243 and any particular complex containing the sides into themselves, carries the quadric k into one of a set of four whose parameters are $\pm k$, $\pm k'^2/k$ which represent the original quadric, its apolar quadric in the pencil and the quadrics obtained by polarising these with respect to the invariant complex k'. The curves of the complex k' on any of these quadrics are projectively equivalent.

It may be noted that the absolute invariant γ^2 of the quadric k and the complex k' is a quartic in the two parameters k, k'. The four complexes (4.2) associated with a particular quadric or the four quadrics associated with a particular complex are precisely those which lead to the same value of the absolute invariant. This multiple correspondence between k and h' for a given value of explains the irrationality in the indices of the double-binary equation (2.6).

INDICE

COMUNICAZIONI

SEZIONE IV-A

DU PASQUIER L.-G. - Sur les nouveaux fondements philosophiques et mathématiques du calcul des probabilités . . . . . Pag. 5

URBAN F. M. - Das Mischungsproblem des Daniel Bernoulli . . . . » 21

DELL'AGNOLA C. A. - Intorno alle successioni di variabili casuali discontinue tendenti ad una variabile casuale limite . . . . . » 27

NEYMAN J. - On methods of testing hypotheses . . . . . » 35

CASTELLANI MARIA - Sulla rappresentazione in serie delle leggi di frequenza . . . . . » 43

CANTELLI F. P. - Sui confini della probabilità . . . . . » 47

HOSTINSKÝ B. - Sur les probabilités des effets qui dépendent d'une suite de transformations successives prises au hasard . . . . » 61

PÓLYA G. - Ueber eine Eigenschaft des Gaussschen Fehlergesetzes . . » 63

SIBIRANI F. - Ricerca della massima probabilità nel problema delle prove ripetute nel caso di m eventi indipendenti di probabilità costante » 65

ARANY D. - Sur la généralisation du problème de la durée du jeu pour trois joueurs . . . . . » 73

CAVALLI E. - Sulla probabilità degli errori . . . . . » 77

KUZMIN R. - Sur un problème de Gauss . . . . . » 83

GULDBERG A. - Sur la fonction Gamma . . . . . » 91

FISHER R. A. - On a property connecting the χ^2 measure of discrepancy with the method of maximum likelihood . . . . . » 95

ROMANOVSKY V. - Sur la comparaison des moyennes des variables aléatoires dépendantes pour les épreuves indépendantes . . . . . » 101

ROMANOVSKY V. - Sur le calcul des moments des moyennes des fonctions des variables aléatoires pour les épreuves indépendantes . » 103

ROMANOVSKY V. - Sur la généralisation des courbes de Pearson . . » 107

SLUTSKY E. - Sur les fonctions éventuelles compactes . . . . . » 111

BROGGI U. - Su di un problema di perequazione . . . . . » 117

GALVANI L. - Estensione del concetto di media ed applicazione allo studio della variabilità di una serie statistica . . . . . » 123

MARCH L. - Note sur la corrélation . . . . . Pag. 133
DARMOIS G. - Analyse et comparaison des séries statistiques que se développent dans le temps . . . . . » 149
ŻYLIŃSKI E. - Numbers of Fibonacci in biological statistics . . . . » 153
JORDAN C. - Sur une formule d'interpolation . . . . . » 157
DE FINETTI B. - Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio . . » 179
KOEPPLER H. - Die Differentialgleichungen des normalen Verteilungsgesetzes der betrachteten Eigenschaften bei einer hinreichend grossen Anzahl von Vertretern einer Gattung . . . . . » 191
MOLINA E. C. - Application to the Binomial Summation of a Laplacian method for the evaluation of definite integrals . . . . . » 205
MASSÉ P. - Application des fonctions de lignes à l'étude des phénomènes monétaires . . . . . » 215

SEZIONE V

SUPINO G. - Un criterio di scelta tra soluzioni elastiche a risultanti eguali Pag. 225
BIEZENO C. B. et HENCKY H. - Sur les équations générales de la stabilité élastique . . . . . » 233
HOVGAARD W. - Determination of the Stresses in a beam by the method of Variation . . . . . » 239
LELLI M. - Sulla estensione dei teoremi di Helmholtz e di Lagrange al moto dei fluidi viscosi . . . . . » 247
PROSCIUTTO A. - Sul moto perturbato di un fluido in prossimità di una corona di pale . . . . . » 251
STABILINI L. - Le « funzioni di linee » e certi sistemi elastici composti » 255
FINZI B. - Sulle singolarità analitiche nella meccanica dei fluidi. . . » 269
PASCAL M. - Costruzioni geometriche per la corrente piana circuito-rotatoria intorno ad una lamina rettilinea . . . . . » 275
DA RIOS L. S. - Sul paradosso di Dubuat . . . . . » 281
CORINI F. - L'elica nella trazione ferroviaria . . . . . » 285
LOPERFIDO A. - Sulle proprietà essenziali delle carte usate dall'Artiglieria per il tiro in direzione . . . . . » 295
TIMOSHENKO S. - The stiffness of suspension bridges . . . . . » 305
KOLOSSOFF G. - Sur l'application des diagrammes complexes (imaginaires) dans la théorie de la résistance des matériaux . . . . » 307
BOULAD BEY F. - Sur le calcul exact et pratique des poutres continues de ponts de forme quelconque . . . . . » 309
ABATE-DAGA G. - Sulla applicazione del sistema di proiezione Soldner alla formazione delle mappe catastali italiane . . . . . » 317

MONTUSCHI C. - « Dispositivo Catina » per la compressione dei foraggi nei silos . . . . . Pag. 327
BARRILLON E. G. - Au sujet de divers appareils utilisés au tracé des champs hydrodynamiques . . . . . » 329
TESTA ANITA - Sulla propagazione degli impulsi nelle linee di tipo telegrafico . . . . . » 341
MADIA GIORGINA - I trasformatori telefonici . . . . . » 345
VANNI G. - Osservazioni sulle teorie della propagazione delle onde hertziane ed in particolare sulle teorie elettro e magneto-ioniche . . . . » 357
LEVY H. - The extension of the Kármán vortex street to three dimensional flow. . . . . » 377
MUZZIOLI L. - Considerazioni teoriche, ricerche sperimentali, sulla formazione e caduta di gocce d'inchiostro nei riguardi del « Logografo Muzzioli » . . . . . » 383

SEZIONE VII

BORTOLOTTI ETTORE - I libri geometrici de « l'Algebra » di Rafael Bombelli da Bologna . . . . . Pag. 393
BORTOLOTTI ETTORE - La pubblicazione delle opere matematiche di Paolo Ruffini . . . . . » 401
BORTOLOTTI ETTORE - La settima serie di « aggiunte alla Biblioteca Matematica di P. Riccardi » . . . . . » 407
STERN A. W. - The role of mathematics in modern physical theory . » 409
LORIA G. - Bombelli e Diofanto . . . . . » 415
LORIA G. - Quo vadimus? . . . . . » 421
MARCOLONGO R. - Sullo stato attuale della pubblicazione italiana dei manoscritti di Leonardo da Vinci ed in particolare su quella del Codice Arundel . . . . . » 427
ALBENGA G. - La scienza delle costruzioni e Leonardo da Vinci . . » 431
PLIMPTON G. A. - The history of elementary mathematics in the Plimpton library . . . . . » 433
CASSINA U. - Su due quesiti proposti da Cardano a Tartaglia . . . » 443
SITTIGNANI G. M. - Sull'infinito matematico elementare . . . . . » 449
KARPINSKI L. C. - Early algorisms in French . . . . . » 455
GREENWOOD T. - Geometrical ontologism . . . . . » 459
ARCHIBALD R. C. - Georg Hermann Valentin (1848-1926) . . . . . » 465
ARCHIBALD R. C. - Plans for reviving Bibliotheca Mathematica . . . » 473
DENIZOT A. - Sur un phénomène observé par Guglielmini à Bologne en 1791 . . . . . » 475

PARFENTIEFF N. N. - La philosophie de la nature chez N. J. Lobatcewski Pag. 483
RIABOUCHINSKY D. - Valeur et origine d'un nombre . . . . . » 489
VETTER Q. - Rapporto sulle lettere indirizzate al dott. Taddeo Hagecius da Hayck, astronomo, medico e matematico ceko, conservate a Breslavia . . . . . » 499
RYCHLÍK K. - La théorie des fonctions de Bolzano . . . . . » 503
HUSNY HAMID - Sur l'histoire des mathématiques en Turquie . . . » 507
BONACINI C. - Nel primo centenario dalla fondazione dell'Osservatorio di Modena . . . . . » 511
LANZAVECCHIA P. - Sui limiti dell'attività dello spirito nella ricerca sperimentale . . . . . » 517
BLONDEL A. - Méthode graphique pour la résolution de l'équation générale du troisième degré et la discussion de l'équation différentielle du troisième ordre à coefficients constants et applications au problème des régulateurs (1) . . . . . » 523
DURANONA Y VEDIA A. - Sobre el producto de una integral sumable C_δ por una integral absolutament convergente (2) . . . . . » 539
NARASINGA RAO A. - Complex curves on a quadric surface (3) . . . » 545
INDICE . . . . . » 549

---

(1) Questa Comunicazione, pertinente alla Sez. V, si trova pubblicata qui per ritardo nel rinvio delle bozze di stampa.

(2) Questa Comunicazione, pertinente alla Sez. I-B, si trova pubblicata qui per ritardo nel rinvio delle bozze.

(3) Questa Comunicazione, pertinente alla Sez. II-A, si trova pubblicata qui per ritardo nel rinvio delle bozze.