PROCEEDINGS

OF THE

INTERNATIONAL CONGRESS

OF

MATHEMATICIANS

1954

Amsterdam

September 2 — September 9

VOLUME II

ERVEN P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN

NORTH-HOLLAND PUBLISHING CO., AMSTERDAM

1954

PROCEEDINGS OF THE

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS

1954

held at Amsterdam

under the auspices of the

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

EDITORIAL COMMITTEE

JOHAN C. H. GERRETSEN

JOHANNES DE GROOT

PRINTED IN THE NETHERLANDS

PUBLISHED WITH FINANCIAL ASSISTANCE FROM UNESCO

VOLUME II

SHORT LECTURES

This volume, printed before the Congress,
contains the abstracts of those communications
in the sections which reached the
Editorial Committee in time

SECTION I

ALGEBRA AND THEORY OF NUMBERS

BEMERKUNGEN ÜBER GRUPPENPARTITIONEN

Johannes André

Eine *Partition* $\mathfrak{P}$ einer Gruppe G (mit additiv geschriebener Verknüpfung) ist eine Menge von eigentlichen Untergruppen von G, von denen je zwei verschiedene nur das neutrale Element 0 von G gemeinsam haben und die ganz G überdecken. Aus $\mathfrak{P}$ erhält man auf folgende Weise eine *Inzidenzstruktur* $j(\mathfrak{P})$ (partial plane bei M. Hall, Transactions 54, 1943): Die *Punkte* von $j(\mathfrak{P})$ sind die Elemente von G, die *Geraden* die Rechtsrestklassen $U + g$ mit $U \in \mathfrak{P}$ und $g \in G$.

$j(\mathfrak{P})$ hat die folgenden Eigenschaften:

1. Durch zwei Punkte von $j(\mathfrak{P})$ geht genau eine Gerade.

2. Die Automorphismengruppe von $j(\mathfrak{P})$ enthält als Untergruppe eine zu G isomorphe Gruppe T mit der Eigenschaft: Zu je zwei Punkten p und q aus $j(\mathfrak{P})$ gibt es genau ein $\tau \in T$, das p in q überführt. (T besteht genau aus den Abbildungen $x \to x + t$).

3. Für jedes $\tau \in T$ liegen die Punkte p, τp und $\tau^{-1}p$ kollinear.

Umgekehrt gibt es zu jeder Inzidenzstruktur I mit einer Untergruppe T ihrer vollen Automorphismengruppe, die den Eigenschaften 1. bis 3. genügt, eine Partition $\mathfrak{P}$ von T, so daß $I \cong j(\mathfrak{P})$ wird.

Es werden Anwendungen dieser Beziehung gebracht, u.a. ein Satz von Kontorowitch (Math. Sbornik 12, 1943) über Gruppenpartitionen neu bewiesen. Ferner: $j(\mathfrak{P})$ ist genau dann eine affine Ebene, wenn für $\mathfrak{P}$ gilt: Aus $U, V \in \mathfrak{P}$ und $U \neq V$ folgt $G = U + V$.

Tübingen, Grabenstr. 15^I, Deutschland.

ÜBER DIE GALOISSCHE GRUPPE DER ALGEBRAISCH ABGESCHLOSSENEN HÜLLE EINES POTENZREIHENKÖRPERS ÜBER GF(p)

Cahit Arf

Es werden folgende Ergebnisse mitgeteilt:

1. Es wird eine explizite Konstruktion der algebraisch abgeschlossenen Hülle K eines Potenzreihenkörpers k über $GF(p)$ angegeben.

2. Daraus wird eine explizite Konstruktion der Galoisschen Gruppe $G_{K/k}$ hergeleitet.

3. Aus der Betrachtung der Gruppe $G_{K/k}$ wird die Klassenkörpertheorie im kleinen, im Falle einer von Null verschiedenen Charakteristik neu hergleitet.

ISTANBUL UNIVERSITESI FEN FAKULTESI.

SOME APPLICATIONS OF r-IDEALS TO VALUATION THEORY

KARL EGIL AUBERT

The author treats three applications of the theory of r-ideals due to Prüfer-Lorenzen to valuation theory and the arithmetic of semigroups:

1. Use of r-ideals in order to define valuations with a partially ordered value group.

2. Characterizations of general and discrete valuation rings by means of the condition: Every r_1-ideal in the integral domain I is an r_2-ideal.

3. Study of the condition: The r-ideals form a group under r-multiplication.

INSTITUT HENRI POINCARÉ,
11, RUE PIERRE CURIE, PARIS (5E).

FERMAT'S LAST THEOREM IN BINARY INTEGRAL MATRICES

ISAAC ALBERT BARNETT

The purpose of this paper is to study the diophantine equation

$$X^N + Y^N + Z^N = 0 \tag{1}$$

for 2×2 matrices

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix},$$

where the x_i, y_i, z_i are positive or negative integers or zero. For the case $N = 2$, the exact number of parameters in the integral or rational solutions of (1) may be determined. The Pythagorean equation written in the form $X^2 + Y^2 = Z^2$ is also considered and the existence of matrices X, Y, Z with positive integral elements is discussed.

For $N > 2$ it seems desirable to divide the problem into two cases according as the determinant

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

is or is not equal to zero.

Only the case $D \neq 0$ is considered here.

The results are summarized in the following statement. Let $N = 2^k \,.\, 3^r \,.\, q$, where q is odd and not divisible by 3. The only solutions of (1) are those for which $X^2 = Y^2 = Z^2 = 0$, except for certain additional ones of the type $X^2 = 0$, $Y^n + Z^n = 0$, $(n = 2, 3, 4, 6)$ depending on the special nature of k, r, and q.

While these solutions include *all* for which $D \neq 0$, they may include some for which $D = 0$.

The Fermat Conjecture for the classical case is assumed throughout the discussion. The methods used are elementary. They involve the use of recursion formulas connecting the traces and determinants of various powers of a binary matrix.

UNIVERSITY OF CINCINNATI.

ZUR DARSTELLUNGSTHEORIE DER SPINGRUPPE

FRIEDRICH L. BAUER

Die (volle) orthogonale Gruppe ${}^nO$ im n-Dimensionalen ($n = 2\nu$ oder $2\nu + 1$) besitzt bekanntlich eine primitive Darstellung vom Grad $\varrho = 2^\nu$ mit dem Cartanschen Gewicht $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{2})$, die als ${}^nO(\triangle)$ bezeichnet werde. Die Spingruppe ${}^\varrho Spin$ wird lokal definiert durch die Isomorphie ihrer Selbstdarstellung ${}^\varrho Spin\ (1)$ mit jener Darstellung (auf topologische Gesichtspunkte gehen wir hier nicht ein). Das Substrat der ${}^\varrho Spin\ (1)$ werde Undor erster Stufe genannt, der allgemeine Undor N-ter Stufe entsteht wie üblich durch die Bildung einer N-stufigen extensiven Größe und ist Substrat der „Ausdehnung" ${}^\varrho Spin\ (1)\overset{N}{\times}$ oder der isomorphen ${}^nO(\triangle)\overset{N}{\times}$.

Es erhebt sich die Frage nach Art und Vielfachheit der irreduziblen Bestandteile des Undors höherer Stufe, also nach der zugehörigen Algebra ausreduzierender Substitutionen, mit Θ_N bezeichnet. Man sieht leicht, daß diese mit der Brauerschen Algebra ω_N der Ausreduktion von Tensoren innerhalb der orthogonalen Gruppe die Eigenschaft gemein hat, kein Gruppenring mehr zu sein. Einen überraschenden Zugang erhielten wir durch einen Satz („Struktursatz"), der auch für sich von Interesse ist. Wir formulieren ihn hier nur für den einfachsten Fall $N = 2\,M$, $n = 2\nu$: Die (inäquivalenten) Darstellungen innerhalb der Ausdehnungen ${}^{n}O(\triangle)\overset{N}{\times}$ und ${}^{N}O(\triangle)\overset{n}{\times}$ können in bestimmter eindeutiger und leicht überschaubarer Weise („Komplementarität" genannt) so einander zugeordnet werden, daß jeweils der Grad der einen die Vielfachheit des Auftretens der anderen, und umgekehrt, angibt. Das bedeutet nichts anderes, als daß die einhüllenden Matrix-Algebren der beiden Ausdehnungen gegenseitig Kommutatoralgebren sind. Dieser Satz stellt übrigens nur einen Ausschnitt aus einer ganzen Satzgruppe über gegenseitige Kommutatoralgebren „innerhalb" der halbeinfachen Gruppen dar. Nach Brauer ist aber die Kommutatoralgebra isomorph zur ausreduzierenden Algebra eines Systems von Matrizen. Die damit vollständig bestimmte Algebra Θ_N erweist sich in abstracto von unendlichem Rang, in concreto ist sie und ihr Rang abhängig von N, letzterer aber mit wachsendem n, im Gegensatz zur ω_N, unbeschränkt. Er ist gleich der Anzahl von Invarianten, die aus $2N$ Undoren $\mathfrak{x}_i$ gebildet werden können (genauer gesagt, aus je N ko- und kontravarianten, zwischen denen jedoch nicht unterschieden zu werden braucht) und damit nach dem Struktursatz durch Zurückführung auf die Gradzahl-Formeln explizit angebbar. (Komplementär erhält man den Rang der einhüllenden Algebra der Ausdehnung). Die Bildungsmatrizen dieser Invarianten liefern gleichzeitig eine Basis für die Θ_N. Die Invarianten selbst erhält man in übersichtlichster Form, wenn man die Ausdehnung ${}^{n}O(\triangle)\overset{2N}{\times} \equiv {}^{n}O(\square)\overset{N}{\times}$ betrachtet. Dabei ist ${}^{n}O(\square) = {}^{n}O(\triangle)\overset{2}{\times} = \sum_{\alpha=0}^{n} {}^{n}O(1^{\alpha})$, die Substrate der Bestandteile sind mit Cliffordmatrizen $\Gamma_{(F)}$ und der transponierenden Matrix $\mathfrak{C}$ gebildete „Flächengrößen" F (Skalar, Vektor, Bivektor, . . ., Pseudoskalar) mit den Kovarianten $\mathfrak{x}_i \Gamma_{(F)} \mathfrak{C} \mathfrak{x}_k$. Alle Invarianten erhält man offenbar durch vollständige Verjüngung über die N Flächengrößen $\mathfrak{x}_{i_1} \Gamma_{(F)} \mathfrak{C} \mathfrak{x}_{i_2}$, $\mathfrak{x}_{i_3} \Gamma_{(F)} \mathfrak{C} \mathfrak{x}_{i_4}$, . . . , $\mathfrak{x}_{i_{2N-1}} \Gamma_{(F)} \mathfrak{C} \mathfrak{x}_{i_{2N}}$. Falls N und/oder n ungerade ist, treten geringfügige Modifikationen ein. Es spielen dann symplektische Invarianten mit eine Rolle, und zwar auch „formal-symplektische" über ungerader Dimensionszahl.

MÜNCHEN 42, PÖRTSCHACHERSTR. 40,
GERMANY.

NICHTASSOZIATIVE RINGE

Ernst-August Behrens

Für Ringe R, in denen die Multiplikation nicht dem Assoziativgesetz zu genügen braucht, hat Smiley (Amer. J. Math. **72** (1950)) ein Radikal $S(R)$ definiert. Bei der Anwendung auf assoziativ auflösbare Ringe (Behrens, Math. Zeitschr. **58** (1953)) scheint dieses Radikal für eine erfolgreiche Strukturtheorie zu gross zu sein. Ein kleineres, ebenfalls für beliebige nichtassoziative Ringe erklärtes Radikal $B(R)$ erhält man so: Ein Element r aus R heisse F-regulär, wenn es in dem von $r^2 - r$ erzeugten zweiseitigen Ideal $F(r) = (r^2 - r)$ enthalten ist; ein Ideal heisse F-regulär, wenn alle seine Elemente es sind. $B(R)$ sei dann die Summe aller F-regulären Ideale von R. Sie ist wieder F-regulär, und es gilt $B(R/B(R)) = 0$. — Während einerseits $B(R)$ in $S(R)$ liegt, umfasst andererseits $B(R)$ das in engerer Anlehnung an Wedderburn gebildete Radikal $W(R)$, das die Summe aller Nilideale von R ist; dabei heisse ein Element eines nichtassoziativen Ringes nilpotent, wenn mindestens eine seiner irgendwie gebildeten Potenzen gleich null ist, und ein Ideal sei nil, wenn alle seine Elemente nilpotent sind. Auch für $W(R)$ lässt sich $W(R/W(R)) = 0$ zeigen. — Für potenzassoziative Algebren endlichen Ranges über dem Grundkörper fallen $W(R)$ und $B(R)$ zusammen.

Während $S(R) = 0$ äquivalent damit ist, dass R sich als subdirekte Summe einfacher Ringe mit Einselementen darstellen lässt, treten bei Halbeinfachheit im Sinne des kleineren Radikales $B(R)$ als subdirekte Summanden nicht nur diese Ringe, sondern allgemeiner diejenigen subdirekt irreduziblen Ringe R_i auf, deren Minimalideal jeweils von einem von null verschiedenen Idempotent e_i erzeugt werden. — Die Anwendung dieses Satzes auf den mit Hilfe der Schnittmultiplizitäten irreduzibler algebraischer Kurven in der Ebene erklärten assoziativ auflösbaren Ring R (Behrens, Math. Zeitschr. **55** (1952), **58** (1953)) ergibt, daß die subdirekt irreduziblen Summanden R_i die Schnittmultiplizitäten der Kurven untereinander und die Vielfachheiten ihrer singulären Punkte jeweils bezüglich eines festen Punktes $P_i = e_i$ in Evidenz setzen.

Mathematisches Seminar der Universität,
Frankfurt a. M.

CONTRIBUTION TO MATRIX CALCULUS

K. E. Bodewig

In analogy to the unit vectors e_i unit matrices E_{ik} are introduced. They are already known from the theory of rings, but no application of them to a calculus has yet been made. The unit matrices permit to develop a consequent matrix calculus where all elements have disappeared and only matrices occur. Formulas become more surveyable. Some new theorems on matrices are proved.

BORWEG 7, 's-GRAVENHAGE.

ON METHODS OF CONSTRUCTING ORTHOGONAL SQUARE MATRICES OF EVERY ORDER COMPOSED OF DIFFERING INTEGERS (ALSO COMPLEX NUMBERS, QUATERNIONS, OCTONIONS, SEDECIMIONS, ETC.)

VOLODYMYR BOHUN-CHUDYNIV

The problem of the construction of orthogonal square matrices of more than the third order with differing integers was proposed by L. Euler in a letter to Lagrange on 3,9,1770 (L. Euler, Opera Postuma, Acad. Petrop. 1862, I, 576), and were given by him two schemes for the construction of orthogonal matrices of the fourth order (co.. Arith. I, 427—443, Acad. Petrop. 1849). In connection with his own schemes Euler wrote the following:

"Whether there could exist similar solutions for larger squares, which contain 25, 36, and more numbers, I would scarcely dare to affirm. It seems that in this way not only the common algebra, but also the Diophantine method would get contributions of enormous value."

In the works of: (1) J. J. Sylvester, "Thoughts on inverse orthogonal matrices, etc.", Philosophical Magazine (4) vol. 34 (1867) pp. 461—445; (2) A. C. Paley, "On orthogonal matrices", Journal of Mathematics and Physics, Vol. 12 (1933) pp. 311—320; are given methods of constructing orthogonal square matrices of 2^k order, and in Paley's work also ones of other orders (see table I, p. 317 of his work), but elements of these matrices can only be ± 1. In author's paper, "On orthogonal and non-orthogonal closed systems of K-nions and their application" (Bull. Amer. Math. Soc. Abstract 58-6-562) is given a method of determining closed systems of K-nions, and a method of constructing with their help orthogonal matrices of 2^k and $2^k - 1$ orders composed of differing integers (also complex numbers, quaternions, etc.).

In author's paper, "On a method of determining orthogonal square matrices of $(2^{1+\lambda} - 1)2^k$ order composed of differing integers", was given a method of constructing orthogonal square matrices of the order mentioned in the title of the above work, with the aid of 2 lemmas and schemes of K-nions of $2^{1+\lambda} - 1$ and 2^k orders. A particular case of the first lemma is the first lemma of Paley. The Sylvester-Paley square matrices of 2^k order are included in the author's matrices as a particular case.

In author's paper, "On a general method for constructing orthogonal square matrices of every order with differing integers" (Bul. Amer. Math. Soc. abstract 59-6-123), is given: (A) The general method of constructing orthogonal square matrices of every order with the help of expression I (see abstract of above paper);

(B) The method of constructing orthogonal square matrices with the help of expressions (I) and two lemmas pointed out in the mentioned paper (2) of this author.

In the present paper the author determines the method of constructing orthogonal square matrices of 2^k and $2^k - 1$ orders by multiplication of the basic orthogonal square matrices of 2^k order, and the method of constructing the basic orthogonal matrices of 2^k order.

In the author's paper, "On a method and general scheme for the solution of the Euler Problem" (Bul. Amer. Math. Soc. 58-2-165), it was shown that the two schemes of the fourth order due to Euler, as well as a scheme previously given by the author (V. Chudyniv-Bohun, "Solution of Euler's Problem," Ukrainian Academy of Sciences, Regensburg, 1947), can be obtained from the schemes of K-nions of the same order as their separate cases.

280 East 10th Street, New York 9, N.Y.

AN ALGEBRA RELATED TO THE ORTHOGONAL GROUP

William Price Brown

If G is a group of linear transformations of a vector space P of dimension n, we may consider the corresponding linear transformations of the space P_f, of tensors of rank f over P. This set of linear transformations provides a representation of G which is known as the Kronecker f^{th} power representation. In investigating such representations it is useful to consider their commuting Algebras. R. Brauer has shown that the enveloping algebras of such representations may, in the case of certain classical groups, be characterized as commuting algebras of a representation over P_f of certain algebras. In the case of the Full Linear Group the algebra which occurs is the group algebra of the symmetric group on f objects.

In the case of the Orthogonal Group the algebra occuring has been called ω_f^n (H. Weyl: The Classical Groups). Weyl has pointed out that ω_f^n is semisimple for $n \geqq 2f$. For this remark he depends upon its role as a commuting algebra. The algebra has been defined by Brauer using a set of generalized permutation diagrams. Starting from this definition the algebra may be treated without reference to its representation properties.

An intrinsic study of the algebra leads to the consideration of what have been called Generalized Matrix Algebras, i.e. algebras of order mn possessing a basis $\{e_{ij}\}$ $(1 \leqq i \leqq m;\ 1 \leqq j \leqq n)$ and having a multiplication property of the type $e_{ij}e_{pq} = \varphi_{jp}e_{iq}$ (φ_{jp} are scalars). Such algebras are semisimple if and only if the matrix $\Phi = (\varphi_{ij})$ is square and non singular. If rank $\Phi = r \leqq \min(m, n)$ the dimension of the radical is $mn - r^2$. Modulo its radical a Generalized Matrix Algebra is simple. These considerations lead to the result that for a given f, ω_f^n is semisimple for all sufficiently large n. In the semisimple case the structure of ω_f^n can be fully described in terms of its simple ideals.

By an adaptation of the method whereby Weyl obtained the sufficient condition for semisimplicity, i.e. $n \geqq 2f$, it can be shown that $n \geqq f - 1$ is a necessary and sufficient condition. As yet little can be said of the structure of ω_f^n in non semisimple cases.

MATHEMATICS DEPARTMENT,
KING'S COLLEGE, ABERDEEN, SCOTLAND.

APPROACH TO MARKOFF'S MINIMAL FORMS THROUGH MODULAR FUNCTIONS

HARVEY COHN

The author considers $\mathscr{I}$ a sub-group of the modular group of genus one corresponding to a fundamental "parallelogram" with rational vertices in the upper half-plane. Such a group $\mathscr{I}$ of linear transformations is actually determined to within similarity. If A and B are "generating" substitutions, (identifying opposite sides), then $ABA^{-1}B^{-1}$ is equivalent to the substitution $z' = z \pm 6$ and the fixed-point of A, are roots of Markoff's minimal forms. This can be shown by combining identities of Frobenius, (*Über die Markoff Zahlen*, Preuss. Akad. Wiss. Sitzungsberichte, (1913), pp. 458—487), with identities of Fricke, (*Über die Theorie der automorphen Modulgruppen*, Nach. Ges. Wiss. Göttingen, (1896), pp. 91—101). This method can be modified to produce classes of forms with a minimum close to one-sixth (rather than one-third) of the discriminant.

The matrices in $\mathscr{I}$ taken by themselves are of some interest since every *denominator* in the modular group must occur in the corresponding linear fractional substitution. Sample generators of $\mathscr{I}$ are $z' = (z + 1)/(z + 2)$, $z' = (z - 1)/(-z + 2)$, $z' = (3z - 1)/z$, etc. The fundamental domain can be described in invariant fashion by the period parallelogram of the u-plane for

$$J(z) = [\wp'(u)]^2 = 4\wp^3(u) + 1.$$

(See forthcoming paper in Trans. Amer. Math. Soc. Research sponsored by the U. S. Army Office of Ordnance Research under contract DA-20-018-ORD-12332).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
WAYNE UNIVERSITY DETROIT, MICH. U. S. A.

HOMOMORPHIC IMAGES OF SPECIAL JORDAN-ALGEBRAS

PAUL MORITZ COHN

Consider the class $\mathfrak{J}$ of all *Jordan-algebras* over some field F of characteristic $\neq 2$, i.e. linear algebras satisfying

$$ab = ba, \qquad (a^2b)a = a^2(ba). \tag{1}$$

It is known that the linear algebras whose underlying vector-space admits an isomorphism: $a \to a'$ into the vector-space of some associative algebra such that $(ab)' = \frac{1}{2}(a'b' + b'a')$ (the *Jordan-product* of a' and b') form a subclass of $\mathfrak{J}$, viz. the class of *special Jordan-algebras*. Albert (Ann. of Math. **35** (1934) 65—73) first determined a Jordan-algebra which is not special, but there remain the questions 1) *Do the special Jordan-algebras satisfy any identities which do not follow from* (1)? and 2) *Can the class $\mathfrak{S}$ of special Jordan-algebras be defined by identities alone?* — Question 2) is equivalent to the question whether $\mathfrak{S}$ is closed under the operations of taking subalgebras, direct unions and homomorphic images. We shall answer 2) negatively by giving an example of a homomorphic image of a special Jordan-algebra which is not itself special.

The example is obtained by taking the free associative algebra A on 3 free generators x, y, z, forming the special Jordan-algebra J generated by x, y, z and adding the relation $x^2 = y^2$. Then we obtain a Jordan-algebra K which is a homomorphic image of J, but it can be shown to be non-special. This is accomplished by translating the problem into a problem about ideals in free associative algebras and using the notion of 'reversible' elements: An element u of a free associative algebra A on the free generators $x_1, x_2, \ldots$ is called *reversible*, if u is unchanged when each term $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ of u is replaced by $x_{i_k} \ldots x_{i_1}$. Example: $x_1^2x_2$ is not reversible, but $x_1x_2x_1$ and $x_1^2x_2 + x_2x_1^2$ are. A linear combination of Jordan-products is called a *Jordan-polynomial*.

THEOREM 1. i) *Every Jordan-polynomial in the free generators is reversible.*

ii) *Every reversible element is a Jordan-polynomial in the free generators x_i and the 'tetrads'* $\frac{1}{2}(x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4} + x_{i_4}x_{i_3}x_{i_2}x_{i_1})$ $(i_1 < i_2 < i_3 < i_4;\ i_k = 1, 2, \ldots)$.

By translating this back into the language of Jordan-algebras we can prove

THEOREM 2. *Every homomorphic image of a special Jordan-algebra on at most 2 generators is again special.*

THEOREM 3. *Let A_0 be the free associative algebra on x, y, z and J_0 the special Jordan-algebra generated by x, y, z. Then every Jordan-algebra J on 3 generators which is a homomorphic image of a special Jordan-algebra is a homomorphic image of J_0, say $J = J_0/\mathfrak{a}$, ($\mathfrak{a}$ an ideal in J_0) and J is special if and only if $\frac{1}{2}(xyzu + uzyx) \in \mathfrak{a}$ for each $u \in \mathfrak{a}$.*

The example given earlier can now be shown to be non-special.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
THE UNIVERSITY, MANCHESTER 13.

SPECIALIZATIONS OVER DIFFERENCE FIELDS

RICHARD M. COHN

Let $\mathscr{F}$ be a difference field, $\mathscr{F}\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_n\rangle$ and $\mathscr{F}\langle\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n\rangle$ two extensions of $\mathscr{F}$. We say that the $\bar{\gamma}_i$ constitute a specialization over $\mathscr{F}$ of the γ_i if there is a homomorphism of the difference ring $\mathscr{F}[\gamma_1, \ldots, \gamma_n]$ onto the difference ring $\mathscr{F}[\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n]$ which preserves the elements of $\mathscr{F}$ and carries each γ_i into $\bar{\gamma}_i$. We investigate the following question: Let an extension $\mathscr{F}\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_r\rangle$ of $\mathscr{F}$ be given, where $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ annul no non-zero difference polynomial in $\mathscr{F}\{y_1, \ldots, y_q\}$. Under what circumstances can a specialization of the α_i be extended to a specialization of the α_i and β_i? The following theorem gives a partial answer: There exists a difference polynomial $P(y_1, \ldots, y_q)$ in $\mathscr{F}\{y_1, \ldots, y_q\}$ which is not identically 0, such that any specialization $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q$ of the α_i which is compatible with $\mathscr{F}\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_r\rangle$ and for which $P(\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q) \neq 0$ can be extended to a specialization $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q; \bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_r$ of $\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_r$. By compatibility we mean the existence of an extension $\mathscr{G}$ of $\mathscr{F}$ which contains a subfield isomorphic to $\mathscr{F}\langle\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_q\rangle$ and a subfield isomorphic to $\mathscr{F}\langle\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_r\rangle$, these isomorphisms leaving each element of $\mathscr{F}$ fixed. Examples given in an earlier paper show that the condition of compatibility cannot be omitted from the statement of the theorem. As a partial converse of the preceding result we show that, in a precisely defined ense, salmost every specialization of a set of elements generates an extension which is compatible with that generated by the set. However, there exist extensions not all of whose specializations have this property of compatibility.

905 WEST END AVE, NEW YORK 25, N. Y.

SUR LA CLASSIFICATION DES DEMI-GROUPES

Robert Croisot

La notion de demi-groupe est tellement générale que la plupart des auteurs qui se sont occupés de cette notion ont été amenés à la particulariser pour obtenir des propriétés intéressantes. Naturellement, la particularisation s'est faite dans des directions très différentes selon les propriétés envisagées. Il en résulte qu'à l'heure actuelle, celui qui veut étudier les demi-groupes se trouve en présence d'un nombre considérable de types de demi-groupes, définis par des conditions hétérogènes. Il semble que l'on aurait beaucoup à gagner d'une comparaison systématique de ces différents types de demi-groupes. D'une façon précise, le problème posé est le suivant: a) faire un catalogue de tous les types de demi-groupes qu'on peut rencontrer dans la littérature; b) obtenir toutes les implications qui relient les conditions servant à définir ces demi-groupes (autant que possible sous la forme d'un demi-treillis par rapport à la conjonction logique) en construisant tous les contre-exemples utiles pour éviter des recherches sûrement vouées à l'échec. D'ailleurs, un tel travail devrait donner, outre cette classification, fatalement un peu sèche comme toutes les considérations d'axiomatique, des résultats plus concrets (théorèmes de „structure", théorèmes de représentation) qui apparaîtraient d'une façon naturelle lors des comparaisons. De plus, il conduirait à introduire de nouveaux types de demi-groupes dont l'étude des propriétés pourrait se révéler intéressante.

Guidé par cette préoccupation, j'ai comparé les conditions suivantes susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe D:

(m, n). Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = x^m u x^n$ [m et n étant des entiers positifs ou nuls donnés avec $m + n > 1$],

$(J)[(IG), (ID), (I)]$. Tout idéal [à gauche, à droite, bilatère] de D est semi-premier,

$(G)[(SG, (SD), (S)]$. D est réunion de groupes [de demi-groupes simples à gauche, de demi-groupes simples à droite, de demi-groupes simples].

On voit qu'il y a seulement cinq conditions logiquement distinctes auxquelles il est naturel d'ajouter la condition:

(SI) . D est réunion de demi-groupes simples vérifiant $(1, 1)$.

Ces conditions sont liées par les implications suivantes:

$$\begin{tikzcd}
& \boxed{(G) \longleftrightarrow (J) \longleftrightarrow (m, n) \text{ avec } mn > 0 \text{ et } m + n \geqq 3} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\boxed{(SG) \longleftrightarrow (IG) \longleftrightarrow (0, n)} \arrow[dr] & \boxed{(SD) \longleftrightarrow (ID) \longleftrightarrow (m, 0)} \arrow[d] & \boxed{(SI)} \arrow[dl] \arrow[d] \\
& \boxed{(S) \longleftrightarrow (I)} & \boxed{(1, 1)}
\end{tikzcd}$$

Naturellement, ces résultats ne concernent qu'une région très limitée du domaine à explorer.

BESANÇON (DOUBS) FRANCE
22, RUE DE DÔLE.

ON THE „CHAINS" OF CONSECUTIVE PRIME NUMBERS

MARCO CUGIANI

Let p_i be the i-th prime number, and let $\delta_i = p_{i+1} - p_i$. We will consider the sets of consecutive primes: (1) $p_n, p_{n+1}, \ldots, p_N$ $(N \geqq n+1)$ such that: $(1-\eta)x < p_n$, $p_N \leqq x$ (η fixed constant, $0 < \eta \leqq 1$; x real variable), Whenever, for a fixed d, we have a set (1) such that: $\delta_i < d$ $(i = n, n+1, \ldots, N-1)$; $\delta_{n-1} \geqq d$, or $p_{n-1} \leqq (1-\eta)x$; $\delta_N \geqq d$, or $p_{N+1} > x$; we call it a "chain Δ"; while we call a "chain Δ^*" every set (1) such that: $\delta_i \geqq d$ $(i = n, n+1, \ldots, N-1)$; $\delta_{n-1} < d$, or $p_{n-1} \leqq (1-\eta)x$; $\delta_N < d$, or $p_{N+1} > x$.

$\nu = \nu(d; \eta, x)$ will denote the number of chains Δ, and $\nu^* = \nu^*(d; \eta, x)$ the number of chains Δ^* (which belong to the interval $((1-\eta)x, x)$). ϱ and ϱ^* will denote the number $(N-n)$ of differences δ_i contained in each chain Δ, or Δ^* respectively.

We suppose that d can vary and consider the following cases: 1) $d = f(x)$ (therefore $\delta_i < f(x)$ in every Δ; $\delta_i \geqq f(x)$ in every Δ^*); 2) $d = \log p_i$ (therefore $\delta_i < \log p_i$ in every Δ; $\delta_i \geqq \log p_i$ in every Δ^*).

We have proved the following theorems:

I. Let $f(x) = \alpha(x) \,.\, \log x$ be a monotonic non decreasing function, $f(x) \to +\infty$ for $x \to +\infty$, and $\alpha(x) < 1/16 - \sigma$ for some σ $(0 < \sigma < 1/16)$, and for every $x > x_1$. If we assume $d = f(x)$, we have: $\operatorname{Max} \varrho^* > k/\alpha(x)$ (k arbitrary constant $< \sigma$; $x > x_1$; $x > x_0(\eta, \sigma, k)$).

Therefore obviously: $\operatorname{Max} \varrho^* \to +\infty$ for $x \to +\infty$, if $f(x) = o\ (\log x)$.

II. If we assume $d = \log p_i$, for a fixed $\theta < 4/7$, we have:

$$\nu(\log p_i; \eta, x) > \exp\,(\log^\theta x), \qquad x > x_0(\eta, \theta).$$

III. If we assume $d = \log x$, for a fixed $\theta < 4/7$, we have:

$$\nu(\log x; \eta, x) > K^2 \exp\,(\log^\theta x) + k \log x/\text{logloglog}\, x, \qquad x > x_0(\eta, \theta),$$

$K = 1$ if $\log x$ is integer, $K = \operatorname{Mant} \log x$ if $\log x$ is not integer; $k = k(\eta) > 0$.

VIA SALDINI 50,
MILANO (ITALY).

PERIODICITY PROPERTIES OF SOME RECURRING SETS OF INTEGERS

H. J. A. Duparc

Consider sets of integers (u_n, v_n) $(n = 0, 1, \ldots)$ satisfying the relations

$$(1) \qquad Uu_n = Vv_n, \quad 0 \leqq u_n < m \quad (n = 0, 1, \ldots),$$

where m is a fixed given positive integer and where

$$U = U(E) = \sum_{h=0}^{s} c_h E^h \quad \text{and} \quad V = V(E) = \sum_{k=0}^{t} d_k E^k$$

are polynomials with integer coefficients in the operator E which transforms any u_n into u_{n+1} and any v_n into v_{n+1}.

Let the operators U and V satisfy the following conditions:

I. $c_s = \pm 1$; $d_t = m$;

II. U and V are relatively prime;

III. $V(X)$ has no roots with absolute value $\geqq 1$.

The condition I assures the possibility of determining u_n (for $n \geqq s$) and v_n (for $n \geqq t$) uniquely, once the preceding elements of the sequences (u_n) and (v_n) are known.

Since Uu_n is bounded, by (1) and by condition III also the sequence (v_n) is bounded. Consequently each of the sequences (u_n), (v_n) and (u_n, v_n) is periodic.

By condition III it follows after a little argument that (u_n) and (u_n, v_n) have the same period C. In case U is relatively prime to every cyclotomic polynomial in E, the sequence (v_n) also has the period C.

By condition II there exists an integer $M \neq 0$ (the resultant of U and V) and polynomials P and Q in E with integer coefficients such that

$$M = PU + QV.$$

Putting

$$(2) \qquad a_n = Pv_n + Qu_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

one finds for $n = 0, 1, \ldots$

$$(3) \qquad Ua_n = UPv_n + QUu_n = UPv_n + QVv_n = Mv_n$$

and similarly

$$(4) \qquad Va_n = Mu_n.$$

From (2) and (4) it follows that the sequence (a_n) also has the period C. Further from (3) and (4) it follows that C is a common multiple of the periods mod M of the recurring sequences of which the characteristic polynomials are

U and V respectively. Under some restrictions these periods are equal to the periods $C(U, M)$ and $C(V, M)$ of E modd $U(E)$, M and modd $V(E)$, M respectively. [1]

In some cases more can be said about C.

A. If $V = m$, then $M = m$ and one obtains again wellknown results on the period mod m of the recurring sequence $Uu_n = 0$. If moreover $U = -E + g$ one obtains the wellknown result that the repeated fraction found by conversion of u_0/m (with $(u_0, m) = 1$) into the number system of the base g is equal to the exponent of g mod m.

B. If $V = mE - d$, where $0 < d < m$, then it can be proved that under the above restrictions (which here require $(m, M) = (d, M) = 1$) the period C is equal to the exponent of md^{-1} mod M', where $M' = M/(a_0, M)$.

C. Many interesting further applications can be given to other cases which can be realised by some simple cyclic shifting circuits.

MATHEMATISCH CENTRUM,
2E BOERHAAVESTRAAT 49,
AMSTERDAM.

MODULFUNKTIONEN UND RIEMANNSCHE VERMUTUNG FÜR DIE KONGRUENZZETAFUNKTION

MARTIN EICHLER

Es sei $K = k(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ mit $F(\varphi, \psi) = 0$ ein Unterkörper des Körpers der Modulfunktionen der Stufe q, d.h. $\varphi(\tau), \ldots$ mögen den Funktionalgleichungen

$$\varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = \varphi(\tau) \tag{1}$$

für ganze rationale a, b, c, d mit $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1$, $c \equiv 0 \bmod q$, $\left(\frac{a}{q}\right) = 1$ genügen. Ferner seien ihre Fourierentwicklungen

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n) e^{2\pi i n \tau} \tag{2}$$

quasiganz, d.h. die $c(n)$ seien rationale Zahlen, deren Nenner Potenzprodukte endlich vieler Primzahlen sind. Unter dieser Voraussetzung kann man als Konstantenkörper den rationalen Zahlkörper k nehmen. Von endlich vielen

[1] Cf. e.g. H. J. A. Duparc, Divisibility properties of recurring sequences, p. 48, thesis Amsterdam, 1953.

Primzahlen p abgesehen lässt sich K nach dem Modul p reduzieren; so entsteht ein Funktionenkörper $K_{\mathfrak{p}} = k_{\mathfrak{p}}(\varphi_{\mathfrak{p}}, \psi_{\mathfrak{p}})$ mit dem Restklassenkörper $k_{\mathfrak{p}}$ mod p als Konstantenkörper. Wir brauchen endlich die Körper $\overline{K} = \overline{k}(\varphi, \psi)$, $\overline{K}_{\mathfrak{p}} = \overline{k}_{\mathfrak{p}}(\varphi_{\mathfrak{p}}, \psi_{\mathfrak{p}})$, welche durch algebraischen Abschluss ihrer Konstantenkörper entstehen. Für fast alle p haben alle diese Körper das gleiche Geschlecht g.

Funktionenkörper K dieser Art lassen sich mit Hilfe von Thetanullwerten und Eisensteinreihen konstruieren. I. a. ist K eine Erweiterung 2. Grades eines Unterkörpers, dessen Funktionen (1) ohne die Bedingung $\left(\frac{a}{q}\right) = 1$ genügen. K besitzt dann einen Automorphismus η der Ordnung 2, welcher sich auf $\overline{K}$, $K_{\mathfrak{p}}$, $\overline{K}_{\mathfrak{p}}$ überträgt; es kann aber auch $\eta = 1$ sein.

Die Differentiale 1. Gattung $\frac{1}{2\pi i} \varphi(\tau) \frac{d\psi(\tau)}{d\tau}$ von K sind sogenannte *Spitzenformen* vom Grade 2 und der Stufe q. Es gibt g linear unabhängige Spitzenformen

(3) $$s_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_i(n) e^{2\pi i n\tau} \text{ mit } \sigma_i(1) = 1, \ i = 1, \ldots, g;$$

ihre Fourierkoeffizienten $\sigma_i(n)$ sind quasiganz. Die *Heckeschen Operatoren* $T(n)$ führen Spitzenformen in Spitzenformen über. Für $n = p =$ Primzahl, $(p, q) = 1$, ist

(4) $$s_i(\tau) \,\big|\, T(p) = p s_i(p\tau) + \frac{1}{p} \sum_{\varrho=0}^{p-1} s_i\left(\frac{\tau + \varrho}{p}\right) = \sum_{k=1}^{g} t_{ik}(p) s_i(\tau).$$

Die $T(p)$ erzeugen einen halbeinfachen kommutativen Ring $\mathfrak{M}_0$.

Die Bedeutung der $T(p)$ für die analytische Zahlentheorie besteht in der Eulerschen Produktzerlegung der den $s_i(\tau)$ zugeordneten Dirichletreihen

(5) $$d_i(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_i(n) n^{-s}:$$

(6) $$\left(d_1(s), \ldots, d_g(s)\right) = (1, \ldots, 1) \prod_{\mathfrak{p}}{}' \left(1_g - (t_{ik}(p)) p^{-s} + 1_g p \cdot p^{-2s}\right)^{-1},$$

wobei endlich viele Faktoren abgeändert werden dürfen. Speziell gilt

(7) $$\sigma_i(n) = \sum_{k=1}^{g} t_{ik}(n).$$

Eine von M. Deuring herrührende Fassung des Abelschen Theorems zeigt, dass die Heckeschen Operatoren $T(p)$ Darstellungen von *Multiplikatoren des Körpers* $\overline{K}$ *in sich* sind; wir bezeichnen diese Multiplikatoren in abstracto mit $\tau(p)$. Bei den homomorphen Abbildungen $K \to K_{\mathfrak{p}}$, $\overline{K} \to \overline{K}_{\mathfrak{p}}$ wird der Ring $\mathfrak{M}$

der Multiplikatoren von $\overline{K}$ homomorph auf einen Teil $\mathfrak{M}_p$ des Ringes der Multiplikatoren von $\overline{K}_p$ abgebildet, und das Bild des Teilringes $\mathfrak{M}_0$ sei $\mathfrak{M}_{0p}$. Man zeigt, dass für fast alle p die Abbildung $\mathfrak{M}_0 \to \mathfrak{M}_{0p}$ sogar isomorph ist:

$$\mathfrak{M}_0 \simeq \mathfrak{M}_{0p}. \tag{8}$$

Der Körper $\overline{K}_p$ besitzt den speziellen Multiplikator π_p, definiert durch den Endomorphismus $\varphi_p \to \varphi_p^p$ von $\overline{K}_p$. Bezeichnet der Stern den Rosatischen Antiautomorphismus, so gilt nun

$$\pi_p \pi_p^* = p, \quad \eta\pi_p + \pi_p^* = \tau(p)_p. \tag{9}$$

Letztere Identität ist neu, ihr Beweis ist prinzipiell der gleiche wie der für die Kongruenz

$$\Phi_p(J(\tau), J(p\tau)) \equiv (J(\tau) - J(p\tau)^p)(J(\tau)^p - J(p\tau)) \mod p$$

für die sog. Transformationsgleichung p-ter Ordnung in der komplexen Multiplikation.

Nach A. Weil haben die Eigenwerte von π_p den Betrag $\sqrt{p}$. Hieraus, sowie aus (7)—(9) folgt dann

$$\sigma_i(n) = O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}). \tag{10}$$

Im Falle dass $\eta = 1$ ist, besteht nach weiteren Ergebnissen von A. Weil zwischen der Zetafunktion von K_p und den Faktoren in (6) die Beziehung

$$\zeta_{K_p}(s) = \frac{| 1_g - t_{ik}(p)p^{-s} + 1_g \cdot p^{1-2s} |}{(1 - p^{-s})(1 - p^{1-s})},$$

von höchstens endlich vielen Ausnahmen abgesehen. Man kann hier das Produkt über sämtlichen Primzahlen p bilden und erhält auf der rechten Seite eine in der ganzen s-Ebene meromorphe Funktion, welche einer Funktionalgleichung vom gewohnten Typus genügt.

MÜNSTER, ROSENSTR. 9 (GERMANY).

ENTROPIC FUNCTIONS OF NON-ASSOCIATIVE ALGEBRAS

IVOR M. H. ETHERINGTON

Let A be a linear algebra with basis $e_1, \ldots, e_n$ over the real or complex field, where $e_i e_j = \Sigma \gamma_{ijk} e_k$. Generalising the function $\log x$ of ordinary algebra, an *entropic function* φ_x of the hypercomplex variable $x = \Sigma \xi_i e_i$ is defined as a complex-valued (perhaps many-valued) non-trivial solution of a functional equation of the form $\varphi_{xy} = \lambda\varphi_x + \mu\varphi_y$. It is assumed that the partial derivatives $\partial_i\varphi_x = \partial\varphi_x/\partial\xi_i$ exist at a general point x of A. Values of the constants λ, μ (complex numbers, not both zero) for which a solution exists are *entropic roots* of A; they are usually discrete. If A has an identity element, the entropic roots can only be 1, 1; if A is commutative, $\lambda = \mu$. An entropic function is always the logarithm of a homogeneous function of the coordinates ξ_i, and is itself homogeneous of degree zero unless $\lambda = \mu = 1$. For example, the non-associative algebra defined by $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = 0$, $e_1e_2 = \mu e_2$, $e_2e_1 = \lambda e_2$ has entropic functions $\varphi_x^{(1)} = \log \xi_1$ (roots 1, 1) and $\varphi_x^{(2)} = \xi_2/\xi_1$ (roots λ, μ). Generally speaking, the entropic roots and functions of an algebra, if any exist, can be found on the following lines. If φ_x is regular and non-stationary at an idempotent e, then λ, μ are latent roots of the right and left multiplication matrices R_e, L_e respectively, the corresponding latent vector of both being the gradient $\{\partial_i\varphi_e\}$. A generalisation of this theorem gives $\{\partial_i\varphi_x\}$ (at least in some domain of regularity), whence φ_x is determined by integration. If A of order n has n independent entropic functions (this can only happen if the *entropic law* $xy \,.\, zw = xz \,.\, yw$ holds in A) they yield a polar representation (analogous to $z = re^{i\theta}$ for complex numbers); the logarithmetic of such an algebra is determined by its distinct pairs of entropic roots; hence two such algebras with the same entropic roots (but different entropic functions) have the same logarithmetic. Two algebras of order n which have the same n independent entropic functions (but different entropic roots) are in general isotopic.

30 Drummond Place, Edinburgh 3.

ON THE EXTENSION THEORY FOR MODULES

Isidore Fleischer

The possibility of generalizing to modules certain results in the theory of group extensions is investigated. Free modules are also discussed.

15 Boulevard Jourdan, Paris xiv.

ON A UNIQUE SUBDIRECT FACTORIZATION IN UNIVERSAL ALGEBRAS AND THEIR CHARACTERIZATION BY THEIR IDENTITIES

Alfred L. Foster

This communication variously extends such structure results as the following (Foster, *Generalized "Boolean" theory of universal algebras, etc. Parts I and II*, Math. Zeitschrift V 58, 59 (1953)), — itself a generalization of several familiar special cases (N. McCoy, G. Birkhoff and others).

Theorem 1. *Let A be a universal algebra which is functionally (strictly) complete. A sufficient (and necessary) condition for a universal algebra B to be isomorphic with a subdirect-power (= -sum or -multiple) of A is that B satisfy all identities which are satisfied by A.*

Finite Galois fields F_{p^k}; the more general class of n-fields, F_n (see II, loc. cit.); the basic Post algebras, P_n; finite ordered groups with null, etc. etc. are instances of such complete algebras.

Of various extensions we here report two. A new concept is required. Two universal algebras C', C'' (of the same species) are called *functionally independent* (also *co-functional*) if, for each pair Φ', Φ'' of functions a function χ exists such that $\Phi' = \chi$ (mod C'), $\Phi'' = \chi$ (mod C''). That is, $\Phi' = \chi$ is an identity of C', etc. The functions Φ' etc. are of course of the same species as C' (and C''). The concept of a *frame* in an algebra (see I, II, loc. cit.) also requires extension: algebras C', C'' are called *coframal* if fixed functions $\times$, $\frown$, $\smile$ exist which form a frame in C' as well as in C''. Corresponding definitions of *uniform* coframality and of uniform functional independence are given for arbitrary (not necessarily finite) classes $\{C', C'', \ldots\}$ of algebras.

Finally a (not necessarily finite) class $\tilde{A} = \{A', A'', \ldots\}$ of universal algebras $A^{(i)}$ is called an *independent class of primary algebras* if the $A^{(i)} \in \tilde{A}$ are: (1) functionally complete and each is of order > 1; (2) uniformly coframal; (3) pairwise functionally independent. The conditions are widely met; for example it is shown that (i) the class of all n-fields, again (ii) the class of all basic Post algebras, and indeed (iii) the combined class $\{F_2, P_3, F_3, P_4, \ldots\}$ are instances of independent primary classes. Among others the following results are established:

Theorem 2. *Let $\tilde{A} = \{A', A'', \ldots\}$ be an independent class of primary algebras. A sufficient (and necessary) condition for a given algebra B to be expressible as a subdirect product of subdirect powers of a finite number of (distinct) $A^{(i_1)}$, $A^{(i_2)}, \ldots, A^{(i_n)}, \in \tilde{A}$ is that B satisfy all identities common to $A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_n)}$.*

Theorem 3. *In the foregoing notation, an algebra B which is representable in $\tilde{A}$ as in Theorem 2, is uniquely so representable, i.e., the "primary divisors" $A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_n)}$ are unique in $\tilde{A}$.*

UNIV. OF CALIFORNIA, BERKELEY, CALIF. U. S. A.

NON ABELIAN LAWS OF PRIME DECOMPOSITION

ALBRECHT FRÖHLICH

"Field" stands for absolutely selfconjugate algebraic number field, and the base field is the rational field, throughout this abstract.

As a prototype for a decomposition theory for a wide class of non Abelian fields, the derivation of a general decomposition law for all fields of degree 8 will be outlined. The results contain those by S. Kuroda (1951) as a special case.

1) The theory is based on the characterisation of all fields of degree 8 by rational invariants. Mainsteps are: (a). The fields of degree $\leqq 8$, containing a given noncyclic, Abelian field K of degree 4 form a group $\eta(K)$, multiplication being defined e.g. in terms of characters in K associated with these fields. Each non Abelian field of degree 8 belongs to exactly one $\eta(K)$. (b). There exists a canonical homomorphism δ_K of $\eta(K)$ into the group $\mathscr{F}$ of groupextensions of a group of order 2 by the quotient group $\Gamma(K)$, $\Gamma(K)$ being the Galois group of K. The determination of $\eta(K)$ depends essentially on that of the kernel $\mathscr{J}(K)$, and the image group $\mathscr{F}(K)$ of δ_K. (c.) Both the latter groups can be explicitly determined in terms e.g. of the rational residue characters associated with K. Thus $\mathscr{J}(K)$ is the homomorphic image of the group of rational quadratic residue characters with kernel $=$ the subgroup associated with K. If $\mathscr{F}_1$ is any given subgroup of $\mathscr{F}$ we can formulate suff. and nec. conditions for $\mathscr{F}(K) = \mathscr{F}_1$. Example: Let d_i, $(i = 1, 2, 3)$ be the discriminants of the quadratic subfields of K. We consider the case

$$d_i \equiv 1 \pmod 4, \text{ all } i. \tag{1}$$

Then $\mathscr{F}(K) = \mathscr{F}$, if and only if for all prime divisors p of $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3$,

$$p \equiv 1 \pmod 4, \tag{2}$$

$$\left(\frac{p}{d_i}\right) = 0, \text{ or } = 1, \text{ for all } i. \tag{3}$$

2) In order to formulate the decomposition law for a field in $\eta(K)$, it suffices to obtain a quadratic "decomposition character", defined for all rational arguments, which are ideal norms of K. Examples of explicit formuli for such characters will be given.

DEPT. OF MATH.,
THE COLLEGE, KEELE, STAFFS., U. K.

MODULARE DARSTELLUNGEN ENDLICHER GRUPPEN, DIE DURCH FREIE GRUPPEN INDUZIERT WERDEN

WOLFGANG GASCHÜTZ

$\mathfrak{g}$ sei eine endliche Gruppe und als Faktorgruppe $\mathfrak{F}/\mathfrak{f} \cong \mathfrak{g}$ in eine freie Gruppe $\mathfrak{F}$ eingebettet. $\mathfrak{f}_p$ sei kleinster Normalteiler von $\mathfrak{f}$, für den $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ abelsch und von Primzahlexponenten p ist. Die inneren Automorphismen von $\mathfrak{F}$ induzieren in $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_p$ eine Matrixdarstellung $\mathscr{F}^{(p)}$ von $\mathfrak{g}$ im Restklassenkörper $\Gamma^{(p)}$ der ganzen rationalen Zahlen modulo p. Wird $\mathfrak{F}$ von n und nicht weniger Elementen erzeugt, so ist ihr Grad nach O. Schreier gleich $1 + (n - 1)(\mathfrak{g} : 1)$. $\mathscr{F}^{(p)}$ hängt bis auf Transformationen mit einer festen Matrix nur von $\mathfrak{g}$, n und p, nicht von der gewählten Einbettung ab. Die grobe Struktur dieser Darstellung lässt sich folgendermassen beschreiben: Ihre irreduziblen Diagonalbestandteile stimmen (auch hinsichtlich der Vielfachheit des Auftretens) mit denen der $(n - 1)$-fachen regulären Darstellung vermehrt um eine Einsdarstellung vom Grade 1 überein. Für $p \nmid \mathfrak{g} : 1$ ist damit auch die feinere Struktur von $\mathscr{F}^{(p)}$ bestimmt. Im Falle $p \mid \mathfrak{g} : 1$ ist $\mathscr{F}^{(p)}$ jedoch nicht mehr Summe von regulären und Einsdarstellungen. Vielmehr müssen dann zur Beschreibung der feineren Struktur von $\mathscr{F}^{(p)}$ merkwürdig versteckt liegende Eigenschaften der regulären Darstellung von $\mathfrak{g}$ in $\Gamma^{(p)}$ herangezogen werden. — Eine Reihe von Sätzen über Erzeugendenzahlen endlicher Gruppen und Schreiersche Gruppenerweiterungen erhält man als Folgerungen.

Mathematisches Seminar,
Universität Kiel.

AN EXTENSION OF A MATRIX THEOREM OF A. BRAUER

Laurence Stanley Goddard

A theorem, due to A. Brauer (1), which has been useful in the numerical location of the roots of matrices, and in the study of stochastic matrices, runs as follows: If x is a latent column vector of a square matrix A, associated with the root λ, and k is an arbitrary column vector, then A^*, where $A^* = A + xk'$, has a latent root $\lambda + k'x$. The following extension of this result is proved.

Theorem 1: *If $A^* = A + XK'$, where the columns of X are latent vectors of A associated with latent roots $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, and K is an $n \times r$ arbitrary matrix, the latent roots $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ of $\Lambda + K'X$, where $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ are latent roots of A^*. Also the latent vector of A^* associated with ε_i is $\sum_{i=1}^{r} \sigma_j^{(i)} x_j$, where $\sigma_1^{(i)}, \ldots, \sigma_r^{(i)}$ are components of the vector $\sigma^{(i)}$ satisfying*

$$(\Lambda + K'X - \varepsilon_i I)\sigma^{(i)} = 0.$$

Another result which is proved is this:

Every root of A other than $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ is a root of A^*, and every root of A^* other than $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ is a root of A.

An interesting special case arises when the matrices Λ and $\Lambda + K'X$ have the same latent roots. This will be so, as can be easily proved, when K is so restricted that $K'X = PTP^{-1}$, where P is a permutation matrix and T is upper or lower nilpotent triangular. In this case it follows from the above results that A and A^* have the same latent roots. But it is possible to go further and prove that A and A^* have the same characteristic function. Let $\mathfrak{A}$ be the algebra generated over the base field by A and N, where $N = XK'$ and $K'X = PTP^{-1}$. It is proved that N belongs to the radical $\mathfrak{N}$ of $\mathfrak{A}$. From this the result follows on using Goldhaber's lemma (2): *If $A \in \mathfrak{A}$ and $N \in \mathfrak{N}$, A and $A + N$ have the same characteristic function.*

The proof that $N \in \mathfrak{N}$ runs as follows. Denote by $\mathfrak{S}$ the algebra consisting of matrices $XPTP^{-1}K'$ where T ranges over all lower nilpotent triangular matrices; and by $\mathfrak{D}$ the set of matrices XDK' where D ranges over all diagonal matrices. It is proved that $\mathfrak{S}\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}\mathfrak{S}$, $\mathfrak{D}^2 \subset \mathfrak{S}$, that the elements of $\mathfrak{S}$ are nilpotent, and that if p, q are integers

(i) $A^pN^q \in \mathfrak{S}$ if $p \geqq 0$, $q > 1$ and $\in \mathfrak{D}$ if $q = 1$,

(ii) every power product in A and N, ending in N, is in $\mathfrak{S}$ or $\mathfrak{D}$.

Now suppose that $\mathfrak{a}$ is any polynomial in A and N. Then $\mathfrak{a}N = S + D$ where $S \in \mathfrak{S}$, $D \in \mathfrak{D}$. Thus $(\mathfrak{a}N)^2 \in \mathfrak{S}$ and $\mathfrak{a}N$ is nilpotent. Hence $N \in \mathfrak{N}$.

REFERENCES

[1] A. BRAUER. "Limits for the characteristic roots of a matrix. IV: Applications to stochastic matrices". Duke Math. Journal, 19(1952), 75.

[2] J. K. GOLDHABER. "The homomorphic mapping of certain matric algebras onto rings of diagonal matrices". Canadian Journal of Mathematics, 4 (1952), 33.

UNIVERSITY, ABERDEEN, SCOTLAND.

DECOMPOSITIONS OF SEMI-SIMPLE RINGS

ALFRED WILLIAM GOLDIE

A semi-simple ring R is ***almost primitive*** (a.p.) if $I_r = (0)$ for every non-zero two-sided ideal of R. Here I_r denotes the set $(x \in R \mid Ix = (0))$. An a.p. ring need not be a primitive ring but is one if it has a minimal two-sided ideal and also under more general conditions. Almost primitive rings are characterised among semi-simple rings by means of intersection properties of the set of primitive ideals. It follows from these that when an a.p. ring, which is not primitive, is represented as a subdirect union of a set of primitive rings, then there is a similar representation by means of a proper subset of these rings. This result leads to a study of semi-simple rings which possess minimal decomposition sets of ideals. A set of two-sided ideals $(I_\alpha;\ \alpha \in \Sigma)$ in a ring R is a *minimal decomposition set* (m.d.s.) if $\bigcap_{\alpha \in \Sigma} I_\alpha = (0)$ but $\bigcap_{\alpha \in \Sigma'} I_\alpha \neq (0)$ for any proper subset Σ' of Σ. In particular, it is shown that a semi-simple ring R with maximal condition for two-sided ideals has a unique finite m.d.s. of almost primitive ideals, an ideal I of R being defined to be almost primitive if R/I is an a.p. ring.

King's College,
Newcastle-on-Tyne, England.

RESIDUAL PROPERTIES OF GROUPS

Karl Walter Gruenberg

Let (P) be a property of groups. We define a new property, called "*residually* (P)", as follows: a given group G is residually (P) if to each $x \neq 1$ in G there corresponds a normal subgroup K such that $x \notin K$ and G/K is (P). Thus, for example, every finite nilpotent group is residually a-prime-power-group (because it is the direct product of such). The same is easily shown to be true of any finitely generated nilpotent group. (This follows from a result of K. A. Hirsch that any soluble group with maximal condition on subgroups is residually finite.) For finitely generated, locally infinite (i.e. torsion-free), nilpotent groups it is possible to sharpen the above result: if G is such a group and p any given prime number, then G is residually of-order-a-power-of-p. Consequently any *free nilpotent group* (i.e. any group F/F_m, where F is free, F_m is the m-th member of its lower central series and m is a positive integer) is residually of-order-a-power-of-p, for any given prime p. From this, and a result of W. Magnus that any free group is residually nilpotent, it follows that any free group is residually of-order-a-power-of-p, for any given prime p. Other, and more direct, proofs of this theorem are available in the literature.

Thus free groups and free nilpotent groups share the property of being residually finite-p-groups, for any prime p. It is rather likely that many other types of groups will be found to have the same property. All such groups will necessarily have to be locally infinite. Perhaps the most natural next step is to consider *free soluble groups* (i.e. groups of the form $F/F^{(m)}$, where F is free, $F^{(m)}$ is the m-th member of its derived series and m is a positive integer). It turns out that these groups are also residually finite-p-groups, where p is any given prime. The basic idea of the proof is this: Let F be the free group on $x_1, \ldots, x_k$, p a given prime and K_n the least normal subgroup containing $x_1^{p^n}, \ldots, x_k^{p^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Thus F/K_n is a free product of k cyclic groups, each of order p^n, and one must show, first, that $F/K_n \cdot F^{(m)}$ is residually of-order-a-power-of-p, for each n, and, secondly, that $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \equiv 1$, modulo $F^{(m)}$. The proof also yields a number of interesting results on the residual properties of free products.

QUEEN MARY COLLEGE, LONDON.

ÜBER EINE ABSCHÄTZUNG DER FOURIERKOEFFIZIENTEN GANZER SPITZENFORMEN ZUR HILBERTSCHEN MODULGRUPPE

KARL-BERNHARD GUNDLACH

Ich möchte über eine neue Abschätzung des Restgliedes in der Formel für die Anzahl der Darstellungen einer total-positiven Zahl eines total-reellen algebraischen Zahlkörpers durch eine total-positiv-definite quadratische Form gerader Variablenzahl berichten. Das Restglied ist der Fourierkoeffizient einer ganzen Spitzenform zu einer Untergruppe der Hilbertschen Modulgruppe des betreffenden Zahlkörpers. Die Spitzenform erhält man aus der mit der quadratischen Form gebildeten Thetareihe, indem man eine solche Linearkombination von Eisensteinreihen subtrahiert, dass der Rest in allen Spitzen verschwindet.

Über die Grössenordnung des Restgliedes wusste man bisher, dass sie höchstens gleich der Norm der dargestellten Zahl potenziert mit der halben Variablenzahl der quadratische Form ist. Eine neue Abschätzung hat jetzt ergeben, dass man diesen Exponenten um $\frac{1}{4}-\varepsilon$ erniedrigen kann. Das ist vor allem für die quaternären Formen wichtig, da die alte Restabschätzung in diesem Falle nur die Grössenordnung des Hauptgliedes ergab.

Die Abschätzung erhält man mit Hilfe der Peterssonschen Methode, deren Übertragung auf den Fall der Hilbertschen Modulgruppe bereits vor einiger Zeit von Siegel als wünschenswert bezeichnet wurde. Man entwickelt hierzu die Poincaréschen Reihen direkt in Fourierreihen und schätzt die Fourierkoeffizienten ab (Im quaternären Fall muss mit der Metrisierung vorher der Vollständigkeitssatz bewiesen werden). Diese Fourierkoeffizienten ergeben sich als unendliche Reihen, deren Glieder im wesentlichen Produkte von Besselfunktionen und verallgemeinerten Kloostermanschen Summen sind. Um das einzusehen, muss man die zweiten Zeilen der auftretenden Substitutionsmatrizen explizit bestimmen und ihre ersten Zeilen durch Kongruenzen festlegen. Die Kloostermanschen Summen lassen sich nach den Methoden van Salié behandeln. Durch Hinzunahme eines neuen Ergebnisses von A. Weil erhält man eine ebenso scharfe Abschätzung wie im rationalen Fall. Geht man hiermit in die Reihe für den Fourierkoeffizienten ein, so erhält man die oben erwähnte Abschätzung. Die Schwierigkeiten, die das Auftreten einer Summation über die Einheiten bei der Hilbertschen Modulgruppe bereitet, werden durch einen kleinen Trick bei der Abschätzung überwunden. Da im Fall der quaternären Formen die Poincaréschen Reihen nicht konvergieren, muss man hier zunächst ein Heckesches Summationsverfahren anwenden und für die so entstehenden Spitzenformen den Vollständigkeitssatz beweisen. Die dabei notwendigen Abschätzungen von Fourierkoeffizienten werden wie bei den normalen Poincaréschen Reihen durchgeführt; das Verfahren wird nur dadurch etwas komplizierter, dass an Stelle der Besselfunktionen allgemeinere Integrale auftreten.

MATH. INST. DER UNIVERSITÄT,
MÜNSTER.

RELATIVQUADRATISCHE ZAHLKÖRPER, DEREN KLASSENZAHL DURCH EINE VORGEGEBENE UNGERADE PRIMZAHL TEILBAR IST

MAX GUT

Sei p eine beliebige ungerade Primzahl und k ein algebraischer Zahlkörper von endlichem Grade, der den Körper der p-ten Einheitswurzeln enthält und in welchem wenigstens ein p teilendes Primideal von k den absoluten Grad 1 hat. Unter diesen beiden Voraussetzungen über k wird der Satz bewiesen, dass es unendlich viele in bezug auf k ralativquadratische Zahlkörper K gibt, deren Klassenzahl durch p teilbar ist. Es wird wesentlich nicht nur gezeigt, dass solche Körper K existieren, sondern in jedem Falle explizite eine algebraische Zahl vom Relativgrad $2p$ in bezug auf k angegeben, deren Adjunktion zu K ein Stück des Hilbert'schen Klassenkörpers von K liefert, das in bezug auf K den Relativgrad p hat. Die Arbeit wird in den Commentarii Mathematici Helvetici erscheinen.

GLÄRNISCHSTR. 598,
HERRLIBERG BEI ZÜRICH, SCHWEIZ.

ÜBERAUFLÖSBARE GRUPPEN

BERTRAM HUPPERT

Wir nennen eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ überauflösbar, wenn alle Faktorgruppen in den Hauptreihen von $\mathfrak{G}$ zyklisch sind. Nach Noboru Itô lassen sich die überauflösbaren Gruppen durch folgende Eigenschaft charakterisieren: Sind $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ Untergruppen von $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{V}$ maximale Untergruppe von $\mathfrak{U}$, so ist der Index von $\mathfrak{V}$ in $\mathfrak{U}$ eine Primzahl. Diese Aussage lässt sich erweitern zu: Eine endliche Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann überauflösbar, wenn alle maximalen Untergruppen Primzahlindex haben. (Dies ist offenbar eine Verallgemeinerung der folgenden Charakterisierung der endlichen nilpotenten Gruppen: Eine endliche Gruppe ist genau dann nilpotent, wenn alle maximalen Untergruppen invariant sind.) Aus diesem Satz lassen sich leicht zwei Folgerungen ziehen: 1.) Sei $\varphi(\mathfrak{G})$ die Frattini-Gruppe von $\mathfrak{G}$. Ist $\mathfrak{G}/\varphi(\mathfrak{G})$ überauflösbar, so auch $\mathfrak{G}$. 2.) Ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ überauflösbar, so besitzt $\mathfrak{N}$ ein überauflösbares „partial complement" im Sinne von P. Hall, d.h. es gibt eine überauflösbare Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}.\mathfrak{U}$.

Haupthilfsmittel beim Beweis für die angegebene Charakterisierung der überauflösbaren Gruppen ist die folgende Bemerkung: Haben alle maximalen Untergruppen der auflösbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ Primzahlindex, so ist die Kommutatorgruppe $\mathfrak{G}'$ nilpotent. (Die Nilpotenz von $\mathfrak{G}'$ für überauflösbare $\mathfrak{G}$ hat E. Wendt erstmalig bewiesen.)

Diese Ergebnisse legen die folgende Verallgemeinerung nahe: „Sei $\mathfrak{G}$ eine auflösbare Gruppe. Ist $\mathfrak{U}$ eine maximale Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so sei der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{G}$ $(\mathfrak{G} : \mathfrak{U}) = p_i^{\alpha_i}$ mit $\alpha_i \leqq k$. Dann haben die Hauptfaktoren von $\mathfrak{G}$ höchstens k Erzeugende". Dieser Satz ist aber bereits für $k = 2$ falsch. Im Spezialfall, dass alle Sylowgruppen von $\mathfrak{G}$ abelsch sind, lässt er sich leicht bestätigen.

MATH. INST. D. UNIVERSITÄT TÜBINGEN.

LINEARE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN IN ALGEBRAISCHEN FUNKTIONENKÖRPERN MEHRERER UNBESTIMMTER BEI PRIMZAHLCHARAKTERISTIK

ARNO JAEGER

Während in früheren Arbeiten des Verf. [Monatsh. f. Math. **56**, 181—219 und 265—287 (1952)] gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen in Körpern von Primzahlcharakteristik nur bezüglich regulärer Multidifferentiationen [J. f. reine u. angew. Math. **190**, 1—21 (1952)] aufgefasst worden waren, wird jetzt für separabel erzeugbare algebraische Funktionenkörper K in n unabhängigen Unbestimmten über einem Grundkörper L von Charakteristik $p \neq 0$ eine Theorie der Differentialgleichungen im Bezug auf eine beliebige nichttriviale Derivation δ von K über L aufgebaut. Sind D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ die Komponenten einer regulären Multidifferentiation $\mathfrak{D}$ von K über L, so ist jede Derivation von K über L in der Form $\delta = \sum a_k D_k$ ($a_k \in K$) darstellbar. Demnach ist der Ring $R(K, \delta)$ aller Differentialoperatoren $\sum a_k \delta^{(k)}$ ($a_k \in K$, $\delta^{(k)}$ die k-fache Iteration von δ) Unterring des ersten Ringes $R(K, \mathfrak{D}, 1)$ aller $\mathfrak{D}$-Operatoren $\sum_{\mathfrak{k}=0}^{p^e - e} a_{\mathfrak{k}} \mathfrak{D}^{\mathfrak{k}}$ ($a_{\mathfrak{k}} \in K$). Analog zum Falle $n = 1$ (Bull. Am. Math. Soc. **59**, 153 (1953)) wird für $R(K, \mathfrak{D}, 1)$ eine Teilbarkeits- und Annullierungstheorie und eine Theorie der adjungierten Operatoren entwickelt, womit entsprechende Theorien in $R(K, \delta)$ induziert werden. Dadurch lässt sich die Lösungstheorie linearer Differentialgleichungen in δ aufbauen, sobald das zweiseitige Ideal aller Nulloperatoren in $R(K, \delta)$ bekannt ist. Im Zusammenhang hiermit wird die Frage untersucht, für welche Derivationen δ bei gegebenen $a_k \in K$ die Differentialgleichung $\sum a_k \delta^{(k)} y = 0$ nichttriviale Lösungen y hat. Die Ergebnisse hängen wesentlich davon ab, welcher Teilraum des Raumes aller Derivationen (von K über L) über K von den p^i-fachen Iterationen $\delta^{(p^i)}$ des gegebenen δ, die selbst Derivationen sind, aufgespannt wird. Leicht übersehbare Spezialfälle sind die nilpotenten Derivationen δ mit $\delta^{(p)} = 0$, sie lassen sich zu Elementdifferentiationen erweitern, und die idempotenten Derivationen δ mit $\delta^{(p^i)} = \delta$ für ein i. Zum Schluss werden eine Reihe von Aussagen über vertauschbare Derivationen von K über L gemacht, wie z.B.: Unter gewissen Bedingungen, die nur von n und p, aber nicht von L abhängen, kann jede partielle Differentialgleichung in $\mathfrak{D}$ bereits als partielle Differentialgleichung bezüglich nur zweier vertauschbarer Derivationen aufgefasst werden.

UNIVERSITY OF CINCINNATI, OHIO, U. S. A.

SUR CERTAINS GROUPES RÉTICULÉS

PAUL JAFFARD

Les groupes considérés seront supposés abéliens et notés additivement.

Nous déterminons la structure des groupes réticulés réalisables comme sous-groupes propres [1] d'une somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés. Ces groupes sont ceux qui ont un nombre fini de filets.[2]

---

[1] Un sous-groupe H d'un groupe réticulé G est dit *propre* si $x, y \in H$ entraine $\inf(x, y) \in H$.

[2] Les *filets* d'un groupe réticulé G sont les classes d'équivalence définies dans l'ensemble des éléments $\geqq 0$ de G par la relation:

$$a \equiv b \rightleftarrows \{\inf(a, x) = 0 \rightleftarrows \inf(b, x) = 0 \quad \forall x \in G\}$$

(Voir: P. Jaffard — *Contribution à l'étude des groupes ordonnés*, Journal des Math. Pures et Appliquées t. 32 (1953) pp. 203—280).

Etant donnés deux groupes ordonnés partiellement K et Q et une extension G de Q par K, l'*extension lexicographique* correspondante sera le groupe G ainsi ordonné:

f étant l'application canonique de G sur Q, un élément x de G sera considéré comme positif dans les deux cas suivants:

1) $f(x) = 0$ et x est positif dans K.

2) $f(x) > 0$.

On définit dans les groupes réticulés des *classes*: La classe 0 est composée du seul groupe $\{0\}$. On dira qu'un groupe est de classe n s'il est extension lexicographique d'un groupe totalement ordonné (qui peut être $\{0\}$) par un groupe de classe $n - 1$, ou somme directe ordonnée d'un nombre fini de tels groupes. Tout groupe de classe $n - 1$ est donc de classe n et la somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes de classe n est encore de classe n. Les groupes de classe 1 sont les sommes directes ordonnées d'un nombre fini de groupes totalement ordonnés.

Théorème — Un groupe réticulé a un nombre fini de filets si et si seulement il appartient à l'une des classes précédentes.

Si G appartient à l'une de ces classes il n'a qu'un nombre fini de filets. Réciproquement, on raisonne par récurrence sur le nombre m de filets de G: Soit $\hat{G}$ le sous-groupe de G engendré par les éléments positifs de G n'appartenant pas à son filet maximal. On montre que $\hat{G}$ est somme directe ordonnée d'un nombre fini de groupes réticulés ayant moins de m filets, que $G/\hat{G}$ est totalement ordonné et G l'extension lexicographique de $G/\hat{G}$ par $\hat{G}$.

PARIS (XVI), 11 RUE D'AUTEUIL.

ON BALANCED INCOMPLETE BLOCK DESIGNS

BURTON W. JONES

The impossibility of certain balanced incomplete block designs has been shown by R. H. Bruck, H. J. Ryser, W. S. Connor, S. Chowla and others. Also S. S. Shrikhande has considered such designs which are affine resolvable. Here modifications of these methods are used which yield impossibility of large classes of other such designs, especially of the affine resolvable type.

THE UNIV. OF COLORADO,
BOULDER, COLO., U.S.A.

ÜBER DIE ASYMPTOTISCHE DICHTE VON GEWISSEN ZAHLENMENGEN

HANS-JOACHIM KANOLD

Ist $\mathfrak{N}$ eine Menge von natürlichen Zahlen, $A(x)$ die Anzahl der $n \in \mathfrak{N}$ mit $n \leqq x$, so wird die untere bzw. obere asymptotische Dichte gegeben durch

$$\underline{D}^*(\mathfrak{N}) = \underline{\lim}_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x} \quad \text{bzw.} \quad \overline{D}^*(\mathfrak{N}) = \overline{\lim}_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x}.$$

Denkt man sich jedes $n \in \mathfrak{N}$ geschrieben als Primzahlpotenzprodukt $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ mit $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, bezeichnet man ferner den größten quadratischen Teiler von n mit $Q(n)$, so ist $\overline{D}^*(\mathfrak{N}) = 0$, wenn für jedes $n \in \mathfrak{N}$ eine der folgenden drei Bedingungen erfüllt ist:

1) $Q(n) > g(n)$, wobei $g(x)$ irgendeine positivwertige, monoton mit x gegen ∞ strebende Funktion ist.

2) $\alpha_\varkappa > 1$ für mindestens ein $\varkappa > \varepsilon k$ ($\varepsilon > 0$, fest).

3) n ist eine vollkommene Zahl.

Für die Menge $\mathfrak{B}$ aller Zahlen, die zu befreundeten Zahlenpaaren gehören, ist $\overline{D}^*(\mathfrak{B}) < 0{,}204$. In Erweiterung eines bekannten Resultates wird gezeigt: Ist $\mathfrak{N}$ die Menge aller Zahlen, die zu den Primzahlen $q_1, q_2, \dots, q_l$ relativ prim sind, und für die $Q(n) = d^2$ (unabhängig von n) ist, so gilt

$$\underline{D}^*(\mathfrak{N}) = \overline{D}^*(\mathfrak{N}) = \frac{6}{\pi^2 d^2} \prod_{\lambda=1}^{l} \frac{q_\lambda}{q_\lambda + 1}.$$

GIESSEN, ARNDTSTR. 16, DEUTSCHLAND.

EINBETTUNG EINES BELIEBIGEN VERBANDES IN EINEM o-TOPOLOGISCHEN VERBAND

DEMETRIOS A. KAPPOS

G. Birkhoff (Lattice Theory, 2. ed. 1948 S. 59—60) führt in einem Vollverband V die sogenannte Ordnungskonvergenz (order-convergence) $x_i \to x$ für gerichtete Familien $\{x_i\}_{i \in I}$ ein. Dieser Begriff kann auch ohne die Voraussetzung der Vollständigkeit von V eingeführt werden (vgl. für $I = \{1, 2, \dots\}$ 1. Ed. 1940 des obigen Birkhoffschen Buches bezw. P. M. Whitman, Free Lattices II, Annals of Math. 43 (1942) 104—115). Durch geeignete Formulierung der Birkhoffschen Bedingung (12) bezw. ihre äquivalente Bedingung (12′) (vergl. S. 63 der 2. Ed. des Birkhoffschen Buches) kann man dann die sogenannten o-topologischen Verbände (topological lattices) charakterisieren. Ist es nun ein beliebiger Verband V, der nicht o-topologisch ist, so kann man die o-Konvergenz von gewissen gerichteten Familien, die die Birkhoffsche Bedingung erfüllen, als stetig bezeichnen und die Frage der isomorphen Einbettung, mit Erhaltung der so erklärten Stetigkeit, des Verbandes V in einem o-topologischen Verband V^T untersuchen. Es läßt sich zeigen, daß stets ein o-topologischer Verband V^T existiert, der dies leistet. In speziellen Fällen kann sogar V^T zu einem o-topologischen Vollverband vollinvariant erweitert werden.

ATHEN-NEA SMYRNI, VENIZELOU 99.

GRUNDLAGEN EINER THEORIE DER FROBENIUSERWEITERUNGEN

FRIEDRICH KASCH

Eine Frobeniusalgebra A/K ist dadurch gekennzeichnet, dass bei ihr die beiden regulären Darstellungen von A in K äquivalent sind. In Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes bezeichnen wir eine Ringerweiterung F/R als Frobeniuserweiterung, wenn F/R eine Links- und eine Rechtsbasis besitzt, (die nicht notwendig endlich sein müssen), sodass die dadurch erzeugten regulären Darstellungen von F in R gleich sind. Die Bedeutung dieser Verallgemeinerung beruht auf der Tatsache, dass unter der folgenden, recht allgemeinen Voraussetzung über R grundlegende Ergebnisse über Frobeniusalgebren auch jetzt gültig bleiben. Über den Ring R wird vorausgesetzt, dass er ein 1-Element besitzt, der Minimalbedingung für einseitige Ideale genügt und der Annulator eines jeden von R verschiedenen Rechts- oder Linksideals aus R ungleich (0) ist. Als Ausgangspunkt für eine Theorie der Frobeniuserweiterungen kann das folgende, bisher nur für Frobeniusalgebren bekannte Kriterium bewiesen werden: F/R ist dann und nur dann Frobeniuserweiterung, wenn ein Operatorhomomorphismus von F auf R mit R als zweiseitigem Operatorenbereich existiert, bei dem kein Links- oder Rechtsideal $\neq$ (0) auf Null abgebildet wird. Auf diesem Kriterium beruht dann der folgende Satz: Bezeichnet man mit E den Endomorphismenring von F als R-Linksmodul und mit R^* den durch die Elemente aus R als Rechtsmultiplikatoren von F gebildeten Endomorphismenring, so ist F/R dann und nur dann Frobeniuserweiterung, wenn E/R^* Frobeniuserweiterung ist. Daraus folgt z.B., dass jede galoissche Ringerweiterung F/R, wobei F einfach und R halbeinfach sei, eine Frobeniuserweiterung darstellt. Damit wird eine von T. Nakayama ausgesprochene Vermutung bestätigt (Proc. Congr. Math. II, 49 (1950)). Schliesslich kann der Begriff der

Frobeniuserweiterung benutzt werden, um den Satz von Maschke in der Fassung von W. Gaschütz (M.Z. 56, 376 (1952)) unter sehr allgemeinen Voraussetzungen herzuleiten. Dies wird durch eine neue Fassung der dort eingeführten regulären Erweiterungen ermöglicht und führt bereits im klassischen Fall zu einer Vereinfachung des Beweises.

HOHER WEG 3,
(20) GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND.

ANWENDUNG EINES SATZES VON MANN AUF DIE GEOMETRIE DER ZAHLEN

MARTIN KNESER

Aus einer Arbeit von H. B. Mann (Can. J. 4 p. 64—66) lässt sich leicht der folgende Satz über abelsche Gruppen G herleiten:

Sind A und B endliche Mengen aus G mit (A) bzw. (B) Elementen und $A + B$ die Menge aller Summen $a + b$ $(a \in A, b \in B)$, so gilt entweder $A + B = G$ oder es gibt eine echte Untergruppe H von G, so daß $(A + B) = (A) + (B) - (H)$ ist.

Durch Grenzübergang erhält man hieraus einen ähnlichen Satz über die n-dimensionale Torusgruppe T:

Sind A und B Mengen aus T vom Volumen $V(A)$ bzw. $V(B)$, so gilt entweder $A + B = T$ oder $V(A + B) = V(A) + V(B)$.

Ein entsprechender Satz gilt auch für mehrere Summanden A_i; insbesondere folgt aus $\sum_i V(A_i) > V(T)$ die Gleichung $\sum_i A_i = T$. Wählt man für T die Faktorgruppe R/G des n-dimensionalen Raumes R nach einem Gitter G mit der Determinante D, so erhält man den Satz:

Haben die Mengen $A_i \subseteq R$ die Eigenschaft, daß $A_i \cap A_i + g$ leer ist für jeden Gittervektor $g \neq 0$ und ist $\sum_i V(A_i) > D$, so überdecken die Mengen $\sum_i A_i + g$ $(g \in G)$ den ganzen Raum R.

Dies ist eine weitgehende Verallgemeinerung eines Satzes von Mordell (Acta arith. 2 p. 173-176). Als Anwendungen erhält man Aussagen über den Zusammenhang zwischen homogenen und inhomogenen diophantischen Approximationen, die über die bekannten Ergebnisse von Hlawka (Math. Zeitschr. 49 p. 304, Math. Ann. 125 p. 190), Schneider (Arch. d. Math. 2 p. 81—86) und Scherk (Arch. d. Math. 3 p. 303) hinausgehen.

HEIDELBERG, WERDERSTR. 80.

ZUR OPERATORENTHEORIE DER MODULFORMEN n-TEN GRADES

MAX KOECHER

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Heckeschen Operatorentheorie für Modulformen einer Variablen auf die Siegelschen Modulformen n-ten Grades.

Mit Hilfe der Hecke-Operatoren $T(m)$ erhält man in der klassischen Theorie der Modulformen ($n = 1$) gewisse Relationen, die zwischen den Fourierkoeffizienten der Modulformen bestehen. Da darüber hinaus solche Relationen nicht-triviale arithmetische Konsequenzen haben, war eine Ausdehnung dieser Theorie auf die Modulformen n-ten Grades seit langem wünschenswert.

Über einen Ansatz von Maass hinaus wird für jede ganze quadratische umkehrbare n-reihige Matrix M ein Operator $T(M)$ auf der linearen Schar der Modulformen n-ten Grades definiert, der diese Schar in sich abbildet. Im Mittelpunkt der Theorie stehen dann Untersuchungen über Verknüpfungsrelationen zwischen den Operatoren verschiedener Argumente, die Aussagen über die Struktur des durch die Operatoren erzeugten Ringes gestatten.

MÜNSTER/WESTF., OSTMARKSTR. 53.

SUR LES CUBOIDES RATIONNELS

MAURICE KRAITCHIK

Dans mon livre Théorie des Nombres, t. III, (Paris, Gauthier-Villars, 1947) je me suis occupé (p. 76 et suiv.) du système diophantin: $x^2 + y^2 = Z^2$, $y^2 + z^2 = X^2$, $z^2 + x^2 = Y^2$ qui mène au cuboide rationnel, en appelant ainsi un parallélépipède rectangulaire dont les trois dimensions et les trois diagonales des faces soient rationnelles.

Rappelons brièvement quelqu'unes des propriétés d'un cuboide rationnel.

1. Dans un cuboide rationnel primitif, une seule dimension est impaire.

2. Si (x, y, z) est un cuboide rationnel, les inverses des dimensions ou $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$ ou (yz, xz, xy) forment aussi un cuboide rationnel, dérivé du premier.

3. Tout cuboide rationnel est formé des trois triangles rectangles: (z, x, Y), (x, y, Z), (y, z, X). Si (a, b), (c, d), (e, f) sont les générateurs de ces trois triangles, on a

$$(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \,.\, 2ef = (e^2 - f^2) \,.\, 2ab \,.\, 2cd.$$

Cette formule prouve que les trois triangles ne se comportent pas de la même façon. Les deux premiers sont les triangles composants, le triangle (y, z, X) est le triangle résultant.

Les deux premiers peuvent être interchangés et donnent lieu à un cuboide et son dérivé.

Une première liste des cuboides rationnels est donnée dans mon article: „On certain Rational Cuboids" inséré dans „Scripta Mathematica" 1945, p. 317—326.

Mon livre mentionné au debut de cette note donne une liste de 241 cuboides dont la dimension impaire est inférieure à 100.000.

Chaque cuboide est donné par les trois dimensiòns dans l'ordre (z, x, y) et par les générateurs des trois triangles (a, b), (c, d), (e, f).

A la page 81 de mon livre se trouvent des formules permettant de trouver les dimensions quand on connait les générateurs des trois triangles.

En examinant les 100.000 premiers nombres, j'ai trouvé les omissions suivantes. Je donne ici les 18 cuboides qui manquent dans la liste de mon livre. Ils sont donnés dans le même ordre que dans mon livre. Chaque cuboide est donné par les trois dimensions dans l'ordre (z, x, y) et par les générateurs de ses trois triangles dans l'ordre: (a, b), (c, d), (e, f).

	z	*a*	*b*		*z*	*a*	*b*		*z*	*a*	*b*
z	*x*	*c*	*d*	*z*	*x*	*c*	*d*	*z*	*x*	*c*	*d*
	y	*e*	*f*		*y*	*e*	*f*		*y*	*e*	*f*
	25.13.59	371	396		5.49.11.19	39	94		9.5.29.53	41	46
19175	8.9.7.11.53	65	12	51205	4.3.7.13.47	69	22	69165	4.3.23.41.53	35	88
	64.27.5.13	27	32		16.9.11.23	23	72		64.5.7.11.23	253	224
	9.5.11.61	35	26		5.9.13.101	343	242		9.5.11.151	2491	2492
30195	4.25.7.11.13	51	26	59085	4.343.121	177	166	74745	8.3.5.7.47.53.89	41	664
	16.3.169.17	169	136		16.3.11.59.83	649	664		128.41.53.83	3403	3392
	27.5.7.37	17	10		25.7.11.31	103	114		9.25.7.53	5	58
34965	4.25.17.37	231	194	59675	4.25.3.19.103	3	22	83475	4.125.29	77	48
	16.3.7.11.97	97	88		16.9.11.103	103	72		128.3.7.11	11	64
	3.13.29.41	785	814		3.5.7.19.31	11	46		9.7.17.79	31	48
46371	4.5.11.37.157	171	14	61845	4.11.23.31	27	4	84609	32.27.7.31	79	110
	16.9.7.11.19	209	168		32.27.11	11	144		128.5.11.79	55	64
	9.7.11.67	233	236		25.37.67	31	36		3.25.17.67	671	604
46431	8.3.11.59.233	25	674	61975	8.9.5.31.37	11	26	85425	8.11.61.151	45	106
	32.25.337	337	400		32.3.11.13.31	429	496		32.9.5.11.53	159	176
	25.19.101	7	12		3.5.11.13.31	41	52		27.7.17.31	79	110
47975	8.3.5.7.101	33	68	66495	8.5.169.41	187	18	99603	4.5.11.17.79	31	48
	64.9.11.17	187	288		32.9.11.17	17	48		128.3.5.11.31	55	64

BRUXELLES, 173 AVENUE CHURCHILL.

WELL-PARTIAL-ORDERING AND VAZSONYI'S CONJECTURE

JOSEPH B. KRUSKAL JR.

In a set X which is partially-ordered by $\leqq$, I define upper $A \equiv \{x \mid x$ in A or $x \geqq y$ in $A\}$. Now X is *well-partially-ordered* if every (non-void) set A has a finite subset F such that upper $A =$ upper F. This condition is weaker than well-ordering, for if X is well-ordered, A must have a single element a such that upper $A =$ upper $\{a\}$.

A linear graph is a *tree* if it is connected and has no loops. A graph is of order 3 if no vertex is in more than 3 edges. Any set of graphs has a natural partial-ordering on it induced by homeomorphic embedding. That is, graph $G_1 \leqq G_2$ if G_1 is homeomorphically embeddable in G_2.

A conjecture due to Vazsonyi and made popular by Erdös was that the space of trees is well-partially-ordered. This conjecture was recently proved by the author. There is a similar conjecture, that the space of graphs of order 3 is well-partially-ordered. To my knowledge, this conjecture has not been proved. Furthermore, the methods used in proving the first conjecture do not seem to apply to this problem, even though they include what appears to be a fairly general theory of well-partially-ordered spaces.

Box 210, R. D. 1,
PRINCETON, NEW JERSEY, UNITED STATES.

ÜBER DIE PRIMTEILER EINES POLYNOMS

PAUL KUHN

Mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen wir natürliche Zahlen, kurz Zahlen genannt, mit p, q, s, t Primzahlen. Es sei

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad a_0 > 0 \tag{1}$$

ein ganzzahliges, primitives Polynom, das das Produkt von $r (1 \leqq r \leqq n)$ ganzzahligen, primitiven, irreduziblen Polynomen ist. Der feste Teiler von (1) sei $T = t_1^{b_1} \ldots t_e^{b_e}$.

Wir suchen möglichst kleine Zahlen k der Eigenschaft, dass es unter den Zahlen

$$P_n(1), P_n(2), \ldots, P_n(x), \ldots \tag{2}$$

unendlich viele Zahlen gibt, die ausser den festen Primteilern t_i von (1) nicht mehr als k Primfaktoren besitzen.

H. Rademacher und G. Ricci haben die Viggo Brunsche Siebmethode auf diese Probleme angewendet. Der Verfasser hat die Siebmethode in einer etwas anderen Weise benutzt und im Falle $r = 1$ für k kleinere Werte als bisher erhalten. Für $1 < r \leqq n$ lassen sich ebenfalls kleinere k als bisher ermitteln. Der Beweis wird hier für $r = n$ gegeben.

p durchlaufe alle Primzahlen, für die

$$p \leqq x^{\frac{1}{v}}, \quad p \neq t_i \tag{3}$$

ist, wo v später als Funktion von n gewählt wird.

Es sei $d \not\equiv 0 \pmod{p}$, $d \not\equiv 0 \pmod{t_i}$ und $N_n(dx, x^{\frac{1}{v}})$ die Anzahl der Zahlen (2), die $\leqq P_n(x)$, durch d teilbar, aber durch p und $t_i^{b_i+1}$ nicht teilbar sind. Mittels der Brunschen Methode erhält man für $r = n$ und $x \to \infty$

$$\begin{aligned} N_n(x, x^{\frac{1}{v}}) &> C_n 0{,}98 x v^n \log^{-n} x + O(x^{\frac{\varkappa(n)}{v}} v^{n+1} \log^{-n-1} x) \\ N_n(dx, x^{\frac{1}{v}}) &< C_n 1{,}016 \frac{nx}{d} v^n \log^{-n} x + O(x^{\frac{\varkappa(n)}{v}} v^{n+1} \log^{-n-1} x) \end{aligned} \tag{4}$$

$$\varkappa(2) \geqq 9{,}99, \quad \varkappa(3) \geqq 13{,}67, \quad \varkappa(4) \geqq 17{,}50, \quad \varkappa(5) \geqq 22{,}02, \ldots,$$

wobei $C_n > 0$ für das gegebene $P_n(x)$ konstant ist.

Theorem. Für $r = n$ kann $k = w + n$ gewählt werden, wo w die kleinste Zahl sei, die

$$\frac{0{,}98}{1{,}016} (w + 1) > n \log \varkappa(n) \tag{5}$$

genügt. Beispiele: $n=2$, $k=6$; $n=3$, $k=10$; $n=4$, $k=15$; $n=5$, $k=21$; ...

In (3) sei $v = 2\varkappa(n)$. q durchlaufe alle Primzahlen, für die

$$x^{\frac{1}{v}} < q \leqq (a_0 x)^{\frac{1}{2}} + 1, \quad q \neq t_i \tag{6}$$

ist. Mit m seien die Zahlen (2) bezeichnet, für die

$$m \leqq P_n(x), \quad m \not\equiv 0 \pmod{p}, \quad m \not\equiv 0 \pmod{t_i^{b_i+1}}, \quad m \not\equiv 0 \pmod{q^2} \tag{7}$$

gilt. U bezeichne eine untere Schranke für die Anzahl $M_n(x, x^{\frac{1}{v}})$ der Zahlen m. Da $M_n(x, x^{\frac{1}{v}}) = N_n(x, x^{\frac{1}{v}}) + O(x^{1-\frac{1}{v}})$ ist, können wir nach (4)

$$U = C_n 0{,}98 x v^n \log^{-n} x + O(x^{\frac{1}{2}} \log^{-n-1} x) + O(x^{1-\frac{1}{v}}) \tag{8}$$

setzen. Sei $M_n(qx, x^{\frac{1}{v}})$ die Anzahl aller m, die durch ein q teilbar sind und V eine obere Schranke der über alle q laufenden Summe $\sum_q M_n(qx, x^{\frac{1}{v}}) = L_n$.

Es ist $L_n \leqq \sum_a N_n(qx, x^{\frac{1}{v}})$. Wir können also nach (4) setzen

$$V = C_n 1{,}016 \sum_a \frac{nx}{q} v^n \log^{-n} x + O(x \log^{-n-1} x). \tag{9}$$

In L_n werden alle m, die durch mindestens $w+1$ Primzahlen q teilbar sind, mindestens $w+1$ mal mitgezählt. Die Differenz $\Delta = U - \frac{1}{w+1} V$ ist daher eine untere Schranke für die Anzahl der m, die aus höchstens w Primzahlen q und, ausser den t_i, nur noch aus Primzahlen $s > (a_0 x)^{\frac{1}{2}} + 1$ zusammengesetzt sind. Die Anzahl der s ist aber für $x \to \infty$ höchstens n, weil dann in jedem Linearfaktor von $P_n(x)$ nur höchstens ein s enthalten sein kann. Damit für $x \to \infty$ auch $\Delta \to \infty$ wird, genügt es, dass

$$\frac{0{,}98}{1{,}016}(w+1) > \sum_a \frac{n}{q} \tag{10}$$

gilt, wo $\sum_a \frac{1}{q} \sim \log \varkappa(n)$ ist.

LITERATUR

H. RADEMACHER. Beiträge zur Viggo Brunschen Methode in der Zahlentheorie. Hamb. Abh. **3**, 12—30 (1923).

G. RICCI. Su la congettura di Goldbach e la costante di Schnirelmann. I. II. Ann. Scuola norm. sup. Pisa (2) **6**, 71—90, 91—116, (1937).

P. KUHN. Neue Abschätzungen auf Grund der Viggo Brunschen Siebmethode. Den 12. Mat. Kongr. i Lund 1953. (erscheint 1954).

KYRKOGÅRDSGATAN 39/II, UPPSALA, SWEDEN.

AN AXIOMATIC DEFINITION OF THE TENSOR CALCULUS

PAUL EDWIN KUSTAANHEIMO

The classical tensor calculus, as used in mathematical physics and differential geometry, can be reproduced by a set of 28 purely algebraic axioms. The chief contents of these axioms is as follows:

A set of tensors is a ring in which, except addition and multiplication, a third operation, called conjugation, is defined. The conjugation is a one-one correspondence between the tensors having the following properties: the conjugate of sum is the sum of the conjugates of its terms; the conjugate of product is the product of the conjugates of its factors, taken in the opposite order. The ring of tensors can be constructed by adjoining a finite number of base tensors $E_1, E_2, \ldots, E_n$ and their conjugates to an arbitrary field closed under conjugation, this field being called the field of scalars. The base tensors E_i have the following properties: the product of a base tensor and a scalar is commutative; the product of the conjugate of an E_i and an E_k, taken in this order, is a scalar.

The smallest number n of base tensors, needed to span the tensor ring, is the dimension number of the tensor space. Every basis of n base tensors is called a coordinate system. Every tensor is represented as a polynomial of the base tensors and their conjugates, with scalar coefficients called the components of the tensor. When changing the basis, the components transform according to the transformation laws of the classical tensor calculus.

If we denote by $A.$ the conjugate of A and by $A \times$ the product $A . \varepsilon$ where ε is the invariant permutation tensor, then the tensor products $A \,.\, B$ and $A \times B$ are identical with the ordinary scalar and vector products, when A and B are vectors, i.e. linear combinations of the base tensors. When treated in this manner, all products of the vector calculus are associative.

The axiomatic definition makes it possible to extend tensor calculus to finite fields, where the ordinary approach by means of general coordinate transformations is impossible. It is hoped that a finite tensor calculus will make possible the finitization of further branches of mathematical physics.

PIHLAJATIE 50, HELSINKI-TÖÖLÖ, FINLAND.

ALLGEMEINE GAUSSSCHE SUMMEN IN ENDLICHEN RINGEN

ERICH LAMPRECHT

Fragestellungen aus der Theorie allgemeiner L-Funktionen, insbesondere ihrer Funktionalgleichungen, legen es nahe eine Strukturtheorie Gaußscher Summen auch in nichtkommutativen endlichen Ringen herzuleiten. Eine solche Strukturtheorie ist in weitem Umfang vom Fall kommutativer endlicher Ringe (vgl. Verf., Math. Nachr. **9**, 149—196) auf den nichtkommutativer Ringe unter Benutzung relativ einfacher Hilfsmittel übertragbar.

Ist R ein endlicher nichtkommutativer Ring mit Einselement, $e[\xi]$ ein Additivcharakter von R und $\Gamma(\xi)$ eine Matrizendarstellung seiner Einheitengruppe $\mathfrak{M}_R$, so heißt die Matrizensumme

$$\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R) = \sum_{\xi \in \mathfrak{M}_R} \Gamma(\xi) e[\xi]$$

eine allgemeine Gaußsche Summe von R. Es interessieren hauptsächlich die Darstellungsinvarianten d.h. die Matrizeninvarianten von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ (Eigenpolynom, Eigenwerte, Determinante und Matrizenspur von $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$).

Man gibt hierzu an, wie allgemeine Gaußsche Summen aus solchen von einfacherer Struktur komponiert sind. Auf rein gruppen- bzw. darstellungstheoretischem Wege wird $\tau(\Gamma, e; \mathfrak{M}_R)$ auf Gaußsche Summen mit irreduziblen Darstellungen $\Gamma(\xi)$ und auf solche in Komponentenringen (mit vollständig primärem Zentrum) zurückgeführt.

Untersuchung der Erklärungsmoduln von $e[\xi]$ und des Führers von $\Gamma(\xi)$ — Begriffen, die eng mit der idealtheoretischen Struktur (Regularität) der Ringe zusammenhängen — führt zur Klasseneinteilung in quasiechte, echte, eigentliche und volleigentliche Gaußsche Summen. Die allgemeineren Gaußschen Summen lassen sich auf echte volleigentliche zurückführen; die Eigenwerte der letzteren sind ganzalgebraische Zahlen vom gleichen Absolutbetrag (Wurzel aus der Elementanzahl des Ringes) und ihre Eigenpolynome genügen einer Funktionalgleichung vom Typus der der L-Funktionen.

Die Werte der für die Anwendungen besonders wichtigen echten volleigentlichen Gaußschen Summen in primären Ringen lassen sich in ähnlichem Umfang wie im Kommutativen bestimmen; die Schwierigkeiten liegen hier bei den einfachen Ringen (im kommutativen Spezialfall sind die Galoisfelder das Analogon). Diese allgemeine Theorie gibt zugleich neue Einblicke in die Struktur Gaußscher Summen in kommutativen Ringen.

Die Verknüpfungsrelationen der Eigenpolynome Gaußscher Summen sind weitgehend analog zu denen gewisser L-Funktionen in algebraischen Funktionenkörpern mehrerer Veränderlichen und in hyperkomplexen Systemen über solchen Körpern. Dieser Sachverhalt ist umso bemerkenswerter, als die konstanten Faktoren in der Funktionalgleichung solcher L-Funktionen selbst wieder Gaußsche Summen sind.

MATH. INST., KLINIKSTR. 8,
WÜRZBURG, DEUTSCHLAND.

SUR UNE MÉTHODE DE DÉMONSTRATION DE CERTAINES IDENTITÉS DANS LES GROUPES

MICHEL LAZARD

Considérons l'algèbre de Lie libre L^* à coefficients rationnels engendrée par une famille d'éléments indépendants. L^* étant munie de sa graduation naturelle, L_i^* désignera l'ensemble des éléments de L^* dont les composantes homogènes de degré $< i$ sont nulles. Nous obtenons l'algèbre de Lie L en complétant L^* pour la topologie où les L_i^* forment une base des voisinages de 0; soit L_i l'adhérence de L_i^* dans L. Au moyen de la formule dite de Hausdorff

($xy = x + y + \frac{1}{2}[x, y] + \ldots$) nous définissons sur L une structure de groupe non-abélien. On sait que les générateurs libres de L^* engendrent alors un sous-groupe libre G, et que $G_i = L_i \cap G$ est le i-ième groupe de la suite centrale descendante de G.

Une suite d'éléments $g(t)$ de L (t entier $\geqq 0$) sera dite *suite typique* si elle admet une représentation de la forme: $g(t) = \sum_{i=1}^{\infty} t^i a_i$, avec $a_i \in L_i$ pour tout i. Cette définition équivaut à: $g(0) = 0$ et $\Delta^i g(0) \in L_i$ pour tout i, en désignant par Δ^i la i-ième puissance de l'opérateur $\Delta g(t) = g(t+1) - g(t)$. L'ensemble des suites d'éléments de L possède naturellement une structure d'algèbre de Lie et de groupe: les suites typiques constituent une sous-algèbre de Lie et un sous groupe fermés (au sens de la topologie de la convergence simple).

Soit $P_i(t)$ une suite de polynomes sans termes constants, à coefficients rationnels, chaque $P_i(t)$ étant de degré i en t. On démontre qu'on établit une correspondance bi-univoque entre les suites typiques $g(t)$ dans L et les suites d'éléments b_i de L vérifiant $b_i \in L_i$ (pour tout i) en posant:

$$g(t) = b_1^{P_1(t)} b_2^{P_2(t)} \ldots b_i^{P_i(t)} \ldots \quad \text{(pour tout } t).$$

Prenons $P_i(t) = \binom{t}{i} = \dfrac{t(t-1)\ldots(t-i+1)}{i!}$. Alors b_i qui se calcule facilement à partir de $g(1), \ldots, g(i)$ au moyen des opérations du groupe non-abélien L sera dit la i-ième différence non-abélienne de la suite $g(t)$ et noté $\delta_i g(t)$. Ainsi: appelons suite typique dans le groupe libre G une suite $g(t)$ (t entier $\geqq 0$) telle que $g(0) = 1$ (unité de G) et $\delta_i g(t) \in G_i$ (i-ième groupe de la suite centrale descendante de G); alors le produit $g(t)h(t)$ de deux suites typiques est encore une suite typique. Ce résultat généralise une identité classique de P. Hall (Proc. Lond. Mat. Soc. T. 36 p. 29—95).

Prenons ensuite $P_i(t) = t^i$. On parvient à l'identité: $x^t y^t = c_1^t c_2^{t^2} \ldots c_i^{t^i} \ldots$, avec $c_1 = x + y$ et $c_2^2 = [x, y]$, ce qui constitue „l'inversion descriptive" de la formule de Hausdorff. Citons l'application suivante: soit H un p-groupe (p premier) dont tous les sous-groupes à 3 générateurs sont de classe $< p$; alors, pour tous $x, y \in H$ il existe $(p-1)$ éléments déterminés du sous-groupe engendré par x et y, $c_1, \ldots, c_{p-1}$ tels que $x^t y^t = c_1^t c_2^{t^2} \ldots c_{p-1}^{t^{p-1}}$ pour tout entier t; posant $x + y = c_1$ et $[x, y] = c_2^2$ on définit sur H une structure d'anneau de Lie qui redonne la structure de groupe par la formule de Hausdorff.

PARIS IV, 2 RUE BOUTAREL.

SUR UN PROBLÈME D'IMMERSION

LEONCE LESIEUR

On sait immerger un treillis distributif quelconque T dans un treillis de parties $P(E)$, c'est-à-dire dans un treillis de Boole complet et atomique, E

désignant l'ensemble des filtres premiers de T. (G. Birkhoff, Lattice Theory, p. 140; M. H. Stone, Bull. Amer. Math. Soc., 44 (1938), p. 807). Lorsque le treillis T vérifie la propriété de disjonction, l'immersion peut être réalisée d'une manière plus „économique" au moyen de l'ensemble E des ultrafiltres de T. (H. Wallman, Ann. of Math. 39 (1938) p. 112). Mais, ni dans un cas ni dans l'autre, elle ne conserve les intersections infinies. Nous allons résoudre le problème d'immersion avec conservation des intersections infinies en abandonnant la représentation ensembliste (étudiée par G. Birkhoff et O. Frink, Trans. Amer. Math. Soc., 64, p. 299) et en remplaçant $P(E)$ par un treillis de Boole complet B. Une telle représentation est utile en topologie „sans points", où T devient le treillis des ensembles fermés d'une topologie dans B. (L. Lesieur, C. R. Acad. Sci. Paris, note à paraître).

Nous utilisons d'abord le treillis des idéaux de T qui réalise déjà une immersion de T avec conservation des intersections infinies. En prenant dans ce treillis T', qui est $\cap$-distributif général, l'opération $\cap$ comme multiplication, on obtient un demi-groupe réticulé complet, donc résidué, auquel nous pouvons appliquer les règles de calcul connues. (M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, Leçons sur la théorie des treillis, Paris, 1953, p. 130). En particulier, la propriété de disjonction dans T équivaut dans T' à la relation:

$$(a) = O : \big(O : (a)\big) \tag{1}$$

valable pour tout idéal principal (a).

Nous considérons ensuite dans T' l'équivalence R définie par:

$$I \equiv I'(R) \text{ si et seulement si } O : I = O : I'.$$

D'après (1), cette équivalence induit l'égalité dans l'ensemble des idéaux principaux de T.

On démontre que l'équivalence R est régulière par rapport à l'union et à l'intersection. Il en résulte que T'/R est un treillis B contenant un sous-treillis isomorphe à T. Le treillis B est complet pour l'union et pour l'intersection; en désignant par $\bar{I}$ la classe de l'idéal I, on a:

$$\cup \bar{I}_\alpha = \overline{\cup I_\alpha}; \qquad \cap \bar{I}_\alpha = \overline{\cap O : (O : I_\alpha)}. \tag{2}$$

La classe nulle est celle de O; la classe maximum est celle de (u).

B est complémenté, le complément de la classe $\bar{I}$ étant la classe $\overline{O : I}$. Le treillis de Boole complet B réalise donc une immersion de T, qui, d'après (1) et (2), conserve les intersections infinies.

6 Rue Jacques de Grailly,
Poitiers, (Vienne) - France.

THE GROUPEXTENSION OF THE GROUP OF THE INTEGERS BY THAT SAME GROUP

FRANS LOONSTRA

The determination of all groups G, containing the additive group N of the integers as an invariant subgroup, while G/N is isomorphic with the (same) additive group F of the integers, is a special case of the general extension-problem of Schreier. As F is cyclic and N admits only two automorphisms, this problem has two essentially different solutions G_1 and G_2. The general way of solving this problem is longer, but it leads to the following interesting question:

All groups G with a given invariant subgroup N and with the property that G/N is isomorphic with a given group F are obtained as follows: G consists of the pairs $(\varrho; a)$, $\varrho \in F$, $a \in N$ with $(\varrho; a) \cdot (\varrho'; a') = (\varrho\varrho'; c_{\varrho,\varrho'} a^{\varrho'} a')$ and $c_{\varrho,\varrho'}$, $a^{\varrho} \in N$ satisfying:

$$c_{\varrho,e} = c_{e,\varrho} = e;\ e^{\varrho} = e;\ a^{e} = a;\ (a \cdot a')^{\varrho} = a^{\varrho} \cdot a'^{\varrho};\ (a^{\varrho})^{\varrho'} = c^{-1}_{\varrho,\varrho'} a^{\varrho\varrho'} c_{\varrho,\varrho'};$$
$$c_{\varrho'\varrho'',\varrho'''} \cdot c^{\varrho'''}_{\varrho',\varrho''} = c_{\varrho',\varrho''\varrho'''} \cdot c_{\varrho'',\varrho'''}. \tag{B}$$

The correspondence $a \leftrightarrow a^{\varrho}$ is for every $\varrho \in F$ an automorphism of N; ϱ defines in the group of automorphismclasses of N a class $\chi(\varrho)$, so that $\chi(\varrho \cdot \varrho') = \chi(\varrho) \cdot \chi(\varrho')$; there is a homomorphism of F onto a group F' of automorphism-classes of N. If N as well as F is the additive group of the integers, the group of the automorphismclasses of N consists of 2 elements $\{E; A\}$, A representing the automorphism $n \leftrightarrow -n$ of N. Hence there are two possibilities: I) $F' = \{E\}$, i.e.: $a^{\varrho} = a$ for all $a \in N$, $\varrho \in F$; II) $F' = \{E; A\}$, i.e.: $a^{2\varrho} = a$, $a^{2\varrho+1} = -a$ for all $a \in N$, $\varrho \in F$.

ad I) G consists of the pairs of integers $(m;n)$ with the groupoperation $(m; n) + (m'; n') = (m + m'; n + n' + c_{m,m'})$, where $c_{m,m'}$ are integers (for every pair m, m'), so that

$$c_{m+n,p} + c_{m,n} = c_{m,n+p} + c_{n,p},\ c_{0,n} = c_{n,0} = 0. \tag{C}$$

The equation (C) learns:

1. $c_{m,n} = c_{n,m}$, which corresponds with the commutativity of G.
2. The only solution of (C), including the convergence of $\sum_{m,n} c^2_{m,n}$ is $c_{m,n} = 0$ (for all m,n).
3. Suppose $c_{m,1} = \varphi(m)$ is a function of the integer m, assuming only integral values $(\varphi(0) = 0)$, one finds for $n > 0$:

$$c_{m,n} = \sum_{k=0}^{n-1} \{\varphi(m + k) - \varphi(k)\};\quad c_{m,-n} = \sum_{k=1}^{n} \{\varphi(-k) - \varphi(m - k)\}. \tag{D}$$

These solutions satisfy (C).

4. Writing $f(m; n)$ for $c_{m,n}$, (C) implies the difference equation

$$f(x+1; y) + f(x; 1) = f(x; 1+y) + f(1; y);\ f(x; y) = f(y; x), f(x; 1) = \varphi(x). \quad \text{(E)}$$

This equation also leads to the solution (D).

5. Two systems $\{c_{m,n}\}$ and $\{c'_{m,n}\}$ satisfying (C) are equivalent in the usual sense: there is a system $\{a_n\}$ of integers, satisfying $a_0 = 0$, $c'_{m,n} = c_{m,n} - a_{m+n} + a_m + a_n$. Hence all corresponding extensions G are isomorphic under the mapping $(m;n) \leftrightarrow (m; n - a_m)$ which leaves the elements of N and the cosets of F fixed. Therefore: all extensions in case I) are N-isomorphic to the extension G_1 with $c_{m,n} = 0$, $(m; n) + (m'; n') = (m + m'; n + n')$.

ad II) G consists of the pairs $(m;n)$ with the group operation

$$(m; n) + (2m'; n') = (m + 2m'; n + n' + c_{m,2m'}),\quad (m; n) + (2m' + 1; n') = (m + 2m' + 1; -n + n' + c_{m,2m'+1}),$$

where

$$c_{m+n,2p} + c_{m,n} = c_{m,n+2p} + c_{n,2p},\ c_{m+n,2p+1} - c_{m,n} = c_{m,n+2p+1} + c_{n,2p+1};\ c_{m,0} = c_{0,m} = 0. \quad \text{(C}'\text{)}$$

The equation C($'$) learns:

1. the only solution of (C$'$), including the convergence of $\sum_{m,n} c^2_{m,n}$ is $c_{m,n} = 0$.

2. Supposing $c_{1,n} = \varphi(n)$, one finds for $m > 0$ and all n

$$\left.\begin{aligned} c_{m,2n} &= \sum_{k=0}^{m-1} \{\varphi(2n + k) - \varphi(k)\}; \quad & c_{-m,2n} &= \sum_{k=1}^{m} \{\varphi(-k) - \varphi(2n - k)\} \\ c_{m,2n+1} &= \sum_{k=0}^{m-1} \{\varphi(2n+1+k) + \varphi(k)\}; \quad & c_{-m,2n+1} &= -\sum_{k=1}^{m} \{\varphi(2n+1-k) + \varphi(-k)\} \end{aligned}\right\} \text{(D}'\text{)}$$

3. Writing $f(m;n)$ for $c_{m,n}$, (C$'$) implies the difference equations

for $f(x; 2y)$: $f(x+2; 2y) + f(x; 2) = f(x; 2 + 2y) + f(2; 2y)$,
for $f(-x; 2y)$: $f(-x-2; 2y+2) + f(-x; -2) = f(-x; 2y) + f(-2; 2y+2)$,
for $f(x; 2y+1)$: $f(x+2; 2y+1) - f(x; 2) = f(x; 2y+3) + f(2; 2y+1)$,
for $f(-x; 2y+1)$: $f(-x-2; 2y+3) - f(-x; 2y+1) = f(-x; -2) + f(-2; 2y+3)$.

With $f(1; y) = \varphi(y)$ these equations lead to the solutions (D$'$).

4. The systems (D') are equivalent, which proves the isomorphism of the corresponding extensions to the group G_2 with $c_{m,n} = 0$ and $(m; n) + (2m'; n') = (m + 2m'; n + n')$, $(m; n) + (2m' + 1; n') = (m + 2m' + 1; -n + n')$.

HAVIKLAAN 25,
THE HAGUE, HOLLAND.

A PROBLEM IN DIOPHANTINE APPROXIMATIONS

Kurt Mahler

The problem discussed is as follows: Let $\max\left(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\right) = 1$, the a's being real numbers. To find a constant $c = c(n) > 0$ such that the inequalities

$$|a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n| \leqq \frac{c}{t^{n-1}}, \quad \max\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\right) \leqq t$$

have non-trivial integral solutions $x_1, x_2, \ldots, x_n$ for all $t \geqq 1$. Dirichlet's Schubfachprinzip gives one solution; but better estimates for c follow from the geometry of numbers.

University of Manchester

ON THE THEORY OF PATTERNS AND ITS APPLICATION TO THE PRIME NUMBER THEOREM

Charles Napoleon Moore

If we stop the procedure, known as the sieve of Eratosthenes, at the end of a finite number of steps, the integers that remain, as well as their successive differences, form a certain pattern indefinitely repeated. It is the aim of the present study to develop by inductive methods such properties of these successive patterns as will furnish information concerning the distribution of prime numbers. One of the results achieved is a new elementary proof of the prime number theorem.

219 Woolper Avenue
Cincinnati 20, Ohio, U. S. A.

SUR LES REPRÉSENTATIONS D'UN NOMBRE ENTIER PAR LA FORME $x^2 + y^2$ DANS UN CORPS ALGÉBRIQUE

Trygve Nagell

Soit α un nombre entier dans le corps algébrique Ω. Si α est représentable sous la forme $\alpha = \xi^2 + \eta^2$, où ξ et η sont des entiers dans Ω, nous dirons que α est un nombre de la catégorie A. Notre résultat principal est le théorème:

Il y a une infinité de représentations sous la forme $\xi^2 + \eta^2$ de tout entier de la catégorie A dans le corps Ω, sauf dans les cas suivants: 1) Ω est le corps gaussien $K(\sqrt{-1})$; 2) Ω est totalement réel.

Uppsala, Suède.

GROUPS COVERED BY PERMUTABLE SUBSETS

BERNHARD HERMANN NEUMANN

Let $\mathfrak{F}$ be a family of subsets of a group G with the following three properties:

(i) G is the union of the subsets in $\mathfrak{F}$.

(ii) Every two subsets in $\mathfrak{F}$ commute.

(iii) Every $F \in \mathfrak{F}$ has cardinal (strictly) less than a fixed (finite or infinite) cardinal $\mathfrak{n}$.

We ask what can be said about the group G when the bound $\mathfrak{n}$ is given. Thus e.g. if $\mathfrak{n} = 2$, that is if all $F \in \mathfrak{F}$ consist of at most a single element, G clearly must be abelian; and conversely every abelian group can be covered by permutable subsets consisting of a single element each.

The main result deals with the case that $\mathfrak{n}$ is finite. If H denotes the union of all finite classes of conjugate elements of G, then H is easily seen to be a subgroup of G. This can be shown to have index $< \mathfrak{n}$ in G if $\mathfrak{n}$ is finite; moreover the finite classes of conjugates of G, that is the classes of which H consists, are then boundedly finite. Using known results on groups in which all classes of conjugate elements are finite, one can then show that the derived group H' of H is finite. The converse is also true, and these facts can be combined in the following simple criterion:

The group G can be covered by permutable, boundedly finite subsets if, and only if, G has a subgroup of finite index with finite derived group.

This generalizes an unpublished result of F. I. Mautner, namely that if G possesses a finite subgroup K whose double cosets in G permute, then H (defined as above) has finite index in G. In fact we can show by elementary means that $G = HK$.

For infinite values of $\mathfrak{n}$ our results are much less complete. If $\mathfrak{n} = \aleph_0$, then G is covered by permutable finite, but not necessarily boundedly finite, subsets. All finitely generated groups and all countable locally finite groups are of this kind; but Paul M. Cohn has recently shown that there are countable groups which are not of this kind, e.g. free groups with $\aleph_0$ free generators. The only general result that has so far been obtained is this:

If the order of G is strictly greater than $\mathfrak{n}$, then G has a subgroup C whose order is also strictly greater than $\mathfrak{n}$ and whose centre is not trivial.

THE UNIVERSITY, MANCHESTER.

NEAR-RINGS CONNECTED WITH FREE GROUPS

HANNA NEUMANN

A near-ring differs from a ring in that only one distributive law is postulated, and addition may be non-commutative. The near-rings we consider consist of endomorphisms of free groups. In a free group F_n (n any cardinal) every mapping of a fixed set of free generators e_i into the group determines an endomorphism α. If addition of two endomorphisms is defined by $e_i(\alpha + \beta) = e_i\alpha \,.\, e_i\beta$ for all i, and multiplication as usual by $e_i(\alpha\beta) = (e_i\alpha)\beta$ for all i, then the endomorphisms form a near-ring Φ_n in which the right-distributive law $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$ holds.

Note that in place of F_n any reduced free group G_n could be used, i.e. a group possessing a set of n generators such that every mapping of this set into G_n generates an endomorphism of G_n.

If $m < n$, Φ_m may be regarded as a sub-near-ring of Φ_n. Thus the direct limit $\Phi_\infty = \bigcup\limits_n \Phi_n$ of all Φ_n (n finite) may be formed in the natural way. Φ_∞ is a sub-near-ring of $\Phi_{\aleph_0}$.

An ideal $\mathfrak{A}$ of Φ_n is defined as a normal subgroup of the additive group such that $\xi\mathfrak{A}\eta \subseteq \mathfrak{A}$ for all $\xi, \eta \in \Phi_n$. Right- and left-ideals are defined accordingly. Main features of the ideal theory in Φ_n are:

1.1 The ideals $\mathfrak{A}$ are in one-to-one correspondence with the fully invariant subgroups A of F_n, namely $\alpha \in \mathfrak{A}$ if, and only if, $e_i\alpha \in A$ for all i.

Thus Φ_n does not satisfy the descending chain condition for ideals. Whether or not it satisfies the ascending chain condition, is not known. But every ideal is contained in at least one maximal ideal.

1.2 The ideals $\mathfrak{A}$ are precisely the kernels of the homomorphic mappings of Φ_n onto a near-ring Φ'_n. Φ'_n is isomorphic to the near-ring formed with the reduced free group F_n/A in place of F_n.

1.3 If $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ are ideals, the set of all finite sums $\Sigma\alpha_j\beta_j$ ($\alpha_j \in \mathfrak{A}$, $\beta_j \in \mathfrak{B}$) is an ideal; this is called the product $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Ideal multiplication in Φ_n is non-associative.

1.2 and 1.3 are not true for near-rings in general; but the ideals always form a lattice.

More can be said about the ideals in Φ_∞. Here

2.1 ideal multiplication is associative, and

2.2 right-multiplication by a fixed ideal constitutes an iso-endomorphism of the ideal lattice.

In view of these facts, further study especially of the relation between the ideals in Φ_∞ and those of Φ_n as well as of $\Phi_{\aleph_0}$ may be expected to prove useful for the investigation of fully invariant subgroups of free groups.

UNIVERSITY COLLEGE, HULL.

MATHEMATISCHES SPEKTRUM DER WURZELN EINER ALGEBRAISCHEN GLEICHUNG

CONSTANTIN ORLOFF

Der Zweck dieser Arbeit ist zu zeigen, dass für jede algebraische Gleichung ein Spektrum im Sinne M. Petrovitch's d.h. eine Zahl zwischen 0 und 1 gefunden werden kann, aus dem sich dann Näherungswerte sämtlicher reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung mit beliebiger Genauigkeit ablesen können, ohne dass die Genauigkeit im voraus gegeben sein muss. So ein Spektrum ist die folgende zwischen 0 und 1 liegende unendliche Dezimalzahl

$$S(f) = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{\infty} 10^{-(r_j+ij)}\, S_{10j\,.\,b(h+jn)}^{10j\,.\,a(i)}$$

wo a_i die ganzzahligen Koeffizienten, n den Grad der gegebenen Gleichung, a und b die Schranken ihrer reellen Wurzeln, h und r_j gewisse ganze Zahlen sind, während das Symbol $S_{x(z)}^{y(i)}$ die Summe der i-ten Potenzen aller ganzen Zahlen von x bis y ist, welche mit aufeinanderfolgenden Potenzen der Zahl 10^{-z} multipliziert sind. Die Ziffern dieses Spektrums sollen so in Streifen geteilt werden, dass der k-te Streifen $[10^{k-1}(b - a) + 1][h + (k - 1)n]$ Ziffern besitzt. Jeder Streifen wird in Unterstreifen geteilt. Jeder Unterstreifen eines Streifens hat die gleiche Zahl von Ziffern u.zw. enthält jeder Unterstreifen im k-ten Streifen $h + (k - 1)n$ Ziffern. Jeder Unterstreifen beginnt mit ihrer *charakteristischen Ziffer*, die entweder 0 oder 9 ist. Alle Unterstreifen eines Streifens entsprechen der Reihe nach den äquidistanten Zahlen von b bis a, wobei für den k-ten Streifen das Intervall 10^{1-k} beträgt. Die Bestimmung von Wurzeln erfolgt, von einem gewissen Streifen dieses Spektrums beginnend, auf folgende Weise: wenn die charakteristischen Ziffern zweier aufeinanderfolgenden Unterstreifen verschieden sind, dann befindet sich im abgeschlossenen Intervall $[c, d]$ eine Wurzel der gegebenen Gleichung, wobei c und d die Zahlen sind, die diesen Unterstreifen entsprechen. Da aber der Unterschied von diesen Zahlen, wenn sie sich in dem k-ten Streifen befinden, 10^{1-k} beträgt, so kann man durch Erhöhung des Streifenranges die Wurzeln mit beliebiger Genauigkeit erhalten.

Solche Spektra besitzen die Eigenschaft der Linearität.

MISARSKA, 5, BEOGRAD.

RESULTANTENSYSTEME AUS KOEFFIZIENTEN ALGEBRAISCHER RELATIONEN

HEINZ ORSINGER

Es seien $y_1, \ldots, y_r$ vollständige Formen in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ mit unbestimmten Koeffizienten $a_1, \ldots, a_\omega$ („*allgemeine Formen*"). Dann gibt es bekanntlich [1] ein System von Formen $R_1, \ldots, R_h$ in den Koeffizienten $a_1, \ldots, a_\omega$ („*Resultantensystem* der Formen y") mit der Eigenschaft:

Für spezialisierte Werte der $a_1, \ldots, a_\omega$ aus einem Körper besitzen die Formen $y_1, \ldots, y_r$ dann und nur dann eine nichttriviale, d.h. von $(0, \ldots, 0)$ verschiedene gemeinsame Nullstelle $(x_1, \ldots, x_n) = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in einem passenden Erweiterungskörper, wenn bei dieser Spezialisierung $R_1, \ldots, R_h$ verschwinden.

Im Falle $r \leqq n$ weiss man: Für $r = n$ besteht das Resultantensystem aus einer einzigen irreduziblen Form R (der „*Resultante*"); für $r < n$ besteht das Resultantensystem nur aus der Form 0.

Im Falle $r > n$ $(r - n = s)$ sei $\overline{R}_s$ die Resultante der mit weiteren Unbestimmten $x_{n+1}, \ldots, x_r$ und unbestimmten Koeffizienten $b_{1,n+1}, \ldots, b_{1r}; \ldots; b_{r,n+1}, \ldots, b_{rr}$ gebildeten „*erweiterten Formen*"

$$\bar{y}_1 = y_1 + b_{1,n+1} x_{n+1}^{g_1} + b_{1,n+2} x_{n+2}^{g_1} + \ldots + b_{1r} x_r^{g_1},$$
$$\ldots$$
$$\bar{y}_r = y_r + b_{r,n+1} x_{n+1}^{g_r} + b_{r,n+2} x_{n+2}^{g_r} + \ldots + b_{rr} x_r^{g_r}$$

($g_1, \ldots, g_r$ die Grade von $y_1, \ldots, y_r$). Ist d der grösste gemeinsame Teiler von $g_1, \ldots, g_r$, so erweist sich $\overline{R}_s$ als d^s-te Potenz einer Form R_s in den a und b, die ganz analoge formale Eigenschaften wie die gewöhnliche Resultante besitzt und daher *b-Resultante* von $y_1, \ldots, y_r$ heissen möge. Insbesondere können wir zeigen: *Für spezialisierte Werte der a besitzen die Formen $y_1, \ldots, y_r$ dann und nur dann eine nichttriviale gemeinsame Nullstelle, wenn ihre b-Resultante identisch (d.h. für unbestimmte b) verschwindet.* Oder: *Für $r > n$ bilden die Koeffizienten der als Form in den b aufgefassten b-Resultante ein Resultantensystem.*

Abgesehen davon, dass dieses Resultantensystem ohne die sonst übliche sukzessive Elimination der x nach Kronecker oder Hentzelt-E. Noether konstruiert wird, liegt seine Bedeutung in folgendem. Ist K der Körper der Koeffizienten a, so kann nach Perron [2] die gewöhnliche Resultante auch als höchster Koeffizient der geeignet normierten Minimalgleichungen für die x über dem Körper $K(y)$ der y charakterisiert werden. Diesen interessanten körpertheore-

---

[1] Siehe z.B. B. L. van der Waerden, Moderne Algebra II. 2. Aufl., Berlin 1940.

[2] O. Perron, Algebra I. 3. Aufl., Berlin 1951.

tischen Zusammenhang können wir jetzt auf den Fall $r > n$ ausdehnen; für $r = n + 1$ z.B. ergibt sich: Fassen wir die b-Resultante R_1 insbesondere als Polynom in den b auf und schreiben demgemäss $R_1 = R_1(b_{1\, n+1}, \ldots, b_{n+1,\, n+1})$, so stellt $R_1(-y_1, \ldots, -y_{n+1}) = 0$ die zwischen den y bestehende normierte Relation minimalen Gewichts in den x mit Koeffizienten aus K („*Minimalrelation*") dar. *Unser Resultantensystem lässt sich daher auch charakterisieren als die Gesamtheit der Koeffizienten der Minimalrelation zwischen den* y, womit die Vermutung von Perron bestätigt ist, dass die Koeffizienten der Minimalrelation ein Resultantensystem bilden. Entsprechend lässt sich unser Resultantensystem für beliebiges $r > n$ charakterisieren als Gesamtheit der Koeffizienten gewisser, leicht angebbarer Relationen zwischen den y.

Methodisch stützt sich die ganze Untersuchung auf Strukturaussagen über Körpererweiterungen vom Typ $K(x)/K(y)$, deren Grad bei Zugrundelegung allgemeiner Formen y bestimmt wird. Eine ausführliche Darstellung wird an anderer Stelle erscheinen [3]. Noch ungeklärt ist der genaue Zusammenhang zwischen der Existenz nichttrivialer gemeinsamer Nullstellen der y für spezialisierte a und dem Körpergrad $[K(x) : K(y)]$.

WÜRZBURG, KLINIKSTR. 8, MATH. INST.

SOME REMARKS ON THE NOTION OF A FREE ALGEBRAIC SYSTEM

WOUTER PEREMANS

The notion of a free algebraic system has its origin in group theory (free groups). For some of the simplest other types of algebraic structures the corresponding notion of a free algebraic system is an immediate generalization of that of a free group. This is the case e.g. for lattices, lattices with some of the common additional requirements (modular lattices, distributive lattices, Boolean algebras), rings. A free ring is usually called a polynomial ring over the ring of integers. For more complicated algebraic structures the definition of a free system cannot be given in such a way that the desired characteristic properties of such a system all hold. A typical example of this is a field. It is well known that for a group the two following properties are characteristic for a free group F with n generators and each of them may be chosen as definition:

i. those and only those identities of words formed of generators and their inverses hold in F, which hold in all groups with n generators;

[3] H. Orsinger, Resultantensysteme und algebraische Relationen. Math. Nachr. (im Druck.)

ii. F is a group with n generators and every mapping of its generators on n elements of an arbitrary group G may be extended to a homomorphic mapping of F into G.

Both i and ii may be easily generalized to arbitrary algebraic structures and proved to be equivalent, but in both cases a system F which satisfies the requirements need not exist. Furthermore both concepts of a "generalized word" and of a "homomorphism" may depend on the choice of the basic algebraic operations. This may already be made clear in group theory, where it makes a difference for a "word" whether one takes only the operation of multiplication or the two operations of multiplication and of forming of the inverse as basic operations.

The connection between the existence of free systems and the form of the axioms which determine the algebraic structure, can be investigated. Some results may be found in my paper "Some theorems on free algebras and direct products of algebras", Simon Stevin **29** (1951), 51—59. Here the axiom systems which are considered are simple enough to avoid the above-mentioned difficulties with the choice of the basic operations. As soon as existential statements enter into the axioms, this difficulty arises and it seems doubtful whether a reasonable definition of free system is possible at all. In some cases the existential statements may be eliminated by the introduction of new basic operations.

SALLANDSTRAAT 8 I, AMSTERDAM

DAS ASYMPTOTISCHE VERHALTEN VON KOMBINIERTEN PARTITIONENFUNKTIONEN

W. HANS H. PETERSSON

Jeder disjunktiven Zerlegung der Menge der natürlichen Zahlen in die endlich vielen Systeme $S_1, S_2, \ldots, S_h$ kann man unendlich viele Partitionenprobleme dadurch zuordnen, dass man sich jedes S_j in k_j Farben gegeben denkt und die Partitionen der natürlichen Zahlen n auch nach den Farben der Summanden m unterscheidet. Mit weiteren Farben können ausserdem Summanden aus S_j unter der Bedingung zugelassen werden, dass sie in einigen Farben weniger als l_{j1}-mal, in anderen weniger als l_{j2}-mal usw. auftreten. Identifiziert man die S_j mit den Restklassenpaaren $m \equiv \pm b \bmod N$ ($N > 1$ fest, $b = 0, 1, \ldots, [\frac{1}{2}N]$), so entsteht aus dem obigen Schema eine Fülle konkreter Anzahlfunktionen, deren asymptotisches Verhalten sich genau bestimmen lässt: Jede von ihnen gestattet eine Darstellung als Linearkombination von endlich vielen unendlichen Reihen nach Art der Rademacherschen Partitionenreihe. Dieses Ergebnis folgt aus allgemeinen Sätzen über die explizite Darstellung der automorphen Formen von positiver Dimension und der multiplikativen Modulfunktionen höherer Stufe; die Beweise benutzen an keiner Stelle die Farey dissection oder ähnliche Methoden. Durch Spezialisierung gewinnt man — immer noch sehr allgemeine — asymptotische Relationen zwischen Partitionenfunktionen der genannten Art, in denen die sog. Kreiseinheiten und die Klassenzahlen aller reellen absolut-abelschen Zahlkörper auftreten.

MÜNSTER/WESTF., TANNENBERGSTR. 25.

QUELQUES INVARIANTS DES GROUPES D'ORDRE FINI

SOPHIE PICCARD

Soit G un groupe non cyclique d'ordre fini N. Soit $B_k = \{a_1, \ldots, a_k\}$ (1) un système de $k \geqq 2$ éléments indépendants générateurs de G. Nous dirons que B_k est une base d'ordre k de G. Soit k' (k'') la valeur minimum (maximum) de k. Le nombre total N_k de systèmes (1) est un invariant de G, quel que soit k. Il existe, pout tout G, un entier l diviseur de N, tel que N_k est un multiple de N/l. Pour le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ (l'alterné $\mathfrak{A}_n$) de degré $n \geqq 3$ ($n \geqq 4$) $l = 2$ ($l = 1$). Pour $\mathfrak{S}_n(\mathfrak{A}_n)$, N_2 prend les valeurs 9, 108, 3420, 114480, 7786800 lorsque $n = 3, 4, 5, 6, 7$ (48, 1140, 38160, 2308320, si $n = 4, 5, 6, 7$). La détermination de N_k est rendue aisée par la considération de groupes associés aux systèmes B_k. Soit C le centre de G, soit λ son ordre. Le premier groupe g_1 associé à B_k est formé de tous les éléments a de G, tels que $aB_ka^{-1} = \{aa_1a^{-1}, \ldots, aa_ka^{-1}\} = B_k$. Le second groupe g_2 associé à B_k est formé de toutes les substitutions $a_{i_1} \ldots a_{i_k}$ des éléments $a_1, \ldots, a_k$ obtenues en transformant B_k par les éléments de g_1. Soit v_1 l'ordre de g_1 et v_2 l'ordre de g_2. On a $v_1 = \lambda v_2$ et g_1 est v_1/λ fois isomorphe à g_2. Si $k = k'$, toute substitution non identique de g_2 est du second ordre et $a^2 \in C$ quel que soit $a \in g_1$. Si G est un sousgroupe distingué d'un groupe plus vaste Γ, on peut définir encore deux groupes g_3 et g_4 associés à B_k. g_3 comprend tous les éléments b de Γ, tels que $bB_kb^{-1} = B_k$ et g_4 est un groupe de substitutions qui peut même se confondre avec le symétrique des substitutions des éléments de B_k. Les éléments de G qui ne font partie d'aucune base B_k d'ordre k ne forment pas nécessairement un groupe. 1 est le seul élément de $\mathfrak{S}_n$ ($\mathfrak{A}_n$) qui ne fait partie d'aucune base B_2, $n = 3, 5, 6, \ldots$ ($n = 4, 5, 6, \ldots$).

Nous ne connaissons pas d'exemple de groupe primitif non cyclique de substitutions pour lequel $k' > 2$. Le groupe de Mathieu de degré 12, cinq fois transitif d'ordre 95040 peut être engendré par les deux substitutions $S =$

(1 9 10 11 12 6 4 5)(3 8 7 2), $T = (1\,2\,3\,4)(5\,6\,7\,8)$. Le groupe G_{7200} de Burnside est engendré par les deux substitutions $S = (1\,2\,3)(4\,5\,6)\ldots(34\,35\,36)$, $T = (1\,2\,3\,5\,4)(7\,8\,9\,11\,10)\ldots(31\,32\,33\,35\,34)$. Par contre, si G est un groupe imprimitif de substitutions, k' peut être un entier positif quelconque. A tout groupe imprimitif G_1 on peut associer une suite complète 2) $G_1, G_2, \ldots, G_m$, de longueur $m \geqq 2$, de groupes de substitutions, telle que G_i est imprimitif (primitif) pour $i = 1, 2, \ldots, m - 1 (m)$ et que G_i est mériédriquement isomorphe à G_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, m - 1$. On peut généraliser dans G_1 la notion classique de classes paires et impaires de substitutions et on peut définir $2(2^m - 1)$ classes dont $2^m - 1$ sont paires et $2^m - 1$ sont impaires. Le groupe G_1 est dit complet par rapport à la suite 2) si aucune de ces $2(2^m - 1)$ classes n'est vide. Des critères très simples permettent d'établir s'il en est ainsi et, dans l'affirmative, on a $k' = m$ et $N_{k'} \leqq N^m(2^m - 2^0)(2^m - 2)\ldots(2^m - 2^{m-1})/2^m m!$.

On obtient un système de relations caractéristiques de G à partir d'un système B_k quelconque. Le groupe $\mathfrak{A}_n$ qui peut être caractérisé par les relations $a_i^3 = 1$, $(a_i a_j)^2 = 1$, $i, j = 1, \ldots, n - 2$, $i \neq j$, reliant $n - 2$ éléments générateurs $a_1, \ldots, a_{n-2}$, peut également être caractérisé si n est impair $\geqq 5$, par les relations $a^{n-2} = 1$, $b^3 = 1$, $(ab)^n = 1$, $(a^i b a^{-i} b)^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n - 3$ et, si n est pair, par les relations $a^{n-1} = 1$, $b^{\frac{n}{2}} = 1$, $(a^{n-2}b)^3 = 1$, $(a^{\frac{n}{2}} b^i a^{-\frac{n}{2}} b^{-i})^2 = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n/2 - 1$, $(a^{\frac{n}{2}-1} b^i a^{\frac{n}{2}-1} b^{\frac{n}{2}-i+1})^2 = 1$, $i = 2, 3, \ldots, n/2 - 1$, relations reliant les deux éléments générateurs a et b. Le groupe $\mathfrak{S}_n$ peut être caractérisé par $n/2 + 1$ $[(n + 3)/2]$ relations indépendantes reliant deux éléments générateurs, si n est pair [impair].

NEUCHÂTEL (SUISSE), VERGER ROND 8.

LOGARITHMETICS OF QUASIGROUPS

HELEN POPOVA

A system Q is called a *quasigroup* if, for each ordered pair a, b of Q there exists (i) a unique element ab in Q, and (ii) unique solutions of equations $ax = b$, $ya = b$. The order of a quasigroup is the number of its elements.

A power x^r of an element x is a continued product in which all the factors are equal to x. The symbol r used to denote the power is the *index* of the power. Addition and multiplication of indices is defined as $x^{p+q} = x^p x^q$, $(x^p)^q = x^{pq}$. In general this addition is non-associative, but multiplication is always associative.

A quasi-integer q of an algebra A is a class of indices $q, p, \ldots$ of powers which are equal $x^p = x^q = \ldots$ for all elements x of A.

Quasi-integers can be added and multiplied just as indices. The *logarithmetic* of an algebra A is the set of all the quasi-integers of A together with operations of addition and multiplication. We shall denote the logarithmetic of A by L_A.

Let Q be a quasigroup of a finite order n, consisting of elements $1, 2, \ldots, n$. Any power r is completely determined by a vector $\{1^r, 2^r, \ldots, n^r\}$ and we obtain all the quasi-integers of L_Q if we let r in this vector run through all powers.

To add two quasi-integers r and s we represent them as vectors, and then multiply the corresponding components according to the multiplication table of Q. The product rs is represented by a vector r with each component raised to power s.

The logarithmetic of a quasigroup is a quasigroup with respect to addition.

I call the quasigroup plain if it has no proper subquasigroups, and no proper homomorphs.

The order of the logarithmetic of a plain quasigroup is some power of the order of Q.

A subvector $\{1, 2, \ldots, m\}$ of the vector $\{1, 2, \ldots, m, \ldots, n\}$ of L_Q is called a derived vector of Q if it generates, with respect to addition, a quasigroup isomorphic to Q. The maximal number of distinct elements of Q forming a derived vector of Q is called the range of Q.

If Q is a plain quasigroup of order n and range r, then r divides n and the elements of Q can be split into n/r mutually exclusive classes of r elements, each of which forms a derived vector of Q.

With respect to addition L_Q can be represented by a set of k-rowed vectors, where n^k is the order of L_Q. With respect to multiplication L_Q is a semigroup and can be represented by a set of generalised permutation matrices.

MATH. DEPT. UNIVERSITY OF ABERDEEN.

ON A RESULT OF WALFISZ

KARL PRACHAR

Sierpinski proved: To every $A > 0$ there are primes p satisfying

$$(A) \qquad q \text{ not prime for } |q - p| \leqq A$$

Walfisz (Doklady Akad. Nauk SSSR 90, 711 (1953)) showed: If we define a prime p to be "strongly isolated" if the following conditions are satisfied

$$(B) \qquad q \text{ not prime for } |q - p| \leqq \frac{\log p}{(\log\log\log p)^2},$$

then almost all primes are strongly isolated. I show that $(\log\log\log\log p)^2$ in condition (B) can be replaced by any function $f(p)$ $(f(p) \to \infty$ if $p \to \infty)$, such that $\log x/f(x)$ is monotonically increasing for $x > x_0$, say. A number of connected results is given.

WIEN XVI, THALIASTRASSE 40.

INVERSE SEMIGROUPS

GORDON BAMFORD PRESTON

An *inverse semi-group* is defined to be a semi-group S such that

(1) corresponding to each element $a \in S$, there exist e, $x \in S$ for which $ea = a$, and $ax = e$,

(2) idempotent elements of S commute.

We show that xe is uniquely determined by a, and write $xe \equiv a^{-1}$.

A sub-semi-group S of the semi-group of all $(1, 1)$-mappings of subsets of some set T into T, will be called a *semi-group of* $(1, 1)$*-mappings*. S will be said to be *complete* if it contains with each mapping its inverse mapping.

Theorem 1. *A semi-group admits a faithful representation as a complete semi-group of* $(1, 1)$*-mappings, if, and only if, it is an inverse semi-group.*

Let R be a homomorphic equivalence relation defined over the inverse semi-group S. Let N be the union of all equivalence classes $N(E_\alpha)$, such that each $N(E_\alpha)$ contains a non-empty set of idempotents E_α. N will be called the *kernel* of R. The E_α and $N(E_\alpha)$ satisfy the conditions:—

(a) each $N(E_\alpha)$ is an inverse semi-group with E_α as its set of idempotents;

(b) distinct E_α are disjoint, and every idempotent belongs to some E_α;

(c) to any E_α, E_β corresponds an E_γ such that $E_\alpha E_\beta \subseteqq E_\gamma$;

(d) to each $a \in S$, and E_α, corresponds an E_β such that $aE_\alpha a^{-1} \subseteqq E_\beta$;

(e) aa^{-1}, $bb^{-1} \in E_\alpha$, a, $ab^{-1} \in N(E_\alpha)$, together imply that $b \in N(E_\alpha)$;

(f) aa^{-1}, $bb^{-1} \in E_\alpha$, $ab^{-1} \in N(E_\alpha)$ together imply that $a\,N(E_\beta)b^{-1} \subseteqq N(E_\gamma)$ where $aE_\beta a^{-1} \subseteqq E_\gamma$.

Any sub-semi-group $N = \cup N(E_\alpha)$, where the E_α and $N(E_\alpha)$ satisfy conditions (a)—(f) will be called a *normal* sub-semi-group of S with *components* $N(E_\alpha)$.

Theorem 2. *If N is a normal sub-semi-group of an inverse semi-group S with components $N(E_\alpha)$, then the relation $aR_N b$, if, and only if, for some α, aa^{-1}, $bb^{-1} \in E_\alpha$ and $ab^{-1} \in N(E_\alpha)$, is a homomorphic equivalence relation over S. Conversely, every homomorphic equivalence relation R over S, has a kernel N which is a normal sub-semi-group of S, such that $R_N \equiv R$. S/R is itself an inverse semi-group with the equivalence classes $N(E_\alpha)$ as its idempotents.*

When each E_α is a single idempotent, we may write $N(E_\alpha)$ as N_e, where $e \in E_\alpha$. In this case conditions (a)—(f) are equivalent to the two conditions:—

(g) $N_e N_f \subseteqq N_{ef}$;

(h) $aN_f a^{-1} \subseteqq N_g$, where $g = afa^{-1}$.

Further the equivalence classes of R_N take a simple form. They are the sets $N_e b$, where b is any element such that $bb^{-1} = e$.

ROYAL MILITARY COLLEGE OF SCIENCE,
SHRIVENHAM, ENGLAND.

A PARTITION CALCULUS

RICHARD RADO

This is a report on work done jointly with P. Erdös.

Notation. For sets A and B, $|A|$ denotes the cardinal number of A, and $A \subset B$ inclusion, in the wide sense. If A is ordered then $\bar{A}$ is the order type of A.

Dirichlet's pigeon hole principle (Schubfachprinzip) was extended by F. P. Ramsey as follows. *If $|A| = \aleph_0$, and k and r are positive integers, and if every $X \subset A$ such that $|X| = r$ is placed arbitrarily into one of k classes $K_1, K_2, \ldots, K_k$ then there always exists $B \subset A$ and $i \leqq k$ such that $|B| = \aleph_0$, and $X \in K_i$ for every $X \subset B$ satisfying $|X| = r$.* More generally, for any cardinals $a, r, b_1, b_2, \ldots, b_k$, one can define the *partition relation* $a \to (b_1, b_2, \ldots, b_k)^r$ to have the following meaning. If $|A| = a$, and if every $X \subset A$ satisfying $|X| = r$ is placed arbitrarily into one of k classes $K_1, \ldots, K_k$ then there always exists $B \subset A$ and $i \leqq k$ such that $|B| = b_i$, and $X \in K_i$ for every $X \subset B$ satisfying $|X| = r$. The cardinals a, b_i may be replaced by order types α, β_i; in this case the relations $|A| = a$; $|B| = b_i$ are replaced by $\bar{A} = \alpha$; $\bar{B} = \beta_i$. The negation of $a \to (b, c)^r$ is $a \not\to (b, c)^r$. Such partition relations are the nucleus of a considerable amount of work in combinatorics and set theory, and they seem worth studying.

Further notation. ω_ν is the initial ordinal of cardinal $|\omega_\nu| = \aleph_\nu$, and η and λ are the order type of the set of all rational and all real numbers respectively. $n, r, \alpha, \beta, \gamma$ are ordinal numbers such that $n, r < \omega_0$; $\alpha < \omega_0 2$; $\beta < \omega_0^2$; $\gamma < \omega_1$, and φ is an order type such that $|\varphi| > \aleph_0$; $\omega_1 \not\leqq \varphi$; $\omega_1^* \not\leqq \varphi$, where ω_1^* is the reverse of ω_1. Thus, λ may be taken as φ. For simplicity's sake some of the results below are stated in the form they take if the general continuum hypothesis $2^{\aleph_\nu} = \aleph_{\nu+1}$ is assumed. Some results are:

1. $\omega_0 4 \to (3, \omega_0 2)^2$; $\omega_0 3 + n \not\to (3, \omega_0 2)^2$; $\omega_0 n \to (n, \alpha)^2$; $\omega_0 n \not\to (n+1, \omega_0 + 1)^2$.

2. $\eta \nrightarrow ((r \dot{-} 1)^2 + 1, \omega_0 + 1)^r$ $(r \geqq 3)$.

3. If $\varphi \leqq \lambda$; $|\varphi| = |\lambda|$, then $\varphi \nrightarrow (\varphi, \varphi)^1$ (Sierpiński); $\lambda \nrightarrow (\omega_0, \omega_0 + 2)^3$; $\lambda \nrightarrow (r + 1, \omega_0 + 2)^r$ $(r \geqq 4)$.

4. $\omega_1 \rightarrow (\alpha, \alpha)^2$; $\omega_1 \rightarrow (\omega_0, \gamma)^2$; $\omega_1 \nrightarrow (6, \omega_1)^3$; $\omega_1 \nrightarrow (n_r, \omega_0 + 2)^r$ for some $n_r < \omega_0$ $(r \geqq 4)$.

5. $\varphi \rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha)^2$; $\varphi \rightarrow (\alpha, \beta)^2$; $\varphi \rightarrow (\omega_0, \gamma)^2$; $\varphi \rightarrow (4, \alpha)^3$.

6. $\omega_r \rightarrow (\omega_0 + r, \omega_0 + r, \ldots, \omega_0 + r)^r$.

7. For any ordinal σ, $\omega_\sigma \rightarrow (\omega_0, \omega_\sigma)^2$ (Dushnik and Miller); if the ordinal τ is such that $\aleph_\sigma^b \leqq \aleph_\sigma$ for all $b < \aleph_\tau$, then $\omega_{\sigma+1} \rightarrow (\omega_{\sigma+1}, \omega_\tau + 1)^2$; $\omega_{\sigma+1} \nrightarrow (\omega_{\sigma+1}, \omega_{\tau+1})^2$.

King's College,
Strand, London, W.2, England.

SUR LA DIFFÉRENCE ENTRE NOMBRES PREMIERS CONSÉCUTIFS

Giovanni Ricci

On dit qu'une suite $\{n_h\}$ croissante, de nombres entiers positifs $n_1, n_2, \ldots$ a *densité asymptotique nulle* si $h/n_h \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Les suites que nous allons considérer sont formées de nombres réels positifs.

On dit qu'une suite $\{x_n\}$ est *quasi-asymptotique* à la suite $\{a_n\}$, et on écrit $x_n \dot{\sim} a_n$, lorsqu'il existe une suite $\{n_h\}$ de densité asymptotique nulle telle que, pour chaque $\varepsilon > 0$, sont vérifiées les inégalités suivantes:

$$(1 - \varepsilon)a_n < x_n < (1 + \varepsilon)a_n \text{ pour } n \geqq n_0(\varepsilon), \quad n \neq n_h.$$

On dit qu'une couple de suites $\{a_n, b_n\}$ est *un pinceau de quasi-asymptoticité* pour une suite $\{x_n\}$, et on écrit

$$x_n \dot{\sim} (a_n, b_n)$$

lorsqu'il existe une suite $\{n_h\}$ de densité asymptotique nulle telle que, pour chaque $\varepsilon > 0$, sont verifiées les inégalités suivantes

$$(1 - \varepsilon)a_n < x_n < (1 + \varepsilon)b_n \text{ pour } n \geqq n_0(\varepsilon), \quad n \neq n_h$$

tandis qu'une telle suite $\{n_h\}$ n'existe pas, lorsqu'on considère les inégalités analogues

$$(1 + \varepsilon)a_n < x_n < (1 + \varepsilon)b_n, \quad (1 - \varepsilon)a_n < x_n < (1 - \varepsilon)b_n.$$

En harmonie avec ces définitions on peut poser des questions qui regardent la suite $\{p_{n+1} - p_n\}$ des différences des nombres premiers consécutifs $p_1, p_2, p_3, \ldots$

Nous avons démontré les théorèmes suivants

THÉORÈME I. Il n'cxiste pas une fonction $\psi(n)$ monotone à laquelle $p_{n+1} - p_n$ soit quasi-asymptotique, c'est-à-dire telle que

$$p_{n+1} - p_n \dot{\sim} \psi(n).$$

THÉORÈME II. Soit $(\alpha \log p_n, \beta \log p_n)$ un pinceau de quasi-asymptoticité de la suite $\{p_{n+1} - p_n\}$, c'est-à-dire

$$p_{n+1} - p_n \dot{\sim} (\alpha \log p_n, \beta \log p_n), \qquad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq +\infty).$$

Les constantes α et β (qui sont univoquement déterminées) satisfont aux inégalités suivantes

$$\alpha \leqq 1 - H/B, \qquad \beta - \alpha \geqq 2\,H/B$$

$$H = \prod_{p \geqq 3} (1 - (p-1)^{-2}) = 0{\cdot}6601\ldots \qquad \text{(constante de Shah et Wilson)}$$

B coëfficient de Viggo Brun, $B \leqq 16\ H$.

On peut conclure en particulier

$$\alpha \leqq 15/16, \qquad \beta - \alpha \geqq 1/8.$$

Ces résultats vont améliorer ce qui est connu par les études de P. Erdös et R. A. Rankin.

ISTITUTO MATEMATICO D. UNIVERSITÀ,
VIA C. SALDINI 50, MILANO (ITALY).

ANWENDUNGEN VON MITTELWERTSÄTZEN DIRICHLETSCHER REIHEN IN DER ZAHLENTHEORIE

HANS-EGON RICHERT

Es werden neue Abschätzungen für die Fehlerglieder bei asymptotischen Entwicklungen der summatorischen Funktionen von Koeffizienten einer Klasse spezieller Dirichletscher Reihen hergeleitet.

Die allgemeinen Ergebnisse sind von folgender Art:

„Die Reihe $Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ sei für $\sigma > \beta$ $(0 < \beta < \infty)$ absolut konvergent. Es gebe eine Zahl H $(-\infty \leqq H < \beta)$, so daß die Funktion $Z(s)$ für $\sigma > H$ bis auf endlich viele Pole regulär ist, d.h. bei passendem T_0 $(\geqq 1)$ in jedem endlichen Teilgebiet von $\sigma > H$, $|t| \geqq T_0$ regulär; und für $\sigma > H$ sei $Z(s)$ von endlicher Ordnung.

Für jedes $\sigma > H$ und für jede natürliche Zahl k werde $\mu_k(\sigma, Z)$ definiert durch

(1) $\mu_k(\sigma, Z) = \underline{\text{fin}}\ \xi$ mit $\displaystyle\frac{1}{T}\int_{\substack{-T\\|t|\geqq T_0}}^{T} |Z(\sigma+it)|^k dt = O(T^\xi)$ bei $T_0 \leqq T \to \infty$.

Dann gilt für jedes $\eta > H$ bei x (stetig) $\to \infty$ und für jedes (feste) $\varepsilon > 0$

$$\sum_{1\leqq n\leqq x} a_n = \sum_{\eta\leqq\sigma\leqq\beta} \operatorname{Res} \frac{x^s}{s} Z(s) + \Delta(x),$$

$$\Delta(x) = O(x^{\eta+\mu_1(\eta, Z)+\varepsilon}).$$

Ist ferner $a_n = O(n^{\beta-1+\varepsilon})$, so gilt überdies

$$\Delta(x) = O\left(x^{\beta-\frac{\beta-\eta}{1+\mu_1(\eta, Z)}+\varepsilon}\right) + O\left(x^{\beta-1+\varepsilon}\right)."$$

Als Konvergenzproblem Dirichletscher Reihen gewendet, ergeben sich so Verschärfungen der Sätze von Schnee, Landau und Grandjot.

Von den zahlentheoretischen Anwendungen dieses Satzes seien die folgenden beiden Beispiele erwähnt:

1. Setzt man mit der Riemannschen Funktion $\zeta(s)$ für eine natürliche Zahl k

$$\zeta^k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n) n^{-s},$$

so versteht man unter dem Piltzschen Teilerproblem die Bestimmung der unteren Grenze ϑ_k der Zahlen ξ in

$$\sum_{1\leqq n\leqq x} d_k(n) - \operatorname*{Res}_{s=1} \frac{x^s}{s} \zeta^k(s) = O(x^\xi).$$

Sei $k \geqq 4$. Die Piltzsche Abschätzung $\vartheta_k \leqq 1 - \dfrac{1}{k}$ ist über eine Reihe von Arbeiten von Landau, Hardy und Littlewood zu

$$\vartheta_k \leqq 1 - \frac{1}{2(k-4)\mu(\frac{1}{2}) + 2} \tag{2}$$

verschärft worden, wo $\mu(\sigma)$ die Lindelöfsche Funktion für $\zeta(s)$ bezeichnet. Verwendet man hierin die beste bekannte Abschätzung $\mu(\frac{1}{2}) \leqq \frac{15}{92}$ (Min), so folgt

$$\vartheta_k \leqq 1 - \frac{46}{15k+32} \left(\geqq 1 - \frac{3{,}07}{k}\right). \tag{3}$$

Der obige Satz liefert hier, wenn zu k die natürliche Zahl ν durch

$$\nu 2^\nu + 2 \leqq k < (\nu+1)2^{\nu+1} + 2$$

erklärt wird,

$$\vartheta_k \leqq 1 - \frac{\nu + 2}{k + 2^{\nu+1} - 2} = \Theta(k). \tag{4}$$

Zur Orientierung gegenüber (3) mag die Abschätzung

$$\Theta(k) \leqq 1 - \frac{\log k}{k} \quad \text{für } k \geqq 170$$

dienen. Um (4) mittels (2) zu erreichen, würde man die Richtigkeit der Lindelöfschen Vermutung benötigen.

2. Es sei $F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi i n \tau}$ eine Spitzenform der Dimension $-k$: Dann ist

$$\sum_{1 \leqq n_1 n_2 \leqq x} a_{n_1} a_{n_2} = O\left(x^{\frac{k}{2}+\varepsilon}\right),$$

insbesondere für die Ramanujansche Funktion $\tau(n)$

$$\sum_{1 \leqq n_1 n_2 \leqq x} \tau(n_1)\tau(n_2) = O(x^{6+\varepsilon}).$$

Die Methode besteht in der Zurückführung der fraglichen Abschätzungen auf Mittelwerte der durch die betrachteten Dirichletreihen dargestellten Funktionen und damit auf ein Studium der in (1) erklärten Carlsonschen Funktion $\mu_k(\sigma, Z)$. Bei den Anwendungen werden die denjenigen der Lindelöfschen Funktion analogen Eigenschaften (Konvexität u. dergl.) von $\mu_k(\sigma, Z)$ ausgenutzt.

Göttingen, Universität, Math. Inst.

NEUERE ERGEBNISSE BEIM WARINGSCHEN PROBLEM

G. J. Rieger

Heute sind eine Reihe von Lösungen des Waringschen Problems bekannt. Auch ist es in mannigfacher Weise verallgemeinert worden. Wir greifen drei dieser Ergebnisse heraus:

1. Im Jahre 1909 hat D. Hilbert (Math. Ann. **67**) mit einem Satz, den man so formulieren kann, zum ersten Male das Waringsche Problem in voller Allgemeinheit gelöst:

Ist n eine natürliche Zahl, so bilden die n-ten Potenzen der natürlichen Zahlen eine Basis der natürlichen Zahlen.

Man bezeichnet gewöhnlich die genaue Ordnung dieser Basis mit $g(n)$.

2. E. Kamke (Math. Ann. **83**) hat diesen Satz für die n-ten Potenzen auf

ganzwertige Polynome vom Grad n mit rationalen Koeffizienten verallgemeinert.

3. E. Kamke (Math. Ann. **87**) hat ferner für beliebige algebraische Zahlkörper einen Waringschen Satz für Polynome bewiesen.

Die Beweise dieser drei Sätze stützen sich alle wesentlich auf das Lemma von Hilbert (Hurwitzsche Identität).

Man kann nun in allen drei Fällen an Hand der Beweise auf vollständig elementarem Wege das zugehörige $g(n)$ abschätzen. Im Falle 1 erhält man z. B.

$$g(n) < (2n + 1)^{260(n+1)^8} \tag{1}$$

Diese Schranke ist zwar recht grob. Doch ist das kaum anders zu erwarten, da bei den arithmetischen Identitäten, auf denen der Hilbertsche Beweis aufgebaut ist, die zahlentheoretischen Feinheiten der Folge der natürlichen Zahlen nicht berücksichtigt werden. Eine ähnliche Gestalt haben die Abschätzungen in den Fällen 2, 3.

Während im Falle 1 auch auf elementarem Wege längst bessere Schranken bekannt sind, ist (1) doch von gewissem Interesse, da damit zum erstenmal der Hilbertsche Beweis konstruktiv gewendet wurde. Im Falle 2 waren bisher nur auf analytischem Wege gewonnene Abschätzungen bekannt. Eine Schranke für $g(n)$ im Falle 3 scheint neu zu sein.

GIESSEN/LAHN, MATH. INST. DEUTSCHLAND.

APPLICATIONS DE LA THÉORIE DES RELATIONS BINAIRES À L'ALGÈBRE ET À LA THÉORIE DES MACHINES

JACQUES RIGUET

La présente communication a pour but de donner des applications de la théorie des relations binaires telle qu'elle a été exposée dans notre travail: *Fondements de la théorie des relations binaires* Paris 1951 en algèbre et en théorie des machines (Voir nos notes aux Comptes Rendus ac. sci. Paris en 1953—54).

1. Les applications à l'algèbre dont je veux parler ici concernent essentiellement des anneaux de suites et des anneaux de matrices dont les supports (sousensemble des x tels que $u(x) \neq 0$ dans le cas d'une suite u, relation constituée par les (x, y) tels que $\alpha(x, y) \neq 0$ dans le cas d'une matrice α) ont des propriétés spéciales. Le passage des notions relatives à une variable à celles relatives à plusieurs variables se fait au moyen des systèmes rationnels de coordonnées. D'où une vaste théorie où viennent se fondre les aspects combinatoires et énumératifs de diverses disciplines, analyse combinatoire, analyse substitutionnelle, représentation des groupes etc.

2. Passons au second domaine d'applications que je veux aborder ici. La théorie des relations permet d'édifier une vaste mécanique relationnelle qui permet d'envisager sous un jour nouveau les problèmes cybernétiques. On se borne à des systèmes d'états discrets ce qui, du point de vue pratique est sans inconvénients. Une machine se définit alors comme une application d'un ensemble d'états dans lui même. Lorsque cet ensemble est muni d'un système de coordonnées relationnelles, on peut définir algébriquement le couplage de deux machines et on peut alors édifier la mécanique à laquelle nous avons fait allusion. Mais il est possible de définir le couplage des machines sans introduire de coordonnées à l'aide d'un calcultensoriel de relations qui présente certaines propriétés en commun avec le calcul tensoriel ordinaire. Nous avons appliqué cette mécanique relationnelle aux réseaux d'interrupteurs électro magnétiques, à l'algébraisation du fonctionnement des grandes machines à calculer au problème du codage. Nous avons montré l'équivalence entre certains problèmes d'algèbre et de théorie des machines (fonctions récursives par ex C. R. août 1954). Récemment notre collaboration avec le Docteur W. R. Ashby (Gloucester) nous a permis d'algébraiser certains problèmes de cybernétique et d'établir certains principes statistiques (principes de l'entonnoir par ex.) dont certains permettent de retrouver comme cas particulier la théorie de l'information de Claude Shannon.

Institut Henri Poincaré,
6 Rue des Ecoles, Paris.

THE MODULAR REPRESENTATION THEORY OF THE SYMMETRIC GROUP

Gilbert de Beauregard Robinson

The complications inherent in the modular representation theory of finite groups have made it desirable to work out the theory in as great detail as possible for the case of the symmetric group S_n. This work was begun by Nakayama in 1940 and has been carried on by numerous others ever since. It would appear that everything can be made explicit. The block structure is determined by the *core* and the ordinary irreducible representations belonging to a given block are characterized by their star diagrams or *p-quotients*. Generating functions can be constructed to yield the number of blocks and the number of ordinary representations in a given block. On the other hand, the modular irreducible representations can also be enumerated in a similar fashion and progress is being made in characterizing them explicitly. The basic tool in all this work is the inducing process which is simple and explicit for S_n. Corresponding to the *defect* in the general theory we have the more explicit concept of *weight* (= number of p-hooks removable from a Young diagram $[\lambda]$). The *change of weight* under *r-inducing* is given by $d - d^* - 1$ where d is the number of nodes of class r which can be added to $[\lambda]$ and d^* is the number which can be removed from $[\lambda]$ (cf. the October number of the Canadian Journal of Mathematics, volume 6(1954)).

UNIVERSITY OF TORONTO, CANADA.
MICHIGAN STATE COLLEGE, LANSING, MICH. U. S. A.,
(for academic year 1953-4).

THE MINKOWSKI-HLAWKA THEOREM

CLAUDE AMBROSE ROGERS

One form of the Minkowski-Hlawka theorem may be stated in the following way. *Let Λ be the set of all points with integral coordinates in n-dimensional space. Let S be any set of points whose outer Jordan content is less than unity. Then there is a linear transformation of unit determinant which transforms Λ into a set having no point, except perhaps the origin, in common with S.* I have recently noticed that one of the methods, which has been used to prove this result, shows also that the same conclusion holds whenever Λ is a set of points which, like the set of points of integral coordinates, has asymptotic density equal to unity. Indeed it is only necessary to suppose that there are two opposite directions, in which a suitably defined asymptotic directional density of Λ has unit value.

UNIVERSITY COLLEGE, LONDON.

ON THE CLASSIFICATION OF ASSOCIATIVE ALGEBRAS BY MEANS OF COHOMOLOGY THEORY

I. H. ROSE

According to a method (due to Hochschild) of classifying associative algebras A, one says $\dim A = n$ if the following is true: There is an n-dimensional cohomology group of A which is not zero, but every cohomology group of A of dimension $n+1$ is zero. Hochschild has proved that a dimensionality of 0 is equivalent to the classical property of separability, so that there is no lack of examples of zero-dimensional algebras. We present here the following theorem and corollary, which while they do not completely characterize algebras of dimension 1, do show that algebras of this type are not at all uncommon and enable us to construct many examples of them.

Theorem. If B is a non-separable one-sided ideal in a separable algebra A, then $\dim B = 1$.

Corollary. Let A be a total matric algebra of order n with coefficients in a separable division ring, $r < n$ a positive integer, B the subalgebra of A consisting of all matrices in A whose last r columns (or rows) contain only zero coefficients. Then $\dim B = 1$.

MATH. DEPT., U. OF MASS.,
AMHERST, MASS., U. S. A.

ON IRREGULARITIES OF DISTRIBUTION

KLAUS FRIEDRICH ROTH

Our object is to prove a refinement of a theorem of Mrs. T. van Aardenne-Ehrenfest ("On the impossibility of a just distribution", Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam, 52, 734—739 (1949)). This refinement will take the form of the following theorem.

THEOREM. Let $P_1, \ldots, P_N$ be points, not necessarily distinct, in the square $0 < x < 1$, $0 < y < 1$. For any point (u, v) in this square, let $S(u, v)$ denote the number of points P in the rectangle $0 < x < u, 0 < y < v$.

Then

$$\int_0^1 \int_0^1 (S(x, y) - Nxy)^2 \, dxdy > c \log N,$$

where c is an absolute constant.

17 PARSIFAL ROAD,
LONDON N.W. 6.

REMARQUES SUR LE LEMME DE HENSEL

PIERRE SAMUEL

I. — Soient A un anneau commutatif filtré par les puissances d'un idéal M, E, F, G trois A-modules de type fini, filtrés par les sous modules M^nE, M^nF, M^nG, séparés et complets pour les topologies correspondantes. Soient f une application *bilinéaire* de $E \times F$ dans G, a, b_1, c_1 des éléments de G, E, F tels que

(1) $a \equiv f(b_1, c_1)$ (mod. MG)

(2) $G = f(b_1, F) + f(E, c_1) + MG$ (on notera que (2) est une propriété des quotients E/ME, F/MF, G/MG et des classes de b_1 et c_1 dans ceux ci). *Il existe alors* $b \equiv b_1(ME)$ *et* $c \equiv c_1(MF)$ *tels que* $a = f(b, c)$.

Ce résultat se démontre par approximations successives. Le *lemme de Hensel* en est un cas particulier: on prend pour A un anneau local complet, pour M son idéal maximal, pour E, F, G les modules des polynômes de degrés n, r, $n-r$ sur A, et pour f la multiplication des polynômes. En prenant pour $A = E = F = G$ un anneau semi-local complet, pour M l'intersection de ses idéaux maximaux, pour f la multiplication dans A, et pour (1) une décomposition mod. M de 0 en produit d'idempotents, on obtient le fait que A est *composé direct d'anneaux locaux complets*.

II. — Soient K un corps valué complet pour une valuation discrète V, A et M l'anneau et l'idéal de v, et k le corps A/M; pour $x \in A$ nous noterons $\bar{x}$ la classe de x mod.M. Etant donné un idéal I de $K[X_1, \ldots, X_n]$ les polynômes $\overline{F}(X)$ obtenus par réduction mod.M des coéfficients des polynomes $F(X)$ de $I \cap A[X_1, \ldots, X_n]$ forment un idéal $\bar{I}$ de $k[X_1, \ldots, X_n]$. L'idéal $\bar{I}$ a même dimension que I (et même degré si I est homogène). Si $(x) \in A^n$ est un zéro de I, $(\bar{x}) \in k^n$ est un zéro de $\bar{I}$. Réciproque partielle:

Si $(\xi) \in k^n$ *est un zéro simple de* $\bar{I}$, *il existe un zéro simple* $(x) \in A^n$ *de* I *tel que* $(\bar{x}) = (\xi)$.

Soit $q = \dim(I) = \dim(\bar{I})$. Démonstration facile par approximations successives quand I admet un système de $n-q$ générateurs (en particulier dans le cas de l'idéal d'une variété linéaire). Pour passer au cas général on extrait d'un système de générateurs (F_a) de I $n-q$ éléments (F_j) tels que la matrice $(\partial\overline{F}_j/\partial\xi_i)$ soit de rang $n-q$. Il existe alors des polynômes Γ_a, Φ_{aj} sur k tels que $\overline{F}_a(X)\Gamma_a(X) = \sum_j \Phi_{aj}(X)\overline{F}_j(X)$ et que $\Gamma_a(\xi) \neq 0$. Le cas linéaire montre alors l'existence de polynômes G_a, P_{aj} sur A tels que $F_a(X)G_a(X) = \sum_j P_{aj}(X)F_j(X)$, et que $\overline{G}_a = \Gamma_a$, $\bar{P}_{aj} = \Phi_{aj}$. Donc, si (x) est un zéro (fourni par la première partie) de l'idéal $(F_1, \ldots, F_{n-q})$ tel que $(\bar{x}) = (\xi)$, on a $G_a(x) \neq 0$, d'où $F_a(x) = 0$, et (x) est le zéro cherché de I.

Ce résultat redonne le lemme de Hensel classique: une décomposition $F(X) = G(X)H(X)$ (F, G, H: polynomes unitaires de degrés n, r, $n-r$ sur A) impose n conditions algébriques (bilinéaires) aux coéfficients de G et H; et la „simplicité" d'une décomposition réduite $\overline{F}(X) = \overline{G}(X)\overline{H}(X)$ équivaut (d'après la théorie du résultant) au fait que $\overline{G}$ et $\overline{H}$ sont étrangers.

AV. A. PHELUT, ROYAT (PDD), FRANCE.

THE PERIMETER OF AN ELLIPSE

H. F. SANDHAM

By means of the theory of elliptic functions we devise the identity

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+7n^2}$$
$$= 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{q^r}{1-q^r}(r|7) - 2\left\{1 + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{2r}}{1-q^{2r}}(r\,|\,7)\right\} + 2\left\{1 + 2\sum_{1}^{\infty}\frac{q^{4r}}{1-q^{4r}}(r|7)\right\},$$

where $(r|\,7)$ denotes Legendre's quadratic residue symbol, which it is convenient to write

$$(r\,|\,7) = \frac{2}{\sqrt{7}}\left(\sin\frac{2\pi r}{7} + \sin\frac{8\pi r}{7} + \sin\frac{18\pi r}{7}\right),$$

and from this we now show how to deduce that

The perimeter of an ellipse with major axis a and excentricity $e = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{7}}{16}\right)}$ is

$$2\pi a\left\{\frac{4\pi}{7^{\frac{5}{4}}\Gamma(\frac{1}{7})\Gamma(\frac{4}{7})\Gamma(\frac{9}{7})} + \frac{7^{\frac{3}{4}}\Gamma(\frac{1}{7})\Gamma(\frac{4}{7})\Gamma(\frac{9}{7})}{4\pi^2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right\}.$$

We multiply across the above identity by $\log^{s-1}\dfrac{1}{q}$, and integrate with respect to q from 0 to 1, and find that

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(m^2+7n^2)^s} = \left(2 - \frac{1}{2^{s-2}} + \frac{1}{2^{4s-2}}\right)\zeta(s)\sum_{1}^{\infty}\frac{(r\,|\,7)}{r^s}.$$

We now expand both sides of this identity in powers of $s-1$.

The left hand side, we find is equal to

$$\frac{\pi}{(s-1)\sqrt{7}} + \frac{4\pi}{\sqrt{7}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\frac{1}{e^{2\pi n\sqrt{7}}-1} + \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{\sqrt{7}}(2\gamma - 2\log 2 - \log 7) + \ldots.$$

The right hand side, on making use of Kummer's formula for the logarithm of the Gamma function, we find is equal to

$$\frac{\pi}{(s-1)\sqrt{7}} + \frac{\pi}{\sqrt{7}}\left\{-2\log\Gamma(\tfrac{1}{7})\Gamma(\tfrac{4}{7})\Gamma(\tfrac{9}{7}) + 6\log 2 - \frac{s}{2}\log 7 + 4\log\pi\right\} + \ldots.$$

Equating both sides and letting $s \to 1$, we find that

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{1}{e^{2\pi n\sqrt{7}}-1} = -\frac{\pi\sqrt{7}}{12} - \tfrac{1}{2}\log\frac{7^{\frac{1}{4}}\Gamma(\frac{1}{7})\Gamma(\frac{4}{7})\Gamma(\frac{9}{7})}{16\pi^2}.$$

and thus deduce our result.

5, St. Helen's Rds,
Boolerstown, Dublin, Ireland.

ARITHMETISCHE BEDINGUNGEN FÜR ALGEBRAISCHE FUNKTIONEN

Theodor Schneider

Es sollen mitgeteilt werden:

1. Hinreichende Bedingungen, die sich auf Werte einer analytischen Funktion $f(z)$ und Werte der Ableitungen derselben an gewissen Stellen z beziehen, aus denen folgt, dass $f(z)$ eine algebraische Funktion ist. Diese Bedingungen sind arithmetischer Natur und gestatten als Anwendung ohne Rechnung den Nachweis der Transzendenz einer Reihe bekannter transzendenter Zahlen.

2. Notwendige und hinreichende arithmetische Bedingungen für die Algebraizität von $f(z)$, die mit dem Eisensteinschen Satz im Zusammenhang stehen.

Erlangen, Am Röthelheim 56,
Germany.

THE COHOMOLOGY GROUPS OF ALGEBRAIC NUMBER FIELDS

John T. Tate

With the operation of a group G on an abelian group A, there is associated, in a well known way, a system of homology groups $H_r(G, A)$ and a system of cohomology groups $H^r(G, A)$, for integers $r \geqq 0$. If G is finite, these two systems can be linked together into a single system of groups $\overline{H}^r(G, A)$, $-\infty < r < +\infty$, in which the homology groups occur in a natural way (not merely formally) as negative dimensional cohomology groups. In this new system we have $\overline{H}^r(G, A) = H^r(G, A)$ for $r > 0$ and $\overline{H}^r(G, A) = H_{-r-1}(G, A)$ for $r < -1$. The definition of $\overline{H}^0(G, A)$ and $\overline{H}^{-1}(G, A)$, and the linking of homology to cohomology, uses the norm map $N\colon A \to A$ which is defined by $Na = \Pi_{\lambda \in G}\, a^\lambda$, and which is peculiar to the case of finite G.

If G operates on two abelian groups A and B, then G operates also on the group $\mathrm{Hom}(A, B)$ of all homomorphisms f of A into B by the rule $f^\lambda(a) = \lambda(f(\lambda^{-1}a))$. To each s-dimensional "homomorphism" cohomology class $\epsilon \overline{H}^s(G, \mathrm{Hom}(A, B))$ there is attached a collection of homomorphisms φ_r: $\overline{H}^r(G, A) \to \overline{H}^{r+s}(G, B)$ which carry the cohomology of A into that of B, raising the dimension by s. Again, the existence of these induced homomorphisms φ_r for all r, s depends on the finiteness of G.

Let k be a finite extension of the rational field and let K/k be a normal extension with galois group G. Then G operates on J, the idèle group of K, on K^*, the multiplicative group of K, and on $C = J/K^*$, the idèle class group of K. Corresponding to the three G-modules J, C, and K^* we define three new G-modules J_1, C_1, and K_1^* of much simpler structure. J_1 is the free abelian group having one basis element x_P for each prime divisor P of K, and G operates on J_1 according to its effect on the primes, viz., $(x_P)^\lambda = x_{P\lambda}$. The module C_1 is even simpler; it is the additive group of rational integers with G operating trivially. There is a natural G-homomorphism j of J_1 onto C_1 which is described by $j(x_P) = 1$ for all P. We define K_1^* to be the kernel of j. Thus $J_1/K_1^* \approx C_1$, in analogy with $J/K^* = C$.

Class field theory determines the structure of the galois cohomology groups of number fields in all dimensions by means of the following theorem: *In each of the three cases $A = J, C$, or K^*, there exists a canonical two dimensional cohomology class $\varphi \epsilon \overline{H}^2(G, \mathrm{Hom}(A_1, A))$ such that the corresponding homomorphisms $\varphi_r : \overline{H}^r(G, A_1) \to \overline{H}^{r+2}(G, A)$ are isomorphisms for all r, $-\infty < r < \infty$.* Thus the cohomology of J, C, and K^* is mirrored in that of the much simpler modules J_1, C_1, and K_1^*, after a dimension shift of two. The more complete statement asserts that the whole exact cohomology sequence associated with $J/K^* = C$ is mirrored in that associated with $J_1/K_1^* \approx C_1$.

241 W 4 St. New York 14, N. Y.

NORMAL MATRICES IN SOME PROBLEMS IN ALGEBRAIC NUMBER THEORY

Olga Taussky-Todd

Normal matrices have been used with great advantage, in various connections, to generalize and to elucidate results known for real symmetric or hermitian matrices.

Two situations in which symmetric matrices enter into algebraic number theory are being studied in this light.

(1) It is known that under certain conditions there is a one-one correspondence between the ideal classes in an algebraic number field of degree n and certain classes of $n \times n$ matrices with rational integral coefficients. Two matrices A, B belong to the same class if $A = S^{-1}BS$ where S is a unimodular matrix with rational integral coefficients. A matrix class can contain a symmetric matrix only under special circumstances. The question can then be asked when does a matrix class contain a normal matrix?

(2) It is known that not every normal algebraic extension of the rational number field has a normal basis for the integral elements (this has been discussed by e.g. A. Speiser, E. Artin, E. Noether). If the extension is abelian then the matrix formed by the normal basis and its conjugates is symmetric. This matrix is normal even in the complex case. The question arises when can such a matrix corresponding to a general basis be normal without being symmetric?

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS,
WASHINGTON 25, D. C., U. S. A.

REDUCTION OF FINITARY OPERATIONS TO BINARY AND SINGULARY OPERATIONS

HUGH ANSFRID THURSTON

Most familiar operations are binary. When we try to generalize to n-ary operations, we usually find that our n-ary concepts can be reduced to the corresponding binary ones. For example, E. L. Post reduced the n-ary group to a subset of an ordinary group. This is a special reduction: from an n-ary associative reversible operation we get a binary associative reversible one. If we try to reduce the general n-ary operation (no such properties as associativity being taken into account) we find that the obvious necessary conditions for reduction to be possible are also sufficient. Moreover, they are always satisfied if the algebra is infinite (or of order 1) and that even if it is finite we can make the reduction if we are allowed to make our algebra a subset of the binary one (as Post did). Tarski and Jónsson considered the direct decomposition of algebras with a binary operation and an element 0, idempotent under all operations, for which

$$x + 0 = 0 + x = x \text{ for all } x;$$

and proved the Smith-Remak decomposition theorem and a number of similar results. A. W. Goldie considered algebras with an idempotent, 0, and an operation, φ, such that $\varphi(0 \ldots x \ldots 0) = x$ for any x in any position (the n-ary generalization of $+$). In terms of such a φ he defined an operation $+$ ($\varphi^{(2)}$ in his notation). Moreover, adjoining this to the set of operations does not affect the homomorphisms, subalgebras, or congruences of the given algebra, which therefore satisfies the Tarski-Jónsson theorems. If we are investigating the congruences of an algebra with a finitary operation φ we can replace φ by the set of all translations (which are singulary operations) for these give exactly the same congruences. We cannot do this if φ is infinitary. If φ is reversible (i.e. n-ary 'division' is always possible) then any two reversible congruences (i.e. congruences such that

$\varphi(a_1 \ldots a_n)\mathfrak{q}\varphi(b_1 \ldots b_n)$ and $a_i = b_i$ whenever $i \neq k$ together imply $a_k\mathfrak{q}b_k$) commute, provided that $n \geqq 2$. A counter-example can be given for the case $n = 1$.

Thus, roughly speaking, an n-ary operation with $1 < n < \infty$ is reducible to a binary operation, but singulary and infinitary operations behave differently.

References

E. L. Post. 'Polyadic Groups', Trans. Amer. Math. Soc., **48**, p. 208—350 (1940).

Alfred Tarski and Bjarni Jónsson, 'Direct decompositions of finite algebraic systems', Notre Dame, 1947.

A. W. Goldie. 'On direct decompositions', Proc. Camb. Phil. Soc., **48**, p. 1—22, (1952).

H. A. Thurston, 'The structure of an operation', Journal London Math. Soc., **27**, p. 271—279, (1952).

———, 'Equivalences and mappings', Proc. London Math. Soc., **3**, p. 175—182, (1952).

The University, Bristol 8, England.

ON THE FRACTIONAL DIMENSION OF CERTAIN SETS IN NUMBER THEORY

Bodo Volkmann

If $g \geqq 2$ is an integer, every real number ϱ with $0 < \varrho \leqq 1$ has a unique g-adic expansion $\varrho = \sum_{i=1}^{\infty} e_i g^{-i}$ $(0 \leqq e_i < g)$ with infinitely many positive e_i's. As almost all ϱ's are normal, i.e. each of the g possible digits occurs in their expansion with the asymptotic frequency g^{-1}, various sets of non-normal ϱ's have been investigated by means of Hausdorff (or fractional dimensional) measures. In particular, two theorems along these lines were proved by H. G. Eggleston in 1949 (Oxford J. Math. 20) and in 1951 (Proc. London Math. Soc. 2, 54). In the first one the set G of ϱ's with given limits ζ_j of the asymptotic frequencies of all g digits (satisfying $\sum_{j=0}^{g-1} \zeta_j = 1$) was considered whereas the second one dealt with the set M of all ϱ's with given arithmetical means of their digits, and the fractional dimensions of G and M were determined.

The author has recently (Math. Z. 59, 425—433) proved the following theorem which contains both theorems of Eggleston as special cases:

Let the set $\mathfrak{G} = \{0, 1, \ldots, g-1\}$ *be subdivided into* $m \geqq 1$ *mutually disjoint subsets*

$$\mathfrak{G}_\mu = \{g_{\mu 1}, \ldots, g_{\mu w_\mu}\} \qquad (\textstyle\sum_{\mu=1}^m w_\mu = g)$$

and let $\lambda(g_{\mu\nu}) = \lambda_{\mu\nu}$ *be non-negative real numbers with* $\lambda_{\mu 1} \geqq \lambda_{\mu 2} \geqq \ldots \geqq \lambda_{\mu w_\mu}$. *For any g-adic expansion* ϱ *let*

$$S_\mu(\varrho, n) = \textstyle\sum_{i=1,\, e_i \in \mathfrak{G}_\mu}^n \lambda(e_i) \quad (n = 1, 2, \ldots; \mu = 1, \ldots, m).$$

If $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ *are non-negative real numbers, with* $\zeta_\mu = 0$ *if* $\lambda_{\mu 1} = 0$, *let* K *be the set of all* ϱ*'s for which*

$$\lim_{n\to\infty} S_\mu(\varrho, n)/n = \zeta_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Furthermore, in the cartesian space of the coordinates $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, *let* H *be the intersection of the hyperplane* $\sum_{\mu=1}^m \sigma_\mu = 1$ *with the unit cube* $0 \leqq \sigma_\mu \leqq 1$ *and define* W *to be the parallelotope*

$$\zeta_\mu/\lambda_{\mu 1} \leqq \sigma_\mu \leqq \zeta_\mu/\lambda_{\mu w_\mu} \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

a) If then the intersection $H \wedge W$ *is empty, so is* K.

b) If $H \wedge W$ *is not empty, let* $r_\mu(\sigma_\mu)$ *be the positive solution of the equation* $\Sigma_{\nu=1}^{w_\mu} (\lambda_{\mu\nu} - \zeta_\mu/\sigma_\mu)\, z^{\lambda_{\mu\nu}} = 0$ *(if such solution exists uniquely, otherwise take* $r_\mu(\sigma_\mu) = 1$*) and let* $\tau_\mu(\sigma_\mu) = (\sum_{\nu=1}^{w_\mu} r_\mu(\sigma_\mu)^{\lambda_{\mu\nu}})^{\sigma_\mu} / r_\mu(\sigma_\mu)^{\zeta_\mu}$. *Then the fractional dimension of* K *is*

$$\dim K = \max_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m) \in H \wedge W} (\log g)^{-1} \,.\, \textstyle\sum_{\mu=1}^m \{\log \tau_\mu(\sigma_\mu) - \sigma_\mu \log \sigma_\mu\}.$$

MATHEM. INSTIT. UNIV.,
MAINZ.

DARSTELLUNG VON GRUPPEN ALS FAKTORGRUPPEN VON INVARIANT ZUGEORDNETEN GRUPPEN

FRANZ WEVER

Es sei G eine Gruppe, die von k Elementen erzeugt wird, also als Faktorgruppe der freien Gruppe $\mathfrak{F}_k$ aus k Erzeugenden nach Relationennormalteilern $\mathfrak{R}^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \ldots$ dargestellt werden kann. Es sei $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ für jedes ν die grösste charakteristische Untergruppe in $\mathfrak{R}^{(\nu)}$ und $\mathfrak{U}$ der Durchschnitt der $\mathfrak{T}^{(\nu)}$, ferner

$\mathfrak{B}$ die grösste vollinvariante Untergruppe in $\mathfrak{U}$. Sind $T^{(\nu)} \cong \mathfrak{F}_k/\mathfrak{T}^{(\nu)}$, $U \simeq \mathfrak{F}_k/\mathfrak{U}$ und $V \simeq \mathfrak{F}_k/\mathfrak{B}$, so hat B. H. Neumann (Math. Ann., 114(1937), 506—525) gezeigt, dass V/V' von genau k Elementen erzeugt wird, die die Ordnung n haben, wenn $x^n = 1$ für alle Elemente $x \in G$.

Entsprechend kann gezeigt werden, dass auch zur Erzeugung von $T^{(\nu)}/T^{(\nu)\prime}$ und U/U' genau k Elemente notwendig sind, die alle von der Ordnung d sind, wenn $x^d \in G'$ für alle $x \in G$. Daraus folgt insbesondere, das $T^{(\nu)}/T^{(\nu)\prime} \simeq U/U'$, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Der Beweis beruht darauf, dass Relationen von G, deren linke Seite als Worte aus $\mathfrak{F}_k$ schon in $\mathfrak{T}^{(\nu)}$ bezw. $\mathfrak{U}$ liegen, auf die Gestalt $f(u_1, \ldots, u_k) = u_1^d \cdot c(u_1, \ldots, u_k)$ gebracht werden können, worin $c(u_1, \ldots, u_k)$ ein Kommutatorprodukt in den u_i bedeutet.

G selbst ist als Faktorgruppe der Gruppen $T^{(\nu)}$, U und V darstellbar. Die Relationen von G können nach der Zugehörigkeit ihrer linken Seiten als Worte von $\mathfrak{F}_k$ zu $\mathfrak{T}^{(\nu)}$, $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ gekennzeichnet werden und in eine normierte Gestalt gebracht werden.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

VERLAGERUNG VON GRUPPEN UND HAUPTIDEALSATZ

Ernst Witt

Die Verlagerung der Gruppe G nach einer Untergruppe A wird hier durch Differenzenrechnung im ganzzahligen Gruppenring $\mathfrak{G}$ mod $(A—A)$ $(G—G)$ in eine gleichwertige additive Homomorphie (vgl. (8)) umgewandelt.

Anschliessend wird die von Artin [2] stammende gruppentheoretische Fassung des von Hilbert (1) vermuteten Hauptidealsatzes der Klassenkörpertheorie hergeleitet. Der erste kunstvolle, aber mühsame Beweis von Furtwängler wurde seither in den Arbeiten [4] bis [8] weiter vereinfacht.

1. Für die Differenzen $\delta x = 1 - x$ gelten im Ring $\mathfrak{G}$ die Regeln

$$(1) \qquad \delta(xy) = \delta x + x\delta y = \delta x + \delta y - \delta x \delta y, \ \delta(x^{-1}) = -x^{-1}\delta x.$$

Für eine beliebige Untergruppe A bezeichne δA den von allen δa $(a, b \in A)$ aufgespannten *Modul*. Es ist $A \cdot \delta A \cdot A = \delta A$. Da zwischen den δa ausser $\delta 1 = 0$ keine linearen Relationen bestehen, bilden sie modulo den $\delta a + \delta b - \delta(ab) = \delta a\, \delta b$ eine zur Faktorkommutatorgruppe A/A' *isomorphe* additive Gruppe (bei Abbildung $\delta a \to aA'$):

$$(2) \qquad A/A' \simeq \delta A \bmod \delta A\, \delta A; \text{ sogar mod } \delta A\, \delta G,$$

wie sich durch Projektion π: $aR \to a$ für ein Vertretersystem R ergibt ($G = AR$, $1 \in R$).

Aus (1) folgt noch durch Iteration für spätere Anwendung

$$(3) \qquad \delta(x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}) = \Sigma \mu_i \delta x_i \quad \text{mit } \mu_i \equiv m_i \bmod \delta G, \ (\mu_i \in \mathfrak{G}).$$

2. Weiterhin sei der Index $(G{:}A)$ endlich. Die $r_j \in R$ bilden wegen der eindeutigen Reduktion $ar_j \equiv r_j$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ mod $\delta A \cdot G$. Bei Rechtsmultiplikation mit $x \in G$ entsteht bekanntlich vermöge

$$(4) \qquad r_j x = a_j s_j \equiv s_j \bmod \delta A \cdot G \qquad (s_j \in R)$$

eine *transitive Permutationsdarstellung* von G. Daher sind *die ganzzahligen Vielfachen* $m \,.\, \Sigma r_j$ mod $\delta A \cdot G$ *gekennzeichnet durch*

$$(5) \qquad m \cdot \Sigma r_j \cdot \delta X \equiv 0 \bmod \delta A \cdot G \ \textit{fur eine Erzeugung } X \textit{ von } G.$$

Aus (4) folgt nach (1) weiter

$$\delta r_j + r_j \delta x = \delta a_j + \delta s_j - \delta a_j \ \delta s_j,$$

$$(6) \qquad \Sigma r_j \cdot \delta x \equiv \Sigma \delta a_j \bmod \delta A \delta G.$$

Unter *Verlagerung* von G nach A versteht man üblicherweise die multiplikative Homomorphie (bzw. deren Bild Mod A')

$$(7) \qquad V_{G \to A}: x \operatorname{Mod} G' \to \Pi a_j \operatorname{Mod} A', \qquad \big(a_j \text{ aus } (4)\big)$$

welche nun durch die Isomorphie (2), auch für $A = G$ genommen, übergeht in die additive Gestalt

$$(8) \qquad \begin{cases} \delta x \bmod \delta G \delta G \to \Sigma\, \delta a_j & \bmod \delta A \delta A \\ \qquad \text{oder} \to \Sigma\, r_j \cdot \delta x & \bmod \delta A \delta G \end{cases} \qquad \text{nach (6)}$$

Dies ist eine neue handliche additive Deutung des Verlagerungsbegriffes [1]. Hiermit folgt das Kriterium:

Die m^{te} Potenz der Verlagerung ist genau dann $\equiv 1$ Mod A'. *wenn fur ein geeignetes μ aus $\mathfrak{G}$, auf das es nur* mod $\delta A \cdot G$ *ankommt,*

$$(9) \qquad \mu \cdot \delta X \equiv 0 \bmod \delta A \cdot G \cdot \delta G = \delta A \cdot \delta G \ \textit{und} \ \mu \equiv m \cdot (G{:}\, A) \bmod \delta G$$

für eine Erzeugung X von G erfüllt ist. Denn für (9) kommt nach der Kennzeichnung (5) nur $\mu \equiv m \cdot \Sigma r_j$ mod $\delta A \cdot G$ in Frage.

3. Die Artinsche Fassung des *Hauptidealsatzes* lautet:

Die Verlagerung einer Gruppe G mit endlich vielen Erzeugenden x_i nach ihrer Kommutatorgruppe G' ist $= 1$. *(G/G' sei endlich und $G'' = 1$).*

Beweis: Unter den genannten Voraussetzungen gibt es Relationen

$$(10) \qquad \prod_k x_k^{m_{ik}} \cdot y_i = 1 \ \text{ mit } y_i \in G' \text{ und } |\, m_{ik} \,| = (G{:}\, G'),$$

wobei die y_i Produkte von Kommutatoren der x_i und deren Transformierten sind. Nach (3) folgt

$$(11) \qquad \sum_k \mu_{ik}\,\delta x_k = 0 \qquad \text{mit } \mu_{ik} \equiv m_{ik} + 0 \bmod \delta G.$$

Im *kommutativen* Gruppenring von G/G', der isomorph ist zu $\mathfrak{G}$ mod $\delta G' \cdot G$, sei λ_{ik} die zu μ_{ik} adjungierte Matrix, natürlich in $\mathfrak{G}$ repräsentiert. Wegen

$$(12) \qquad 0 = \sum_{ik} \lambda_{hi}\mu_{ik}\,\delta x_k \equiv |\,\mu_{ik}\,| \cdot \delta x_h \qquad \bmod \delta G' \cdot G \cdot \delta G$$

ist nun die Bedingung (9) mit $\mu = |\mu_{ik}| \equiv 1.\ (G:G') \bmod \delta G$ für $A = G'$ erfüllt. Also ist tatsächlich die erste Potenz der Verlagerung $= 1$.

Das gleiche μ führt zur Verallgemeinerung von Iyanaga

$$(13) \qquad V_{G\to A}(G)^{(A:G')} \equiv 1 \text{ Mod } A' \qquad \text{für } A \supseteqq G'.$$

Sie folgt aber auch direkt aus $V_{G\to G'} = 1$ nach der Regel

$$(14) \qquad V_{A\to B}(a) \equiv a^{(A:B)} \text{ Mod } A'$$

und der Transitivität bezüglich $G \to A \to B$ mit $B = G'$.

Literatur

[1] D. Hilbert, Über die Theorie der relativ-Abelschen Zahlkorper. Ges. Abh. I (1932) 491 u. 505.

[2] E. Artin, Idealklassen in Oberkorpern und allgemeines Reziprozitätsgesets. Hbg. Abh. **7** (1930) 46—51.

[3] Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes fur die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper. Hamburger Abhandlungen **7** (1930) 14—36.

[4] H. Hasse, Bericht über das Reziprozitätsgesetz, Jahresber. d. D. M. V. VI Erg. Bd. (1930).

[5] W. Magnus, Über den Beweis des Hauptidealsatzes. Crelles Journ. **170** (1934) 235—240.

[6] S. Iyanaga, Zum Beweis des Hauptidealsatzes. Hbg. Abh. **10** (1934) 349—357.

[7] E. Witt, Bemerkungen zum Beweis des Hauptidealsatzes von S. Iyanaga. Hbg. Abh. **11** (1936) 221.

[8] H. G. Schumann (u. W. Franz), Zum Beweis des Hauptidealsatzes. Hbg. Abh. **12** (1938) 42—47.

Mathematisches Seminar der Univ. Hamburg,
Harvestehnderweg 10, Hamburg 13.

[1] Eine etwas andere Deutung erhält man durch direkte Rechnung
$\Sigma r_j(x-1) \equiv \Sigma r_j x = \Sigma a_j s_j \equiv \Sigma a_j \equiv \Pi a_j = V(x)$ *und* $\delta A \delta G \equiv 0 \bmod \pi^{-1}\{a + b - ab\}$.

SPACING PROBLEMS IN ABELIAN GROUPS

STANISLAW KRYSTYN ZAREMBA

Let G_n be an Abelian group with n base elements, $g_1, \ldots, g_n$, each of order p, p being a prime. Let $S_n^{(k)}$ be the subset of G_n composed of all the elements of the form $g_{i_1}^{\alpha_1} \ldots g_{i_k}^{\alpha_k}$, where $0 \leqq \alpha_j \leqq p-1$ $(j = 1, \ldots, k)$ and let $\nu_n^{(k)}$ be the number of its elements. A subset $H_n^{(k)}$ of G_n will be called *k-spaced* if no element of G_n can be represented in more than one way as a product of an element of $H_n^{(k)}$ and an element of $S_n^{(k)}$; a k-spaced subset $H_n^{(k)}$ of G_n will be called *perfect* if $H_n^{(k)} S_n^{(k)} = G_n$.

An obviously necessary condition for the existence of perfect k-spaced subsets of G_n is that $\nu_n^{(k)}$ should be a power of p. It has been proved that for $k = 1$ this is a sufficient condition as well, and that in this case there exist perfect one-spaced *sub-groups* of G_n. Moreover, p being any fixed prime, there exist infinitely many values of n for which $\nu_n^{(1)}$ is a power of p.

On the contrary, if $k > 1$ and p is fixed, there exist only a finite number of values of n for which $\nu_n^{(k)}$ is a power of p, and even then a perfect k-spaced subset of G_n does not necessarily exist. For instance, if $p = 2$, then $\nu_{90}^{(2)} = 2^{12}$, but there is no perfect 2-spaced subset of G_{90}. However, certain estimates of the greatest possible number of elements of a k-spaced subset will be given and methods of obtaining such sets will be outlined.

Results of this kind can be applied to the Theory of Communications. Indeed, if the messages of a code are sequences of n p-ary digits, they can be interpreted as elements of the corresponding group G_n, the message $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ being represented as $g_1^{\alpha_1} \ldots g_n^{\alpha_n}$. It is easy to see that up to k errors in the transmission of such a message can be detected and rectified if, and only if, the set of coded messages is a k-spaced subset of G_n; from the viewpoint of economy, it is clearly desirable to make this set as large as possible, or even perfect if this can be achieved.

BOULTON PAUL AIRCRAFT LTD,
WOLVERHAMPTON, ENGLAND.

SECTION II

ANALYSIS

THE FUNDAMENTAL SOLUTION AND TRICOMI'S PROBLEM FOR A CLASS OF EQUATIONS OF MIXED TYPE

SHMUEL AGMON

We consider the equation of mixed type(*) $yu_{xx} + u_{yy} + C(x, y)u = 0$, with some restrictions on $C(x, y)$. Fundamental solutions for (*) in any bounded region in the plane are obtained by the method of integral equations. Use is made of the corresponding results of Germain and Bader for the Tricomi equation. By choosing for the kernel of the integral equation a particular oriented fundamental solution of Tricomi's equation, one obtains for (*) a fundamental solution which is used to solve the Tricomi boundary value problem for (*). The solution is given as a double layer "potential" on the part of the boundary which carries the data.

HE'HALUTZ ST., BET-HA'KEREM,
JERUSALEM, ISRAEL.

VARIETÀ ANALITICHE CHIUSE TRASFORMATE IN SÈ DAI SISTEMI DIFFERENZIALI PERIODICI

LUIGI AMERIO

Consideriamo il sistema:

$$\begin{aligned} x' &= X(t, x, y) \\ y' &= Y(t, x, y), \end{aligned} \tag{1}$$

con X, Y funzioni continue di (t, x, y): inoltre X e Y siano funzioni periodiche di t, con periodo T, e funzioni analitiche di (x, y). Sia

$$\begin{aligned} x &= x(t, \bar{x}, \bar{y}) \\ y &= y(t, \bar{x}, \bar{y}) \end{aligned} \tag{2}$$

un integrale soddisfacente, per $t = \bar{t}$, alle condizioni iniziali $x(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}$, $y(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}$ e poniamo:

$$\begin{aligned} x^* &= x(\bar{t} + T, \bar{x}, \bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) \\ y^* &= y(\bar{t} + T, \bar{x}, \bar{y}) = G(\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \tag{3}$$

Le (3) definiscono una ben nota trasformazione piana Φ, i cui punti uniti corrispondono alle soluzioni periodiche, di periodo T. Se $\overline{E}$ è un insieme di punti e se E^* è l'insieme trasformato, mediante le (3), possiamo scrivere $E^* = \Phi(\overline{E})$. È noto un criterio per ottenere un continuo λ trasformato in sè dalle (3): α) *Se esiste una linea λ_0, semplice e chiusa, frontiera di un dominio D_0, tale che risulti $\Phi(D_0) \subset D_0$, esiste un continuo λ per il quale è $\lambda = \Phi(\lambda)$*. Nel caso generale (Birkhoff) λ è un insieme di punti che può risultare estremamente irregolare. Interessa dare delle condizioni affinchè λ sia una linea analitica, eventualmente dotata di singolarità, o anche ridotta a un punto.

Questo può farsi nel modo seguente. Siano $x = \varphi_0(\tau)$, $y = \psi_0(\tau)$ $(\varphi_0'^2(\tau) + + \psi_0'^2(\tau) > 0)$ le equazioni parametriche di λ_0 e supponiamo che queste funzioni siano analitiche per $|\Im(\tau)| \leqq \sigma$ (e periodiche, con periodo l, poichè λ_0 è chiusa). Aggiungiamo ad α) l'ipotesi β): *anche gli integrali spiccati per $t = \bar{t}$ dai punti complessi di λ_0, con $|\Im(\tau)| \leqq \sigma_0 \leqq \sigma$, si mantengono per $t \geqq \bar{t}$ in un dominio limitato dallo spazio S_4* (immagine delle due variabili complesse x, y), *nel quale X è Y sono analitiche.* Si dimostra allora che λ *è una linea analitica, eventualmente dotata di singolarità, o ridotta a un punto.* Se esistono *singolarità*, queste sono necessariamente in numero *finito*, e corrispondono a *soluzioni periodiche*, di periodo $k\,T$. Nel caso generale, le soluzioni spiccate dai punti di λ sono funzioni *quasi-periodiche* di Bohr.

Una analoga trattazione si svolge poi per i sistemi in n incognite

$$x_k' = X_k(t, x_1, \cdots, x_n).$$

VIA FREGUGLIA 2,
MILANO.

THE LOOMAN-MENCHOFF THEOREM AND SOME SUBHARMONIC FUNCTION ANALOGUES

MAYNARD G. ARSOVE

Starting with the work of Goursat in 1900 there has been considerable interest in the question: given a continuous complex function $f = u + iv$ on an open set Ω, how weak can one make the further conditions imposed to ensure analyticity of f? That the Cauchy-Riemann equations need only be required to hold almost everywhere, provided f is sufficiently well behaved, was first shown by Looman and Menchoff. Research by Looman, Menchoff, Saks, and Besicovitch culminates in the following theorem of Maker. If u and v have finite partial Dini derivates on $\Omega - E$, where E is the union of countably many sets of finite length closed in Ω, and if the Cauchy-Riemann equations $\partial u/\partial x = \partial v/\partial y$, $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ hold almost everywhere, then f is analytic.

We show that this result remains valid when the Cauchy-Riemann equations are replaced by

$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \left| \int_{\vec{C}_r(z)} f(\zeta)\, d\zeta \right| = 0,$$

where $\vec{C}_r(z)$ denotes the positively oriented circle of radius r about z. The following extension theorem, closely related to a theorem of Besicovitch, is also derived. Let $E(\subset \Omega)$ be an F_σ of capacity zero, and let f be a bounded complex function defined on $\Omega - E$. If

$$\limsup_{\zeta\to z} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right|$$

is finite on $\Omega - E$ and the Cauchy-Riemann equations hold almost everywhere, then f admits an extension analytic on Ω.

A theorem analogous to that of Maker yields conditions on the Laplacian sufficient for a continuous function u to be subharmonic (the exceptional set is now taken as an F_σ of capacity zero). However, more natural conditions appear in terms of the lower Blaschke operator $\underline{\Delta}^B$, as follows. If u is a continuous real-valued function on Ω such that $\underline{\Delta}^B u$ is $> -\infty$, except perhaps on an F_σ of capacity zero, and is $\geqq 0$ almost everywhere, then u is subharmonic. In particular, for h to be harmonic on Ω it is necessary and sufficient that h be continuous and that the quantity

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z + re^{i\vartheta})\, d\vartheta - h(z) \right|$$

be finite, except perhaps on an F_σ of capacity zero, and vanish almost everywhere. Generalizations to the δ-subharmonic case are immediate.

University of Washington,
Seattle, Washington, U.S.A.

EIN LÜCKENSATZ FÜR DIRICHLETSCHE REIHEN

Vojislav G. Avakumović

Sei $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$, $n \to \infty$ und

$$D(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu e^{-\lambda_\nu s}, \quad s = \sigma + it$$

konvergiere für $\sigma > 0$.

Satz A. Voraussetzung 1. *Innerhalb* $|t| \leqq T$, $\sigma > 0$ *mit festen* $T > 0$ *ist*

$$|D(s)| \leqq M_1. \tag{1}$$

Also existiert

$$\lim_{\sigma=0} D(\sigma + it) = Q(t) \qquad \text{für fast alle } |t| \leqq T.$$

Voraussetzung 2.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-T}^{+T} \frac{\sin yt}{t} Q(t)dt \to Q(0), y \to \infty. \tag{2}$$

Voraussetzung 3.

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n \geqq \Delta.$$

Behauptung. *Ist*

$$\Delta = \frac{2\pi}{T},$$

so existiert ein von T *unabhängiges* M_2 *derart dass*

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu - Q(0) \right| \leqq \frac{M_2}{T}. \tag{3}$$

$T \to \infty$ ergibt folgenden

Satz A_1. *Wenn* (1) *und* (2) *für jedes* $T > 0$ *gelten und* $\Delta > 0$ *so ist*

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = Q(0).$$

Im Falle $\lambda_n = n$ ergibt Satz A folgenden

Satz 1. $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *sei innerhalb des Einheitskreises und auf den Bogen* $|z| = 1$, $|\arg z| < \theta < \pi$ *regulär.*

Ausserdem sei $a_n = 0$ *für* $n_k < n < n_{k+1}$ *und*

$$n_{k+1} - n_k \geqq \frac{2\pi}{\theta}.$$

Dann ist

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = O(1), \ n \to \infty.$$

Satz A_1 ergibt folgenden

Satz 2. $f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ *sei innerhalb des Einheitskreises regulär und daselbst* $|f(z)| < 1$.

Dann konvergiert $f(z)$ *in jedem Regularitätspunkte des Einheitskreises.*

Wird Satz 1 mit der M. E. Nobleschen (The Journ. of the London Math. Soc., 110 (1953), 197—203) Verallgemeinerung eines Satzes von P. Erdös-G. Piranian (Duke Math. Journ. 14 (1947), 647—58) kombiniert so ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Erdös-Piranian-Nobleschen Satzes.

Satz 3. *$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu z^\nu$ sei innerhalb des Einheitskreises regulär und $a_n = 0$ für $n_k < n < n_{k+1}$. Wenn $n_{k+1} - n_k \to \infty$, $k \to \infty$ so konvergiert $f(z)$ in jedem Regularitätspunkte des Einheitskreises.*

Beweis des Satzes A. I. Wenn $\Delta = \frac{2\pi}{T}$ ist so existiert, wie bekannt (N. Levinson, Gap and Density Theorems, 196), eine Folge von Funktionen $k_n(x)$ mit $| k_n(x) | < C_1$ und $k_n(x) = 0$ für $| x | > T$ derart dass die Fourier-Transformierte $K_n(x)$ von $k_n(x)$ gleich 1 wenn $x = \lambda_n$ und gleich 0 wenn $x = \lambda_m$ für jedes $m \neq n$ ist. Somit erhält man

$$a_n e^{-\sigma\lambda_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^{+T} D(\sigma + it)\, k_n(t) dt$$

also

$$| a_n | \leqq C_2 T. \tag{4}$$

II. Mittels der Wiener-Ikeharschen Methode ergibt sich aus (1), (2) und (4) dass

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \frac{3}{8\pi T} \int_{\lambda_n - y}^{\infty} \left(\frac{\sin Tv/4}{Tv/4}\right)^4 dv = Q(0) + \sigma(1), y \to \infty \tag{5}$$

ist.

III. Aus (4) und (5) folgt, auf Grund des üblichen, bei den Sätzen Tauberscher Art verwendeten Verfahren, dass $\lim_{n=\infty} \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \right| < C_3$, also insbesondere dass

$$| a_n | < C_4 \tag{6}$$

ist.

Wird dieses Beweisverfahren noch einmal wiederholt (mit (6) anstatt (4)) so ergibt sich (3).

Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences,
Belgrade.

FONCTIONS À SINGULARITÉS POLAIRES SUR LES SURFACES DE RIEMANN OUVERTES

Roger Bader

1. Sur un domaine compact D d'une surface de Riemann $\mathscr{S}$, l'espace vectoriel des différentielles harmoniques sur $\overline{D}$, à pôles isolés, est la somme directe d'un sous-espace de différentielles harmoniques à pôles isolés sur la surface de Schottky $\hat{D}$ de D et d'un sous-espace de différentielles harmoniques exactes et régulières sur $\overline{D}$. En prenant l'intégrale de Dirichlet pour norme. on peut choisir ces sous-espaces de façon qu'ils soient orthogonaux.

2. Soit Ω une différentielle harmonique sur $\mathscr{S}$, à une infinité de pôles isolés (P_i), telle qu'il existe un voisinage V de (P_i) dont chaque composante connexe est compacte, et satisfaisant à:

$$\| \Omega \|_W^2 + \| \Omega - \omega \|_V^2 < \infty, \ (W = \underset{\mathscr{S}}{C} V)$$

ω désignant la composante de Ω définie sur V dans la décomposition précédente. Soit $\dot{\mathscr{D}}_h$ l'espace de ces différentielles Ω. On montre alors que Ω est la limite (à une différentielle harmonique exacte régulière et de norme finie près) de ses composantes ω_n relatives aux domaines $\mathscr{S}_n$ d'une exhaustion de $\mathscr{S}$. Il en découle que sur une surface $\mathscr{S} \in C_{HD}$, les éléments Ω de $\dot{\mathscr{D}}_h$ sont déterminés de façon unique par leurs périodes et les parties singulières de leur développement aux pôles.

En introduisant une structure uniforme sur $\mathscr{S} \in C_0$, on peut trouver des conditions suffisantes simples pour l'existence d'une différentielle harmonique de périodes nulles, ayant des pôles et des parties singulières données.

3. A toute fonction multiplicative F sur un compact D d'une surface $\mathscr{S}$, correspond une fonction f multiplicative sur $\overline{D}$, de module unité sur D', et telle que Ff^{-1} soit sans zéro et sans pôle sur D : si d désigne le diviseur de F sur D, il existe une seule fonction multiplicative sur $\hat{D}$ (définie à une constante multiplicative près), admettant $d\tilde{d}^{-1}$ pour diviseur. Les multiplicateurs de f étant égaux aux caractères intégraux de son diviseur, ne dépendent que des zéros et des pôles de F.

4. On considère l'espace $\dot{\mathscr{B}}_a$ des fonctions analytiques multiplicatives sur $\mathscr{S}$, pouvant avoir une infinité de zéros et de pôles, dont les maximum de F et F^{-1} sont bornés à l'extérieur d'un voisinage V des zéros et des pôles (chaque composante connexe de V étant compacte). Si $\mathscr{S} \in C_{HB}$, toute fonction de $\dot{\mathscr{B}}_a$ est déterminée de façon unique par la donnée de son diviseur: c'est la limite de ses composantes f_n (no 3) relatives aux $\mathscr{S}_n$ d'une exhaustion de $\mathscr{S}$. Pour

que $F \in \dot{\mathscr{B}}_a$ soit uniforme, il faut que la limite de chaque multiplicateur de f_n soit égale à 1. On obtient ainsi la généralisation de la condition nécessaire contenue dans le théorème d'Abel.

1 BIS RUE D'ANGIVILLER,
VERSAILLES.

TOPOLOGISCHE KENNZEICHNUNG DES TOTAL-ADDITIVEN UND REIN-ENDLICH-ADDITIVEN TEILS EINER ADDITIVEN MENGENFUNKTION

HEINZ BAUER

Es sei $\mathfrak{B}$ ein Boolescher Mengenverband, bestehend aus Teilmengen einer Grundmenge $E \in \mathfrak{B}$; der Träger E von $\mathfrak{B}$ sei durch $\mathfrak{B}$ separiert. Ferner sei $f \mid \mathfrak{B}$ eine reelle (endliche), nicht negative, auf $\mathfrak{B}$ (endlich-)additive Funktion. $f = f_t + f_r$ sei die eindeutig bestimmte Zerlegung von f in reelle, nicht negative Funktionen $f_t \mid \mathfrak{B}$ und $f_r \mid \mathfrak{B}$ mit folgenden Eigenschaften: f_t ist auf $\mathfrak{B}$ total-additiv. f_r ist auf $\mathfrak{B}$ rein-endlich-additiv, d.h. aus $0 \leqq t(A) \leqq f_r(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, folgt $t(A) = 0$, $A \in \mathfrak{B}$, wenn t auf $\mathfrak{B}$ total-additiv ist.

Die Menge E ist ein vollständig regulärer, Hausdorffscher Raum mit der offenen (und gleichzeitig abgeschlossenen) Basis $\mathfrak{B}$. Mit εE werde jeder T_1-Raum S bezeichnet, der E als dichten Unterraum enthält, in welchem je zwei fremde Mengen aus $\mathfrak{B}$ fremde Hüllen besitzen und in welchem jeder aus Mengen von $\mathfrak{B}$ bestehenden Filterbasis (Raster) ein Punkt von S adhärent ist. Ein T_1-Raum S, welcher E als dichten Unterraum enthält, ist dann und nur dann ein Raum εE, wenn eine stetige Abbildung von S auf die Stonesche Kompaktifizierung δE von E existiert, welche E punktweise festlässt.

Nunmehr sei S ein beliebiger, aber fest gewählter Raum εE. Das System $\overline{\mathfrak{B}}$ der in S gebildeten Hüllen $\bar{A}$ von Mengen $A \in \mathfrak{B}$ ist ein zu $\mathfrak{B}$ isomorpher Boolescher Mengenverband mit der Einheit S. Die durch die Gleichung $\bar{f}(\bar{A}) = f(A)$, $A \in \mathfrak{B}$, definierte Funktion $\bar{f} \mid \overline{\mathfrak{B}}$ ist auf $\overline{\mathfrak{B}}$ nicht negativ und total-additiv. Das von $\bar{f}$ auf dem System aller Teilmengen von S induzierte äussere bzw. innere Mass werde mit $\bar{f}_a$ bzw. $\bar{f}_i$ bezeichnet. Es gilt $f_t(A) = \bar{f}_a(A)$ und $f_r(A) = \bar{f}_i(\bar{A} - A)$ für jede Menge $A \in \mathfrak{B}$. Somit ist f auf $\mathfrak{B}$ genau dann total-additiv, wenn das innere Mass $\bar{f}_i(S - E)$ der „idealen" Punkte von S gleich Null ist. Es ist f genau dann rein-endlich-additiv auf $\mathfrak{B}$, wenn das äussere Mass $\bar{f}_a(E)$ der „eigentlichen" Punkte von S gleich Null ist.

MATH. INST.,

ERLANGEN (DEUTSCHL.) GLÜCKSTR. 6

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR NONLINEAR ELLIPTIC EQUATIONS IN TWO INDEPENDENT VARIABLES

LIPMAN BERS and LOUIS NIRENBERG

We are concerned with new a priori estimates for solutions of elliptic equations of the form

$$a_{11}\varphi_{xx} + 2a_{12}\varphi_{xy} + a_{22}\varphi_{yy} + a_1\varphi_x + a_2\varphi_y + a_0 = 0, \tag{1}$$

or

$$\begin{aligned} u_x &= b_{11}v_x + b_{12}v_y + c_{11}u + c_{12}v + d_1 \\ u_y &= b_{21}v_x + b_{22}v_y + c_{21}u + c_{22}v + d_2. \end{aligned} \tag{2}$$

The estimates are independent of the moduli of continuity of the coefficients and are obtained by extending and combining the following techniques: (a) inequalities for quasi-conformal and related mappings (C. B. Morrey, Trans. Amer. Math. Soc., 43, 1938; L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., 6, 1953), (b) the so-called similarity principle (L. Bers, Proc. Nat. Acad. U.S.A., 37, 1951, Mimeographed Notes on Pseudo-analytic Functions, New York Univ., 1953), (c) uniformization and other function theoretic methods. The estimates refer to the moduli and Hölder moduli of continuity of φ, φ_x, φ_y in (1) and u, v in (2).

The estimates lead to solutions of a variety of boundary value problems for quasi-linear and nonlinear equations. A typical existence theorem obtained via the Birkhoff-Kellogg-Schauder fixed point theorem follows.

Let D be a domain interior to a Lyapounoff curve C, f a Hölder continuous function defined on C, (x_0, y_0) a point on C, and α a real number. Consider a quasi-linear equation (1) *under the hypotheses*: (i) *the coefficients are functions of x, y, φ, φ_x, φ_y defined for (x, y) in D and all φ, φ_x, φ_y, and satisfy a uniform Hölder condition on every compact subset of their domain of definition,* (ii) $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \equiv 1$, (iii) *the coefficients are uniformly bounded. Then there exists in D a solution $\varphi(x, y)$ of* (1) *such that $\varphi(x_0, y_0) = \alpha$, and the normal derivative φ_n differs from f at most by an additive constant.*

In case $a_0 \equiv 0$, a weaker existence assertion holds also if the bound in (iii) is permitted to depend on l.u.b. $(|\varphi|, |\varphi_x|, |\varphi_y|)$.

The Neumann problem can also be solved for the general nonlinear equation $F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}) = 0$ under the assumption that the derivatives of F with respect to all 8 variables exist, are Hölder continuous and uniformly bounded, and that $F_\varphi \leqq c < 0$, $F_{\varphi_{xx}} > 0$, and $4F_{\varphi_{xx}}F_{\varphi_{yy}} - F^2_{\varphi_{xy}} \equiv 4$. The proof uses the estimates and the continuity method.

Other boundary value problems (Dirichlet problem, oblique derivative problem, etc.) and more general domains (multiply connected, unbounded, etc.) can also be treated by these methods. As a side result we obtain a rather general theory of boundary value problems for linear equations (1), (2) with (discontinuous) bounded measurable coefficients.

INST. OF MATH. SCI., N. Y. UNIV.,
25 WAVERLY PL., N. Y. 3, N. Y., U. S. A.

SUL PROBLEMA DI CAUCHY PER LA EQUAZIONE DI LAPLACE IN PIÙ VARIABILI INDIPENDENTI

FERNANDO BERTOLINI

In una nota di recente pubblicazione ho dato una condizione necessaria e sufficiente, affinché in un dominio (piano) assegnato abbia soluzione il problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti; la estensione da due a tre, o più, variabili indipendenti non è immediata, perché non si potrà più far uso di coppie di funzioni armoniche coniugate. Successivamente, come premessa allo studio del caso generale, ho dimostrato una condizione necessaria e sufficiente, affinché in un assegnato dominio D (dello spazio) abbia soluzione il problema in tre variabili indipendenti, *nella ipotesi particolare che sia piana quella parte T di D, che non porta i dati di Cauchy.*

Il procedimento impiegato (immediatamente estendibile al caso di quante si vogliono variabili indipendenti, e generalizzabile per equazioni di tipo ellittico più generali) nella sua sostanza è il seguente. Detta $f(P)$ la eventuale soluzione del problema, s'immagini $\mathrm{grad} f(P)$ sviluppata *su* T in serie di Fourier, secondo un sistema opportunamente scelto di vettori armonici in tutto lo spazio; utilizzando il teorema di reciprocità, si possono esprimere i coefficienti di tale serie mediante integrali (operanti sulle funzioni $f(P)$ e $\mathrm{grad} f(P)$) estesi ad $JD - T$, anziché estesi a T: essi sono dunque determinati dai dati di Cauchy, ed individuano $\mathrm{grad} f(P)$ (e quindi $f(P)$) su T; infine, valendosi della formola di Stokes, si ottiene $f(P)$ in tutto D, e si dimostra che, se la serie di Fourier gode di certe proprietà di convergenza, il problema ha certo soluzione.

VIA SABOTINO 17,
ROMA, ITALY.

UN TEOREMA DI CONTINUITÀ PER INTEGRALI SU SUPERFICIE CHIUSE

VITTORIO EMANUELE BONONCINI

Denotiamo con $\mathfrak{S}$ la classe di tutte le superficie continue orientate S di area finita secondo Lebesgue: $L(S) < +\infty$. L'integrale di Weierstrass

$$I(S) = (S)\int F du dv = (S)\int F(x, y, z, t_1, t_2, t_3)\, du dv$$

sopra una superficie S è stato definito da L. Cesari [1, 2] per qualsiasi superficie $S \in \mathfrak{S}$, nelle usuali condizioni di continuità e omogeneità positiva per la funzione F, e tale integrale si riduce ad un ordinario integrale di Lebesgue sopra la superficie S ogni qualvolta l'area $L(S)$ è data dall'integrale classico per l'area [3]. Relativamente all'integrale $I(S)$ J. Cecconi ha dimostrato le formule di Gauss-Green e di Stokes, L. Cesari ha dimostrato condizioni sufficienti e condizioni necessarie di semicontinuità e, in un precedente mio lavoro [4] ho dimostrato teoremi di convergenza e confronto. Infine L. Cesari, A. G. Sigalov e J. M. Danskin hanno usato l'integrale $I(S)$ in teoremi di esistenza del minimo assoluto in problemi di calcolo delle variazioni. Tutte queste ricerche hanno mostrato una notevole analogia tra le proprietà dell'integrale sopra superficie di area finita secondo Lebesgue e quelle dell'integrale sopra curve di lunghezza finita secondo Jordan [5].

Nel presente lavoro si considera il particolare integrale

$$F(S) = (S)\int (f_1 t_1 + f_2 t_2 + f_3 t_3)\, du dv$$

nella classe $\mathfrak{S}_0$ di tutte le superficie S continue, orientate e chiuse di area finita secondo Lebesgue, ove f_1, f_2, f_3 sono funzioni continue di punto, e si dimostra che $F(S)$ è un funzionale continuo in ogni sottoclasse di $\mathfrak{S}_0$ di superficie $S \in \mathfrak{S}_0$ aventi area $L(S)$ superiormente limitata. Precisamente dimostro il teorema:

Se $S = (T, A) \in \mathfrak{S}_0$, $S_n = (T_n, A) \in \mathfrak{S}_0$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, sono superficie continue e chiuse, se $S_n \to S$ e $L(S_n) < M$ (M costante finita) allora $F(S_n) \to F(S)$ al tendere all'infinito di n.

Applico, in particolare, il risultato stabilito al volume $V(S)$ racchiuso da una superficie orientata e chiusa, ponendo per $V(S)$ una nuova definizione.

ISTITUTO MATEMATICO UNIVERSITÀ,
LARGO TROMBETTI 4, BOLOGNA, (ITALIA).

---

[1] L. Cesari. *Surface area,* Princeton Univ. Press. (in corso di stampa).

[2] L. Cesari. *La nozione di integrale sopra una superficie in forma parametrica,* Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) 13, 77—117, 1944.

[3] Loc. cit. in [1] e [2].

[4] V. E. Bononcini. *Sugli integrali regolari del Calcolo delle variazioni per superficie in forma parametrica,* Rivista Mat. Univ. Parma 3, 131—151, 1952.

[5] Loc. cit. in [1].

ENDOMORPHISMS OF PARTIALLY ORDERED VECTOR SPACES

FRANK FEATHERSTONE BONSALL

A vector space V over the real field R is said to be *partially ordered* if a non-empty subset V^+ is specified which satisfies the following axioms: (i) if x and y are in V^+ and $\alpha \geqq 0$, then $x + y$ and αx are in V^+; (ii) if x and $-x$ are in V^+ then $x = 0$. We write, as usual, $x \geqq y$ (or $y \leqq x$) if $x - y \in V^+$. A vector $e > 0$ is an *order unit* if for each $x \in V$ there exists $\xi \in R$ with $\xi e \geqq x$; for such an e we define the functional p_e by $p_e(x) = \inf [\xi \in R : \xi e \geqq x]$. A linear transformation T of V into itself is called an *endomorphism* if $Tx \geqq 0$ whenever $x \geqq 0$. A *positive linear functional* is a non-zero linear functional φ such that $\varphi(x) \geqq 0$ whenever $x \geqq 0$. We prove the following theorem.

Let V be a partially ordered vector space with an order unit e and let A be an endomorphism of V. Then there exists a positive linear functional φ with $A^*\varphi = \varrho\varphi$ [i.e. with $\varphi(Ax) = \varrho\varphi(x)$ for all $x \in V$], where $\varrho = \lim\limits_{n\to\infty} \{p_e(A^n e)\}^{\frac{1}{n}}$.

A theorem of this type, but less general and without the determination of ϱ, has been proved by M. G. Krein using the fixed point theorem of J. Schauder. Our proof does not use any fixed point theorem but depends on some elementary results in the theory of Banach algebras. Many related results have been proved by M. G. Krein and M. A. Rutman [Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 3, no 1 (23), 3—95 (1948)]. Their principal results on linear operators leaving invariant a cone with interior may be deduced from our theorem with some gain in simplicity and generality. For example, if V is a reflexive Banach space and V^+ is a closed cone K such that K and K^* (the set of non-negative linear functionals) have interior points, and if A is an endomorphism with spectral radius ϱ, then there are non-zero vectors $u \in K$, $\varphi \in K^*$ with $Au = \varrho u$ and $A^*\varphi = \varrho\varphi$.

6 BRAINTREE GARDENS,
NEWCASTLE-ON-TYNE 3, ENGLAND.

ON SPECTRAL PROPERTIES OF A SYSTEM OF INFINITELY MANY DIFFERENTIAL EQUATIONS

LARS GÖRAN BORG

The report will contain generalizations of spectral representation theorems and converse spectral theorems, corresponding to those, given by Martjenko, Gelfand, Levitan, Krein, Levinson and the present author for the second order ordinary differential equation.

THE ROYAL INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
STOCKHOLM 70, SWEDEN.

ON CONVERGENCE AND SUMMABILITY FACTORS IN A SEQUENCE

LANCELOT STEPHEN BOSANQUET

It is familiar that if Σa_n is convergent and ε_n is positive and decreasing then $\Sigma a_n \varepsilon_n$ is convergent (Abel's test). More generally du Bois-Reymond and Dedekind (sufficiency) and Hadamard (necessity) showed that a necessary and sufficient condition for $\Sigma a_n \varepsilon_n$ to converge whenever Σa_n converges is that ε_n be of bounded variation. Bohr and Hardy (sufficiency) and Fekete (necessity) showed that for $\Sigma a_n \varepsilon_n$ to be summable $(C, \varkappa)$ whenever Σa_n is summable $(C, \varkappa)$ ($\varkappa$ an integer) it is necessary and sufficient that $n^\sigma \Delta^\sigma \varepsilon_n$ be of bounded variation for $\sigma = 1, 2, \ldots, \varkappa$, or (what is equivalent) that (i) $\varepsilon_n = O(1)$, (ii) $\Sigma n^\varkappa | \Delta^{\varkappa+1} \varepsilon_n | < \infty$. (For references see Hardy, Divergent Series, Oxford, 1949, p. 146.) Schur stated that for $\Sigma a_n \varepsilon_n$ to be summable (C, ϱ) whenever Σa_n is summable $(C, \varkappa)$ (ϱ, $\varkappa$ integers) it is necessary and sufficient to add the further condition (iii) $\varepsilon_n = O(n^{\varrho-\varkappa})$. The Bohr-Hardy theorem was extended to fractional orders of summability and differences by Andersen, who also formulated conditions under which $\Sigma a_n \varepsilon_n$ is summable $(C, \varkappa)$ whenever $a_0 + \ldots + a_n = o(n^p)$ $(C, \varkappa)$, $p \geqq 0$. Some supplementary results, coordinating those of Andersen and Schur, were obtained by the author. The problem has also been considered, from a more general point of view, by Jurkat and Peyerimhoff.

A related problem is that of finding necessary and sufficient conditions for $s_n \varepsilon_n$ to be $o(n^{p+q})$ (C, ϱ) whenever $s_n = o(n^p)$ $(C, \varkappa)$ (ϱ, $\varkappa$ integers). If $p > -1$, $p + q > -1$, the conditions are (i) $\Sigma_1^n \nu^{-q} | \varepsilon_\nu | = O(n)$, (ii) $\Sigma_1^n \nu^{\varkappa-q} |\Delta^\varkappa \varepsilon_\nu| = O(n)$, (iii) $\varepsilon_n = O(n^{\varrho-\varkappa+q})$. The problem may be restated in a form which allows p, q to be any real numbers. It is then found that the necessary and sufficient conditions remain the same, except when $p + q = -1, -2, \ldots, -\varrho$ ($\varrho \geqq 1$). In the exceptional range the conditions are more restrictive; they may be expressed in the form

$$\text{(i) } \varepsilon_n = O(n^q), \qquad \text{(ii) } \Sigma_1^n \nu^{\varkappa+p} | \Delta^\varkappa (\nu^{-p-q-1} \varepsilon_\nu) | < \infty, \qquad \text{(iii) } \varepsilon_n = O(n^{\varrho-\varkappa+q}).$$

The case $p = -1$, $q = 0$ is Schur's theorem (quoted above), with $\varkappa$, ϱ, a_n replaced by $\varkappa - 1$, $\varrho - 1$, s_n. (For details see Mathematika, Vol. 1, Part 1, 1954, published by The Mathematics Department, University College, London.)

A corollary is the result: if $s_n = o(n^p)$ $(C, \varkappa)$ and $n^\sigma \Delta^\sigma \varepsilon_n = O(n^q)$ for $\sigma = 0, 1, \ldots, \varkappa$, then $s_n \varepsilon_n = o(n^{p+q})$ $(C, \varkappa)$, where $p > -1$, $p + q > -1$. By applying this successively with $\varepsilon_n = 1/(n+1)$, $\varepsilon_n = n + 1$, and $\varkappa = r - 1, r - 2, \ldots, 1$, we obtain the familiar equivalence of the means

$C^r, C^{r-1}H, C^{r-2}H^2, \ldots, H^r$, i.e. the equivalence of the Cesàro and Hölder means of order r (r an integer).

Notation.

$$\Delta u_n = u_n - u_{n+1}, \quad \Delta^0 u_n = u_n, \quad \Delta^\varkappa = \Delta\Delta^{\varkappa-1}.$$
$$S(u_n) = \Sigma_0^n u_\nu, \quad S^0(u_n) = u_n, \quad S^\varkappa = SS^{\varkappa-1}.$$
$$A_n^0 = 1, \quad A_n^\varkappa = S^\varkappa(A_n^0).$$
$$C^\varkappa(u_n) = S^\varkappa(u_n)/A_n^\varkappa, \quad H = C^1, \quad H^\varkappa = HH^{\varkappa-1}.$$

"Σa_n is summable $(C, \varkappa)$" means "$C^\varkappa(\Sigma_0^n a_\nu)$ tends to a limit". "$s_n = o(n^p)\,(C, \varkappa)$" means "$C^\varkappa(s_n) = o(n^p)$", where $p > -1$.

94, Marlborough Mansions
Cannon Hill, London N.W. 6

THE RELATION BETWEEN A LEMMA OF J. M. WHITTAKER AND CONVERGENCE THEOREMS OF VITALI, BLASCHKE AND MONTEL TYPE

Neville Arthur Bowen

J. M. Whittaker [1] has given

Lemma W. Let $F(z)$ be regular and $|F(z)| \leqq M$ in $|z| < 1$, and let $|F(z)| \leqq L(< M)$ at the points z_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots N)$, in $|z| \leqq \omega < 1$. Then $|F(z)| \leqq M \sum_{k=0}^{N} \left|\frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z}\right| + L\frac{6\Delta(2\omega)^N}{1-\omega^4} \leqq M\left(\frac{2\omega}{1+\omega^2}\right)^{N+1} + L\frac{6\Delta(2\omega)^N}{1-\omega^4}$ *throughout* $|z| \leqq \omega$, *where* $\Delta = \sum_{j=0}^{N} \prod_i{}' \, |z_i - z_j|^{-1}$.

The following classical theorems of Vitali and Blaschke are deduced from *W*.

Theorem V. Let $f_n(z)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, be regular and $|f_n(z)| \leqq K$, $(n = 1, 2, \ldots)$ in $|z| < 1$, and let z_i, $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ be a set of points having a limit point in $|z| \leqq \omega < 1$. Then, if the sequence $f_n(z)$ converges at each point of this set, it converges uniformly in $|z| \leqq \omega$.

Theorem B. The conclusion of V remains true even when the set z_i has no limit point in $|z| < 1$, provided that $\prod_{i=0}^{\infty} |z_i|$ diverges.

A wellknown deduction from V is a limit theorem of Montel:

Theorem M. Let $f(z)$ be regular and bounded in $|\arg z| < \alpha$, and let $f(z) \to l$ as $z \to \infty$ (i) along $\arg z = \beta$, where $|\beta| < \alpha$. Then, as $|z| \to \infty$, $f(z) \to l$ uniformly in $|\arg z| \leqq \alpha - \delta$, $\delta > 0$.

[1] Interpolatory Function Theory (Cambridge 1935), p. 57.

Lemma W is used to obtain a direct proof of M, and indeed *under conditions less restrictive than those hitherto known*; viz., (i) can be replaced by (ii): "through a sequence z_k, where $|\arg z_k| \leqq \alpha - \delta_1$, $\delta_1 > 0$ and $\lim_{k \to \infty} |z_{k+1}/z_k| = 1$." No such result appears to have been published concerning the case in which δ_1 in (ii) is zero. This is not surprising, as theorem M(ii) ($\delta_1=0$) is not true [1]! By using a theorem of Hall's [2], however, I am able to give theorem M (iii) ($\delta_1 = 0$), which includes M (ii) ($\delta_1 > 0$) as a special case, and which seems to be, in some sense, "best possible".

We replace (ii) by (iii): "through a sequence $z_k = r_k e^{i\theta_k}$, where $\lambda_k \equiv \dfrac{r_{k+1} - r_k}{r_k \sin \varphi_k} \to 0$ as $k \to \infty$, φ_k being $\min\limits_{1 \leqq s \leqq k} (\frac{1}{2}\pi - |\theta_s|)$".

King's College,
Aberdeen, Great Britain

AN INTEGRAL FOR DISTRIBUTIONS

John Charles Burkill

Integrals of the form

$$\int \frac{d^m f \, d^n g}{dx^{m+n-1}}$$

for particular values of m and n, and suitably restricted f and g, were defined by Hellinger. Trigonometrical integrals of this form were used by Bochner. Taking (say) $m + n = 3$, and f and g periodic with period 1, I define an integral having the property

$$\int_0^1 f \frac{d^3 g}{dx^2} = -\int_0^1 \frac{df \, d^2 g}{dx^2} = \int_0^1 \frac{d^2 f \, dg}{dx^2} = -\int_0^1 g \frac{d^3 f}{dx^2}.$$

If f''' is continuous each is equal to $-\int_0^1 g f''' dx$.

A Schwartz distribution $T(f)$ is then expressible as an integral of f, of the form

$$\int f \frac{d^n g}{dx^{n-1}}.$$

20 Chaucer Rd, Cambridge.

[1] Consider the function $e^{-\pi z} \sin i\pi z$ in the half-plane $R(z) > -1$; it is regular and bounded, it has *zeros* at the points $z = \pm ik$, ($k = 0, 1, 2, \ldots$), and yet does not tend to zero uniformly in $|\arg(1 + z)| \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$, $\delta > 0$, since in particular it tends to $\frac{1}{2}i$ along the positive real axis.

[2] Arkiv för Mat., Ast. och Fysik 25 A (1937), No. 28, p. 1—8, Th. II.

BEMERKUNGEN ÜBER DAS VERALLGEMEINERTE DIRICHLETPROBLEM

LAMBERTO CATTABRIGA

Es handelt sich um einige Fälle, bei welchen die Lösung des im Sinne von G. Cimmino verallgemeinerten Dirichletproblems, sich auf die des entsprechenden gewöhnlichen Problems reduziert, oder sich eventuell in eine Lösung von Problemen mit in anderer Weise verallgemeinerter Randbedingung verwandelt.

VIA S. CROCE 13/3.
BOLOGNA, ITALIA.

ON THE RADIAL CLUSTER SETS OF ANALYTIC FUNCTIONS

EDWARD FOYLE COLLINGWOOD

1. Let the function $f(z)$ be meromorphic in the circle $|z| < 1$. Denote by $C_\varrho(f, e^{i\theta})$ *the radial cluster set of* $f(z)$ *at the point* $z = e^{i\theta}$ defined as follows: $a \in C_\varrho(f, e^{i\theta})$ if $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n e^{i\theta}) = a$ for some sequence $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 1$. Evidently C_ϱ is a closed non-empty set and is either a single point or a continuum. Similarly, we can define $C_\Delta(f, e^{i\theta})$, the cluster set in an angle Δ in $|z| < 1$ between two chords through $e^{i\theta}$. Complements are denoted by $\mathscr{C}C$ etc. We say that a set $\mathscr{N}$ is metrically dense on an interval α if the intersection $\mathscr{N} \cap \beta$ is of positive measure for every sub-interval $\beta \subset \alpha$. With these definitions we can prove

Theorem 1. *If* $f(z)$ *is meromorphic in* $|z| < 1$ *and there is a set* $\mathscr{M}(\theta)$ *of category II on an arc* α *of* $|z| = 1$ *such that* $\bigcap\limits_{e^{i\theta} \in \mathscr{M}(\theta)} \mathscr{C}C_\varrho(f, e^{i\theta})$ *is not empty, and if there is a set* $\mathscr{N}(\theta)$ *metrically dense on* α *and a number* b *such that* $b \in \bigcap\limits_{e^{i\theta} \in \mathscr{N}(\theta)} C_\varrho(f, e^{i\theta})$, *then* $f(z) \equiv b$.

This theorem has as corollaries a well-known theorem of Lusin and Privaloff [1] and a more recent theorem of F. Wolf [2]. We also have the following

Corollary. If $f(z)$ *is not constant and* $C_\varrho(f, e^{i\theta}) = a$ *for all* $e^{i\theta} \in \mathscr{N}(\vartheta)$, *where* $\mathscr{N}(\theta)$ *is metrically dense on* α, *then* $\mathscr{C}\mathscr{N}(\theta)$ *is of category II on* α *and* $\bigcup\limits_{e^{i\theta} \in \mathscr{C}\mathscr{N}(\theta)} C_\varrho(f, e^{i\theta})$ *is everywhere dense.*

2. Among other results we can also deduce from Theorem 1 a new result related to a well-known theorem of Plessner. We define *the outer angular cluster set of* $f(z)$ *at* $z = e^{i\theta}$ as the union $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\theta}) = \bigcup\limits_{\Delta} C_\Delta(f, e^{i\theta})$ taken over

all angles Δ in $|z| < 1$ at $z = e^{i\theta}$. A cluster set C will be called *degenerate* if it consists of a single point and will be called *total* if its complement $\mathscr{C}C$ is empty. The set $F(f)$ of *Fatou points* of $f(z)$ is the set of points $z = e^{i\theta}$ for which $C_{\mathscr{A}}(f, e^{i\theta})$ is degenerate; and the set $I(f)$ of *Plessner points* is the set for which $C_{\Delta}(f, e^{i\theta})$ is total for every angle Δ in $|z| < 1$ at $z = e^{i\theta}$. Plessner's theorem states that *for any meromorphic function $f(z)$ almost all points of the circumference $|z| = 1$ belong either to $F(f)$ or to $I(f)$* [3]. We now define $S(f)$ as the set of points $z = e^{i\theta}$ for which the radical cluster set $C_{\varrho}(f, e^{i\theta})$ is total. The theorem we prove is

Theorem 2. If *$f(z)$ is meromorphic in $|z| < 1$ and if $I(f)$ is dense on an arc α of $|z| = 1$, then $S(f)$ is a residual set on α.*

This theorem shows, for example, that for the modular function $\mu(z)$ defined in the unit circle $S(\mu)$ is a residual set on the circumference $|z| = 1$. For $F(f)$ is enumerable and so, by Plessner's theorem, $I(f)$ is dense on $|z| = 1$.

LILBURN TOWER,
ALNWICK, ENGLAND

RECIPROCALS OF INFINITE MATRICES AND INVERSES OF LINEAR OPERATORS

RICHARD GEORGE COOKE

The usual definition of the inverse of a linear operator (say in Hilbert space) shows that this inverse depends on the domain of definition of the operator; if one domain is given for a particular purpose, the inverse may exist, and if another domain is given, it may not exist.

On the other hand, the definition of the reciprocal (left-hand or right-hand) of an infinite matrix does not involve the domain of definition of the matrix. Hence, if the matrix is regarded as a linear operator, its inverse and its reciprocal may not be the same. Since the term „inverse" is often used in connection with matrices when "reciprocal" is what is really intended, confusion can easily arise.

Examples will be given of the above statements, and a brief talk on reciprocals of infinite matrices.

24, GUNTER GROVE,
LONDON, S.W. 10, ENGLAND

[1] Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. 42 (1925), pp. 187—188.
[2] Math. Annalen, Bd. 117 (1940/41), p. 383.
[3] Journal für d. reine und angewandte Mathematik, Bd. 158 (1927), p. 220.

DIE SPEKTRALZERLEGUNG VON HYPERMAXIMALEN OPERATOREN HILBERTSCHER RÄUME, DIE DURCH SEPARATION ZERFALLEN

HEINZ OTTO CORDES

Bei Eigenwertproblemen partieller Differentialgleichungen, die den formalen Bedingungen für einen Produktansatz genügen, erwartet man, daß ein Orthogonalsystem von Eigenfunktionen in Produktform gewonnen werden kann, welches mit passend gewählten Eigenpaketen zusammen eine Darstellung willkürlicher Funktionen erlaubt. Diese Eigenpakete stellt man sich als Integrale (nach dem Eigenwertparameter) gewisser nicht quadratisch-integrabler Lösungen der Eigenwertgleichung vor, die ebenfalls Produktform besitzen. Ziel dieser Ausführungen ist es, die Vollständigkeit einer derartigen Kombination von Eigenelementen in Produktform und von Eigenelementen in Produktintegralform nachzuweisen. Wir bewegen uns dabei in einem abstrakten Hilbertraum $\mathfrak{H}$ und betrachten in diesem ein Eigenwertproblem der Form $(A^1s^2 + A^2t^1)\varphi = \lambda(s^1s^2 + t^1t^2)\varphi$, in welchem A^j, s^j, t^j; $j = 1, 2$ gewisse lineare Operatoren sind (A^1, s^1, t^1 sind mit A^2, s^2, t^2 paarweise vertauschbar, außerdem sollen auch s^j und t^j miteinander kommutieren). Im Falle eines partiellen Eigenwertproblems hat man sich etwa A^1, s^1, t^1 bezw. A^2, s^2, t^2 als Operatoren vorzustellen, die nur Differentiationen nach einer der Variablen x oder y enthalten und bei denen auch die Koeffizienten nur von dieser Variablen abhängen. Das Hauptresultat ist eine Integraldarstellung der Spektralschar E_λ des genannten Eigenwertproblems durch die Spektralscharen $E^1_\sigma(\lambda, \mu)$; $E^2_\sigma(\lambda, \mu)$ der Operatoren $A^1 - \lambda s^1 - \mu t^1$, $A^2 - \lambda t^2 + \mu s^2$. Voraussetzungen werden dabei nur über A^j, s^j, t^j gemacht, z.B. wird also die Existenz der Spektralschar E_λ, also die spektraltheoretische Selbstadjungiertheit des separierbaren Problems mit nachgewiesen. Das bewirkt, daß der Satz auch in Fällen anwendbar ist, in denen über die Spektraltheorie des partiellen Problems bisher nichts bekannt ist.

GÖTTINGEN, MATH. INSTITUT, BUNSENSTR.

SUR UN PROCÉDÉ DE SOMMATION DES SÉRIES DIVERGENTES

HUBERT DELANGE

Mr Zamansky et moi-même avons essayé de construire une théorie générale des procédés de sommation définis de la façon suivante:

La somme généralisée de la série $\sum\limits_0^{+\infty} u_n$ est la limite pour x tendant vers $+\infty$ de $\sum\limits_{n\leq x} g\left(\frac{n}{x}\right) u_n$,

$g(t)$ étant une certaine fonction qui caractérise le procédé considéré.

Le procédé est régulier si la fonction g est à variation bornée sur l'intervalle $(0, +\infty)$ et satisfait à $\lim_{t \to 0} g(t) = 1$, avec $g(0) = 1$.

Le cas où l'on a $g(t) = 0$ pour t supérieur à une certaine valeur est assez simple. Le cas général paraît beaucoup plus difficile. C'est pourquoi il paraît intéressant, pour essayer d'y voir plus clair, d'étudier des cas particuliers.

J'ai essayé d'étudier le procédé correspondant à

$$g(t) = \frac{1}{(1+t)^{\alpha}}, \quad (\alpha > 0),$$

que j'appellerai ici procédé (S, α).

Les principaux résultats auxquels je suis arrivé sont les suivants:

1. Si la série $\sum_{0}^{+\infty} u_n$ est sommable (S, α) et si $\sum_{1}^{+\infty} \frac{u_n}{n^{\beta}}$ converge, avec $0 < \beta < \alpha$, la série est encore sommable (S, γ), avec la même somme, pour $\beta \leqq \gamma < \alpha$.

Corollaires: a) Si la série est sommable (S, α) et (S, β), avec $\alpha \neq \beta$, ces deux procédés lui attribuent la même somme.

b) Si la série est sommable (S, α) et (S, β), avec $\alpha \neq \beta$, elle est aussi sommable (S, γ) pour tout γ compris entre α et β.

2. Si la série $\sum_{0}^{+\infty} u_n$ est sommable par le procédé d'Abel et si $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = o[n^{\alpha}]$, avec $\alpha > 0$, elle est sommable (S, β), avec la même somme, pour tout $\beta \geqq \alpha$.

Corollaire: Si la série est sommable A et sommable (S, α), les deux procédés lui attribuent la même somme.

3. La sommabilité (C, α) entraîne la sommabilité (S, β), avec la même somme, pour tout $\beta \geqq \alpha$.

4. Si $0 < \alpha < \beta$, il existe des séries qui sont sommables (S, β) sans être sommable (S, α), ou sommables (C, β) sans être sommables (S, α).

Ces résultats sont évidemment incomplets:

Il serait désirable de déterminer si la sommabilité (S, α) entraîne ou non la sommabilité (S, β) pour $\beta > \alpha$, Si la sommabilité (S, α) entraîne ou non la sommabilité par le procédé d'Abel, S'il existe une fonction $\beta(\alpha)$ telle que le sommabilité (S, α) entraîne la sommabilité (C, β) pour $\beta = \beta(\alpha) \ldots$

Je sais seulement que la sommabilité (S, α), avec une hypothèse supplémentaire convenable, entraîne la sommabilité par le procédé d'Abel.

CLERMONT-FERRAND (FRANCE)

EXCEPTIONS TO n-COVERING FOR CONTINUOUS MAPPINGS OF A PLANE REGION

MARIO DOLCHER

Let Φ be a continuous mapping from a region $\bar{C}$ (bounded by a Jordan curve γ) in a plane π, into a plane π'. For every component region of $\pi' - \Phi(\gamma)$, consider the topological index (Umlaufszahl) with respect to $\Phi(\gamma)$; let A' be one region for which this integer $n(A')$ is not zero (assume π' oriented conveniently, so $n(A') > 0$). Then, roughly speaking, A' is covered (at least) n times by $\Phi(C)$: points p' of A' such that $\Phi^{-1}(p')$ consists of $\mu(p') < n(A')$ points will be said to be "exceptional". That $n \geqq 1$ implies, for any p' of A', $\mu(p') \geqq 1$ (hence: no exceptions for $n = 1$) is a classical statement.

T. Radó [Fund. Math., XXVII (1930)] proved that if $\mu(p_0') = 1$, then p_0' is the only exceptional point in a convenient neighbourhood of it. Further L. Cesari [Atti Ist. Veneto Sci. Lett., t.C (1942)] stated for every point p' of A', the existence of a neighbourhood without exceptional points (not counting p' itself); hence, a region B' such that $\bar{B}' \subset A'$ cannot contain more than a finite number of exceptional points.

Now, I have been interested in the question, how many exceptional points there may be in A' for a given $n(>1)$. I stated the following result: *exceptional points in A' (if any) are finite in number; denoting them by p_i' ($i = 1, 2, \ldots k$), and m_i ($< n$) being the number of inverse images of p_i' under Φ, then*

$$\sum_{1}^{k}{}_{i}\, m_i \geqq (k-1)n + 1.$$

(Hence: not more than $n - 1$ exceptional points in A').

The result has been stated on the ground of a refinement I gave [(1) Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Serie II, vol. XIV (1948); (2) Rivista Mat. Univ. Parma, vol. 2 (1951)] of the theorems of T. Radó and of L. Cesari.

Moreover, in this way I have been led to a theorem (of which the above one is a particular case) putting in better evidence the topology of mappings, in the same extent as Theor. II of (1) do it in comparison with the results of T. Radó and of L. Cesari. To give evidence to the opportunity of replacing the above formulation by a deeper one, it suffices to note that the further question "how many *at least*" exceptions are, have no solution (and no interest at all); yet, putting it into more strictly topological terms, it becomes important and answerable.

VIA MONTEBELLO 111,
FERRARA, (ITALIA).

ZUM TYPENPROBLEM RIEMANNSCHER FLÄCHEN

KURT WALTER ENDL

Es sind eine Reihe von Typenkriterien für Riemannsche Flächen aufgestellt worden, die aus Verzweigungseigenschaften über gewissen punktfremden Scheiben auf den hyperbolischen Typus schliessen lassen. Unter diesen Kriterien, die unter dem Namen „Scheibensätze" in die math. Literatur eingingen, ist der Scheibensatz von L. Ahlfors der umfassendste:

Besitzt eine einfach zusammenhängende offene Riemannsche Fläche über q punktfremden Scheiben nur mindestens μ_i-blättrige Flächenstücke, so ist sie vom hyperbolischen Typus, wenn die Verzweigungsschranken μ_i der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2$$

genügen.

Ein Kriterium von genau derselben Struktur lässt sich nun auch für den parabolischen Typus gewinnen. Es bezieht sich auf eine von R. Nevanlinna eingeführte Klasse Riemannscher Flächen $W(D_i)$ die ausschliesslich über q punktfremden Scheiben D_i verzweigt sind und für jede Scheibe D_i gewissen oberen Schranken für die Blattzahlen der über D_i liegenden Flächenstücke genügen. Als Spezialfall des Kriteriums gewinnt man folgenden Satz:

Besitzt eine einfach zusammenhängende offene Riemannsche Fläche $W(D_i)$ über jeder der q Scheiben nur höchstens μ_i-blättrige Flächenstücke, so ist sie vom parabolischen Typus, wenn die Verzweigungsschranken μ_i der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)=2 \tag{1}$$

genügen.

Wie aus dem Ahlforsschen Scheibensatz folgt, sind diese durch (1) festgelegten Schranken genau.

Mit Hilfe des allgemeinen Kriteriums lassen sich parabolische Flächen angeben, die diese Verzweigungsschranken nicht durchweg einhalten, sondern in endlich vielen bezw. sogar abzählbar vielen Flächenstücken verletzen.

Der Beweis ruht im wesentlichen auf dem Nachweis der Tatsache, dass unter den in Betracht kommenden Flächen die Flächen, die über D_i nur genau μ_i-blättrige Flächenstücke besitzen, in Bezug auf die Wittichschen Randknotenanzahlen $\sigma(n)$ eine Extremaleigenschaft besitzen, die eine einfache Anwendung eines Wittichschen Satzes erlaubt.

GIESSEN/LAHN, MATH. INST.

THE HOLMGREN-RIESZ INTEGRAL TRANSFORM

HYMAN JOSEPH ETTLINGER

The Holmgren-Riesz Integral Transform in four independent variables is defined as

(1) $F[2\alpha; f(t)] =$

$$\frac{\nabla^{2n}_{(x)}}{A(\alpha+n)} \int_{V(x)} f(t_1, t_2, t_3, t_4)[(x_1-t_1)^2-(t_2-x_2)^2-(t_3-x_3)^2-(t_4-x_4)^2]^{\alpha+n-2} dV$$

where $f(t)$ is of $C^{(2)}$ in (t_1, t_2, t_3, t_4), α is a complex number such that $\operatorname{Re}(\alpha+n)>1$, $\nabla^2_{(x)}$ is the d'Alembertian differential operator with respect to (x_1, x_2, x_3, x_4) and the region of integration $V(x)$ is the set of all points within and on the aft-characteristic cone

$$(x_1-t_1)^2-(t_2-x_2)^2-(t_3-x_3)^2-(t_4-x_4)^2 \leqq 0$$

subject to the requirement that

$$a \leqq t_1 \leqq x_1.$$

By means of Green's Theorem, an Extended form of the integral transform can be obtained as

$$\begin{aligned}
(2) \quad F[2\alpha; f(t)] &\equiv \nabla^{2n}_{(x)} F[2(\alpha+n)+2; \nabla^2_{(t)} f(t)] + \\
&+ \nabla^{2n}_{(x)} \left\{ \frac{2(\alpha+n-2)}{A(\alpha+n+1)} (x_1-a) \int_{S_3} f(a, t_2, t_3, t_4)(x_1-a)^2-(t_2-x_2)^2- \right. \\
&\qquad -(t_3-x_3)^2-(t_4-x_4)^2]^{2(\alpha+n)-4} dS + \\
&+ \frac{1}{A(\alpha+n+1)} \int_{S_3} D_{t_1} f(a, t_2, t_3, t_4)[(x_1-a)^2-(t_2-x_2)^2- \\
&\qquad \left. -(t_3-x_3)^2-(t_4-x_4)^2]^{2(\alpha+n)-2} dS \right\}.
\end{aligned}$$

For $n=2$, $\alpha=0$, we obtain

$$\begin{aligned}
(3) \quad f(x) = \nabla^2_{(x)} F[4; \nabla^2_{(t)} f(t)] &+ \frac{\nabla^4_{(x)}}{32\pi} \left\{ (x_1-a) \int_{S_3} f(a, t_2, t_3, t_4)\, dS \right\} + \\
&+ \frac{\nabla^2}{8\pi} \int_{S_3} D_{t_1} f(a, t_2, t_3, t_4)\, dS,
\end{aligned}$$

where in (2) and (3), S_3 is the sphere plus its interior, whose center is at (x_2, x_3, x_4) and radius, x_1-a.

From (3), we obtain readily the unique solution of the Cauchy Initial Value problem where $f(x)$ is of $C^{(2)}$, satisfies the wave equation and the initial data for $f(x)$ and $D_{x_1} f(x)$ is carried on the plane $t_1 = a$.

If as x_1 decreases without limit, the limit of $f(x)$ and of $\{x_1 \cdot f(x)\}$ is zero uniformly as to (x_2, x_3, x_4), then $f(x)$ vanishes identically.

By a suitable transformation, this result carries over to a more general linear hyperbolic partial differential equation.

THE UNIVERSITY OF TEXAS,
AUSTIN TEXAS.

CONDITIONS NÉCESSAIRES POUR LE MINIMUM DANS LE PROBLÈME DE LA DIGUE À GRAVITÉ DE MOINDRE VOLUME

SANDRO FAEDO

Dans un récent Mémoire des „Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa" (S. III, Vol. VII, p. 219—275), l'A. a developpé l'étude du problème suivant:

Parmi toutes les digues à gravité, construites avec matériel donné et capables de soutenir une masse donnée d'eau, déterminer celle qui a le moindre volume. Ceci se traduit dans le suivant problème tout à fait nouveau du Calcul des Variations, de type isopérimétrique:

On donne une correspondance qui lie à chaque courbe fermée C d'un plan π une courbe $\Gamma(C)$ de π, variable avec C. Dans la classe des courbes C qui renferment la correspondante $\Gamma(C)$, déterminer celle qui renferme la moindre aire.

Dans le Mémoire cité l'A. a donné des conditions suffisantes pour l'existence de la solution du problème.

Dans la présente communication l'A. expose les conditions nécessaires pour la minimante, qui traduisent les équations d'Euler.

La courbe minimante C_0 (section verticale de la digue) est coupée en deux arcs: le profile d'amont et le profile d'aval. Les équations d'Euler forment un système de deux équations intégrales, qui lient les deux profiles.

VIA DI GELLO 23, PISA (ITALY).

CALCOLO DEGLI AUTOVALORI E AUTOFUNZIONI DEGLI OPERATORI „FISICI" SU UN GRUPPO TOPOLOGICO COMPATTO

LUIGI FANTAPPIÉ

In altri lavori si sono considerate le funzioni analitiche $\varphi(x)$ definite per ogni punto reale $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ di un gruppo topologico G^r a r parametri x_k (reali e canonici), e gli operatori analitici lineari $K\varphi = \varphi_1$, definiti per tali funzioni (operatori „dati sul gruppo G^r"), quali rappresentanti, rispettivamente, degli „stati" e delle „grandezze" K di un sistema fisico (quantico), in cui l'„eguaglianza" di due fenomeni sia definita proprio mediante il gruppo „base" G^r (per es., gruppo di Galilei o gruppo di Lorentz). Si è visto che ogni operatore „fisico" K (che rappresenti cioè una grandezza avente senso fisico) deve soddisfare alle due condizioni: a) $K\varphi(x) = F_t[\varphi(t \cdot x)]$ (perchè sia „osservabile"); b) $KT\varphi = TK\varphi$, per ogni T di G^r (perchè sia „obiettivo").

Si è pure visto che la condizione a), per gli operatori *osservabili* su un gruppo G *compatto*, ha per conseguenza che gli autovalori λ e le autofunzioni φ di tali operatori e anche dei più generali operatori *spinoriali*, operanti su *sistemi* di funzioni $\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu)$ possono calcolarsi effettivamente, risolvendo una successione di sistemi *algebrici lineari*

$$b'^{(n)\iota}_{\gamma.\tau} = \sum_{1}^{\mu}{}_\beta \sum_{1}^{\nu}{}_k \, q^{(n)\beta k}_{\gamma\tau} \, b^{(n)\iota}_{\beta.k} = \lambda b^{(n)\iota}_{\gamma.\tau} \qquad \begin{pmatrix} \gamma = 1, 2, \ldots, \mu \\ \iota, \tau = 1, 2, \ldots, \nu \end{pmatrix} \tag{1}$$

(per $n = 1, 2, 3, \ldots$) nei coefficienti di Fourier $b^{(n)\iota}_{\beta.k}$ degli sviluppi delle autofunzioni incognite $\varphi(x)$ per mezzo degli elementi $g^{(n)\cdot k}_{\iota}(x)$ di tutte le rappresentazioni lineari, irriducibili, unitarie e non equivalenti $\mathfrak{R}^{(n)}_\nu$ di G^r ($n = 1, 2, \ldots$; ν = ordine della rappresentazione). Poichè l'operatore osservabile K si traduce, per l'insieme dei $\mu\nu^2$ coefficienti $b^{(n)\iota}_{\gamma.\tau}$ degli elementi di ciascuna rappresentazione $\mathfrak{R}^{(n)}_\nu$, in una sostituzione lineare omogenea $Q^{(n)}$, determinata dalle costanti $q^{(n)\beta k}_{\gamma\tau}$, si vede allora che l'ulteriore condizione b) ha per conseguenza che la sostituzione $Q^{(n)}$ *deve essere permutabile* con tutte le trasformazioni indotte sulle b dalle trasformazioni del gruppo G^r.

Ma queste trasformazioni sulle $b^\iota_{\gamma\tau}$ costituiscono ancora una *rappresentazione lineare* di G^r, che è il prodotto $\mathfrak{R}^{(n)}_\nu \times \mathfrak{R}^{*(n)}_\nu \times \mathfrak{R}_\mu$ delle rappresentazioni irriducibili $\mathfrak{R}^{(n)}_\nu$, della sua coniugata $\mathfrak{R}^{*(n)}_\nu$ e della $\mathfrak{R}_\mu$, secondo cui si trasforma lo spinore $\varphi(x) \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\mu)$. Decomposto allora tale prodotto nella somma di più rappresentazioni unitarie irriducibili $\mathfrak{R}_{(1)}, \mathfrak{R}_{(2)}, \ldots, \mathfrak{R}_{(j)}, \ldots, \mathfrak{R}_{(s)}$, *eventualmente ripetute*, si giunge alla conclusione che, per il lemma di Schur, la matrice $\overline{Q}^{(n)}$, trasformata di $Q^{(n)}$, non può essere di forma qualunque, ma, decomposta in tante successive matrici parziali B_{jk} di tante righe quante la $\mathfrak{R}_{(j)}$ e tante colonne quante la $\mathfrak{R}_{(k)}$, queste matrici B_{jk} debbono risultare *tutte nulle* se $\mathfrak{R}_{(j)}$ e $\mathfrak{R}_{(k)}$ sono distinte, e invece $B_{jk} = b_{jk}\, \mathbf{1}$ proporzionale alla matrice unitaria $\mathbf{1}$, se $\mathfrak{R}_{(j)} = \mathfrak{R}_{(s)}$.

Ciò porta di conseguenza che il determinante caratteristico $\Delta_n(\lambda)$ del sistema (1) si spezza nel prodotto di tanti determinanti parziali, *di ordini uguali al numero delle volte* che ciascuna delle $\mathfrak{R}_{(j)}$ è ripetuta nella decomposizione del prodotto $\mathfrak{R}^{(n)}_\nu \times \mathfrak{R}^{*(n)}_\nu \times \mathfrak{R}_\mu$. In particolare, *se non v'è ripetizione* (come accade, per esempio, per il gruppo G^3 delle rotazioni dello spazio ordinario e per $\mu = 1$, cioè per un operatore applicato *a una sola funzione* $\varphi(x)$) la $\overline{Q}^{(n)}$ si deve ridurre *a forma diagonale*, i cui elementi diversi da 0 sono proprio gli *autovalori* del sistema (1), i quali dunque risultano già determinati, *senza necessità di risolvere equazioni algebriche.*

VIA MARCO AURELIO 42, ROMA (ITALIA).

PFAFFIAN EQUATIONS AND THE PROBLEM OF BOLZA

FRANK D. FAULKNER

The solution to the problem of Bolza with separated end-conditions (G. A. Bliss, *Lectures on the Calculus of Variations*, Chicago [1946], section 69), and a total differential equation $P_i dx_i = 0$ is investigated in terms of the transformations which reduce the Pfaffian to the canonical form. One variable is required to be monotonic. This variable must be an integral of the differential equation and the equation must be of rank three (in the sense of E. Goursat, *Leçons sur le Problème de Pfaff*, J. Hermann, Paris [1922], sections 6, 11, 13). The Jacobian matrix of the transformation which effections the reduction to canonical form has rank three in general, but has rank two along the extremals.

USN POSTGRADUATE SCHOOL,
MONTEREY, CALIF., U. S. A.

ON THE GENERATING OF A TRANSFORMATION ON A CLOSED CURVE BY AN INFINITESIMAL TRANSFORMATION

ARRIGO FINZI

Given on a closed curve C a transformation T,

$$x_1 = g(x) \qquad \left(\frac{dg}{dx} > 0\right),$$

where T^{-1} exists and where no point is left invariant by T, we want to know whether there is any infinitesimal transformation $Xf = \xi(x)\,\dfrac{df}{dx}$ generating T.

There are three possibilities:

1. Every point is left invariant by a certain power of T, say T^n.
2. There is a power T^n, for which only some points are invariant.
3. No point is invariant for any power of T.

In case 3, which is the only really interesting one, at most one infinitesimal transformation Xf exists.

Let us assign to T a real number, the *modulus*, which is the limit for $n \to \infty$ of the ratio $\frac{m}{n}$, where m is the number of complete cycles of C described by a point when transformed by a power T^n. The modulus is irrational for a transformation T of type 3.

Let

$$\frac{m_\alpha}{n_\alpha} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots + \cfrac{1}{a_{\alpha-1}}}}$$

be the α-th convergent of the development of the modulus of T into a continuous fraction.

There is always an infinitesimal transformation Xf generating T if $g(x)$ has a second derivative satisfying the Lipschitz condition, and if there is a positive number $\lambda < 1$ such that

$$(*) \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \frac{a_\alpha}{n_\alpha^\lambda} = 0.$$

If on the other hand, no condition is prescribed for the integers a_α, it is impossible to ascertain the existence of $\xi(x) \frac{df}{dx}$ whatever condition we prescribe for $g(x)$. It is an open question whether condition $(*)$ is the least restricting possible and also whether $\xi(x)$ has a derivative.

Among the transformations 3, let us distinguish between the transformations $3'$ generated by an infinitesimal transformation, and the transformations $3''$, for which no such infinitesimal transformation exists. If

$$x_1 = g(x, \theta)$$

is an *arbitrary* one-parameter family of transformations, the set of values of θ corresponding to transformations 1 is an empty set, the set corresponding to transformations $3''$ has measure zero, the set corresponding to transformations 2 and $3'$ have both a measure different from zero. We may then say that an arbitrary transformation belongs to type 2 or $3'$.

There is a connection between the present theory and the papers by Poincaré and Denjoy on the solution of a differential equation on a torus.

VIA ARNO 21,
ROME, ITALY.

ON BEST CONDITIONED MATRICES

George E. Forsythe and Ernst G. Straus

Let [1] A be a positive definite Hermitian matrix of finite order, and let Λ and λ be its maximal and minimal eigenvalue respectively. By the *condition number* of A is meant [John Todd, Proc. Cambridge Phil. Soc. **46** (1949), 116—118] the ratio $P(A) = \Lambda/\lambda$. Let $\mathfrak{T}$ be a class of regular linear transformations. We say that A is *best conditioned with respect to* $\mathfrak{T}$ *if* $P(A^T) = P(T^*AT) \geqq P(A)$ for all $T \in \mathfrak{T}$.

In order to investigate whether A is best conditioned we remember that

$$(1) \qquad \Lambda = \max_x \frac{x^*Ax}{x^*x}, \quad \lambda = \min_x \frac{x^*Ax}{x^*x}$$

and hence

$$(2) \qquad P(A) = \max_{\|x\|=\|y\|=1} \frac{x^*Ax}{y^*Ay}.$$

Let $R = R(T) = (T^*)^{-1}T^{-1}$, and let Λ^T, λ^T be the extremal eigenvalues of A^T. Setting $u = Tx$, we obtain from (1) and (2) that $\Lambda^T = \max_u(u^*Au/u^*Ru)$, $\lambda^T = \min_u(u^*Au/u^*Ru)$, whence

$$(3) \qquad P(A^T) = \max_{\|u\|=\|v\|=1} \frac{u^*Au}{v^*Av}\,\frac{v^*Rv}{u^*Ru}.$$

Thus, if we let S_Λ, S_λ be the sets of unit eigenvectors of A belonging to Λ and λ respectively, then we obtain from (2)

$$(4) \qquad P(A) = \frac{x^*Ax}{y^*Ay}, \quad x \in S_\Lambda, \; y \in S_\lambda,$$

and hence from (3) and (4)

$$P(A^T) \geqq P(A) \max_{\substack{u \in S_\Lambda \\ v \in S_\lambda}} \frac{v^*Rv}{u^*Ru}.$$

We thus have

Lemma. If $\max_{u \in S_\Lambda, v \in S_\lambda}(v^*Rv/u^*Ru) \geqq 1$ *for all* $T \in \mathfrak{T}$, *then A is best conditioned with respect to* $\mathfrak{T}$.

Definition. The sets S_1, S_2 are *separable by* $\mathfrak{T}$ if there exists a $T \in \mathfrak{T}$ and a constant k so that $x^*Rx < k < y^*Ry$ for all x in one S_i and all y in the other.

[1] This research was sponsored in part by the Office of Naval Research, United States Navy.

Obviously, if S_1, S_2 are not separable by $\mathfrak{T}$ then

$$\sup_{\substack{x \in S_1 \\ y \in S_2}} \frac{x^* R x}{y^* R y} \geqq 1 \text{ for all } T \in \mathfrak{T}. \tag{5}$$

Combining (5) with the Lemma, we can state

Theorem 1. *If S_Λ and S_λ are not separable by $\mathfrak{T}$, then A is best conditioned with respect to $\mathfrak{T}$.*

The converse to Theorem 1 is not true without further conditions on $\mathfrak{T}$:

Definition. A set $\mathfrak{T}$ of regular linear transformations is called *infinitesimally complete* if for every $T \in \mathfrak{T}$ there exist arbitrarily small positive ε, ε' such that there are T_ε, $T_{\varepsilon'} \in \mathfrak{T}$ with

$$I + \varepsilon R = c(T_\varepsilon^*)^{-1} T_\varepsilon^{-1}, \quad I - \varepsilon' R = c'(T_{\varepsilon'}^*)^{-1} T_{\varepsilon'}^{-1},$$

where c, c' are positive numbers.

Theorem 2. *If $\mathfrak{T}$ is infinitesimally complete and S_λ, S_Λ are separable by $\mathfrak{T}$, then A is not best conditioned with respect to $\mathfrak{T}$.*

As examples of infinitesimally complete classes $\mathfrak{T}$ we may cite:

(i) Diagonal (real diagonal, positive diagonal) matrices. These are frequently used in "preconditioning" matrices before inverting them numerically. Here the situation is particularly simple if Λ and λ are simple eigenvalues. Let x^Λ, x^λ be unit eigenvectors belonging to Λ, λ; then S_Λ, S_λ are separable if and only if, for some i,

$$| x_i^\Lambda | \neq | x_i^\lambda |. \tag{6}$$

(ii) "Blockwise diagonal" matrices. These are matrices of the form

$$T = \begin{bmatrix} M_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & M_s \end{bmatrix}$$

where each M_i is a matrix of arbitrary preassigned order.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA,
LOS ANGELES 24, CALIFORNIA, U. S. A.

CHAIN TRANSFORMS

CHARLES FOX

A chain transform of order n is a group of integral equations falling into two categories as follows:

(1) $$g_{m+1}(x) = \int_0^\infty r_m\left(\frac{x}{u}\right) g_m(u) \frac{du}{u},$$

(2) $$\int_0^\infty l_i\left(\frac{x}{u}\right) g_{i+1}(u) \frac{du}{u} = g_i(x),$$

where m and i, between them, run through the first n positive integers. The system is a chain transform of order n if the following two conditions hold, (i) $g_s(x)$, $s = 2, 3, 4, \ldots n$ occurs twice in these equations, once on the right hand side and once on the left, and (ii) $g_{n+1}(x) = g_1(x)$.

We see therefore that each of the functions $g_s(x)$, $s = 1, 2, 3, \ldots n$ occurs twice, once on each side of (1) and (2).

When $n = 2$ the system specializes to the well known Generalized Fourier Integral Transform. When $n = 3$, equations (1) and (2) include systems which occur in Laplace Transform theory and which are known as Iterated transforms.

If $L_i(s)$ is the Mellin Transform of $l_i(x)$ and $R_m(s)$ that of $r_m(x)$ then I establish the following as the main condition that the system (1) and (2) should form a chain transform of order n:

(3) $$\prod_i L_i(s) = \prod_m R_m(s),$$

where, in forming the products, i and m run through all their possible values. If all the equations of the chain transform are of type (1), i.e. there are none of type (2), then the left hand side of (3) must be replaced by 1. Similarly, if all the equations of the system are of type (2) then the right hand side of (3) must be replaced by 1.

In addition to (3) there are also some conditions of convergence. I prove two theorems one when the functions converge in the ordinary sense and a more general theorem for the case of convergence in mean square.

McGill University,
Montreal, P. Q. Canada.

ON THE DETERMINATION OF THE ROOTS OF EQUATIONS

Evelyn Frank

The Newton method for the calculation of the roots of an equation $f(x) = 0$ consists essentially of a Taylor series expansion of $f(x)$ about a point in the neighborhood of the desired root. This series is broken off with the linear term. The Newton method can be extended to equations with n unknowns, and there results a system of n linear equations in n unknowns. In the method presented here, however, additional terms in the Taylor series development are used. The formulas are computed for equations in two variables x and y, and they are found to be remarkably simple. If $x = x_1$, $y = y_1$ is an approximation of the desired solution of $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$, by the use of additional terms in the Taylor series, geometrically the curves $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ are replaced, not by the tangents, but by curves of higher order, which, at the point $x = x_1$, $y = y_1$, have a higher number of derivatives in common with the given curves. The present method is exceptionally convenient for use in the computation of the complex roots of an equation $F(z) = 0$. One breaks up the function $F(z)$ into its real and imaginary parts $f(x, y)$ and $g(x, y)$, respectively, and calculates the solution of these two functions for the two variables. In this connection, a novel variation of Horner's method is presented for the computation of partial derivatives of rational integral functions. The convergence of the method to the value of the solution is considered, and an estimate of the error involved in the use of only a certain number of terms is indicated. A new method is also presented for the computation of bounds for the roots. The present method is connected with the author's previous methods for the determination of the roots.

University of Illinois,
2220 Sherman Avenue, Evanston, Illinois, U. S. A.

ON THE EXPANSION OF AN ARBITRARY FUNCTION IN TERMS OF THE EIGENFUNCTIONS OF A NON-SELF-ADJOINT EQUATION

Bernard Friedman

Consider the expansion of a function of bounded variation $f(x)$ in terms of the eigenfunctions of the equation $u'' + (\lambda - q(x))\, u = 0$ where $u(0) = u(1) = 0$. It is well known that for $0 < x < 1$ the expansion converges to $1/2[f(x+0) + f(x-0)]$ even if $f(x)$ does not satisfy the boundary conditions imposed on the eigenfunctions. However, the following discussion shows that if the equation is non-self-adjoint, the expansion may converge only if $f(x)$ satisfies a suitable boundary condition.

Consider the equation

$$u'' + q(x)u + \lambda(p(x)u - u') = 0$$

where $u(0) = u(1) = 0$. We assume that $q(x)$ is continuous and that $p(x)$ has continuous second derivatives. If $f(x)$ is of bounded variation in $(0, 1)$ and if

(1) $$f(0+)+\exp\left[-\int_0^1 p\,dt\right]f(1-)=0$$

then the series $\Sigma\, a_n u_n(x)$ where

(2) $$a_n=\int_0^1 f(t)\,(pv_n'+v_n)dt$$

converges to $1/2[f(x+0)+f(x-0)]$. Here $v_n(x)$ are the eigenfunctions of the adjoint equation

$$v''+q(x)v+\lambda(pv+v')=0$$

where $v(0)=v(1)=0$.

If $f(x)$ does not satisfy the condition (1), then the series $\Sigma a_n u_n(x)$ where a_n is defined by (2) converges to

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]-\tfrac{1}{2}c\exp\left[\int_0^x p\,dt\right]$$

where

$$c=f(0+)+f(1-)\exp\left[-\int_0^1 p\,dt\right].$$

55 HILLTOP AVE.
NEW ROCHELLE, N.Y.

ON THE MAGNITUDE OF FOURIER TRANSFORMS

WOLFGANG HEINRICH J. FUCHS

The results presented here are illustrations of the well-known principle that a function and its Fourier transform can not both have very sharply peaked graphs.

Let $g(t)$ be a function of integrable square defined in an n-dimensional Euclidean space E $(t=(t_1, t_2, \ldots, t_n))$. Let $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $tx=t_1x_1+t_2x_2\ldots t_nx_n$,

$$G(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_E g(t)e^{itx}\,dt$$

Let S and T be two sets of finite-dimensional measure and let $\lambda\,(S, T)$ be the largest eigen-value of the integral equation

$$\mu y(t)=(2\pi)^{-n}\int_T y(s)\int_S e^{-i(t-s)u}\,du\,ds.$$

THEOREM 1. *If*

$$\int_E |g(t)|^2\,dt=1$$

and

$$\int_T |g(t)|^2\,dt=A,$$

then

$$\int_S |G(x)|^2 dx \leqq \mu^2(A),$$

where

$$\mu(A) = 1 \qquad (A \leqq \lambda(S, T))$$
$$\mu(A) = (A\lambda(S, T))^{1/2} + ((1-A)(1-\lambda(S, T)))^{1/2} \quad (A > \lambda(S, T)).$$

The bound μ^2 is attained in all cases.

This theorem is closely related to the 'uncertainty principle' of Quantum Mechanics. It is a generalisation of this principle to the case that the second moment of $g(t)$ is infinite.

An analogous theorem can be proved connecting the properties of a distribution function and of its characteristic function. In particular we have

THEOREM 2. *Let $F(t)$ be a one-dimensional distribution function,*

$$Q(b) = \sup_t \{F(t+b+0) - F(t-0)\}$$

its 'concentration function' and

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} dF(t)$$

its characteristic function.

If, for some finite b, $Q(b) = 1$, then

$$\sup_{|x|>a} |f(x)| \geqq 1/\cosh(ab/2).$$

If $f(x) = 0$ for $|x| > a$, then

$$Q(b) \leqq \lambda(S, T)$$

where $\lambda(S, T)$ has the same meaning as above, S is the interval $|t| < b/2$, T is the interval $|x| < a/2$.

DEPT. OF MATH. CORNELL UNIV.

CLOSED EXTENSIONS OF PARTIAL DIFFERENTIAL OPERATORS

BENT FUGLEDE

Consider the Banach space L_m of vector fields $u = u(x) = u(x_1, \ldots, x_n)$ whose components $u_1, \ldots, u_m$ are summable over a given region Ω in Euclidean n-space, and put $\|u\| = \sum_{i=1}^{m} \int_\Omega |u_i(x)| dx$. Denote by D a linear partial differential operator (l.p.d.o.) of order 1 between L_m and $L_1 = L$, with constant coefficients, say: $Du = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \partial u_i / \partial x_j$. The "classical" domain of D is the class C_m^1 of fields $u \in L_m$ whose components $u_1, \ldots, u_m$ are equivalent to functions having continuous partial derivatives of order 1 in Ω. With this domain C_m^1, D is not a closed operator. We propose to determine the structure of the fields u which form the domain $\mathfrak{A}_D$ of the *narrowest closed extension* $\tilde{D}$ of D.

If $n = 1$ (ordinary differential operators), it is well known that $\mathfrak{A}_D$ may be characterized in terms of absolute continuity. Thus, if $m = n = 1$ and $D = d/dx$, $u \in \mathfrak{A}_D$ if, and only if, u is equivalent to an absolutely continuous function. Similar statements hold when $m > n = 1$. When $n > 1$ (partial differential operators), the fields $u \in \mathfrak{A}_D$ need not be equivalent even to continuous fields. Nevertheless, we shall introduce a type of *absolute continuity with respect to D* and thereby solve our structure problem. Denote by $\mathfrak{F}$ the field of all finite unions G of non-overlapping subregions of Ω with piecewise differentiable boundaries, say. If $G \in \mathfrak{F}$, denote by $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ the outward unit normal and by $d\sigma$ the surface element of the boundary Γ of G. Putting $D[u, \nu] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i \nu_j$, it follows from Fubini's theorem (when $u \in L_m$) that $\int_\Gamma D[u, \nu] d\sigma$ converges for "almost every" $G \in \mathfrak{F}$ (in a suitable sense). If even $u \in C_m^1$, we have Green's formula, $\int_\Gamma D[u, \nu]\, d\sigma = \int_\Omega Du\, dx$, for *every* $G \in \mathfrak{F}$. The following theorem subsists:

A vector field $u \in L_m$ belongs to $\mathfrak{A}_D$ if, and only if, there corresponds to every $\varepsilon > 0$ a $\delta > 0$ so that $\left| \int_\Gamma D[u, \nu] d\sigma \right| < \varepsilon$ for "almost every" region $G \in \mathfrak{F}$ with volume $m(G) < \delta$. And then $\tilde{D}u$ is characterized within L by Green's formula, $\int_G \tilde{D}u\, dx = \int_\Gamma D[u, \nu] d\sigma$, for "almost every" $G \in \mathfrak{F}$.

It is easy to extend this result to *systems* of l.p.d.o.'s. Simplest example: $m = 1$, $Du = \operatorname{grad} u = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$. Here $\mathfrak{A}_D$ is essentially the class of *Beppo-Levi functions*. — Even *higher order* l.p.d.o.'s may be treated along these lines. Example: the Laplacian $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$. One finds $\tilde{\Delta} = \widetilde{\operatorname{div}}\, \widetilde{\operatorname{grad}}$ in the strict sense of operational calculus.

If we replace the underlying notion of absolute continuity by that of *bounded variation* and consider again, as an example, the Laplacian, our method leads to the following structure theorem:

A function u is the difference of two subharmonic functions, i.e. (locally) a potential, *if and only if, for every compact subregion $\Omega' \subset \Omega$, u is a Beppo-Levi function in Ω', and* sup $\left| \int_\Gamma (\partial u/\partial \nu) d\sigma \right| < \infty$, *taking* sup *over "almost all" $G \in \mathfrak{F}$, $G \subset \Omega'$.*

Details and further results will appear in the author's forthcoming thesis (University of Copenhagen).

PRÆSTEVÆNGET 23, BALLERUP, DENMARK.

GEOMETRIC PROPERTIES OF A BASIS IN A BANACH SPACE

ROBERT E. FULLERTON

Let X be a real Banach space and let $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$ be a sequence of elements of unit norm such that if $x \in X$ there exists a unique representation $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$. Let K be the set of all x for which $\alpha_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots$. K is a closed cone such that for any x, y in X there exists $z \in X$ with $(x+K) \cap (y+K) = z + K$ (a C-cone). K is also the closed convex hull of the countable set of extreme rays determined by the origin and the x_i, which will be denoted by r_i, and has no interior points. K generates a lattice ordering on X.

Let $x \in K$, $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ and let $x^n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Then $\lim_{n\to\infty} ||x - x^n|| = 0$. This limiting process can be interpreted geometrically by exhibiting x as a limit point of vertices of a sequence of cones

$$K \supset K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots,\ K_1 = \alpha_1 x_1 + K,\ \alpha_1 = \sup\left[\alpha \,|\, x \in \alpha x_1 + K\right]$$

$$\alpha_2 = \sup\left[\alpha \,|\, x \in \alpha_1 x_1 + \alpha x_2 + K\right], \ldots, \alpha_n = \sup\left[\alpha \,|\, x \in \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha x_n + K\right].$$

Each cone K_n is the result of a succession of translates of K along the extreme rays $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Let X possess a C-cone K with vertex at the origin and without interior points which is generated by a countable family of extreme rays $\{r_i\}$ and let x_i be the point on r_i of unit norm. Let K and x_i satisfy the following conditions.

(i) If F_i is the face of the cone determined by all extreme rays except r_i and if $d(x_i, F_i)$ is the distance from x_i to F_i, then $\inf_i d(x_i, F_i) > 0$.

(ii) If $x \in K$, $||x|| = 1$, and z_i satisfies $z_i + K = K \cap [(x - x_i) + K]$ then $||z_i|| \leqq 1$.

(iii) If $x \in K$, and $P_x = K \cap (x - K)$, for each $\varepsilon > 0$ there exists $\delta > 0$ independent of x such that if $r_i \cap P_x$ has length less than δ for each i, the diameter of P_x is less than ε.

If X satisfies the above conditions, $\{x_i\}$ forms an unconditional basis for X.

Condition (i) can be replaced by the weaker condition (i′). If $\lim_{i\to\infty} d(\beta_i x_i, F_i) = 0$ then $\lim_{i\to\infty} \beta_i = 0$.

If condition (i) is satisfied and if for $x \in K$ the sum of the distances from x to the faces of K exists, then $\{x_i\}$ is an absolute basis.

UNIVERSITY OF WISCONSIN,
MADISON, WISCONSIN, U. S. A.

SOME TYPES OF INFINITE MATRICES

GABRIEL ARMAND GARREAU

It is shown that all T-matrices (regular methods of Summation) can be expressed in the form

$$a_{n,k} = \frac{1}{\sigma_n} \int_k^{k+1} f_n(u/\sigma_n)\,du, \text{ where } \sigma_n \to \infty \text{ as } n \to \infty,$$

and $\{f_n(x)\}$ is a sequence of functions having certain properties. Examples are given of new T-matrices generated in this manner. A lower semi (triangular) T-matrix is given, which is as powerful as the well-known Borel general (square) matrix.

A T-matrix is given, such that the maximum term in the n-th row tends to zero as $n \to \infty$, but nevertheless the matrix fails to sum almost all sequences of 0's and 1's.

It is well known that infinite matrices of a suitable type can form an algebra. Examples are given of a type of matrix which not only forms an algebra, but also admits of fractional powers. In addition, an example is given of a matrix A for which the power A^m can be defined for every $m < N$, but A^N does not exist.

REFERENCES

[1] G. A. GARREAU, A note on the summation of sequences of 0's and 1's. (Annals of Maths. Vol. 54 No. 1, 1951, 183—185).

[2] G. A. GARREAU, Methods of generating T-matrices. (Koninkl. Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Proceedings, Series A, 55, No, 3, 237—244).

90, WYATT PARK RD, LONDON, S.W. 2
ENGLAND

ÉTUDE GLOBALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE NON LINÉAIRE

ABOLGHASSEM GHAFFARI

L'objet de cet article est de compléter la discussion de l'équation non linéaire (1) $dy/dx = [y(x^2 + y^2 - 2x - 3) + x][x(x^2 + y^2 - 2x - 3) - y]^{-1}$, proposée par H. Poincaré (Oeuvres, Vol. I, p. 80), et de trouver l'allure générale de ses courbes intégrales dans tout leur domaine d'existence.

En appliquant à l'équation (1) les théorèmes généraux de Poincaré, on obtient les résultats suivants:

L'origine est un *foyer stable*, c'est le seul point singulier à distance finie et à l'infini. L'équateur, qui est une caractéristique exceptionnelle, est un *cycle limite*. En coordonnées polaires on a $d\varrho/d\theta = \varrho(\varrho^2 - 2\varrho\cos\theta - 3)$. On voit que la courbe des contacts est donnée par l'origine et le cercle $\varrho^2 - 2\varrho\cos\theta - 3 = 0$. Les cercles pour lesquels $0 < \varrho < 1$ et $\varrho > 3$ sont des cycles sans contact. Par conséquent, les régions $0 < \varrho < 1$ et $\varrho > 3$ sont *acycliques* pendant que la couronne circulaire R définie par $1 < \varrho < 3$ est douteuse. On peut montrer que la couronne circulaire douteuse R est *monocyclique*, elle contient donc *un* cycle limite C et un seul. Le système des caractéristiques de l'équation (1) se composent donc, outre l'équateur et le cycle limite C, de deux familles de *spirales*, l'une intérieure au cycle limite C et se rapprochant indéfiniment à l'origine et l'autre extérieure au cycle limite C et se rapprochant asymptotiquement dans les deux sens du cycle limite C et de l'équateur.

FACULTY OF SCIENCE, TEHERAN,
UNIVERSITY, TEHERAN, IRAN.

UNA NUOVA DEFINIZIONE DI VARIETÀ k-DIMENSIONALE ORIENTATA, E DI MISURA k-DIMENSIONALE DI UN INSIEME DI UNO SPAZIO r-DIMENSIONALE

ENNIO DE GIORGI

Si dà una nuova definizione di varietà k-dimensionale orientata di uno spazio euclideo ad r dimenzioni; tale definizione consente una rapida trattazione di una vasta classe di problemi variazionali, nella quale rientrano, come casi particolari, il problema di Plateau, molti problemi isoperimetrici, ecc.

Alle varietà k-dimensionali così definite si estendono i concetti di spazio k-dimensionale tangente in un punto ad una varietà, di proiezione, di sezione, di bordo di una varietà orientata, le formole di Green-Stokes, ecc.

Dalla definizione di varietà k-dimensionale discende una nuova definizione di misura k-dimensionale di un insieme di uno spazio euclideo ad r dimensioni.

ROMA-VIALE DI TRASTEVERE 115
ITALY

ESPACE DE LEBESGUE - UN EXEMPLE D'ESPACE RÉGULIER

RUY LUIS GOMES

Soit F l'ensemble des fonctions numériques bornées, définies dans l'intervalle fermé $[a, b]$. F est un espace vectoriel sur le corps des nombres réels et pour le munir d'une structure d'ordre il suffit de prendre $f_1 \leqq f_2$ si $f_1(x) \leqq f_2(x)$

quel que soit $x \in [a, b]$: F est alors un espace de Riesz. En appelant „intervalle" $[h, g]$ l'ensemble des fonctions telles que $h \leqq f \leqq g$, on considère comme système fondamental des voisinages de $f_0 \in F$ l'ensemble de tous les intervalles $[h, g]$, où h est semi-continue supérieurement et g semi-continue inférieurement; F devient un espace vectoriel, ordonné, topologique, qui, n'étant pas un espace vectoriel topologique, est un espace régulier. Ce fait découle des propositions: 1) L'ensemble des fonctions f, telles que $f_1 \leqq f$, où f_1 est un élement donné de F est fermé; 2) Les voisinages $[h, g]$ de tout élément $f \in F$ sont fermés; 3) F est un espace séparé.

Cet espace F présente d'abord l'intérêt d'être un exemple d'espace régulier qui est de Riesz et non vectoriel topologique. Mais, parce que ses éléments sont définis dans un intervalle, l'ensemble de ceux qui sont des fonctions continues est dense par rapport à F; et la construction de l'intégrale de Lebesgue se fait par prolongement par continuité de l'intégrale de Cauchy dans l'espace F. Celui-ci étant séparé, les intégrales de Lebesgue des fonctions f, $\underline{f}$ et $\overline{f}$ (respectivement fonction lim. inf. et fonction lim. sup. de f), quand ils existent, ne sont pas nécessairement égaux. Cette plus grande finesse de l'intégrale de Lebesgue par rapport, par exemple, à l'integrale de Riemann, est ainsi liée à la topologie définie sur F: systèmes de voisinages à l'aide d'intervalles $[\varphi_1, \varphi_2]$, $[h_1, h_2]$, $[g_1, g_2]$ ou $[h, g]$ (φ, g et h symbolisant respectivement des fonctions continues, semi-continues inférieurement et semi-continues supérieurement) ne conduiraient plus à des topologies donnant à F le caractère d'espace séparé. Ces circonstances justifient que l'on appelle „Espace de Lebesgue" l'espace topologique défini ci-dessus.

Rue Antonio Candido, 256—2º,
Porto, Portugal.

SPECTRAL THEORY FOR A CLASS OF NON-NORMAL OPERATORS

Harry Gonshor

The correspondence between normal operators on a Hilbert space and projection valued measures on the plane is well known. The Spectral theorem is generalized to a class of operators properly containing the class of all normal operators. We define a J_n operator as an operator which can be decomposed as a direct integral of operators of the form $\begin{pmatrix} A & & O \\ & A & \\ & & A \\ O & & & \ddots \end{pmatrix}$ where A is a matrix of order not above n.

Let Z be the set of all complex numbers and Q the set of all triples (l, m, b) where l and m are complex numbers with $l \geqq m$ in the sense of the usual lexicographic ordering with respect to r and θ, and b positive real. Then every J_2 operator B can be decomposed as a direct integral onto the space $Z \cup Q$ in such a way that B becomes $\begin{pmatrix} l & & & O \\ & l & & \\ & & l & \\ O & & & \ddots \end{pmatrix}$ at the point $l \in Z$ and $\begin{pmatrix} l & b & & & O \\ o & m & & & \\ & & l & b & \\ & & o & m & \\ O & & & & \ddots \end{pmatrix}$ at the point $(l, m, b) \in Q$, and the projection valued measure thus defined on $Z \cup Q$ is unique given B. For J_1 operators this reduces to the ordinary spectral theorem. The unitary equivalence theorem is a corollary of the spectral theorem and is the same as the one for normal operators except for the use of the space $Z \cup Q$ instead of Z. J_2 operators are of some interest for they include all operators B satisfying $B^2 = 0$ or $B^2 = B$ as well as all operators of the form $E + iF$ where E and F are projections. The theory can be generalized to J_n operators where $n > 2$ but the space which must be used instead of $Z \cup Q$ is extremely complicated even when $n = 3$.

MATH. DEPT. U.S.C. LOS ANGELES
CALIFORNIA U.S.A.

CHARAKTERISIERUNG DER HOLOMORPHKONVEXITÄT DURCH KÄHLERSCHE METRIK

HANS WILHELM JOSEF GRAUERT

Aus den fundamentalen Untersuchungen von K. Oka (und den neueren Untersuchungen von H. Bremermann und Norguet) ergab sich, dass die Holomorphkonvexität eines Gebietes G des Raumes C^n von n komplexen Veränderlichen durch die Pseudokonvexität des Randes von G, bzw. durch äquivalente Forderungen charakterisiert werden kann. Es konnte ferner in den Untersuchungen von Lelong gezeigt werden, dass ein Gebiet G des C^n genau dann ein Holomorphiegebiet ist, wenn es über G eine plurisubharmonische Funktion gibt, die in der Nähe des Randes von G gegen $+\infty$ strebt. Plurisubharmonische Funktionen sind Potentialfunktionen Kählerscher Metriken. Es interessiert darum schon von einem geometrischen Standpunkt aus die Frage, ob die Holomorphkonvexität spezieller Gebiete des C^n durch eine geeignete Eigenschaft der Kählerschen Metrik charakterisiert werden kann. Eine solche Eigenschaft ist in der Vollständigkeit (unendlich ferner Rand) dieser Metrik gefunden.

Die nähere Behandlung des Problems führt zunächst zu folgendem Resultat: Läßt eine holomorphkonvexe komplexanalytische Mannigfaltigkeit überhaupt eine Kählersche Metrik zu, so besitzt sie auch eine vollständige Kählersche Metrik. Der Satz lässt sich für vollständige Mannigfaltigkeiten (variétés de Stein) noch wesentlich erweitern:

Ist eine komplexanalytische Mannigfaltigkeit $''V^n$ aus einer vollständigen Mannigfaltigkeit V^n durch Herausnahme von abzählbar vielen analytischen Mengen erzeugbar, so existiert in $''V^n$ eine vollständige Kählersche Metrik.

Mannigfaltigkeiten $''V^n$ sind nicht immer holomorphkonvex. Jedoch sind Gebiete des C^n mit hinreichend glattem Rand und vollständiger Kählerscher Metrik Holomorphiegebiete. Es gelten als Umkehrung des ersten Resultates folgende Sätze:

1. Ein Reinhardtscher Körper über dem C^n mit vollständiger Kählerscher Metrik ist aus einem holomorphkonvexen Reinhardtschen Körper durch Herausnahme von komplex k-dimensionalen $(0 \leqq k \leqq n - 2)$ Achsen erzeugbar.
2. Ein Hartogsscher Körper des C^2 mit vollständiger Kählerscher Metrik und zweimal stetig differenzierbarem dreidimensionale Rand ist Holomorphiegebiet.
3. Ein Gebiet des C^n mit $(2n - 1)$-dimensionalem reellanalytischem Rand und vollständiger Kählerscher Metrik ist Holomorphiegebiet.

Bei der Betrachtung des Problems ergibt sich eine interessante Erweiterung eines schon von K. Kommerell in bezug auf euklidische Kählersche Metrik bewiesenen Satzes:

Eine Hermitesche Metrik in einem Gebiet G des C^n ist genau dann Kählersch wenn in bezug auf sie alle analytischen Mengen Minimalflächengebilde sind.

Die Resultate über vollständige Kählersche Metrik stehen in Analogie zu Eigenschaften der Carathéodoryschen Metrik, über die H. Horstmann auf dem Mathematischen Kongress 1932 in Zürich referierte. Für spezielle Gebiete G des C^n gilt: G ist genau dann Holomorphiegebiet, wenn bei der Carathéodoryschen Metrik alle Randpunkte von G unendlich fern sind.

(23) Haren-Ems, Emmelnerstr.

FLÄCHENDIFFERENZENRECHNUNG IN DER FUNKTIONENTHEORIE

H. Grunsky

Sei $\mathfrak{P}$ ein geradlinig berandetes Polygon in der z-Ebene mit den Ecken z_ν, $\nu = 1, \ldots, n$, $f(z)$ eine in $\mathfrak{P}$ einschliesslich Rand definierte Funktion. Unter der Flächendifferenz $\Delta_{\mathfrak{P}} f$ werde verstanden:

$$\Delta_{\mathfrak{P}} f = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (\varepsilon_{\nu-1}^{-2} - \varepsilon_\nu^{-2})\, f(z_\nu)$$

wo ε_ν mit $|\varepsilon_\nu| = 1$ die Richtung der Polygonseite $\overline{z_\nu, z_{\nu+1}}$ kennzeichnet. Ist $\mathfrak{P}$ ein achsenparalleles Rechteck, so ist $\Delta_{\mathfrak{P}}$ die alternierende Summe der Funktionswerte in den Ecken.

Weite Teile der gewöhnlichen Differenzenrechnung lassen sich auf die Formel gründen: $\int_0^1 f'(\xi)d\xi = f(1) - f(0)$; so erhält man aus ihr durch iterierte partielle Integration die Eulersche Summenformel, oder, allgemeiner, eine auch die Taylorsche Formel umfassende Formel von Darboux.

In analoger Weise erhält man hier entsprechende Formeln aus

$$\iint_{\mathfrak{P}} f''(z)\,(dz) = \Delta_{\mathfrak{P}} f(z), \quad (dz) = \text{Flächenelement},$$

wo $f(z)$ im abgeschlossenen $\mathfrak{P}$ regulär analytisch ist. Z.B. ergibt sich als Übertragung der Darbouxschen Formel:

$$\sum_{\varkappa=0}^{k} (-1)^{k-\varkappa}(k-\varkappa+1)\Delta_{\mathfrak{P}}\left(p_k^{(k-\varkappa)}(z)\, f^{(\varkappa)}(z)\right) = \iint_{\mathfrak{P}} p_k(z) f^{(k+2)}(z)\,(dz).$$

Hier ist $p_k(z)$ ein beliebiges Polynom k-ten Grades. Spezialisiert man es als „Bernoullisches" Polynom, so folgt eine „Eulersche Summenformel". Die Bernoullischen Polynome sind hier definiert durch:

$$B_0(z) = 1; \; B_n'(z) = nB_{n-1}(z); \quad \iint_{\mathfrak{P}} B_n(z)\;(dz) = 0 \text{ für } n \geqq 1.$$

Sie genügen der Differenzengleichung

$$\Delta_{\mathfrak{P}+\zeta} B_n(z) = n(n-1)\,|\mathfrak{P}|\,\zeta^{n-2},$$

wobei $\mathfrak{P} + \zeta$ das um ζ verschobene $\mathfrak{P}$ bedeutet, $|\mathfrak{P}|$ seinen Flächeninhalt.

Ein wesentlicher Unterschied gegenüber der gewöhnlichen Differenzenrechnung ist, daß jede weitere Umformung des Restgliedes durch partielle Integration nicht nur ein neues Glied liefert, sondern auf alle schon vorhandenen Glieder zurückwirkt, was in dem Koeffizienten $k - \varkappa + 1$ zum Ausdruck kommt.

(22b) Mainz, Am Gautor 3.

CONCORDANCE AND THE RIEMANN ZETA-FUNCTION

Andrew Paul Guinand

In 1909 Landau (1) proved results which led him to conjecture an arithmetical connexion between the prime numbers and the complex zeros of the

Riemann zeta-function, but no such "arithmetical" connexion has yet been found.

More recently Wintner (2) and I(3) have remarked that the connexion can be regarded as a Fourier reciprocity between the zeros $x = \gamma_n$ of $\zeta(\frac{1}{2} + ix)$, and $m \log p$, the logarithms of powers of primes. In particular, if $f(x)$ and $g(x)$ are Fourier cosine transforms of a certain class, then there exists a summation formula, analogous to Poisson's summation formula, connecting sums of the forms

$$\sum_{p,m} \frac{\log p}{p^{\frac{1}{2}m}} f(m \log p) \text{ and } \sum_n g(\gamma_n).$$

This suggests that we may elucidate the connexion between the γ_n and the $m \log p$ if we investigate the conditions which must be satisfied by weighted sequences (a_n, α_n) and (b_n, β_n) if there is to be a summation formula

$$\sum_n a_n f(\alpha_n) = \sum_n b_n g(\beta_n),$$

valid for some definite class of Fourier transforms $f(x)$ and $g(x)$.

We find that such summation formulae are associated with a special type of almost periodic functions whose frequencies are themselves almost periodic in a definite sense. I call these functions concordant functions. The concordant functions may be regarded as an intermediate class including the periodic functions (whose frequencies are necessarily periodic), but less general than the class of almost periodic functions (whose frequencies are quite unrestricted).

Further, we can define doubly concordant functions of a complex variable by double series analogous to the double series for the Weierstrass elliptic function $\wp(z)$. Conversely, it can be shown that any doubly almost periodic function of a certain type necessarily has some properties of double concordance.

Thus it appears that the connexion between the γ_n and the $m \log p$ is a reciprocity of a type associated with certain doubly almost periodic functions, and we may hope that further investigations of these functions might finally clarify the nature of this mysterious connexion.

References

[1] E. Landau, Primzahlen I (Leipzig, 1909) 367—368.
[2] A. Wintner, Duke Math. J. 10 (1943), 99—105.
[3] A. P. Guigand, Proc. London Math. Soc. (2) 50 (1948), 107—119, and 51 (1948), 401—414; Quart. J. of Math. (1) 18 (1947), 53—64 and 72—84.

Royal Military College of Science,
Shrivenham, Nr. Swindon, England

EIN EINDEUTIGER ORDNUNGSBEGRIFF BEI FUNKTIONEN MIT NULLBERANDETEM EXISTENZGEBIET

Gunnar af Hällström

H. Selberg bewies (Avh. Norske Vid.-Akad. Oslo I 1937, Nr 10) für die Ebene die Gültigkeit folgenden Satzes, den G. C. Evans schon früher (Monatsh. f. Math. u. Phys. 43, 1936) für den dreidimensionalen Fall bewiesen hatte: Ist E eine abgeschlossene Punktmenge verschwindender Kapazität, so gibt es eine im Restgebiet B harmonische Funktion $g(z)$, die bei Annäherung an E gegen ∞ strebt und sich in B regulär verhält bis auf einen Punkt O, wo sie negativ unendlich wird wie $\ln|z|$ in $z = 0$. Mit Hilfe der Niveaukurven $g(z) = \lambda$ als Ersatz für die Kreise $|z| = r$ habe ich in meiner Dissertation (Acta Acad. Aboensis, m. ph., XII : 8, 1939) für in B eindeutige analytische Funktionen die Gründe eines Analogons der Nevanlinnaschen Theorie der meromorphen Funktionen entwickelt. Seitdem haben auch M. Tsuji (Jap. Journ. Math. XIX : 1. 139—154, 1944) und K. Noshiro (ibid. XIX : 4, 299—327, 1948) dieselben Linien verfolgt. Bezeichnet hierbei $T(\lambda)$ die charakteristische Funktion von $f(z)$, so wird durch $s = \limsup \ln T(\lambda)/\lambda$ bzw. $S = \limsup \ln \ln T(\lambda)/\lambda$ eine Ordnung oder Hyperordnung von $f(z)$ definiert. Indessen ist die Funktion $g(z)$ von Evans-Selberg keineswegs eindeutig bestimmt, und dementsprechend hängt für gegebenes $f(z)$ die Grösse s bzw. S ebenfalls stark von $g(z)$ ab, was schon in meiner Dissertation gezeigt wurde. Trotzdem kommt z.B. bei T. Kuroda (Tôhoku Math. Journ. II 3 Nr 3, 1951) die Ordnung von $f(z)$ in Untersuchungen über die von $g(z)$ natürlich ganz unabhängige Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion von $f(z)$ vor. Bei dieser Sachlage scheint es angemessen, folgende minimisierende Grösse in Betracht zu ziehen: Wir führen die Bodenordnung $s_0 = \inf s$ bzw. die Bodenhyperordnung $S_0 = \inf S$ der Funktion $f(z)$ ein, wobei die s bzw. S alle Werte durchlaufen sollen, die sie für verschiedene $g(z)$ erhalten. Man stellt schon durch einfache Beispiele fest, dass bisweilen eine Funktion $g(z)$ existiert, für welche $s = s_0$ (bzw. $S = S_0$) gilt, während in anderen Fällen die untere Grenze der (Hyper) ordnungen für keine Potentialfunktion erreicht wird. Und im ersteren Fall brauchen zwei zu demselben Definitionsgebiet B gehörige Funktionen $f(z)$ keineswegs ihre Bodenordnungen bei Anwendung derselben Potentialfunktion $g(z)$ zu erreichen.

Vårdbergsg. 8 B, Åbo/Finland.

ON THE NON-REFLEXIVE L-FUNCTION SPACES

ISRAEL HALPERIN

Although L^p space is reflexive for $1 < p < \infty$ it is now wellknown that for $p = \infty$ this space fails to be reflexive and its conjugate space can be described by means of certain additive but not necessarily countably additive set functions. In recent articles the L^λ spaces have been introduced as a generalisation of the L^p spaces and the conjugate spaces determined for all but a class of non-reflexive spaces generalising the space L^∞; in the present paper the conjugate spaces are determined for the exceptional spaces.

QUEEN'S UNIVERSITY,
KINGSTON CANADA

INVARIANT RELATIF À LA CARACTÉRISTIQUE IMPLICITE DES ÉQUATIONS $s = f(x, y, z, p, q, r)$

GEORGES EDOUARD HEILBRONN

Dans notre Thèse (Paris, 1953) nous avons appliqué la méthode de Drach (Actes du Congrès de Bologne, 1928) à l'étude des invariants du 2d ordre des équations aux dérivées partielles: $s = f(x, y, z, p, q, r)$.

Les caractéristiques sont données par l'équation: $\dfrac{\partial f}{\partial r} dy^2 + dxdy = 0$, l'une est explicite: $\beta = y$, l'autre implicite, c'est l'intégrale de: $\dfrac{\partial f}{\partial r}\dfrac{\partial y}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = 0$. Nous complétons ici les résultats obtenus au sujet des invariants relatifs à la caractéristique implicite, problème, nous tenons à le souligner, qui n'était pas abordable par les méthodes classiques et dont l'étude montre la portée des méthodes de Drach.

Nous avons traité des invariants de forme: $A(x, y, z, p, r)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} = F(\alpha)$.

Nous abordons ici l'étude de: $A(x, y, z, p, q, r)\dfrac{\partial x}{\partial \alpha} + B(x, y, z, p, q, r)\dfrac{\partial r}{\partial \alpha} = F(\alpha)$.

En écrivant que la dérivée par rapport à β est nulle, on conclut que A et B sont indépendants de q et vérifient le système:

$$(1) \qquad -\frac{dA}{dx}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{dA}{dy} + \frac{\partial A}{\partial r}\frac{df}{dx} - A\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial r} + B\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

$$(2) \qquad -A\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} - \frac{dB}{dx}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{dB}{dy} + \frac{\partial B}{\partial r}\frac{df}{dx} + B\frac{\partial}{\partial r}\frac{df}{dx} = 0$$

où $\dfrac{d}{dx} = \dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial z} + r\dfrac{\partial}{\partial p} + s\dfrac{\partial}{\partial q}$ et $\dfrac{d}{dy} = \dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial z} + s\dfrac{\partial}{\partial p} + t\dfrac{\partial}{\partial q}$.

Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r^2} = 0$, l'équation (2) contient B seul et nous avons dû ici encore, nous borner à ce cas. Posant $f = ar + b$, où a et b dépendent de x, y, z, p, q, B vérifie:

$$(3) \qquad -a\left(\frac{\partial B}{\partial x} + p\frac{\partial B}{\partial z}\right) + \frac{\partial B}{\partial y} + q\frac{\partial B}{\partial z} + b\frac{\partial B}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial r}\left[B\left(\frac{da}{dx}r + \frac{db}{dx}\right)\right] = 0.$$

De ce que a et b ne dépendent pas de r et B pas de q, on déduit que B est *en général* de la forme suivante en r: $B = B_1 : (Dr^2 + Er + F)$, où B_1, D, E, F sont des fonctions dc x, y, z, p.

Il se présente un certain nombre de cas exceptionnels:

I. — *Equation linéaire en q.* On établit facilement que l'équation prend alors l'une ou l'autre des deux formes:

$$\text{(a)} \qquad s = (a_1 r + b_1)q$$

$$\text{(b)} \qquad s = a_1 r + b_1$$

où a_1 et b_1 sont fonctions de x, y, z, p.

Pour préciser la forme de B, nous avons supposé que a_1 et b_1 sont fonction de p et y seulement; on trouve que B_1 est une fonction arbitraire d'un argument: l'intégrale d'une équation de Riccati, qui donne r en p; puis $D = \dfrac{\partial a_1}{\partial p} + a_1^2$, $E = \dfrac{\partial b_1}{\partial p} + 2a_1 b_1$, $F = b_1^2$. A est alors déterminé par la même équation de Riccati et par une équation différentielle ordinaire dont la forme dépend de φ.

II. — Le cas où $b = la + mq + n$, où l, m, n sont des fonctions de x, y, z, p, ne donne pas de forme possible pour l'équation proposée.

III. — *Cas général*: Nous ne sommes pas encore parvenus à déterminer les formes de a et b pour que B soit indépendant de q. Nous nous contenterons de noter pour terminer, que si $\dfrac{\partial a}{\partial p} + \dfrac{\partial a}{\partial q}a = 0$, B est de la forme: $B_1 : (Dr + E)$ et on est amené à prendre a comme variable indépendante et q comme fonction: $q = ap + \varphi(x, y, z, a)$ et $b = b(x, y, z, p, a)$.

26 Rue Galilée, Paris (16°) France.

ZUR KONFORMEN ABBILDUNG EINFACH ZUSAMMENHÄNGENDER SCHLICHTER GEBIETE

Josef Heinhold

Wir betrachten den Einheitskreis $E_w(|w| < 1)$ als nichteuklidische Ebene mit Poincaréscher Metrik. Nach der Pickschen Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas wird durch jede in E_w unimodular beschränkte analytische Funktion der Einheitskreis auf sich oder einen Teil davon so abgebildet, dass die nicht-euklidische Entfernung zweier Punkte nicht zunimmt. Sie bleibt gleich nur bei nichteuklidischen Bewegungen in E_w. Wird daher umgekehrt ein Teilgebiet von E_z durch eine analytische Funktion auf den schlichten Einheitskreis E_w abgebildet, so wird hierdurch G nichteuklidisch expandiert. Eine eindeutige analytische Funktion, welche ein Teilgebiet G von E auf ein anderes Teilgebiet von E nichteuklidisch expandiert heisst eine „Schmiegungsfunktion" von G. Zu jedem Teilgebiet von E lassen sich Schmiegungsfunktionen angeben.

Die analytische Funktion, die ein im Einheitskreis gelegenes Gebiet G umkehrbar eindeutig und konform unter Vorgabe zweier einander entsprechender Linienelemente auf das ganze Innere des Einheitskreises abbildet, ist bis auf eine nichteuklidische Bewegung durch die Forderung maximaler Expansion von G bestimmt. Die Abbildungsfunktion lässt sich durch Iteration $f_{n+1}(z) = f_n(f_{n-1}(\ldots(f_1(z))\ldots))$ von Schmiegungsfunktionen f_ν beliebig genau approximieren. Für eine grosse Klasse von Gebieten kann man grundsätzlich Verfahren angeben mit Schmiegungsfunktionen, die jeweils zu einer einzigen Schmiegungsfunktion „nichteuklidisch kongruent" sind.

Für die praktische Durchführung der Abbildung nach diesem Verfahren kommen nur solche Schmiegungsfunktionen in Frage, die sich aus elementaren Funktionen (Potenz, Logarithmus, lineare Funktion) aufbauen und den Besonderheiten der bei den einzelnen Schmiegungsschritten abzubildenden Gebiete gut anpassen. Derartige Schmiegungsfunktionen erhält man, wenn man diese Gebiete in Teilgebiete von E einbetten kann, die sich bequem auf den ganzen Einheitskreis E abbilden lassen (z.B. elementare Schlitzabbildungen, Abbildungen von Kreissicheln und Kreisbogendreiecken mit zwei rechten Winkeln).

München-Solln, Irmgardstr. 15/II.

ÜBER DIE EXISTENZ EINER FLÄCHE KONSTANTER MITTLERER KRÜMMUNG BEI VORGEGEBENER BERANDUNG

Rudolf Walter Erhard Heinz

Es wird die Frage behandelt, in eine gegebene Jordankurve Γ des dreidimensionalen x-y-z-Raumes eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung H einzuspannen. Die analytische Formulierung des Problems lautet folgendermassen:

Man bestimme einen Vektor $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist zweimal stetig differenzierbar und erfüllt die Gleichung $\Delta\mathfrak{x} = 2H(\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)$ für $u^2 + v^2 < 1$.

(2) In $u^2 + v^2 < 1$ bestehen die zusätzlichen Gleichungen

$$\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = 0.$$

(3) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ ist stetig für $u^2 + v^2 \leqq 1$ und bildet den Einheitskreis $u^2 + v^2 = 1$ topologisch auf Γ ab.

Es wird bewiesen, dass dieses Problem für $|H| < \frac{1}{8}(\sqrt{17} - 1)$ stets lösbar ist, falls Γ als rektifizierbar vorausgesetzt wird und in der Einheitskugel $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 1$ enthalten ist. Für beliebige Werte von H ist das Problem im allgemeinen unlösbar. Im Falle $H = 0$ ist die obige Aufgabe identisch mit dem Plateauschen Problem, welches in den Arbeiten von J. Douglas und T. Radó allgemein gelöst wurde.

Göttingen, Bunsenstr. 3/5.

DAS ANFANGSWERTPROBLEM BEI PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN VON GEMISCHTEM TYPUS

Günter Hellwig

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(*) \qquad \big(a(x, y)u_x\big)_x - \big(c(x, y)u_y\big)_y = f(x, y)$$

in dem Rechteck $R\colon 0 \leqq x \leqq r,\ s \leqq y \leqq t$. Für $(*)$ soll ein Anfangswertproblem formuliert werden. Das Stück der y-Achse: $s \leqq y \leqq t$ wird als Anfangskurve K gewählt. Wir setzen voraus, daß $(*)$ in R—K von hyperbolischem Typus ist mit $a^2 + c^2 \neq 0$. Es ist zugelassen, daß auf K

1. die Differentialgleichung $(*)$ parabolisch wird oder
2. hyperbolisch bleibt aber $a^2 + c^2 = 0$ eintritt.

Gefragt wird nach den auf K zu stellenden Anfangsbedingungen, so daß Eindeutigkeit und Existenz der Lösung gewährleistet wird. Wenn (*) auf K parabolisch ist, so werden die zu stellenden Anfangsbedingungen noch davon abhängen, ob K (i) Träger der Spitzen der Charakteristiken oder (ii) Einhüllende der Charakteristiken ist. Der ausgezeichnete Fall, daß die Vorgaben $\lim\limits_{x\to 0} u(x, y) = u_0(y)$, $\lim\limits_{x\to 0} u_x(x, y) = u_1(y)$ gemacht werden dürfen, tritt außer beim klassischen Cauchy'schen Anfangswertproblem nur dann ein, wenn der Fall (i) mit $a^2 + c^2 \neq 0$ auf K vorliegt (bei geeigneten Voraussetzungen über die Koeffizienten in (*)). Eine naturgemäße Abgrenzung dieses Fragenkomplexes ist durch die Forderung bedingt, daß durch jeden nicht auf K gelegenen Punkt ein endliches „Einflußgebiet" mit denselben wertvollen Eigenschaften wie beim Cauchy-Problem erzeugt wird. Bei $(x^2 u_x)_x - u_{yy} = 0$ ist dies z.B. nicht mehr der Fall. Für die Methode (singuläre Integralgleichungen) ist die spezielle Form der Gleichung (*) nicht wesentlich.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT,
BERLIN-CHARLOTTENBURG, HARDENBERGSTR. 34.

HILBERT TRANSFORMS OF DISTRIBUTIONS IN R^n

JOHN HORVATH

Let $T = (T_1, \ldots, T_n)$ be a vectorial distribution in the sense of Laurent Schwartz, defined on R^n and such that $(1 + |x|^n)^{-1} . T_i \in (\mathfrak{D}'_{L^1})$ for $i = 1, \ldots, n$. The Hilbert transform of T is defined by $\mathfrak{H}\, T = T * H$, where $H = \pi^{-(\overline{n+1}/2)}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)$ v.p. $\frac{x}{|x|^{n+1}}$. Now suppose that $T_i \in (\mathfrak{D}'_{L^p})$ with $p > 1$ for $i = 1, \ldots, n$.

1. Suppose that R^n is an algebra over R having a basis $e_1, \ldots, e_n$, which satisfies $e_1^2 + \ldots + e_n^2 = 0$. Then if we put $T = e_1 T_1 + \ldots + e_n T_n$, the operation $\mathfrak{H}$ can be iterated and we have (*) $\mathfrak{H}^k T = T * H_k$, where

$$H_k = \frac{\Gamma\left(\frac{n+k}{2}\right)}{\pi^{n/2}\, \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \text{ v.p. } \frac{x^k}{|x|^{n+k}},$$

for $k = 1, 2, 3, \ldots$

If $n = 2$, $R^2 = C$ is a field over R. In this case $\mathfrak{H}$ admits also an inverse and (*) holds good for $k < 0$, if we put $H_{-k} = -H_k$. This result has been obtained before.

2. Suppose that R^n is identified with the elements of the form $x = e_1x_1 + \ldots + e_nx_n$ of a 2^n dimensional Clifford-algebra over R. This Clifford-algebra is generated by $n + 1$ elements $e_0, e_1, \ldots, e_n$, satisfying $e_0e_i = e_ie_0 = e_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, $e_ie_k + e_ke_i = 0$ $(i \neq k, i, k = 1, \ldots, n)$, $e_i^2 = e_0$. If we put again $T = e_1T_1 + \ldots + e_nT_n$, then $\mathfrak{H}$ admits an inverse and we have $\mathfrak{H}^{-1}T = T * H_{-1}$, where $H_{-1} = -H$.

All these relations follow simply from the fact that the Fourier transform of H_k is $(-i)^k y^k |y|^{-k}$.

Universidad de los Andes,
Calle 18-A, Carrera 1-E, Bogotá.

ÜBER DEN EINFLUSS VON RANDSTELLEN RIEMANNSCHER FLÄCHEN AUF DIE WERTVERTEILUNG

Friedrich Huckemann

Eine der wesentlichen Problemstellungen der modernen Funktionentheorie ist die Frage nach den gegenseitigen Beziehungen zwischen einer analytischen Funktion und der Riemannschen Fläche, die sie erzeugt. Insbesondere geht man von der Riemannschen Fläche als *primärer Gegebenheit* aus und fragt, wie ihr Verzweigungscharakter in der Wertverteilung der erzeugenden Funktion zum Ausdruck kommt. Es liegt in der Natur der Sache, dass die Randstellen der Fläche hier von entscheidendem Einfluss sind.

Die ausserordentlich komplizierte Struktur allgemeiner Randstellen brachte es mit sich, dass entweder sehr allgemeine Aussagen gemacht wurden (so der *Randstellensatz* über den Einfluss unmittelbarer Randstellen) oder sehr spezielle (etwa über den Einfluss der einfachsten Randstellen, der logarithmischen Windungspunkte). Bei Untersuchungen in der letzten Richtung erwies sich die Möglichkeit, eine bestimmte Klasse von Flächen durch einen Streckenkomplex darstellen zu können, als wichtiges Hilfsmittel. Eine allgemeinere Fassung des Streckenkomplex-Begriffes erlaubt nun, eine umfassendere Flächenklasse einer streckenkomplexmässigen Darstellung, und damit eine weit allgemeinere Klasse von Randstellen der Untersuchung zugänglich zu machen. Um den Einfluss der Randstellen möglichst rein herauszupräparieren, beschränken wir die Überlegungen auf solche Flächen, die, abgesehen von der durch die Randstellen bedingten Verzweigtheit, sehr einfach verzweigt sind.

Besitzt eine Randstelle auf einer solchen Fläche eine gewisse regelmässige Struktur, so können wir aus ihrer Bauart gewisse Zahlen gewinnen und der Randstelle als *Relativstärken* zuordnen; aus diesen ergibt sich in eindeutiger

Weise die *Wachstumsstärke* der Randstelle. Mit dem Begriff der Wachstumsstärke kann für die betrachteten Flächen der eingangs erwähnte Randstellensatz präzisiert werden: die Wachstumsordnung der erzeugenden Funktion ist gleich der Summe aus der halben Wachstumsstärke der Randstellen. Ebenso lässt sich aus den Relativstärken der Randstellen der Defekt einer Stellensorte gewinnen; damit wird ein Zusammenhang zwischen der Stärke der Randstellen über der Koordinate a mit dem Defekt der Stellensorte a hergestellt. Schliesslich gelingt es, durch Wahl von Randstellen geeigneter Stärken Funktionen mit im wesentlichen willkürlicher Defektverteilung zu konstruieren.

GIESSEN, KEPLERSTR. 9, DEUTSCHLAND.

ON SOLUTIONS OF THE GENERALIZED LAGUERRE DIFFERENTIAL EQUATION

ZLATKO JANKOVIĆ

Starting from the generalized Laguerre differential equation (i.e. confluent hypergeometric differential equation),

$$xQ_\nu^{s\prime\prime} + (s + 1 - x)Q_\nu^{s\prime} + \nu Q_\nu^s = 0 \tag{1}$$

(Q_ν^s is a solution for the values s and ν of the parameters), the author deduces directly from (1) three basic recurrence formulae for the solutions, further recurrence formulae following from them. These formulae are valid for all admissible values of the parameters s and ν, and contain two arbitrary factors c_ν and $f(\nu + s)$, the latter of which has to be determined for the special set of solutions in consideration.

The recurrence formulae are then applied to obtain the explicit form of solutions for integral values of the parameter ν, proceeding from the two linearly independent solutions for $\nu = 0$, directly deduced from the differential equation (1). Since we are able to determine $f(n + s)$ for each of the two linearly independent sets of solutions, we find the explicit form of solutions by induction. Among these solutions there are generalized Laguerre (or Sonine) polynomials for which the orthonormality relations and generating function are given. Furthermore, in the same way as (1), the differential equation is discussed

$$xy_\nu^{s\prime\prime} + (-s + 1 + x)y_\nu^{s\prime} + (\nu + 1)y_\nu^s = 0, \tag{1a}$$

the solutions of which are intimately connected with the solutions of (1) At the end some specializations, especially the case $s = k$, $\nu = n - k$ (associated

Laguerre differential equation) and $s = 0$ (original Laguerre differential equation) are discussed in detail, and some results, previously obtained by the author, are confirmed.

MARULIĆEV TRG 19
ZAGREB, JUGOSLAVIJA

GLIEDWEISE INTEGRATION UND EINZIGKEITSSÄTZE BEI TRIGONOMETRISCHEN REIHEN

WOLFGANG B. JURKAT

Während die gliedweise Integration von konvergenten oder Cesàro-summierbaren trigonometrischen Reihen bei Ordnungen < 1 unter natürlichen Voraussetzungen immer möglich ist, ist die gleiche Frage bei Summierbarkeit höherer Ordnung und erst recht bei Abel-Summierbarkeit nicht befriedigend gelöst. Störend wirkt vor allem die meist benutzte Bedingung, daß die Koeffizienten der Reihe gleich $o(n)$ sein sollen. Man wird danach streben, diese Koeffizientenbedingung durch allgemeinere Bedingungen über die dargestellte Funktion zu ersetzen. Dies ist tatsächlich möglich, wenn man nur trigonometrische Reihen betrachtet, deren Koeffizienten durch irgendeine (vielleicht große) Potenz von n beschränkt sind. Nehmen wir etwa an, daß die gegebene trigonometrische Reihe in einem offenen Intervall Abel-summierbar zu einer integrierbaren Funktion ist, so lassen sich sogar die genauen Bedingungen dafür angeben, daß alle durch mehrfache formale gliedweise Integration entstandenen Reihen in demselben Intervall Abel-summierbar sind und ihre Summen dort als entsprechend gebildete iterierte Integrale der durch die gegebene Reihe dargestellten Funktion aufgefaßt werden können. Solche Bedingungen sind z.B., daß die Abel-Summen aller $2p$-fach integrierten Reihen stetig sind oder daß die Abel-Summen aller q-fach integrierten Reihen vorhanden und integrierbar sind.

Aus den Sätzen über gliedweise Integration folgen natürlich leicht Einzigkeitssätze für trigonometrische Reihen, indem man so oft gliedweise integriert, bis man — wegen der Koeffizientenbedingung — auf Fourier-Reihen zurückkommt. Es ist interessant, neben den trigonometrischen Reihen auch Potenz-Reihen auf dem Rande des Einheitskreises zu untersuchen, was der gleichzeitigen Betrachtung von trigonometrischen Reihen und ihren konjugierten Reihen entspricht. Da bei Potenz-Reihen weitergehende Einzigkeitssätze gelten, ist es möglich, hier viel allgemeinere genaue Bedingungen für die gliedweise Integration anzugeben. Gliedweise Integration bedeutet im

Fall der Potenz-Reihen eine Verschiebung des Integrationsweges auf den Rand des Einheitskreises. Mit Hilfe des Riemannschen Abbildungssatzes kann man auch Verschiebungen des Integrationsweges auf allgemeinere Randkurven vornehmen.

TÜBINGEN/GERMANY, AMSELWEG 18.

VORZEICHENVERTEILUNGEN IN MATRIZEN

WOLFGANG B. JURKAT

Es werden zwei (unendliche) reelle Dreiecksmatrizen A und B mit nicht verschwindenden Diagonalgliedern und ihr Quotient $C = AB^{-1}$ betrachtet. Gefragt wird, unter welchen Voraussetzungen über A und B gewisse charakteristische Vorzeichenverteilungen der Elemente in C vorliegen. Hauptsächlich interessieren die Fälle, daß alle Elemente von C nichtnegativ sind oder daß alle Elemente von C mit Ausnahme der Diagonalglieder nichtpositiv sind. Für derartige Vorzeichenverteilungen können einfache hinreichende Bedingungen durch relative Monotonieeigenschaften der Elemente von A gegenüber denen von B angegeben werden. Fragen dieser Art spielen bei Vergleichs- und Äquivalenzsätzen für die durch A und B definierten Limitierungsverfahren eine grundlegende Rolle. Frühere, gemeinsam mit Herrn Peyerimhoff erhaltene Resultate in dieser Richtung, die auf der Einführung gewisser Mittelwertsätze beruhten, ordnen sich dem neuen Gesichtspunkt unter. Darüber hinaus ergeben sich auch eine Reihe weiterer Vergleichssätze allgemeiner Art. Die Mittelwertsätze selbst erklären sich durch Vorzeichenverteilungen der zweiten Art für die inverse Matrix, die auch typisch für Sätze Mercerscher Art sind. Durch Betrachtung der Transformationen von Reihen in Reihen wird die Methode auch auf absolute Vergleichssätze anwendbar. Die Ergebnisse lassen sich auffassen als Verallgemeinerungen früherer Sätze des Verf. über Nörlund-Verfahren und Vorzeichenverteilungen in Potenzreihen.

TÜBINGEN/GERMANY, AMSELWEG 18.

REMARQUE RELATIVE À LA SOMMATION DES SÉRIES DE FOURIER PAR LES PROCÉDÉS DE NÖRLUND

JOVAN KARAMATA

La série Σu_ν est dite sommable-(N, P_n) (Nörlund), lorsque $\lim\limits_{n=\infty} \frac{1}{P_n} \sum\limits_{\nu=1}^{n} P_{n-\nu} u_\nu$ existe; pour $P_n = \binom{n+\theta}{n}$ ce procédé se réduit à celui de Cesàro d'ordre θ, (C, θ).

Marcel Riesz a montré que *la série de Fourier de $f(x)$ est sommable-(C, θ), $\theta > 0$, en tous les points de continuité de $f(x)$.*

D'autre part E. Hille et J. D. Tamarkin ont démontré le théorème analogue relatif à la sommabilité (N, P_n), dont le cas particulier type est le suivant (v. A. Zygmund, Trigonometrical series, II ed. pp. 186—8, 1952).

Soit

$$P_n = \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu \to \infty, n \to \infty, \tag{1}$$

et

$$p_{n-1} \geqq p_n \to 0, n \to \infty; \tag{2}$$

pour que la série de Fourier de $f(x)$ soit sommable (N, P_n), en tous les points de continuité de $f(x)$, il faut et il suffit que

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu/\nu = O(P_n), n \to \infty. \tag{3}$$

Or, le théorème suivant semble n'avoir pas été remarqué:

Les conditions (1), (2) *et* (3) *étant remplies, il existe toujours un $\theta > 0$, tel que toute série sommable-(C, θ) est sommable-(N, P_n).*

En comparant ces deux théorèmes à celui de Marcel Riesz, il résulte que lorsque $p_n \geqq p_{n+1}$, les procédés (N, P_n) sont aussi efficaces que les procédés $(C, \theta), \theta > 0$, c. à d, que leurs champs d'application aux séries de Fourier des fonctions continues sont les mêmes.

GENÈVE, 3BIS AVENUE E. HENTSCH.

FUNCTIONAL EQUATIONS INVOLVING TRANSFORMATIONS OF „BOUNDED VARIATION"

IGNACE I. KOLODNER

Let X be a partially ordered linear space with topology consistent with the ordering. By this it is meant that each bounded monotonic sequence of comparable elements x_n has a unique limit $x \in X$ which itself is comparable with all x_n. A continuous transformation T on X into X is said to be of bounded variation on a subset S of X, if $T = G + H$, where G is a non-increasing and H a non-decreasing transformation on S. That is, if $x < y$, x, $y \in S$, then $G(x) \geqq G(y)$ and $H(x) \leqq H(y)$. By analogy with differentiable functions of a Real Variable, we write $G' \leqq 0$, $H' \geqq 0$.

Theorem 1: Let $\alpha, \beta \in X$, $\alpha < \beta$, $S[x : \alpha \leqq x \leqq \beta]$. If on S, $G' \leqq 0$, $G(x) \geqq \alpha$, and $G(\alpha) \leqq \beta$, then the equation $x = G^2(x)$ has at least the solutions $y = \lim G^{2n}(\alpha)$ and $z = \lim G^{2n+1}(\alpha)$, and $y \leqq z$. If this equation has at most one solution in S, then the equation $x = G(x)$ has at least one solution, $x = \lim G^n(\alpha)$. Furthermore, $\alpha \leqq G^{2m}(\alpha) \leqq x \leqq G^{2n+1}(\alpha) \leqq G(\alpha)$, for any m and n.

Theorem 2: If on S defined above, $H' \geqq 0$ and $\alpha \leqq H(x) \leqq \beta$, then the equation $x = H(x)$ has at least the solutions $y = \lim H^n(\alpha)$, $z = \lim H^n(\beta)$, and $y \leqq z$.

Theorem 3: If on S defined above, T is of bounded variation, that is $T = G + H$, $G' \leqq 0$, $H' \geqq 0$, and $G(x) \geqq \alpha$, $H(x) \geqq 0$, $G(\alpha) + H(\beta) \leqq \beta$, then the equation $x = (G(I - H)^{-1} G + H)(x)$ has at least the solutions $y = \lim x_{2n}$, $z = \lim x_{2n+1}$, where $x_0 = \alpha + H(\alpha)$, $x_1 = G(x_0) + H(\beta)$, and $x_n = G(x_{n-1}) + H(x_{n-2})$, and $y \leqq z$. If this equation has at most one solution in S, then the equation $x = T(x)$ has at least one solution $x = \lim x_n$. Furthermore, $\alpha + H(\alpha) \leqq x_{2m} \leqq x \leqq x_{2n+1} \leqq \beta$, for any m and n.

In addition to the above, several comparison theorems can be established. These considerations have important applications in establishing constructive existence proofs for solution of various functional equations. Application to linear integral equations is immediate, and the author found these results useful in handling certain integro-differential equations arising from the free boundary value problems for the heat equation.

Institute of Mathematical Sciences, NYU,
25 Waverly Pl., New York 3, New York.

MULTIPLIKATION VON DISTRIBUTIONEN

Heinz König

Definitionen eines allgemeinen Produktes für die Distributionen von L. Schwartz und Anwendungen.

Kiel (Deutschland), Ahlmannstrasse 15.

CHARACTERIZATION OF INTEGRALS AS SET FUNCTIONS

Klaus Krickeberg

The fundamental properties of integrals of the Darboux-Lebesgue-Stieltjes, Burkill or Kolmogoroff type as well as the possibility of characterizing these integrals in terms of extended-real-valued functions of the domain of integration depend on the algebraic structure of the lattice M of all "measurable" sets. Such characterizations, which have been first investigated by H. Hahn and M. Cotlar-Y. Frenkel, are founded on the notion of additive or semi-additive set function and on appropriate partial order relations on the set of all set functions on M. They are closely related to the existence of non-trivial finite measures on certain quotient-algebras of M.

MITTLERER DALLENBERGWEG 9,
WÜRZBURG, GERMANY

NEUE BEITRÄGE ZUR WERTVERTEILUNGSLEHRE

HANS P. KÜNZI

Eines der Hauptprobleme in der geometrischen Wertverteilungslehre besteht darin, Defekte, Verzweigungsindices und Ordnung einer meromorphen Funktion anzugeben, die nicht explizite, sondern nur durch die sie erzeugende Riemannsche Fläche bekannt ist. Von der allgemeinen Lösung dieses Problems sind wir heute allerdings noch weit entfernt. Gewisse Resultate in dieser Richtung wurden von Ullrich und Wittich erzielt, indem sie die Wertverteilung für diejenige Klasse Riemannscher Flächen angaben, deren Streckenkomplexe aus endlich vielen einfachperiodischen Enden (e.p. Enden) bestehen. Verf. ist es gelungen weitere Flächenklassen anzugeben, für die die Wertverteilung direkt aus den Streckenkomplexen bestimmt werden kann. Es handelt sich dabei um Streckenkomplexe mit doppeltperiodischen Enden (d.p. Enden). Die Hälfte eines d.p. Endes wird Viertelsenden oder V-Ende genannt. Es gelten über solche Enden die folgenden Sätze:

Eine erzeugende Funktion einer Riemannschen Fläche mit p einfach- und q doppeltperiodischen Enden weist keine Defekte auf, trotz dem Vorhandensein von $p + q$ logarithmischen Windungspunkten. Die einfachperiodischen Enden fallen für die Wertverteilung eines solchen Komplexes nur was die Ordnung anbetrifft, in Betracht. Diese ist i.a. nicht rational.

Ein einziges d.p. Ende fällt so stark ins Gewicht, dass bei nochsovielen e.p. Enden, die in endlicher Anzahl vorhanden sind, trotzdem keine Defekte auftreten können.

Streckenkomplexe mit V-Enden liefern uns Beispiele, für die die Ordnung der erzeugenden Funktionen abhängig werden von der Lage der Grundpunkte. Ordnung und Verzweigungsindices können transzendent sein.

FROHBURGSTRASSE 285, ZÜRICH.

SOME INDUCTION PRINCIPLES

George Kurepa

The main problem concerning any induction I in a given set S consists to know whether by the process I the set S is exhausted; this turns out to conclude that for given sets M, S one has $S \subseteqq M$ [as to references cf. Kurepa, Thèse Paris 1935, in particular pp. 21—25]. So the ordinary induction principle dealing with the set N of natural numbers assures $M \supseteqq N$ provided that: α) $1 \in M$ and β) $n \in M \cap N \to n + 1 \in M$ [cf. Kurepa, C.r. Paris, 233, 703—705 (1950)]. One can formulate several methods of exhaustion of S, in particular for ordered sets S; in this case, there is a connexion between internal properties of S and the kind of subsets of S by means of which the exhaustion of S takes place; henceforth S denotes any ordered set. — 1. $M \supseteqq S$ is equivalent with the statement that for each initial portion $p \subset S$ there is an initial portion $fp \supset p$ of S so that $fp \subseteqq M$. — 2. A_2S and B_2S are equivalent where A_2S, B_2S mean the following statements: A_2S: S is finite; B_2S: $M \supseteqq S$ is assured provided that α) M contains a segment of S, β) for each segment $s \subset S$, $s \subseteqq M$, M contains a still greater segment fs of S. — 3. A_3S and B_3S are equivalent for any ordered S for which each point is comparable to a point of $R_0 S =$ set of all initial points of S; A_3S: S is ranged i.e. each chain in S is well-ordered; B_3S: $M \supseteqq S$ is implied by α) $M \supseteqq R_0S$, β) $x \in S$, $ox \subseteqq M \cap S \to x \in M$. **4.** $A_4 S$ and $B_4 S$ are equivalent for each ramified set S; A_4S: no maximal chain in S has a gap; $B_4 S$ denotes the following induction principle: $M \supseteqq S$ provided that: α) M contains an initial portion of S coinitial with S, β) if $x \in S$ and $ox \subseteqq M$ then $x \in M$; moreover for each $x' \in S$ with $x < x'$ there is a $x'' \in (x\, x']$ such that $ox'' \subseteqq M$. — The ramification condition (for each $x \in S$ the set ox of all points $y \in S$ satisfying $y < x$ is a chain) is necessary. — 5. Let M, S be any sets, let DS denote a system of sets so that their union is S; then for a class of chain properties π one has the equivalence between A_5, B_5; A_5: For each $S' \subset S$ the system $PS' \cap DS$ ordered by $\subseteqq$ is either void or contains at least one maximal chain with the π-property; B_5: $M \supseteqq S$ is a consequence of α and β; α): There is a nonvoid $x \in D(S) \cap PM$, β): The system $(—, S)_{DS} \cap PM$ is $\neq 0$ and contains no maximal chain with the π-property [For the case $\pi =$ "has a last element" v. Popadić, Thesis, Zagreb 1953].

Def. A segment of S is any set of the form

$$\cup\, [a,\, b]_S \quad (a \in A,\ b \in B),$$

A, B being antichains of S so that $a > b$ for no $a \in A$, $b \in B$.

Zagreb, 6 Vinkoviceva,
Yugoslavia.

ON THE ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE THIRD ORDER IN A REGION CONTAINING A TURNING POINT

RUDOLPH ERNEST LANGER

The differential equation considered is

$$\frac{d^3y}{dz^3} + \lambda p_1(z, \lambda)\frac{d^2y}{dz^2} + \lambda^2 p_2(z, \lambda)\frac{dy}{dz} + \lambda^3 p_3(z, \lambda)y = 0. \tag{1}$$

λ is a parameter that is large in absolute value, and $p_j(z, \lambda)$ is of the form

$$p_j(z, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p_{j,n}(z)}{\lambda^n}, \quad j = 1, 2, 3. \tag{2}$$

The variable z is complex, and is in a region which contains a point (turning point) at which two of the roots of the auxiliary equation

$$x^3 + p_{1,0}(z)\, x^2 + p_{2,0}(z)\, x + p_{3,0}(z) = 0 \tag{3}$$

are equal. At this point the discriminant of the equation (3) is supposed to have a zero of the first order.

The method is based upon a "related" differential equation. Such an equation has to be constructed to have the properties, (i), that its coefficients are the same as those of equation (1) to terms of the order of $(1/\lambda)^m$, where m is an arbitrarily prescribed integer, and (ii), that its solutions are known. These solutions are given by formulas in terms of Bessel functions. The equation (1) is then written as an integral equation whose kernel and coefficient function are expressible in terms of the known solutions of the related equation. From this it is shown, that the z-plane and λ-plane can be divided into sub-regions in each of which the equation (1) has a fundamental set of solutions that are represented, with explicitness up to terms of the order of $(1/\lambda)^m$, by the known solutions of the related differential equation. The forms of any given set of solutions are thus determined over the whole z-region, and for all λ that are large in absolute value.

UNIVERSITY OF WISCONSIN

A METHOD IN THE VALUE DISTRIBUTION THEORY OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

OLLI LEHTO

Let $f(z)$ be meromorphic in $|z| < R \leqq \infty$, and let $n(r, a)$ denote the number of its a-points in $|z| \leqq r$. For the value distribution theory, mainly due to R. Nevanlinna, the integral

$$(1) \qquad N(r, a) = \int_0^r n(r, a) d \log r$$

is of fundamental importance.

In the classical theory $N(r, a)$ is primarily investigated as a function of r, while less consideration has been devoted to studying its dependence of the complex variable a. However, a systematic study of $N(r, a)$ as a function of a enables a simple and unified derivation of a number of known results. Moreover, in this manner the gap can be filled which is left open by Nevanlinna's theory embracing only functions with an unbounded characteristic function. Thus certain results of Seidel and Frostman concerning a special class of bounded functions can be sharpened and generalized in a far-reaching way.

It follows from (1) that

$$N(r, a) = \sum_i g(P_i, Q, F_r).$$

Here F_r denotes the Riemann surface onto which $w = f(z)$ maps $|z| < r$, $P_1, P_2, \ldots$ denote all points of F_r which lie over $w = a$, Q is the image of zero, and $g(P_i, Q, F_r)$ denotes the value at P_i of the Green's function of F_r with singularity at Q. This representation introduces a geometric aspect in the theory. Besides, it implies immediately that, except for $a = f(0)$, $N(r, a)$ is *subharmonic* in a.

This result alone proves often useful in studying functions of unbounded characteristic. For functions of bounded characteristic it can be precised as follows: Let Γ be a closed point set in the w-plane which contains the Fatou boundary values $w = f(Re^{i\varphi})$ for almost all φ. If D is an arbitrary domain outside Γ, then $N(R, a)$ is *harmonic* in D, except perhaps for a set of points of capacity zero. The points at which $N(R, a)$ is not harmonic represent values which $f(z)$ takes exceptionally seldom. By comparing $N(R, a)$ at these points with its least harmonic majorant, a concept of deficiency can be defined which also formally corresponds to the classical Nevanlinna deficiency for functions of unbounded characteristic. More detailed results about the nature of exceptional values can be obtained by studying the Riemann surface onto which $f(z)$ maps $|z| < R$. In particular, it is possible to illustrate the interrelation between the boundary behaviour and value distribution of $f(z)$.

TEMPPELIK. 19 D 39, HELSINKI

MESURES DE RADON ASSOCIÉES À UNE FONCTION PLURISOUSHARMONIQUE. APPLICATION AU CALCUL DES FONCTIONS ENTIÈRES DE n VARIABLES COMPLEXES AYANT DES ZÉROS DONNÉS

Pierre Lelong

1. Les dérivées $V^{i,\bar{j}} = \dfrac{\partial^2 V}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}$ d'une fonction plurisousharmonique $V(z_1, \ldots, z_n)$, considérées comme des distributions (au sens de L. Schwartz) sont, en fait, des mesures de Radon à valeurs complexes. On définit

$$\mu_{i\bar{j}}(\varphi) = \int V^{i,\bar{j}} \varphi \, d\tau;$$

$\mu_{k\bar{k}}$ est une mesure positive. Il en est de même de

$$\mu(\vec{\alpha}) = \sum_{i,j} V^{i,\bar{j}} \alpha_i \bar{\alpha}_j$$

dérivée dans une direction complexe donnée.

Pour que V soit plurisousharmonique dans D, il faut et il suffit que a) V soit sommable sur tout domaine compact dans D; b) que $\mu(\vec{\alpha})$ soit une distribution positive quel que soit $\vec{\alpha}$; c) qu'on ait $V = V_m$, où V_m est le vrai maximum de V (maximum en mesure) au point considéré.

Pour que V soit plurisousharmonique, il faut et il suffit encore que V soit sousharmonique pour toute métrique $ds^2 = 2\sum_{i,j} g_{ij} dz_i d\bar{z}_j$ hermitienne à coefficients g_{ij} constants.

2. Définissons la norme d'une mesure ν par

$$\| \nu \|_D = \sup. | \nu(f) | \text{ pour } | f | \leqq 1,$$

f continue de support $K_f \subset D$.

Soit $\mu = \sum_k V^{k\bar{k}}$. On a

$$\mu_{i\bar{j}}(f) = \sum_s \mu(\vec{\alpha}^s)(f) \bar{c}_i^s c_j^s.$$

Théorème. *Pour toute fonction plurisousharmonique dans D, on a*:

$$\| \mu_{ij} \|_D \leqq \| \mu \|_D.$$

3. Soit $V = \log | F(z_1, \ldots, z_n) |$, F holomorphe; soit $d\sigma$ l'aire de la variété $F = 0$, (finie et étudiée à partir de μ dans [3]), et soit $d\sigma_\alpha$ sa projection sur l'espace C^{n-1} orthogonal à $\vec{\alpha}$; on a:

$$\mu(\vec{\alpha})(f) = \frac{\pi}{2}\int_{F=0} f(z_1, \ldots, z_n)d\sigma_\alpha; \qquad \mu^{i\bar{j}}(f) = \frac{\pi}{2}\int_{F=0} f(z_1, \ldots, z_n)\frac{F^i F^j}{\sum_k |F^k|^2}d\sigma;$$

avec $F^k = \dfrac{\partial F}{\partial z_k}$, f fonction continue.

4. Soit $\{U_k, F_k\}$ une donnée de Cousin de zéros ou variété W^{n-1} dans C^n, les F_k étant holomorphes dans les domaines U_k qui forment un recouvrement localement fini de C^n. Elle engendre un courant ω de type $(1, 1)$:

$$\omega = i\pi^{-1}\sum_{p,\bar{\alpha}} V_k^{p,\bar{\alpha}} dz_p \wedge d\bar{z}_\alpha = \omega_k \ ; \quad V_k = \log . |F_k|; \ \omega_k = \omega_s \text{ dans } U_k \cap U_s.$$

L'aire $d\sigma$ de W^{n-1} est la mesure $d\sigma = 2\pi^{-1}(\sum_k V^{k\bar{k}})\,\beta_n = \omega \wedge \beta_{n-1}$; $\beta_p = \dfrac{1}{p!}\left(\dfrac{i}{2}\right)^p [\sum_i dz_i \wedge d\bar{z}_i]^p$. Soit Δ un domaine borné, et

$$U(z) = s_n^{-1}\int_\Delta d\sigma(a)\,|\,a - z\,|^{2-2n}, \quad s_n = 2\pi^{n-1}[(n-2)!]^{-1}.$$

Théorème. *Dans tout domaine D strictement intérieur à Δ, on a la décomposition*:

$$U^{p,\bar{\alpha}}(z) = A_{p,\bar{\alpha}}(z) + T_{p,\bar{\alpha}}$$

où les $A_{p,\bar{\alpha}}$ sont des fonctions harmoniques uniformes dans D (même sur la variété W^{n-1}) *et $T_{p,\bar{\alpha}}$ est une mesure de support W^{n-1} égale à $V_k^{p,\bar{\alpha}}$ dans U_k.*

A partir de ces deux résultats et des propriétés données dans [3] concernant la fonction croissante $\nu(R) = s_n'^{-1}\sigma(R)R^{2-2n}$, $(s_n' = (2n-2)^{-1}s_n)$, on obtient: si une donnée de Cousin W^{n-1} est d'ordre fini λ c'est à dire si $\limsup_{t=\infty} \dfrac{\log \nu(t)}{\log t} = \lambda$, il existe une fonction entière $F(z_1, \ldots, z_n)$ de l'ordre λ, telle que $F = 0$ soit W^{n-1} exactement; $\log |F|$ s' exprime comme potentiel de noyaux primaires $e_n\ (a, z, q)$ déduits du noyau $|a - z|^{2-2n}$, et définis dans [4], étendu à la mesure $s_n^{-1}d\sigma$. La méthode s'étend au cas de l'ordre infini. On étend ainsi la notion de produit infini de Weierstrass aux fonctions entières de n variables et on complète le théorème d'existence de Poincaré-Cousin par le calcul effectif permettant la comparaison des croissances de l'indicatrice $\nu(R)$ de la donnée W^{n-1} et de la fonction entière F.

En même temps est résolu le problème connexe de la détermination d'une fonction plurisousharmonique V dans C^n ayant un courant ω donné.

Bibliographie

[1] G. de Rham et K. Kodaira, Harmonic Integrals, Seminar of the Inst. for Advanced Study, Princeton, 1950.

[2] P. Lelong, Les fonctions plurisousharmoniques (Ann. Ec. Nor. Sup. **62**, 1945).

[3] P. LELONG, Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation (Ann. Ec. Norm. Sup. **67**, 1950).
[4] P. LELONG, Sur l'étude des noyaux primaires et sur un théorème de divisibilité des fonctions entières de n variables, Comptes rendus Ac. Sc. Paris, **237**, p. 1379, 1953.
[5] L. SCHWARTZ, Théorie des distributions t. 1, Actualités Scient. No 1091, Hermann, Paris 1950.

22 RUE DE LENS,
LILLE (NORD), FRANCE.

UTILISATION DE MÉTRIQUES NON EUCLIDIENNES DANS L'ÉTUDE DES TRANSFORMATIONS CONFORMES

JACQUELINE LELONG FERRAND

Il est classique [1], pour étudier certaines propriétés des fonctions $f(z)$ holomorphes dans $|z| < 1$, d'utiliser la métrique sphérique $d\sigma = \dfrac{|df|}{1+|f|^2}$ ou hyperbolique $d\sigma = \dfrac{|df|}{1-|f|^2}$.

Plus généralement nous définirons, sur la variété Σ décrite par f, une métrique (R) conforme en posant $d\sigma = e^\lambda |df|$; dans cette métrique l'aire totale A de Σ et la longueur $L(\varrho, \theta)$ de l'image du rayon $\operatorname{Arg} z = \theta$, $0 \leqq |z| \leqq \varrho$ sont liées par

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\frac{\partial L}{\partial \varrho}\right)^2 \varrho \, d\varrho \, d\theta. \tag{1}$$

Si $A < \infty$ et si L est sousharmonique dans $|z| < 1$, on montre, en utilisant une formule de A. Beurling [2], que L est de classe BL dans $|z| < 1$; et d'après J. Deny [3] $\lim_{\varrho\to 1} L(\varrho, \theta)$ existe pour quasi toute valeur de θ.

Pour que L soit sousharmonique, il suffit que λ le soit, ce qui est réalisé si R est de courbure Riemannienne $K \leqq 0$ car $\Delta\lambda = -K\,|f'|^2 e^{2\lambda}$.

Si la courbure K est de signe quelconque mais si $K^+ = \frac{1}{2}[K + |K|]$ satisfait à $\iint_\Sigma K^+ \, da < \infty$, où da désigne l'élément d'aire dans (R), λ est la somme d'une fonction sousharmonique λ_1 et d'un potentiel λ_2 de masse totale finie, et on en déduit encore la convergence de l'intégrale $L(1, \theta) = \int_0^1 e^\lambda |f'| \, d\varrho$ pour quasi toute valeur de θ.

Nous avons ainsi montré que si $A < \infty$ et si $\iint_\Sigma K^+ \, da < \infty$ [hypothèses réalisées en particulier si $K > 0$ et si la variété (Σ) est close dans la métrique (R)] la longueur non euclidienne de l'image de tout rayon $\operatorname{Arg} z = C$te est finie, excepté pour un ensemble de rayons découpant sur $|z| < 1$ un ensemble de capacité extérieure nulle. Ce résultat avait été demontré par J. Dufresnoy [4] pour la métrique sphérique en supposant f univalente.

Nous avons précédemment étendu la formule de Beurling à certains espaces de Riemann de dimension quelconque [5]; la formule (1) s'étend aux correspondances entre deux espaces de Riemann qui préservent l'harmonicité d'une fonction donnée r ainsi que les trajectoires orthogonales des surfaces $r = C$te, trajectoires supposées passer par un point fixe, car cela équivaut à l'égalité du rapport k des éléments de volume et du carré du rapport h des arcs orthogonaux à $r = C$te.

Mais pour étendre les résultats précédents il faut de plus faire une hypothèse sur Δk.

Les conclusions subsistent si le rapport $\frac{h^2}{k}$ est borné au lieu d'être égal à 1 (extension des transformations quasi-conformes).

[1] J. Lelong-Ferrand, Représentation conforme et transformations à intégrale de Dirichlet bornée. Paris, Gauthier Villars 1954.

[2] A. Beurling, Ensembles exceptionnels. Acta Math. 72, p. 1—13 (1940).

[3] J. Deny, Les potentiels d'énergie finie. Acta Math. 82, p. 107—189 (1950).

[4] J. Dufresnoy, Sur les fonctions méromorphes et univalentes dans le cercle unité. Bull. Soc. Math. Paris 69, p. 21—36 et 117—121 (1945).

[5] J. Lelong-Ferrand, C. R. Ac. Sc. Paris 236, p. 1227—1229 (1953).

22 Rue de Lens (Lille).

THE CONCEPT OF VOLUME FOR CONVEX BODIES IN HILBERT SPACE

Edgar Raymond Lorch

Using the notion of volume of order r previously introduced (Alcune estensioni del concetto di volume, Rend. Acc. dei Lincei, novembre 1953) there is developed a theory for volume for smooth convex bodies in Hilbert space. Let $\varphi(x)$ be a positive function which is positively homogeneous of order 1 and twice continuously differentiable in the sense of Gateaux. Let $G(x) = 2^{-1}\varphi^2(x)$ and let $G_y(x)$ and $G_{yz}(x)$ represent the first and second derivatives of $G(x)$ in the indicated directions. Then there is a self-adjoint transformation $\mathscr{G}(x)$ such that $G_{yz}(x) = (\mathscr{G}(x)\, y, z)$. It is required that $G(x)$ be positive definite and that $\mathscr{G}(x) - I$ be completely continuous with an absolutely convergent sum of characteristic values. If $\mathfrak{K}$ is the convex body defined by $\varphi(x) \leqq 1$, the conjugate body $\mathfrak{K}^*$ is introduced with the help of a homeomorphism generated by the derivatives of $G(x)$. The volume of rank 2 of $\mathfrak{K}^*$ is then defined as the integral over the unit sphere of the product of the characteristic values of $\mathscr{G}(x)$. An integral is defined as a bounded positive linear functional over a suitable Banach lattice B of continuous functions on the unit sphere which has the Daniell property (complete additivity of the corresponding measure) and which is unitary invariant.

VIA VAL D'OSSOLA 25, ROMA, ITALY.

FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN UND ERGODENSATZ

WILHELM MAAK

Wirkt in einem Hilbertraum H eine Gruppe unitärer Transformationen x, so sind die Bilder $x\,f$ eines Vektors f aus H "asymptotisch fastperiodische" Funktionen von x. Deshalb besitzen sie einen Integralmittelwert. Als unmittelbare Anwendung dieses Satzes ergibt sich das Birkhoffsche Ergodenlemma und ein Satz über die Aufspaltung von H in einen Raum F, bestehend aus fastperiodischen Vektoren und einen komplementären Raum N, dessen Vektoren "fast nie" Komponenten vorgegebener Richtung besitzen.

MÜNCHEN,
JOSEPHSPLATZ 5.

SUR LES PROBLÈMES AUX LIMITES MIXTES RELATIFS AUX ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

ENRICO MAGENES

Etant donnée dans le domaine borné $\mathscr{D}$ l'équation du type elliptique:

$$E(u) = \sum_{h,k}^{1,n} a_{h,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} + \sum_{h}^{1,n} b_h \frac{\partial u}{\partial x_h} + cu = f \tag{1}$$

l'auteur démontre des nouveaux théorèmes d'existence pour le problème aux limites mixtes que l'on obtient en donnant la solution u de (1) sur une portion $\mathscr{F}_1\mathscr{D}$ de la frontière $\mathscr{F}\mathscr{D}$ du domaine $\mathscr{D}$ et la dérivée conormale intérieure $\dfrac{du}{d\nu}$

sur l'autre portion $\mathcal{J}_2\mathcal{D}$ de $\mathcal{J}\mathcal{D}$. En résolvant avant tout un problème de Neumann pour (1), on peut ramenèr le problème mixte au suivant:

(2) $\quad E(u) = 0$

(3) $\quad u = \varphi$ sur $\mathcal{J}_1\mathcal{D}$ (φ fonction donnée)

(4) $\quad \dfrac{du}{d\nu} = 0$ sur $\mathcal{J}_2\mathcal{D}$.

On obtient alors, dans des hypothèses très générales sur les a_{hk}, b_h, c l'existence d'une solution de (2), (3), (4).

On démontre avant tout que les fonctions $\{W\}$, solutions de (2) avec les dérivées premières continues dans $\mathcal{D}$ et avec la derivée conormale nulle sur $\mathcal{J}_2\mathcal{D}$, forment un système complet pour l'approximation en moyenne sur $\mathcal{J}_1\mathcal{D}$; on démontre enfin que, si $\{W_i\}$ est une suite de fonctions de ce système, convergente en moyenne sur $\mathcal{J}_1\mathcal{D}$ à la fonction φ, elle converge aussi en moyenne sur $\mathcal{D}$ à une fonction u qui est solution de (2) et qui satisfait aux conditions (3) et (4).

La méthode employée permet aussi de démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de (2), satisfaisant à (4) et convergente „en moyenne" à la fonction φ sur un système particulier de variétés à $n - 1$ dimensions, qui de l'intérieur de $\mathcal{D}$ convergent d'une certaine façon à $\mathcal{J}_1\mathcal{D}$.

La méthode employée s'étend aussi aux problèmes mixtes relatifs aux équations du type parabolique, par exemple à l'équation de la chaleur:

$$\sum_h^{1,n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_h^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f \quad [(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D},\ 0 \leqq t \leqq t_0]$$

avec les conditions aux limites que l'on obtient en donnant la solution $u(x_1, \ldots, x_n, t)$ pour $t = 0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}$ et pour $0 < t \leqq t_0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{J}_1\mathcal{D}$ et sa dérivée normale intérieure pour $0 < t \leqq t_0$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{J}_2\mathcal{D}$, $\mathcal{J}_1\mathcal{D}$ étant une portion de $\mathcal{J}\mathcal{D}$ et $\mathcal{J}_2\mathcal{D}$ l'autre portion.

Istituto Matematico Università,
Modena, (Italia).

SUR LES INTERSECTIONS DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

Enzo Martinelli

Soient $f(x, y) = 0$, $g(x, y) = 0$ deux courbes analytiques complexes du plan complexe (x, y) et F, G les surfaces caractéristiques qui en sont images réelles dans l'espace euclidien 4-dimensionel S_4 que l'on identifiera au plan

(x, y). La multiplicité d'intersection de $f = 0$, $g = 0$ dans un point algébroide commun P, peut être interprétée comme degré d'enlacement des courbes réelles intersections de F, G avec une hypersurface sphérique Σ de rayon assez petit, entourant le point P dans S_4. Une nouvelle démonstration topologique du théorème de Bézout s'en suit lorsque $f = 0$, $g = 0$ sont algébriques. — Représentation par des intégrales de dimension 2 ou 3 du nombre total des intersections de $f = 0$, $g = 0$ dans une région de S_4. — Extensions au cas de variétés de dimension supérieure.

GENOVA (ITALIA),
SALITA SUPERIORE S. SIMONE, 15.

PROPERTIES OF MINIMAL DOMAINS

MICHAEL MASCHLER

In generalizing the methods of the theory of functions of one complex variable to the case of several complex variables (in particular in problems connected with pseudo conformal transformation) — S. Bergman introduces the notion of the kernel function. With the help of this function he then produces mappings on various standard domains. (S. Bergman—Sur la fonction-noyau d'un domaine et ses applications dans la théorie des transformations pseudoconformes, Mémorial des Sciences Mathématiques, vol. 108, Paris, 1948). The most important of these domains are the minimal domains and the representative domains. M. Schiffer gave necessary conditions for a minimal domain to be schlicht, (M. Schiffer — Sur les domaines minima dans la théorie des transformations pseudo-conformes, Comptes Rendus, Acad. Sc., Paris, vol. 207, 1938).

The author shows a number of characteristic properties of minimal domains; e.g.

i. D is a minimal domain (with respect to the origin) if and only if $K_D(z_1, z_2; 0{,}0) = \text{constant}$ $((z_1, z_2) \in D)$. The value of this constant is $1/V$ where V is the volume of D. From this follows:

ii. D is a minimal domain if and only if for every function $f(z_1, z_2) \in L^2(D)$, the relation

$$f(0{,}0) = \frac{1}{V} \iiiint\limits_D f(z_1, z_2) d\omega$$

holds, V denotes the volume of D, $d\omega$ is the element of volume.

(Similar theorems hold also for plane minimal domains, in the case of one variable).

iii. If D is a minimal product domain $D = D_1 \times D_2$, then and only then D_k, $k = 1, 2$ are minimal domains in the z_k-planes.

The last theorem can be generalized to other classes of domains. By using the above theorems other properties of minimal domains are obtained.

APPLIED MATH. AND STATISTICS LABORATORY,
STANFORD UNIVERSITY, STANFORD, CALIFORNIA.

ÜBER DIE ABGESCHLOSSENHEIT EINES FUNKTIONENSYSTEMS

KARL-FELIX MOPPERT

Jede in $\langle 0, 1 \rangle$ stetige Funktion kann nach dem Weierstrass'schen Satz in Bezug auf den Raum L^2 durch die Menge der positiv ganzen Potenzen von x approximiert werden. Nach einem Satz von Müntz genügt hierfür jede Menge $M = \{x^{p_i}\}$, sofern eine gewisse Reihe divergiert. Die Tatsache, dass hier die Divergenz einer gewissen Reihe aequivalent mit der Abgeschlossenheit eines gegebenen Funktionensystems ist, lässt sich weitgehend verallgemeinern.

Zur Betrachtung herangezogen werden eindeutige Funktionen $f(z_i, x)$, für die die Funktion $\varphi(z_{\nu_i}, z_k) = \int_0^1 f(z_i, x) \bar{f}(z_k, x)\,dx$ existiert, sofern z_i und z_k einem gewissen Bereich der komplexen z-Ebene angehören. Die Funktion φ soll in jenem Bereich eine analytische Funktion jeder der beiden Variabeln sein und dort mit einer meromorphen Funktion übereinstimmen. Ist nun für das System der Funktionen $f(z_i, x)$ eine gewisse Unabhängigkeitsbedingung erfüllt und sind die z_ν so wählbar, dass das System abgeschlossen ist, so kann jene Reihe explizit angegeben werden, deren Divergenz die Abgeschlossenheit des Systems $f(z_i, x)$ garantiert.

Ausser der prinzipiell interessierenden Tatsache, dass sich die Frage nach der Abgeschlossenheit eines Systems also in einem ziemlich allgemeinen Fall auf die Frage nach der Divergenz einer Reihe reduzieren lässt, kann dann noch ein einfaches Kriterium für die Dichte bezw. die Minimal-Dichte eines Systems der obengenannten Art gegeben werden.

BASEL, NAUENSTR. 16.

A DIFFERENTIAL EQUATION FOR FORCED UNDAMPED NON-LINEAR OSCILLATIONS

Grainger R. Morris

The equation is

$$\ddot{x} + 2x^3 = e(t), \tag{1}$$

where $e(t)$ is even and has least period 2π. I prove that it has an infinity of periodic solutions, among them solutions whose least periods are arbitrarily large multiples of 2π.

Since (1) has unique solutions and is unchanged when t is replaced by $-t$, we see that *if a solution has $\dot{x}(0) = 0$ a necessary and sufficient further condition for it to have period $2m\pi$ is that $\dot{x}(m\pi) = 0$.* (We use m, n, p and s to denote positive integers).

We compare the solutions of (1) with those of

$$\ddot{y} + 2y^3 = 0. \tag{2}$$

Any solution for which $\dot{y}^2 + y^4 = h^4$ has least period $2\tilde{\omega}/h$ where $\frac{1}{2}\tilde{\omega} = \int_0^1 (1-u^4)^{-\frac{1}{2}} du$; in particular $y_n(t)$ with $y_n(0) = \tilde{\omega}n/\pi$ and $\dot{y}_n(0) = 0$ has least period $2\pi/n$. If the solutions of (2) are represented by curves in $(y, \dot{y}, t)$-space, each curve spirals around the t-axis. Any curve for which $\dot{y}^2 + y^4 = (\tilde{\omega}n/\pi)^4$ makes exactly $\frac{1}{2}n$ revolutions about the t-axis in time π, that is arc tan $(-\dot{y}/y)$ increases by $n\pi$. If $\eta(t)$ is a fixed solution curve, then, since no two solution curves intersect,

$$\theta(t) = \text{arc tan}\left(-\frac{\dot{y}(t) - \dot{\eta}(t)}{y(t) - \eta(t)}\right)$$

is defined as a continuous function of t when $\theta(0)$ has been assigned and depends continuously on $y(t) \neq \eta(t)$. Choose $\eta(t) = y_p(t)$; then $\eta(t)$ has period 2π and remains inside the tube $\dot{y}^2 + y^4 = \{\tilde{\omega}(p + \frac{1}{2})/\pi\}^4$. If $n > p$, $y_n(t)$ remains outside this tube and it is easy to see that $y_n(t)$ makes $\frac{1}{2}n$ and $y_{n+1}(t)$ makes $\frac{1}{2}(n+1)$ revolutions about $\eta(t)$ in time π. Similarly they make $\frac{1}{2}mn$ and $\frac{1}{2}(mn+m)$ revolutions in time $m\pi$, and *the set of solution curves for which $y_n(0) \leqq y(0) \leqq y_{n+1}(0)$ and $\dot{y}(0) = 0$ forms a twisted strip, the boundaries of which make $\frac{1}{2}mn$ and $\frac{1}{2}(mn+m)$ revolutions about $\eta(t)$ in time $m\pi$.*

Approximate calculations enable us to prove the existence of analogous periodic solutions $\xi(t)$, $x_n(t)$ and $x_{n+1}(t)$ of (1) and to show that the twisted strip formed by the solutions with $x_n(0) \leqq x(0) \leqq x_{n+1}(0)$ and $\dot{x}(0) = 0$ has boundaries which make $\frac{1}{2}mn$ and $\frac{1}{2}(mn+m)$ revolutions about $\xi(t)$ in time $m\pi$.

If $0 < s < m$ there is, since θ is continuous, a solution curve of the strip which makes $\frac{1}{2}(mn + s)$ revolutions in time $m\pi$. This means there is a solution of (1) for which $\dot{x}(0) = \dot{x}(m\pi) = 0$. *Such a solution has period $2m\pi$; if s is prime to m, $2m\pi$ is its least period.*

UNIVERSITY COLLEGE,
HULL, ENGLAND.

ÜBER DIE INTEGRATION DER POISSONSCHEN GLEICHUNG AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

LAURI J. MYRBERG

Es sei F eine beliebige abstrakt definierte offene Riemannsche Fläche, und ferner sei $\varrho(P)$ eine auf F mit ihren ersten Ableitungen stetige reelle Funktion, die sich bei der konformen Abbildung $z_h \to z_k$ gemäss der Formel

$$(1) \qquad \varrho(z_h) = \varrho(z_k) \,.\, |\operatorname{grad} x_k(x_h, y_h)|^2 \qquad (z_n = x_n + iy_n)$$

transformiert. Es sollen alle auf F mit ihren ersten und zweiten Ableitungen stetigen Lösungen der Poissonschen Gleichung

$$(2) \qquad \Delta u = -\varrho(P)$$

gefunden werden. Die Gleichung (2) bleibt invariant bei der konformen Abbildung $z_h \to z_k$.

Es sei $G(P, Q)$ eine auf F, vom Punkte Q abgesehen, harmonische Funktion, die in Q wie $-\log \overline{PQ}$ unendlich wird. Wenn nun das Flächenintegral

$$(3) \qquad u(Q) = \frac{1}{2\pi} \iint_F G(P, Q) \,.\, \varrho(P) \,.\, d\sigma$$

auf jeder kompakten Teilfläche von F gleichmässig konvergiert, so stellt es eine Lösung der Gleichung (2) dar. Wenn dagegen (3) divergent ist, so soll es konvergent gemacht werden durch Subtraktion einer geeigneten harmonischen Funktion.

Wir bilden zuerst die Funktion

$$(4) \quad u_0(Q) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \iint_{M_n} \left[G(P, Q) - \sum_{k=0}^{p_n} (a_n^k \cos k\varphi + b_n^k \sin k\varphi) \,.\, r^k \right] . \, \varrho(P) \,.\, d\sigma,$$

wo folgende Bezeichnungen gebraucht sind:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ist eine Polygonale Zerlegung, F_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ eine Ausschöpfung von F.

2. a_n^k, b sind Fourierkoeffizienten von $G(P, Q)$ im Parameterkreis $|z_n| < 1$, der das Bild von M_n enthält. Sie sind harmonische Funktionen von Q auf F, vom Punkte $z_n = 0$ abgesehen, wo sie einen Pol (für $k = 0$ eine logarithmische Singularität) besitzen.

3. Die ganzen Zahlen p_n sind so gewählt, dass für $P \in M_n$, $Q \in F_n$

$$\left| G(P, Q) - \sum_{k=0}^{p_n} (a_n^k \cos k\varphi + b_n^k \sin k\varphi) \cdot r^k \right| \leqq \frac{B_n}{\iint_{M_n} |\varrho(P)| \cdot d\sigma},$$

wo B_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ positive Konstanten sind, deren Summe $\sum_{n=1}^{\infty} B_n$ konvergiert.

Unter den obigen Voraussetzungen stellt der Ausdruck (4) eine Lösung der Gleichung (2) dar, die auf der in den Mittelpunkten der Parameterkreise punktierten Fläche F regulär ist. Es sei nun h_0 eine auf der punktierten Fläche harmonische Funktion, welche in den genannten Mittelpunkten dieselben Singularitäten wie u_0 besitzt. Dann ist die Differenz $u_1 = u_0 - h_0$ eine reguläre Lösung von (2).

Die allgemeine Lösung von (2) hat die Form $u = u_1 + h$, wo h eine beliebige auf F harmonische Funktion ist.

Bei spezieller Wahl der Fläche F können genauere Resultate erhalten werden. Es sei F z.B. die komplexe z-Ebene. Wir nehmen an, das Anwachsen von $\varrho(z)$ sei so begrenzt, dass das Integral

$$\int_a^{\infty} \frac{m(r)}{r^n}\, dr,$$

wo

$$m(r) = \iint_{|z|<r} |\varrho(z)| \cdot dx\, dy,$$

konvergiert. Dann hat die Gleichung (2) eine Lösung u_1 mit folgender Eigenschaft:

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\mu(u_1, r)}{r^n} = 0,$$

wo

$$\mu(u_1, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_1(re^{i\varphi})| \cdot d\varphi.$$

Durch diese Eigenschaft ist u_1 bis auf ein additives harmonisches Polynom, höchstens vom Grade $n - 1$, eindeutig bestimmt. Analoge Resultate können erhalten werden, wenn F ein endlicher Kreis ist.

PIHLAJATIE 50, HELSINKI, FINLAND

ÜBER EINE AUSDEHNUNG VON A. TARSKI'S ALGEBRAISCHER INHALTSTHEORIE

WALTER NEF

Es möge bedeuten: R eine Menge, Γ eine Gruppe von eineindeutigen Abbildungen von R auf sich, E eine feste Untermenge von R (Einheitsmenge). A. Tarski hat bewiesen [1]:

Dann und nur dann existiert ein für alle E-beschränkten Untermengen von R definierter (d.h. universeller) Inhalt (Definition des Inhaltes s.u.), wenn E bezüglich Γ nicht paradoxal zerlegbar ist, d.h. wenn E nicht in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt werden kann, von denen jede mit E zerlegungsgleich ist.

Dieses Resultat soll hier verallgemeinert werden. Wir definieren:

1. Ein *Inhaltsfeld* ist ein System $\mathfrak{M}$ von E-beschränkten Untermengen von R mit folgenden Eigenschaften:

a. $\mathfrak{M}$ ist ein Mengenring, *b.* $\mathfrak{M}$ ist invariant gegenüber Γ, *c.* $E \in \mathfrak{M}$.

2. Ein *Inhalt* auf einem Feld $\mathfrak{M}$ ist eine reelle nichtnegative Funktion φ auf $\mathfrak{M}$ mit folgenden Eigenschaften:

a. Aus $A, B \in \mathfrak{M}$, $A \cap B = 0$ folgt $\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

b. Aus $A \supseteqq B$ folgt $\varphi(A) \geqq \varphi(B)$.

c. $\varphi(A^\sigma) = \varphi(A)$ $(\sigma \in \Gamma)$ (A^σ bedeutet das Bild von A bei der Abbildung σ).

3. A und B seien zwei Mengen aus einem Feld $\mathfrak{M}$. Sie heissen zerlegungsgleich bezügl. M: $A \approx B(\mathfrak{M})$, wenn

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k,\ B = \bigcup_{=1}^{n} B_k,$$
$$A_k, B_k \in \mathfrak{M},\ A_k \cap A_l = B_k \cap B_l = 0 \text{ für } k \neq l,$$
$$A_k \simeq B_k (k = 1, \ldots, n).$$

A heisst zerlegungsgrösser als B bezügl. $\mathfrak{M}$: $A \gtrsim B(\mathfrak{M})$, wenn $A', B' \in \mathfrak{M}$ existieren, sodass $A \approx A' \supseteqq B' \approx B(\mathfrak{M})$.

4. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subseteqq \mathfrak{M}$. Ein auf $\mathfrak{L}$ definierter Inhalt φ heisst zerlegungsmonoton bezügl. $\mathfrak{M}$, wenn aus $A, B \in \mathfrak{L}$, $A \gtrsim B(\mathfrak{M})$ folgt $\varphi(A) \geqq \varphi(B)$.

Die Gesamtheit aller E-beschränkten Mengen ist ein Feld, das wir universelles Feld nennen und mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen. Ein auf $\mathfrak{B}$ definierter Inhalt heisst universeller (auch Banachscher) Inhalt.

Ein weiteres Beispiel ist das sogenannte elementare Feld, $\mathfrak{E}$, das von der Einheitsmenge E erzeugt wird. $\mathfrak{E}$ ist in jedem andern Feld als Unterfeld ent-

[1] A. Tarski, Algebraische Fassung des Massproblems, Fund. Math. 31 (1938) 47—66.

halten. Die Existenz eines Inhaltes auf irgendeinem Feld hat deshalb die Existenz eines Inhaltes auf dem elementaren Feld zur Folge.

An *Resultaten* seien in Kürze die folgenden mitgeteilt:

1. $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ seien zwei Felder und $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$. Ein auf $\mathfrak{L}$ definierter Inhalt lässt sich dann und nur dann auf $\mathfrak{M}$ fortsetzen, wenn er bezüglich $\mathfrak{M}$ zerlegungsmonoton ist.

Spezialfall: Ein auf irgendeinem Feld definierter Inhalt lässt sich dann und nur dann zu einem universellen Inhalt fortsetzen, wenn er zerlegungsmonoton (schlechthin, d.h. bezügl. $\mathfrak{B}$) ist.

2. Auf einem Feld $\mathfrak{M}$ existiert dann und nur dann ein Inhalt, wenn aus $m . E \gtrsim n . E$ ($\mathfrak{M}$) folgt $m \geqq n$. Dabei bedeutet $m . E$ eine Menge von der Form $\bigcup_{k=1}^{m} E^{\sigma_k}$, $E^{\sigma_k} \cap E^{\sigma_l} = 0 (k \neq l)$, $\sigma_k \in \Gamma (k = 1, \ldots, m)$.

Spezialfall a.: Setzt man $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}$, so erhält man im wesentlichen den erwähnten Satz von A. Tarski.

Spezialfall b.: Bei gegebenen R, Γ, E existiert dann und nur dann ein Feld und ein Inhalt auf demselben, wenn aus $m.E \gtrsim n.E (\mathfrak{E})$ folgt $m \geqq n$. (Dann existiert nämlich ein Inhalt auf dem elementaren Feld $\mathfrak{E}$).

SCHLOSSTRASSE 11,
KÖNIZ BE, SWITZERLAND.

AN INTEGRAL EQUATION ASSOCIATED WITH A FUNCTION-THEORETIC EXTREMAL PROBLEM

ZEEV NEHARI

Let D be a finite domain in the complex z-plane which is bounded by a finite number of rectifiable Jordan arcs or curves C. This paper is concerned with the study of the following extremal problems: A) $\int_{C_1} | f(z) |^2 ds = 1$, (*) $\int_{C} | f(z) |^2 ds = \text{minimum}$ $(| dz | = ds)$, where $f(z)$ ranges over the class of analytic functions which are regular and single-valued in D and for which the integral (*) exists; B) $\iint_{D_1} |f(z)|^2 dxdy = 1$, (**) $\iint_{D} |f(z)|^2 dxdy = \text{minimum}$, where $f(z)$ is such that the integral (**) exists, and C_1 and D_1 denote subsets of D consisting, respectively, of a finite number of rectifiable Jordan arcs or curves, or of a finite number of domains. It is shown that problem (A) is solved by the solution (or solutions) of the integral equation (***) $f(\zeta)=\lambda\int_{C_1} K(z,\zeta)f(z)ds$ associated with its smallest eigenvalue, where $K(z, \zeta)$ denotes the Szegö kernel function of D. Similarly, the solution of problem (B) is identical with the fundamental solution (or solutions) of the integral equation $f(\zeta) = \mu\iint_{D_1} k(z, \zeta)f(z)\,dx\,dy$, where $k(z, \zeta)$ is the Bergman kernel function of D. It is further shown that the solutions of both problems are related, by means of characteristic boundary identities, to certain "conjugate" functions.

A number of other properties of the solutions of problems (A) and (B) are derived, of which the following may serve as an example: Let C_1 bound a subdomain D_1 of D and let $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ be points of D_1. If $a_1, \ldots, a_n$ are arbitrary complex constants and $K_1(z, \zeta)$ is the Szegö kernel of D_1, then $\lambda \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu K(\zeta_\mu, \zeta_\nu) \leqq \sum_{\nu,\mu=1}^{n} a_\nu \bar{a}_\mu K_1(\zeta_\mu, \zeta_\nu)$, where λ is the minimum value of the integral (*) (and also the lowest eigenvalue of (***)). The constant λ is the best possible.

WASHINGTON UNIVERSITY, ST. LOUIS.

ON THE SINGULARITIES OF SOLUTIONS OF LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE ELLIPTIC TYPE

E. NETANYAHU

In the present paper we consider differential equations of elliptic type which in complex notation assume the form $L(u) \equiv u_{zz^*} + au_z + a^*u_{z^*} + cu = 0$, $z = x + iy$, $z^* = x - iy$. The functions $a \equiv a(z, z^*)$, $c \equiv c(z, z^*)$ are assumed to be entire functions (if a and c are not entire functions the results obtained can be formulated in terms of the domains of regularity of these functions).

In generalizing the relations between harmonic and analytic functions the Bergman integral operator $p(g(z))$ (See S. Bergman, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 53 (1943) and the papers mentioned there) associates with every real solution $U(z, z^*)$ of $L(u) = 0$ an analytic function $g(z)$ of one complex variable, so that $U(z, z^*) = \operatorname{Re}\{p(g(z))\}$.

Let

$$U(z, z^*) = \sum_{m,k=0}^{\infty} D_{mk} z^m z^{*k} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(z) z^{*k},\ D_{mk} = D^*_{km},$$

be a real solution of $L(u) = 0$, then the following theorem holds:

If $U_k(z)$, $k > 0$, is not an entire function, then in every simply connected domain D, $O \in D$, in which $U_k(z)$ is regular, the real solution has, at most, finitely many isolated singularities.

The proof of this theorem is based on the following lemmas:

I. In the complex solutions $p(g(z)) \equiv u(z, z^*) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(z^*)z^k$ the functions $u_k(z^*)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, are entire functions.

II. If $v_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{mk} z^m$, $k > 0$, is not an entire function, then in every simply connected domain D, $O \in D$, in which $v_k(z)$ is regular the complex solution $u(z, z^*) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(z) z^{*k}$ of $L(u) = 0$ has, at most, finitely many isolated singularities.

The proofs of the lemmas rest on the possibility of the following representations: $u_k'(z) + e_{1,k}(z)\, u_k(z) + e_{2,k}(z)\, u_0(z) + e_{3,k}(z)\, u_0'(z) = 0$,

$$v_k'(z) + f_{1,k}(z)\, v_k(z) + f_{2,k}(z)\, v_0(z) + f_{3,k}(z)\, v_0'(z) = 0,$$

where $e_{i,k}(z)$, $f_{i,k}(z)$, $i = 1, 2, 3$, are entire functions.

MATH. DEPARTMENT, STANFORD UNIV.
STANFORD, CALIFORNIA, U.S.A.

EIN ALGORITHMUS FÜR NORMALFUNKTIONEN

WALTER NEUMER

Sei Λ eine reguläre Ordnungszahl $> \omega$ und $\mathfrak{F} = \{\alpha_\nu\}_{\nu > \Lambda}$ eine stetige Folge wachsender Zahlen α_ν mit $0 < \alpha_\nu < \Lambda$, d.h. α_ν eine Normalfunktion von $\nu < \Lambda$. Es bedeute A eine auf jedes solche $\mathfrak{F}$ anwendbare Vorschrift, mittels derer man aus $\mathfrak{F}$ eine Teilfolge $\mathfrak{F}A$ vom selben Charakter wie $\mathfrak{F}$ gewinnen kann, wobei α_0 nicht mehr in $\mathfrak{F}A$ vorkommt. Zum Beispiel kann man unter A den Übergang von $\mathfrak{F}$ zur Folge $\mathfrak{F}_1$ der kritischen Zahlen von $\mathfrak{F}$ verstehen. In diesem Falle schreiben wir S für A, so daß $\mathfrak{F}S = \mathfrak{F}_1$ wird. — Allgemein kann man definieren:

$$\mathfrak{F}A^{\xi+1} = (\mathfrak{F}A^{\xi})A \text{ für } \xi < \Lambda \quad (\mathfrak{F}A^0 = \mathfrak{F})$$

$$\mathfrak{F}A^{\lambda} = \bigcap_{\xi<\Lambda} \mathfrak{F}A^{\xi} \text{ für } \lambda < \Lambda,\ \lambda \text{ Limeszahl.}$$

Indem wir mit $\mathfrak{F}/(1)$ das erste Glied einer Folge $\mathfrak{F}$ bezeichnen, definieren wir

$$\mathfrak{F}AS' = (\{\mathfrak{F}A^{\xi}/(1)\}_{1 \leq \xi < \Lambda})S,$$

d.h. $\mathfrak{F}AS'$ ist die Folge der kritischen Zahlen der Folge $\mathfrak{F}A^{\xi}/(1)$, $1 \leqq \xi < \Lambda$. Nun kann man die Folgen $\mathfrak{F}(AS')^{\xi}$, $1 \leqq \xi < \Lambda$, bilden und entsprechend wie vorhin definieren:

$$\mathfrak{F}AS'^2 = \mathfrak{F}(AS')S' = (\{\mathfrak{F}(AS')^{\xi}/(1)\}_{1 \leqq \xi < \Lambda})S.$$

Allgemein gelangt man zu den Folgen $\mathfrak{F}AS'^{\xi}$, $1 \leqq \xi < \Lambda$, und definiert

$$\mathfrak{F}AS'S'' = (\{\mathfrak{F}AS'^{\xi}/(1)\}_{1 \leqq \xi < \Lambda})S.$$

In sinngemäßer Fortsetzung gelangt man zu $\mathfrak{F}AS'S''S'''$ usw. und definiert

$$\mathfrak{F}AS'S''S''' \ldots = \bigcap_{n} \mathfrak{F}AS' \ldots S^{(n)} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Man bekommt so einen Algorithmus für Normalfunktionen in formaler Analogie zu dem in [3] entwickelten Algorithmus für Ordnungszahlen. Aber es besteht auch ein direkter Zusammenhang zwischen beiden Algorithmen. Versteht man nämlich unter V einen beliebig iterierbaren Operator im Sinne von [3] und nimmt für $\mathfrak{F}$ die Folge

$$\mathfrak{F} = \{\alpha V^{\nu}\}_{\nu < \Lambda} \quad (\alpha V^0 = \alpha,\ 0 < \alpha < \Lambda),$$

so ergibt sich bei der zusätzlichen Bedingung $\beta V \geqq \beta \,.\, \omega$ mit den Symbolen $I, I', I'', \ldots$ von [3], daß

$$\mathfrak{F}S^{\xi} = \{\alpha(VI^{\xi})^{\nu}\}_{\nu \leqq V < \Lambda}, \quad \xi < \Lambda,$$

wird und analog

$$\mathfrak{F}SS'^{\xi} = \{\alpha(VII'^{\xi})^{\nu}\}_{\nu \leqq V < \Lambda}, \quad \xi < \Lambda,$$
$$\mathfrak{F}SS'S'' = \{\alpha(VII'I'')^{\nu}\}_{1 \leqq \nu < \Lambda}, \quad \xi < \Lambda$$

usf. Den Symbolen S, S', S'', ... entsprechen also die Symbole I, I', I'', ...

Es wird daher $\mathfrak{F}S^{\xi}/(1) = \alpha VI^{\xi}$, $\mathfrak{F}SS'^{\xi}/(1) = \alpha VII'^{\xi}$ usf. und $\mathfrak{F}SS'S'' \ldots/(1) = \alpha VII'I'' \ldots$

Sei nun $\beta W = \beta \,.\, \Lambda$. Dann kann man in Verallgemeinerung einer Methode von O. Veblen [4[allen Zahlen $\gamma \leqq \Gamma = 1WII'I'' \ldots$ gewisse Folgen $\mathfrak{F}_{\gamma}$ zuordnen durch die Definitionen $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}_1$

$$\mathfrak{F}_{\gamma+1} = (\mathfrak{F}_{\gamma})S,\ \gamma < \Gamma,$$
$$\mathfrak{F}_{\lambda} = \bigcap_{\eta < \lambda^*} \mathfrak{F}_{\gamma_{\eta}},\ \text{wenn}\ \lambda = \lim_{\eta < \lambda^*} \gamma_{\eta} < \Gamma,\ \lambda^* < \Lambda,$$
$$\mathfrak{F}_{\lambda} = (\{\mathfrak{F}_{\gamma_{\eta}}/(1)\}_{\eta < \Lambda})S,\ \text{wenn}\ \lambda = \lim_{\eta < \Lambda} \gamma_{\eta} < \Gamma,$$
$$\mathfrak{F}_{\Gamma} = \bigcap_{n} \mathfrak{F}_{1WII'I'' \ldots I^{(n)}} (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die Folgen $\{\gamma_{\eta}\}_{\eta < \lambda^*}$ sind dabei für jede Limeszahl $\lambda < \Gamma$ vermöge des Algorithmus der Opertoren $W, I, I', I'', \ldots$ eindeutig bestimmt, wenn man für die $\lambda \leqq \Lambda$ festsetzt: $\lambda = \lim\ (1 + \nu)$.

$\nu < \lambda$

Es wird u.a. $\mathfrak{F}S^{\xi} = \mathfrak{F}_{\xi}$ für $\xi < \Lambda = 1W$, $\mathfrak{F}SS'^{\xi} = \mathfrak{F}_{1W^{\xi}}$ für $\xi < 1W$, $\mathfrak{F}SS'S'' = \mathfrak{F}_{1W^{1W}}$ usw., $\mathfrak{F}SS'S'' \ldots = \mathfrak{F}_{1WI}$.

Die Bildung von Folgen $\mathfrak{F}_{\gamma}$ mit $\gamma > 1WI$ induziert offenbar eine Fortführung des Algorithmus für Normalfunktionen über $\mathfrak{F}SS'S'' \ldots$ und damit des Algorithmus für Ordnungszahlen über $\alpha VII'I'' \ldots$ hinaus, wozu natürlich die Einführung neuer Symbole erfordert wird. Wie weit sich das explizit realisieren läßt, kann man nicht ohne weiteres beantworten. Andererseits ist es jedoch möglich, wenn man $\Lambda = \Omega = \omega_1$ und $\mathfrak{F} = \{1V^{\nu}\}_{\nu<\Omega} = \{\omega^{\nu}\}_{\nu<\Omega}$ mit $\beta V = \beta \, . \, \omega$ setzt, mittels der Folgen $\mathfrak{F}_{\gamma}(\gamma < \Gamma)$ nach dem Vorbild von H. Bachmann und A. Denjoy ([1] und [2]) jeder Limeszahl des durch $\mathfrak{F}_{\Gamma}/(1)$ bestimmten Abschnitts der zweiten Zahlenklasse eine kanonische Fundamentalfolge zuzuordnen.

Literaturangaben

[1] H. Bachmann, Die Normalfunktionen und das Problem der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen. Dissertation Zürich (1950).

[2] A. Denjoy, L'énumération transfinie. Livre II, 2e partie: Les suites canoniques. Paris 1952.

[3] W. Neumer, Zur Konstruktion von Ordnungszahlen; I und II. Math. Zeitschr., **58**, S. 391—413 (1953) und **59**, S. 434—454 (1954).

[4] O. Veblen, Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals. Transactions of the Amer. Math. Soc. **9** (1908).

Mathematisches Institut,
Saarstrasse 21, Mainz.

ÜBER DIE LINEAREN RANDWERTPROBLEME ELLIPTISCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEME

Johannes Nitsche

Betrachtet wird das Randwertproblem

$$(*) \quad w_{\bar{z}} = P(z, \bar{z}; w, \bar{w}) \text{ in } T, \quad \Re\{e^{-i\sigma(s)} w\} = h(s) \text{ auf } S = \text{Rand } (T)$$

(T einfach zus.-häng.). Die Lösungsverhältnisse hängen, wie man weiß, vom Index n ab, wobei $2\pi n$ = Zuwachs des Winkels $\sigma(s)$ beim Umlaufen von S, (Hilbert, Noether, Hornich, Haack-Hellwig, Vekua).

1. Im linearen Fall, $P \equiv A(z, \bar{z})w + B(z, \bar{z})\bar{w} + F(z, \bar{z})$, gilt: Die Anzahlen N_T und N_S der Nullstellen in T und auf S einer Lösung w des homogenen Problems ($F = h = 0$) erfüllen die Ungleichung $2N_T + N_S \leqq 2n$. (Wenn man auf Voraussetzungen am Rand verzichtet, so muß, falls $w \not\equiv 0$ in T,

jedenfalls die unendliche Reihe der Abstände der Nullstellen vom Rande konvergieren). Wenn $n \geqq 0$, so existiert genau eine Lösung $w(z, \bar{z})$ von $(*)$, welche den Bedingungen

$$(+) \qquad \oint_S e^{2\pi i k \frac{s}{L}} \cdot \mathfrak{Im}\,(e^{-i\alpha(s)} w)\, ds = c_k, \qquad -n \leqq k \leqq n$$

($c_k = \bar{c}_{-k}$ beliebige Konstante, $L =$ Länge von S) genügt. Wenn $n < 0$, so ist $(*)$ im allgemeinen unlösbar. Es existiert dann aber genau eine Funktion

$$(-) \qquad \tilde{h}(s) = h(s) + \sum_{k=-(|n|-1)}^{|n|-1} c_k e^{2\pi i k \frac{s}{L}},$$

so daß $(*)$ mit $\tilde{h}$ statt h eindeutig lösbar ist. In beiden Fällen lassen sich mit Hilfe verallgemeinerter „Greenscher Funktionen" Auflösungsformeln angeben.

2. Bei nicht-linearer rechter Seite P ist im Falle $n \geqq 0$ bzw. $n < 0$ die Lösung durch die Beziehung (+) bzw. (—) eindeutig bestimmt, d.h. es treten keine Verzweigungen auf. Jede Lösung hat eine volle Umgebung. Unter passenden Beschränktheitsvoraussetzungen über die Funktion P oder das Gebiet T läßt sich die Existenz der Lösung sicherstellen. Anwendung auf die Differentialgleichungen $\Delta\varphi = f(x, y; \varphi_x, \varphi_y)$ und $A(x, y; p, q) \cdot r + 2B(x, y; p, q) \cdot s + C(x, y; p, q) \cdot t + D(x, y; p, q) = 0$.

BERLIN W 15.

UNIFORMLY ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF NON-LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

CHIKE OBI

A general problem in the theory of nonlinear differential equations of the second order is: Given a non-linear differential equation of the second order uniformly almost periodic (u.a.p.) in the independent variable and with certain disposable constants (parameters) to find (i) the non-trivial relations between these parameters such that the given d.e. has a non-periodic u.a.p. solution, (ii) the number of periodic and non-periodic u.a.p. solutions which correspond to each such relation, and (iii) explicit analytical expressions for the u.a.p. solutions when they exist.

This paper transfers this problem expressed in terms of a differential equation to another problem expressed in terms of analytic implicit functions and shows that under certain general conditions there exist a pair of functions $\xi_r(\alpha, \beta, \varepsilon)$, $(r = 1, 2)$, such that if the solution of the equation

$$\ddot{x} + \chi(x) = k_1 f_1(x, \dot{x})\dot{x} + k_2 f_2(x) + \varepsilon g(x, \dot{x}, t),$$

ε, k_2 small, $f_1(x, \dot{x}) > 0$, x say, with a vertex α at $t = \beta$, is u.a.p., then $k_r = \xi_r(\alpha, \beta, \varepsilon)$ and conversely.

Properties of these functions which would enable one to calculate them include analyticity and the circumstance that if $x = x(\alpha, \beta, k_r, \varepsilon, t) = x(\alpha, \beta, \xi_r(\alpha, \beta, \varepsilon), \varepsilon, t)$ is expanded in powers of ε, the coefficients are separately u.a.p. in t.

UNIVERSITY COLLEGE,
IBADAN, NIGERIA.

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY OF PROBABILITY IN ANALYSIS

ALBERT CYRIL OFFORD

We consider various families of functions defined by means of some law of distribution and obtain results about the distribution of values of the functions.

BIRKBECK COLLEGE,
LONDON W.C. 1, ENGLAND.

GROSS'S STAR THEOREMS AND THEIR APPLICATIONS

MAKOTO OHTSUKA

W. Gross [Math. Zeit. 2 (1918), pp. 242—294] gave two theorems about a branch, defined in a star-shaped domain, of the inverse of a meromorphic function. One of these is a generalization of the so-called Gross's star theorem in Monatsh. Math. Phys. 29 (1918), and has been an object of recent investigations by Tsuji, Yûjôbô, Kaplan and Noshiro.

First we discuss Gross's two theorems for classes of continuous transformations, which are more general than classical quasi-conformal transformations, of plane domains into (abstract) Riemann surfaces.

These extensions of Gross's theorems are followed by their applications to problems on the boundary correspondence under a mapping of a domain of a Riemann surface into another Riemann surface. Our results are related to several works by Beurling, Dufresnoy, Pfluger, Tsuji, (T) Yosida and Kaplan. In particular, Beurling-Dufresnoy's theorems are generalized to our classes of transformations, and the following problem is proposed: Given a conformal mapping of a Jordan domain onto a unit circle, under what conditions is a set of positive logarithmic (or, in general, α-) capacity on the boundary mapped onto a set of positive capacity on the unit circumference? An example is given to show that the rectifiability of the boundary does not guarantee the positiveness of logarithmic capacity on the unit circumference.

Next a conjecture by Noshiro on cluster sets of pseudo-analytic functions is discussed. The conjecture was already affirmed by T. Yosida, but we apply an extension of Gross's star theorem to obtain a more general result.

Through all applications an important role is played by the fact that on a Riemann surface R with positive boundary a Green's function and its conjugate induce a conformal mapping of a bounded star-shaped domain into R such that the images of almost all rays of the domain converge to the ideal boundary of R. A similar idea was used by Kaplan to prove a theorem of Beurling.

No. 61, Maison du Japon,
9 Bd. Jourdan, Paris (14e).

THE ASYMPTOTIC EXPANSION OF LEGENDRE FUNCTIONS OF LARGE ORDER

Frank William John Olver

By applying transformations to the defining differential equation of the functions $P_n(z)$ and $Q_n(z)$, new expansions are obtained for these functions and their derivatives in terms of the Bessel functions J_0, Y_0 and their derivatives, which are valid when n is a large number, real or complex. That there exists a connexion between Legendre functions of large order and Bessel functions of zero order is well known; the advantage of the new expansions is that they are *uniformly* valid with respect to z throughout the half-plane $\operatorname{Re} z \geqq 0$. The associated functions $P_n^m(z)$ and $Q_n^m(z)$ may be investigated in a similar way, and the expansions in their case are in terms of Bessel functions or order m and their derivatives.

Reversion of the expansions yields powerful series for the zeros of Legendre functions, and these in turn lead to interesting results concerning the distribution of the zeros in the complex plane.

National Physical Laboratory
Teddington, Middlesex, England

ON A CONJECTURE IN THE PROBLEM OF TYPE FOR SIMPLY-CONNECTED RIEMANN SURFACES

ROBERT OSSERMAN

This paper settles a conjecture presented by L. Bers at the conference on Riemann Surfaces held at Princeton in December 1951. One considers a surface $z = f(x, y)$ where $f(x, y)$ is a single-valued continuous function defined over the whole (x, y)-plane. If the surface is sufficiently regular it may be considered as a Riemann surface by virtue of the metric inherited from its imbedding in three-space. Every such surface is obviously simply-connected and hence must be conformally equivalent either to the unit circle or the whole plane. The conjecture was that the latter, or parabolic case, is the only one which can occur. (It had already been proved that this was the case if $f(x, y)$ defined a surface of revolution.) The conjecture is proved false by the construction of a surface which can be shown to be conformally equivalent to the unit circle.

19 QUAI ST. MICHEL,
PARIS V.

CALCUL SYMBOLIQUE ET ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

HENRI PAILLOUX

I. $\Omega(X_i)$ étant un opérateur à coefficients constants des n variables symboliques $X_i = \partial/\partial x_i$, la considération de l'équation aux dérivées partielles généralisée $[T - \Omega(x_i)]u(t, x_i) = 0$, $(T = \partial/\partial t)$, conduit aux résultats suivants. Sa solution générale peut s'écrire 1°. $u(t, x_i) = e^{t\Omega(X_i)}f(x_i)$, f étant une fonction arbitraire; 2°. $u(t, x_i) = A^t(X_i)f(x_i)$, avec $A = e^{\Omega}$. On en déduit que $A(X_i)f(x_i) = u(1, x_i)$; $A^{-1}(X_i)f(x_i) = u(-1, x_i)$. 3°. $u(t, x_i) = \varphi(X_i)u_0(t, x_i)$, u_0 étant une solution particulière, et $\varphi(X_i)$ un opérateur *arbitraire*. Pour deux solutions u_1 et u_2 de l'équation, il existe un opérateur indépendant de T, tel que $u_2(t, x_i) = \Omega_1(X_i)u_1(t, x_i)$.

II. Etant donnée l'équation $(T^m + M_1T^{m-1} + \ldots + M_m)u(t, x_i) = 0$, où les M_k sont des opérateurs à coefficients constants indépendants de T, les racines de l'équation $b^m + b^{m-1}M_1(a_i) + \ldots + M_m(a_i) = 0$ étant distinctes, si on connait des solutions particulières $u_1, \ldots, u_m$ fonctionnellement linéairement indépendantes, la solution générale s'écrit $u(t, x_i) = \sum_{k=1}^{m}\mu_k(X_i)u_k(t, x_i)$, les μ_k étant des opérateurs arbitraires indépendants de T.

III. Soit l'équation $[T - \Omega(x_i, X_i)]\,u(t, x_i) = 0$, où l'opérateur dépend des variables x_i, mais non de t. Si on connait une solution particulière $v(t, x_i, a_i)$ dépendant de n paramètres indépendants a_i, la fonction $u(t, x_i) = \int_{D(a_i)} v(t, x_i, a_i)\varphi(a_i)d\tau$ ($d\tau$ représente l'élément de volume dans le domaine fixe d'intégration $D(a_i)$) est une solution quelle que soit la fonction arbitraire φ. On peut alors définir un opérateur dépendant des variables x_i par la relation suivante, $A^t(x_i, X_i)f(x_i) = \int_D v(t, x_i, a_i)\varphi(a_i)d\tau$, la fonction φ étant connue par l'équation intégrale $f(x_i) = \int_D v(0, x_i, a_i)\varphi(a_i)d\tau$. En particulier l'opérateur $A(x_i, X_i)$ est obtenu pour $t = 1$, et son inverse $A^{-1}(x_i, X_i)$ est obtenu pour $t = -1$.

168 Rue Caponière,
Caen, France.

SUR LA NOTION DE DIFFÉRENTIELLE EXTÉRIEURE

Georges Leopold Papy

1. La différentielle extérieure de Cartan, d se décompose en le produit $d = BAB^{-1}$ où A est l'opérateur linéaire qui consiste à multiplier extérieurement à gauche par $dx_1 + \ldots + dx_n$ et où B est l'opérateur, linéaire par rapport aux constantes scalaires, défini par

$$B\,f(x_1, \ldots, x_n)\,.\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n} = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\,.\,dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_n}.$$

Si l'on prend comme champ de fonctions, les fonctions analytiques dans un certain domaine ou en un point, on en déduit que le groupe différentiel (C, d), où C désigne l'ensemble des formes différentielles extérieures est isomorphe au quotient du groupe différentiel (C, A) par le sous-groupe permis $(B^{-1}\,0, A)$. Ainsi, la différentielle extérieure classique apparaît comme la multiplication extérieure à gauche par $dx_1 + \ldots + dx_n$, modulo un sous-groupe attaché à cette forme linéaire.

2. Cette définition de la différentielle extérieure classique comme opérateur-quotient, est à rapprocher d'une définition du même type et qui, elle, met en relief le caractère invariant de la différentielle extérieure. On considère l'algèbre tensorielle T du module des formes de Pfaff, et l'on tente de définir la différentielle d'un tenseur en différentiant brutalement les coefficients. Comme

on le sait, la „différentielle" D ainsi définie dépend du choix des coordonnées locales. Si E parcourt l'ensemble des changements de coordonnées, l'ensemble $I = \cup_E (DE - ED)T$ est un idéal de T, stable pour D, et engendré par les tenseurs complètement décomposables admettant deux facteurs de Pfaff identiques. Il suit que $T/I = C$ est l'algèbre extérieure différentielle et que la différentielle d est le quotient de D.

3. On a généralisé la notion de différentielle extérieure en prenant la formule de Stokes comme base de définition. On a pu montrer, en utilisant des méthodes d'approximation, que les théorèmes classiques relatifs à la différentielle de Cartan subsistent dans le cas de la différentielle Stokienne. Ces résultats s'obtiennent de manière plus simple par des méthodes directes, et peuvent être complétés en certains points par la considération des opérateurs A et B définis plus haut.

On montre que la différentielle généralisée admet également la décomposition BAB^{-1} laquelle fournit donc une définition de la différentielle plus adéquate et plus générale que la définition classique. Si l'on tient compte, d'autre part de l'invariance de la différentielle stokienne, on en déduit la généralisation des théorèmes classiques sans utiliser les méthodes d'approximations.

4. Pour la Bibliographie, voir G. Papy, Bull. Cl. Sc. Ac. Roy. Belgique, 1954, p. 28.

40A, AVENUE DE L'HORIZON,
BRUXELLES.

PROPERTIES OF POLYGONAL MEANS OF FUNCTIONS

FRED WILLIAM PERKINS

Let $u(x, y)$ be continuous in a finite domain D of the x, y plane. With each point P of D we associate a regular polygon with center at P. It is not necessary that these polygons have the same number of sides. We denote by a the radius of the inscribed circle of an arbitrary polygon S_a centered at P and homothetic with the first polygon. Certain functions of x, y and a associated with u and S_a are considered, such as the arithmetic means of u on the vertices, on the radial lines drawn to the vertices, on the sides and over the area; these are denoted by $l_a u$, $\mathscr{L}_a u$, $L_a u$ and $\mathfrak{L}_a u$ respectively.

Various identities involving these means are established. If u has continuous partial derivatives of the second order ($u \in C^2$) then several relations of significance in the theory of harmonic and subharmonic functions may be obtained. As an example we note that the arithmetic mean of $t^2\mathfrak{L}_t(\nabla^2 u)$ on

$0 \leqq t \leqq a$ is $6a^{-2}(L_a u - \mathscr{L}_a u)$ whence $\nabla^2 u = 6 \lim_{a\to 0} a^{-2}(L_a u - \mathscr{L}_a u)$. Here, and in some other parts of the theory the results remain valid in the limiting form in which the homothetic polygons associated with some or all points P are replaced by concentric circles. These relations yield, with the aid of a smoothing process, refinements of results due to Choquet and Deny [Bull. Soc. Math. France t32 (1944) pp. 118—140], related to Bilger's thesis [Geneva, 1942]. Other results obtained show that two necessary and sufficient conditions that a function u, continuous in D, be harmonic in D is that, for every P in D and all sufficiently small positive a,

$$u = L_a u + \int_0^a \frac{L_t u - l_t u}{t}\, dt, \text{ and } u = \mathfrak{L}_a u + 2\int_0^a \frac{\mathfrak{L}_t u - \mathscr{L}_t u}{t}\, dt.$$

Some analogous problems for regular polyhedra and for spheres are investigated.

8 Prospect St., Hanover,
New Hampshire, U.S.A.

LOKALISATIONSSÄTZE FÜR ABSOLUTE CESÀRO-SUMMIERBARKEIT VON TRIGONOMETRISCHEN REIHEN

Alexander Peyerimhoff

Der Vortrag befasst sich mit der Frage, wie die absolute Cesàro-Summierbarkeit einer trigonometrischen Reihe an einer Stelle mit dem Verhalten einer gewissen zur Reihe gehörigen Funktion in einer beliebig kleinen Umgebung dieses Punktes zusammenhängt. Von zentraler Bedeutung für die Untersuchung dieser Frage ist ein Satz der besagt, dass aus der Regularität für $z = 1$ einer Funktion $f(z) = \sum a_n z^n$ mit dem Konvergenzradius 1 und der Koeffizientenbedingung $\sum \left| \Delta \frac{a_n}{n^\alpha} \right| < \infty (\alpha > -1)$ die $|C_\alpha|$-Summierbarkeit von $\sum a_n$ folgt. Dieser Satz stellt ein Analogon zu dem bekannten Satz von Fatou-Riesz dar; er erschliesst aus einer lokalen Eigenschaft von $f(z)$ zusammen mit einer Koeffizientenbedingung die Summierbarkeit. Unter Verwendung dieses Satzes lassen sich die Lokalisationsverhältnisse bei trigonometrischen Reihen in genauer Weise beschreiben. Insbesondere ist es möglich, mit Hilfe dieser Überlegungen bei einer Reihe von Funktionsklassen das Lokalisationsverhalten ihrer Fourierreihe völlig zu übersehen. Durch ganz analoge Überlegungen folgen die entsprechenden Sätze bei gewöhnlicher Cesàro-Summierbarkeit.

Die Untersuchungen wurden gemeinsam mit Herrn W. Jurkat durchgeführt. Sie werden demnächst ausführlich im Druck erscheinen.

GIESSEN LAHN GERMANY
BISMARCKSTR. 24, MATH. INSTITUT

SUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES TOTALES

BRUNO PINI

On considère le système

$$(s) \qquad d\mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha}(x_1, x_2, x_3)du + \boldsymbol{\beta}(x_1, x_2, x_3)dv$$

dans lequel $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ et $\boldsymbol{\alpha} \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\boldsymbol{\beta} \equiv (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ sont des vecteurs à trois composantes, chacune desquelles est une fonction analytique réelle de x_1, x_2, x_3 dans une domaine C. On suppose que (s) soit complètement intégrable dans C.

On étudie l'allure des surfaces intégrales dans le voisinage d'un point $\mathbf{x}^0 \equiv (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ (singulier) où le rang de la matrice $\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{Vmatrix}$ est < 2.

On montre ensuite que les éventuelles surfaces intégrales fermées sur lesquelles il n'y a pas des points singuliers, sont de genre 1; on étudie l'allure des surfaces intégrales et des points singuliers dans une surface intégrale fermée.

INSTITUT MATHÉMATIQUE, UNIVERSITÉ,
CAGLIARI (ITALIE).

IL PROBLEMA DI CAUCHY PER LE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI

CARLO PUCCI

Si svolgono alcune considerazioni critiche sulla impostazione del problema. Si espongono inoltre nuovi teoremi di esistenza e metodi di calcolo delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi ad equazioni lineari a derivate parziali; ciò indipendentemente dalla considerazione delle ipersuperfici caratteristiche e non supponendo l'analiticità dei dati.

I. N. A. C. PIAZZALE SCIENZE, ROMA.

SUR LES SUITES DE FONCTIONS ALGÉBRIQUES ET L'EXISTENCE DES FONCTIONS ANALYTIQUES AYANT UN DOMAINE D'EXISTENCE QUELCONQUE

Miloš Radojčić

Dans ma thèse, publiée en 1928 (Publ. spéciales de l'Acad. Serbe des Sciences, t. 71; voir aussi ma note „Sur l'approximation des fonctions analytiques multiformes par les fonctions algébriques", Comptes Rendus, Paris 1927) j'ai obtenu, grâce au théorème connu de Riemann et Roch, la généralisation de l'intégrale de Cauchy pour une surface de Riemann fermée quelconque, S. On a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\,\alpha(t, z)\,dt, \tag{1}$$

C étant la frontière d'un domaine D de S, où $f(z)$ est uniforme et régulière, α une fonction algébrique de S, régulière pour $t \neq z$, $t, z \in C, D$ et possédant un pôle pour $t = z$, d'ordre et de résidu un.

Soit D un domaine ouvert d'une surface de Riemann. Nous disons qu'une suite de surfaces algébriques $S_n (n = 1, 2, \ldots)$ *contient à la limite* le domaine D si pour n'importe quel domaine fermé Δ (qu'on peut alors considérer comme domaine d'une surface algébrique) contenu dans D il existe un nombre N tel que pour tout $n > N$ nous pouvons considérer Δ comme domaine de S_n. Ceci posé, nous avons démontré, entre autres, le théorème suivant:

„Soit $f(z)$ une fonction analytique, D un domaine ouvert quelconque de sa surface de Riemann, où $f(z)$ est uniforme et régulière, sauf au plus aux points de ramification algébriques, situés dans D et où elle est supposée continue; soit D' un domaine ouvert qui contient D. Alors, quel que soit la suite de surfaces algébriques S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ qui contient à la limite le domaine D', il existe une suite de fonctions algébriques $f_n(z)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ dont les surfaces sont S_n et qui convergent uniformément dans l'intérieur de D vers $f(z)$."

Diverses conséquences en résultent, présentant toutes des généralisations naturelles de théorèmes classiques, tels que celui de Runge sur l'approximation d'une fonction uniforme et régulière dans un domaine plan par les fonctions rationnelles. Il y a quelques années MM. H. Behnke et K. Stein sont parvenu, en poursuivant d'autres buts, à peu près aux mêmes résultats (Math. Ann., t. 120, 1948).

Signalons ici l'application de ces considérations à la démonstration de *l'existence de fonctions analytiques, uniformes sur n'importe-quelle surface de Riemann S, étalée sur le plan de z et possédant sur S un domaine d'existence E quelconque.*

Soient D_n, $n = 1, 2, \ldots$ des domaines fermés, tels que $D_n \subsetneqq D_{n+1} \subsetneqq E \subsetneqq S$,

$D_n \rightarrow E$ et soient S_n des surfaces de Riemann fermées, telles que $D_n \subset S_n$. On déduit de (1) l'existence d'une suite de fonctions algébriques de S_{n+1}, convergeant uniformément vers une fonction quelconque, uniforme et régulière dans D_n. Donc, si $A_n(z)$ est une fonction algébrique donnée de S_n, régulière dans D_n, alors une fonction algébrique $A_{n+1}(z)$ de S_{n+1} existe aussi, régulière dans D_{n+1} et telle que

$$| A_{n+1}(z) - A_n(z) | < \varepsilon_n, \quad z \in D_n,$$

les ε_n formant une série convergente. On obtient ainsi une suite $\{A_n(z)\}$, $n = 1, 2, \ldots$ convergeant uniformément dans tout domaine fermé, contenu dans l'intérieur de E. Si $E \subset S$, on peut déplacer les pôles de A_n de telle sorte que E soit exactement le domaine d'existence de cette fonction.

Srpska Akademija Nauka, Matematički Institut,
Beograd, Yugoslavia.

SOME GEOMETRICAL PROPERTIES OF THE „ROOT LOCUS" CURVE *

F. M. Reza

In the study of a control system one is interested to find the roots of the characteristics equation of the differential equation of the system, while a gain factor varies. The use of the Root Locus method, as suggested by W. R. Evans, provides a means of plotting the displacement of the roots of the characteristics equation. As a generalization of the above work, some geometrical properties of these curves are discussed in the light of mathematical works of Gauss, Lucas, Darboux, and others. The problem of the relative stability of a servo-system and its transient behaviour is correlated with the shape of the Root Locus Curve.

Massachusetts Institute of Technology
Cambridge (Mass.).

LA NOTION DE VALEUR À LA FRONTIÈRE POUR UN COURANT

Georges de Rham

Etant donné un domaine relativement compact D dans un espace de Riemann V de classe C^∞, appelons *suite régulière dans D* toute suite de fonctions

* This work has been supported in part by the Signal Corps, the Air Material Command and the Office of Naval Research.

f_h ($h = 1, 2, \ldots$) de classe C^∞ dans V, à supports contenus dans D, satisfaisant à $0 \leqq f_h \leqq 1$, et jouissant de la propriété qu'à tout compact $K \subset D$ corresponde un entier N tel que $f_h = 1$ dans K pour $h > N$. Pour $h \to \infty$, f_h tend alors vers la fonction caractéristique de D.

Soit T un courant défini dans D (Cf. G. de Rham and K. Kodaira, Harmonics Integrals, The Institute for Advanced Study, Princeton 1950). Les courants f_hT et $df_h \wedge T$ ont leurs supports contenus dans le support de f_h et sont par suite définis dans V tout entier (ils sont nuls hors du support de f_h). Si, pour toute suite régulière dans D, le courant $df_h \wedge T$ converge lorsque $h \to \infty$, dans l'espace vectoriel de tous les courants sur V, vers un courant limite BT, nous dirons que BT est *la valeur de T à la frontiere de D* (si cette condition n'est pas remplie, on dira que BT n'existe pas). Si, dans les mêmes conditions, le courant f_hT converge vers un courant limite ET, nous dirons que ET est *l'extension naturelle de T dans V* (si cette condition n'est pas remplie, on dira que ET n'existe pas).

Le support de ET est contenu dans l'adhérence de D, et celui de BT est contenu dans la frontière de D. La formule $d(f_hT) = df_h \wedge T + f_hdT$ donne à la limite $dET = BT + EdT$. Il en résulte que, si EdT existe, BdT existe aussi, et si ET et EdT existent, BT existe aussi.

On vérifie immédiatement que, si T et dT sont de carré sommable dans D, ET et EdT existent, donc BT existe aussi. Les résultats connus relatifs au problème de Dirichlet généralisé montrent que, si T_0 est un courant de degré zéro (c'est-à-dire une distribution) tel que T_0 et dT_0 soient de carré sommable dans D, il existe un courant T de degré zéro harmonique dans D, et un seul, tel que T et dT soient de carré sommable dans D et que $BT = BT_0$.

La notion définie ici de valeur à la frontière s'applique à une classe plus large que celle des courants T tels que T et dT soient de carré sommable dans D et conduit à des généralisations plus étendues du principe de Dirichlet.

7 Av. Bergières, Lausanne (Suisse).

ON DIRICHLET'S PROBLEM FOR COMPONENTS OF ANALYTIC FUNCTIONS OF SEVERAL COMPLEX VARIABLES

Giovanni Battista Rizza

It is known that real components of analytic functions of n complex variables form a particular class of harmonic functions of $2n$ variables, which are called pluriharmonic functions.

F. Severi has solved Dirichlet's problem for this class of functions. A representation of the solution by means of an integral on the boundary, involving some differential expressions related with geometrical elements and with E. Levi's invariant, is now given.

The present result extends a previous result due to E. Martinelli and concerning the case $n = 2$.

INST. DI MAT. DELLA UNIV. GENOVA, ITALIA.

FUNCTIONALS ON SUBSPACES OF L^{α}

WERNER WOLFGANG ROGOSINSKI

1. The space L^{α}, $1 \leqq \alpha \leqq \infty$, of complex valued functions $f(P)$ in n-dimensional space has the usual meaning. The norm is $\| f \|_{\alpha} = \left[\int | f |^{\alpha} dP\right]^{1/\alpha}$, if $1 \leqq \alpha < \infty$; and $\| f \|_{\infty} = \sup \left| f(P) \right|$. The conjugate space is L^{β} where $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = 1$.

2. Let $1 \leqq \alpha < \infty$, and let $\mathfrak{G}$ be a subspace of L^{α}. By the Hahn-Banach theorem and the classical F. Riesz result for L^{α}, the general (continuous linear) B-functional on $\mathfrak{G}$ has the form $B(g) = \int f\mu \, dP$ where $\mu \in L^{\beta}$ and $\| \mu \|_{\beta} = \| B \|$, the norm of B on $\mathfrak{G}$. The 'extremal kernel' μ is unique when $\mathfrak{G} = L^{\alpha}$; or when $\mathfrak{G}$ is the subspace of the $f(P)$ vanishing outside a set of positive measure. For certain $\mathfrak{G}$ more can be said about μ.

3. Let $1 < \alpha < \infty$. Then L^{α} is reflexive and strictly convex. The extremal kernel μ is always unique. Also, if $\| B \| > 0$, there exists a unique extremal function $G \in \mathfrak{G}$, with $\| G \|_{\alpha} = 1$ and $B(G) = \| B \|$. It follows that $\mu = \| B \| \operatorname{sign} \overline{G} \mid G \mid^{\alpha-1}$.

4. The space L^1 is neither reflexive nor strictly convex. The extremal μ need not be unique, nor need there exist an extremal G, nor need G be unique. However, the most interesting subspaces are 'analytic': if $g \in \mathfrak{G}$ and $g = 0$ in a set of positive measure, then $g \equiv 0$. If $\mathfrak{G}$ is analytic and if a G exists, then μ is unique and $\mu = \| B \| \operatorname{sign} \overline{G}$. The extremal $G_1 \in \mathfrak{G}$ are those with $\| G_1 \|_1 = 1$ and $\operatorname{sign} G_1 \equiv \operatorname{sign} G$.

5. There are similar results for the Stieltjes representation of B-functionals on the subspaces of the space of continuous $f(P)$.

6. If $\mathfrak{G}$ is generated by a sequence of linearly independent functions

$f_k \in L^\alpha$, then the above results give, in the usual way, additional information about the nature of the solution μ of the moment problem $\lambda_k = \int f_k \mu \, dP$, $k = 1, 2, \ldots,$ or its Stieltjes analogue.

UNIVERSITY OF DURHAM, KING'S COLLEGE,
NEWCASTLE UPON TYNE

INTUITIONISTIC THEORY OF INTEGRATION

BOB VAN ROOTSELAAR

The definition of measurability independent of the principle of the excluded middle, established in 1923 by L. E. J. Brouwer, formally only drew the attention of A. Rosenthal (Encykl. II, **3**; 1043) and up to 1951 the basic theorems of L. E. J. Brouwer remained the only result in this field, whereas the theory depending on the principle of the excluded middle (the classical theory) was developed at high speed. In 1951, A. Heyting added to the intuitionistic theory the Riesz-Fischer theorem. This result belongs to the so-called "classical part" of the theory of integration, i.e. the unrelativized theory. The contrast between the intuitionistic theory of integration and the present form of the non-intuitionistic theory shows the urgency of development, both in constructive and subsequent axiomatic direction, of the intuitionistic theory, which is appointed to be of importance by its refined way of expressing results and the accurate separation of constructive and non-constructive theorems.

Let us now pass to a short survey of recent results in the theory of Brouwer-measurability and integration.

By a slight modification of Brouwer's notion of measurable function (which is inessential in the theory of integration based upon it), resulting in the definition of a relative notion of measurability, it is possible to relate the domain of continuity of a measurable function and the domain of convergence of a sequence of measurable functions to its (their) domain of measurability: results analogous to the theorems of Lusin and Egoroff. Further for species of measurable functions, results on the representability by dressed fans (Cf. Brouwer: Canadian Journal of Mathematics **6** (1954), 1—17) have been obtained.

With regard to the general theory of additive setfunctions, one may remark that the classical definition of additive setfunction is not suitable for an intuitionistic theory; however after introduction of the notion of adhaesic species with respect to a speciesfunction a satisfactory theory can be obtained.

In the theory of derivation of real functions, L. E. J. Brouwer had to presuppose the existence of the various upper and lower derivatives, even in the case of full functions, in order to obtain the a.e. existence of the derivative for monotonic functions (i.e. the intuitionistic analogy of Lebesgue's theorem). After presupposing the existence of upper and lower regular derivatives of additive speciesfunctions one obtains, with the help of an intuitionistic form of Vitali's theorem the a.e. existence of the regular derivative. For a more restrictive species R of additive speciesfunctions a decomposition into an absolutely continuous and singular part can be obtained. This is of importance for the definition of more general processes of integration. A problem consists in the determination of relations between the species of decomposable additive speciesfunctions and the above-mentioned species R.

JOUBERTSTRAAT 205,
GOUDA.

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF PARABOLIC TYPE

PAUL CHARLES ROSENBLOOM

A relation is established between the fundamental solution of linear parabolic equations with variable coefficients and certain Finsler metrics, suggested by certain remarks of Malmheden in connection with hyperbolic equations. It is shown how the first few terms in a certain asymptotic series may be used as a parametrix in treating more complicated problems. Further details will be published in another place.

UNIV. OF MINNESOTA,
MINNEAPOLIS, MINN.

ON THE CONTINUITY OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

ARTHUR ROSENTHAL

That a single-valued function $f(x, y)$ can be continuous along every straight line or even along every analytic curve through the point $p_0 = (x_0, y_0)$ without being continuous at p_0 as a function of (x, y), is a well known fact. By using more general classes of curves the following result is obtained:

The continuity of $f(x, y)$ along every (at least) twice differentiable arc C through p_0 does not imply the continuity of f at p_0 as a function of (x, y). But if f is continuous at p_0 along every (at least) once differentiable convex arc through p_0, then f is also continuous at p_0 as a function of (x, y).

The expression "twice differentiable arc" is here used thus: The tangent of C at p_0 is taken as ξ-axis with p_0 as origin. In this (ξ, η)-coordinate system and in a sufficiently small neighborhood N of p_0, the arc C is to be represented by a single-valued function $\eta = \varphi(\xi)$ which has a continuous derivative everywhere in N and has, at least at p_0, a second derivative.

For the n-dimensional space R_n and for functions $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ the results are analogous. But here the differentiable convex arcs are replaced by differentiable *primitive* arcs through p_0. In R_3 a primitive arc C with tangent t_0 at p_0 is defined in the following manner: Let π_0 be the plane through p_0 perpendicular to t_0. The orthogonal projection of C into π_0 is assumed to be a convex arc with tangent t_1 at p_0, and the orthogonal projection of C into the plane (t_0, t_1) is assumed to be convex also. In R_n a primitive arc C is then defined by induction.

PURDUE UNIVERSITY, LAFAYETTE,
INDIANA, U. S. A.

FREDHOLM FORMULAE AND THE RIESZ THEORY

ANTHONY FRANCIS RUSTON

The classical Fredholm theory expresses the complete solution of the equation

$$x(s) = y(s) + \lambda \int_a^b k(s, t)x(t)dt \qquad (a \leqq s \leqq b)$$

(where we suppose all the functions continuous) in terms of the Fredholm minors

$$d\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}\lambda\Bigg) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \int_a^b \cdots \int_a^b k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n, u_1, \ldots, u_\nu \\ t_1, \ldots, t_n, u_1, \ldots, u_\nu \end{pmatrix} du_1 \ldots du_\nu,$$

where $k\begin{pmatrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{pmatrix}$ denotes the value of the determinant whose (i, j)-coefficient is $k(s_i, t_j)$.

Riesz showed that, if K is any compact (= completely continuous) linear operator on the space of continuous functions (for instance, one with a continuous kernel), and I is the identity operator, then (for a fixed scalar λ_0) the set of solutions of $(I - \lambda_0 K)^r x = O$ is finite-dimensional for any integer r, and there is an integer ν such that, if $r > \nu$, any solution of $(I - \lambda_0 K)^r x = O$ satisfies $(I - \lambda_0 K)^\nu x = O$, whilst, if $r < \nu$, there are solutions of $(I - \lambda_0 K)^{r+1} x = O$ which do not satisfy $(I - \lambda_0 K)^r x = O$.

Thus, for each scalar λ_0, we have two sets of numbers.

(i) For each n with $0 \leqq n < d$ we have the (least) order of the zero λ_0 of $d\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_n \\ t_1, \ldots, t_n \end{matrix} \middle| \lambda\right)$ (where d is the least integer for which $d\left(\begin{matrix} s_1, \ldots, s_\alpha \\ t_1, \ldots, t_\alpha \end{matrix} \middle| \lambda_0\right)$ is not identically zero). We call this $p(n)$.

(ii) For each r with $1 \leqq r \leqq \nu$ we have the dimensionality of the set of solutions of $(I - \lambda_0 K)^r x = O$. We call this m_r. My aim is to indicate that these two sets of numbers are connected by the fact that

$$p(d-1) + \{p(d-2) - p(d-1)\} + \ldots + \{p(0) - p(1)\}$$

and

$$m_1 + (m_r - m_1) + \ldots + (m_\nu - m_{\nu-1})$$

are conjugate partitions of the number $m_\nu = p(0)$.

Department of Mathematics,
The University, Sheffield, 10, England.

CLASSES SEMIANALYTIQUES

Ricardo San-Juan

Soit $\{m_n > 0\}$ une succession; D un domaine avec le point d'accumulation 0. Nous appelons $C(m_n, D)$ l'ensemble de toutes les fonctions $f(z)$ analytiques en D telles que

$$\left| f(z) - \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu z^\nu \right| \, |z|^{-n} < C k^n m_n \qquad (n = 0, 1, \ldots, z \in D),$$

C, k étant des constantes dépendantes de f. Nous disons que $C(m_n, D)$ est semianalytique si, pour $f \in C(m_n, D)$ les conditions $|f(z)| < C k^n m_n |z|^n$ entrainent $f(z) \equiv 0$.

La condition d'Ostrowski: $\int_0^\infty \log T\{|\omega(1 - e^{i\theta})|^{-1}\} d\theta = \infty$ ne caracterise pas $C(m_n, D)$, sinon seulement $c(m_n, D) \subset C(m_n, D)$ definie pour $k = 1$.

Contreexemple:

$$m_n = n! \Big/ \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu^n/\nu!) \text{ et } \omega(z) = (-\log z)^{-1}.$$

Nous appelons D_α le D pour lequel la condition de semianalyticité est $\sum_{n=1}^{\infty} (m_n^c)^{-1/\alpha n} = \infty$ ($\{m_n^c\}$ régularisé logarithmique de $\{m_n\}$). *Exemple*: $S_\alpha(z_0) \equiv \{|z^{1/\alpha} - z_0^{1/\alpha}| < |z_0|^{1/\alpha}\}$ (z_0 complexe quelconque). Soit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$, ($p_n \geqq 0$), et

$q > 0$ un entier fixe. Nous disons que $C(m_n, D_\alpha)$ est fortement quasianalytique de type p_n et d'ordre q quand $\sum_{n=1}^{\infty} (p_n/m_n^{1/\alpha n}) = \infty$. Pour les classes quasi-analytiques, $\alpha = 1$.

Soient $\{m_n(t)\}$ $(t \geqq 0)$ continues et non décroissantes telles que $m_n(t) > t$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et $t > t_0$, t_0 étant indépendant de t et de n. Soient $\{\nu(n)\}$ pour $n = 1, 2, \ldots$ des entiers positifs et $g(t) \geqq 0$ $(t \geqq 0)$ tels que $m_{\nu(n)}(t) \leqq m_n[g(t)]$ $(n = 0, 1, \ldots t \geqq 0)$. Exemple: $m_n(t) = t^n$.

Toute $\psi(t)$ à variation bornée telle que $M_n = \int_0^\infty m_n(t) \mid d\psi(t) \mid < \infty$ $(n = 0, 1, \ldots)$ est $\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont à variation bornée et telles que pour $\mu_n' = \int_0^\infty m_n(t) \mid d\psi_1(t) \mid < \infty$ et $\mu_n'' = \int_0^\infty m_n(t) \mid d\psi_2(t) \mid < \infty$, on a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p_n/r_n \left(\frac{\mu_n'}{[M_0/m_0(0)] + 1} \right) \right\} = \infty \quad et \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ p_n/r_n \left(\frac{\mu_n''}{[M_0/m_0(0)] + 1} \right) \right\} = \infty,$$

où $r_n(t)$ est la fonction inverse de $m_n(t)$.

Applications. Décomposition des fonctions indéfiniment dérivables, périodiques, complêtement monotones en d'autre du même type appartenant à des classes distinctes fortement quasi-analytiques de type et d'ordre arbitrairement fixés à l'avance.

En tout D_α intérieur (exclus 0) à $\arg z \mid < \pi - \delta$ $(0 < \delta < \pi)$ ou bien à $S_2(a)$ $(a > 0)$, existent des fonctions $f_1(z) \not\equiv f_2(z)$ avec le même développement asymptotique $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ appartenant à des classes fortement semianalytiques de type et d'ordres arbitrairement préfixés.

La coincidence de toutes les fonctions semianalytiques avec le même développement asymptotique en D_α équivale à l'existence d'une approximation asymptotique optime (a.o.) $f(z)$, c'est à dire, telle que si $f \in C(m_n, D_\alpha)$, et une autre fonction semianalytique $f_1 \in C(m_n', D_\alpha)$ a le même developpement $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, on a $m_n \leqq k^n m_n'$ $(n = 0, 1, \ldots, k$ const.).

Toute $f(z) \in C\{\Gamma(\alpha n + 1), D_\alpha\}$ est a.o. Le réciproque est faux. Contreexemple:

$$f(z) = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-p(\sqrt{t})}}{1 + tz} dt \quad où \quad p(t) = \int_0^t dt_1 \int_{t_1}^\infty \left([t_2(\log t_2)^2] + 1\right)^{-1} dt_2$$

($[x]$, majeur entier $\leqq x$) est a.o. en $S_2(a)$ $(a > 0)$ et n'appartient à aucune $C\{\Gamma(\alpha n + 1), S_\alpha\}$.

Si toutes les fonctions semianalytiques de $C(m_n, S_\alpha)$ sont a.o., il résulte:

$C(m_n, S_\alpha) \subseteqq C\{\Gamma(\alpha n+1), S_\alpha\}$. *$C\{\Gamma(\alpha n+1), D_\alpha\}$ est l'intersection de toutes les classes non semianalytiques en D_α.*

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \approx f_1(z) \in C\{\Gamma(\alpha n + 1), S_\alpha(z_0)\}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \approx f_2(z) \in C\{\Gamma(\alpha' n + 1), S_{\alpha'}(z_0')\}$, $\arg z_0 = \arg z_0'$, $\alpha \geqq \alpha' > \overline{\lim}_{n\to\infty} [\log |a_n|/(n \log n)]$, *on a* $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

ISAAC PERAL, 3,
MADRID.

LINEAR FUNCTIONALS ON $K_{p,q}$, $B_{p,q}$

ARTHUR SARD

Let p, q be positive integers. Let U be the interval $\alpha_1 \leqq s \leqq \alpha_2$, $\beta_1 \leqq t \leqq \beta_2$. Let (a, b) be a point of U. Put $n = p + q$. Then $K_{p,q}$ is defined as the space of functions $x = x(s, t)$ for which the derivatives

(1) $x_{i,j}(s,t),\ i<p,\ j<q;\ \ x_{i,j}(a,t),\ j\geqq q,\ i+j<n;\ \ x_{i,j}(s,b),\ i\geqq p,\ i+j<n$

exist and are continuous, $(s, t) \in U$. The order of differentiation in the derivatives (1) is somewhat restricted as follows: If $j \geqq q$, the last $j-q+1$ differentiations are to be with respect to t; if $i \geqq p$, the dual condition holds. The norm of an element x in $K_{p,q}$ is the maximum of the maxima of the absolute values of the derivatives (1), $(s, t) \in U$. The space $B_{p,q}$ is similar [see references 1, 2 (in which $K_{p,q}$ is denoted $A^*_{p,q}$), 3]. The spaces $K_{p,q}$, $B_{p,q}$ are generalizations of C_{n-1}, C_n, respectively, where C_ν is the space of functions $x = x(s)$ with continuous ν-th derivative on a linear interval.

The spaces $K_{p,q}$, $B_{p,q}$ are of intrinsic interest. Powerful expansion formulas, similar to Taylor's formula with integral remainder, exist for functions in $K_{p,q}$ or $B_{p,q}$, and for only such functions. Furthermore the conjugate spaces, that is the spaces of linear (additive, homogeneous, continuous) functionals on $K_{p,q}$, $B_{p,q}$, are interesting. Many remainders in the approximation of integrals, derivatives, or values of functions of two variables are linear functionals on $K_{p,q}$ or $B_{p,q}$ [2].

The present paper gives canonical forms for linear functionals on $K_{p,q}$, $B_{p,q}$. These forms are unique, accessible, and appraisable. Generalizations to spaces of functions of m variables also are given.

For $K_{p,q}$, the basic theorem is as follows. *Let F be a linear functional on $K_{p,q}$. There exist unique constants $c^{i,j}$, $i + j < n$, and unique functions $\varrho^i(t)$, $i < p$; $\sigma^j(s)$, $j < q$; $\tau(s, t)$ which are of bounded variation, which vanish whenever*

$s = \alpha_1, \alpha_2$ or $t = \beta_1, \beta_2$, and which are continuous from above except possibly when $s = \alpha_1$ or $t = \beta_1$, such that

$$Fx = \sum_{i+j<n} c^{i,j} x_{i,j}(a, b) + \sum_{\substack{i+j=n-1 \\ i<p}} \int_{\beta_1}^{\beta_2} x_{i,j}(a, t)\, d\varrho^i(t)$$
$$+ \text{ dual term } + \iint_U x_{p-1, q-1}(s, t) d\tau(s, t)$$

whenever $x \in K_{p,q}$. Formulas for $c^{i,j}$, ϱ^i, σ^j, τ are given.

REFERENCES.

[1] Function spaces and approximation, Proc. 6th Symposium in Applied Mathematics, Amer. Math. Soc., in preparation.

[2] Remainders as integrals of partial derivatives, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 3 (1952), 732—741.

[3] Remainders: functions of several variables, Acta Math., vol. 84 (1951), 319—346.

146—19 BEECH AVENUE, FLUSHING 55,
NEW YORK, U. S. A.

CONNECTIONS BETWEEN AN INTERSECTION PROPERTY AND OTHER PROPERTIES OF MEASURES

HENRY M. SCHAERF

Let m be a σ-finite measure defined on a σ-ring of "measurable" subsets of a set and let R be a binary relation defined for some ordered pairs A, B of measurable sets (symbol: ARB). Then m is said to have the Intersection Property if $m(A)\ m(B) > 0$ implies the existence of $A' \subset A$, $B' \subset B$ such that we have both $A'RB'$ and $m(A')\ m(B') > 0$.

The purpose of this lecture is to present connections between this property and various other properties of measures including the following ones: (a) uniqueness of measures invariant under R, (b) equivalence of measures whose null sets are preserved by R, (c) existence of invariant integral means and of invariant measures, (d) generalizations of properties found by H. Steinhaus for distance sets in Euclidean spaces.

WASHINGTON UNIVERSITY,
ST. LOUIS, MO., U. S. A.

BEITRÄGE ZUR THEORIE DER SPEZIELLEN FUNKTIONEN DER MATHEMATISCHEN PHYSIK

FRIEDRICH W. SCHÄFKE

Es wird vor allem auf eine Reihe sehr allgemeiner Entwicklungssätze hingewiesen, die dem Satz über die Laurent-Reihen analog sind. Sie gestatten die Entwicklung analytischer Funktionen mit gegebenem Umlaufsverhalten nach Systemen von speziellen Funktionen mit der gleichen Eigenschaft. Solche Sätze gelten unter anderem für Zylinderfunktionen, Kugelfunktionen, Whittakerschen, Mathieuschen und Sphäroidfunktionen. Sie umfassen Sätze von Neumann, Heine, Erdelyi, Volk und anderen als Spezial- bzw. Grenzfälle.

Die Verwendung dieser Sätze gestattet oft eine vereinfachte Herleitung bekannter Resultate und vor allem die Gewinnung zahlreicher neuer Zusammenhänge. So ergibt sich das Additionstheorem der Mathieuschen Funktionen in grösst-möglicher Allgemeinheit, ebenso ein entsprechendes Additionstheorem für die Sphäroidfunktionen. Diese Additionstheoreme enthalten dann fast alle bekannten Reihenentwicklungen und Integralbeziehungen für diese Funktionen als Spezial- bzw. Grenzfälle. Es wird so ein übersichtlicher deduktivspezialisierender Aufbau der Theorie dieser Funktionen ermöglicht.

UNIVERSITÄT, MAINZ.

THE EXISTENCE OF ORTHOGONAL BASES IN ABSTRACT SPACES

JÜRGEN SCHMIDT

Given a set E and a closure operator $\mathfrak{C}$ in the lattice $\mathfrak{P}(E)$ of all subsets of E, we call the ordered couple $[E, \mathfrak{C}]$ a closure structure, this concept being an obvious generalization of Kuratowski-topological space. There is a well-known one-to-one-correspondence between closure operators and closure systems (Birkhoff's closure properties), i.e. totally join-closed systems $\mathfrak{H}$ of subsets of E (first studied by E. H. Moore, under the name of extensionally attainable properties), so we may as well call closure structures the ordered pairs $[E, \mathfrak{H}]$. Given such a closure structure, the elements of $\mathfrak{H}$ are called closed sets, eventually we prefer to call them ideals. Further fundamental concepts in the theory of closure structures are those of generating and independence. A and B being subsets of E, A will be called generating B, if and only if $A \subseteqq B \subseteqq \mathfrak{C}A$, reduced to $B = \mathfrak{C}A$, if B is closed. We notice any set B

to generate itself. B is called independent, if and only if there is no other generating subset of B. This is the concept usual in metamathematics (Tarski); among other special cases we mention certain types of independence in algebra (linear, algebraic, p-independence) having the fulfilment of Steinitz Exchange Theorem in common, as first treated abstractly in Van der Waerden's „Moderne Algebra". In topology, "independent" means isolated, "A generating B" being equivalent to "A dense in B". An independent, generating subset A of B is called a basis of B, the existence or non-existence being a fundamental proposition about B. In Fréchet-topological spaces, there is at most one basis of B, the set of isolated points of B. But there is a famous classical case, in which the existence of bases is non-trivially secured: these are what we may call the exchange structures as dealt with by Van der Waerden. The object of this communication is the existence of a special sort of bases, so-called orthogonal bases, in another type of closure structures, including functional spaces like Hilbert-, Kantorovitch-space, and essentially labelled by an ortho-symmetric (symmetric, anti-reflexive in the sense of Birkhoff) binary relation, called orthogonality. The existence of orthogonal bases is secured by a slight modification of a famous theorem of Hausdorff and A. D. Wallace, this modification still being equivalent to the Axiom of Choice.

BERLIN-CHARLOTTENBURG 9, STORMSTR. 3

ÜBER EINE ANALYTISCHE METHODE ZUR UNTERSUCHUNG AUTOMATISCH GESTEUERTER BEWEGUNGEN

STEFAN SCHOTTLAENDER

Eindimensionale gesteuerte Bewegungen mit Stellungszuordnung sind u.a. von H. Bilharz [1] mit analytischen Mitteln, Bewegungen mit Stellungs- und Laufgeschwindigkeitszuordnung von I. Flügge-Lotz [2] und K. Klotter-H. Hodapp [3] auf graphischem Wege untersucht worden. Neuerdings hat W. H. Phillips [4] dieselbe Problemstellung mit Einschluss von Sättigungsgrenzen graphisch bearbeitet.

Im Vortrag wird gezeigt, dass die von Phillips und die in [2] und [3] untersuchten Fälle einer analytischen Behandlung zugänglich und einer Erweiterung fähig sind. Insbesondere werden näher ausgeführt die Bestimmung der Anzahl der möglichen periodischen Bewegungen und ihrer Periodendauer in Abhängigkeit von den Steuerungsparametern sowie die Angabe der Uebergangsgebiete von linearer zu nichtlinearer Steuerung und umgekehrt. Schliesslich werden die Grenzgebiete, in denen die Bewegung dauernd linear bezw. dauernd nichtlinear verläuft, und Schranken für den zeitlichen Ablauf der Bewegung angegeben.

Dieses Studium einer analytischen Darstellung des Bewegungsablaufs erscheint erforderlich, um — in Verbindung mit topologischen Methoden — die entsprechenden Probleme auch bei zwei und mehr Freiheitsgraden erfolgreich in Angriff nehmen zu können, da in diesen Fällen die graphischen Methoden versagen.

LITERATURANGABE.

[1] H. BILHARZ, Über eine gesteuerte eindimensionale Bewegung, Zamm **22**, 206—215, Berlin (1942).

[2] I. FLÜGGE-LOTZ, Discontinuous Automatic Control, Princeton Univ. Press Princeton N.Y. 1953, (hier auch Hinweis auf weitere Literatur).

[3] K. KLOTTER, H. HODAPP, Ueber Bewegungen eines Schwingers unter dem Einfluss von Schwarz-Weiss-Steuerungen III, ZWB Nr. 1328 Berlin (1944).

[4] W. H. PHILLIPS, Graphical solution of some Automatic-control problems involving saturation effects ((NACA, TN 3034)) 1953.

WÜRZBURG, KLINIKSTRASSE 8.

EINE VERSCHÄRFUNG DES SATZES VON DENJOY-CARLEMAN-AHLFORS FÜR EINE KLASSE VON GANZEN FUNKTIONEN

PETER SEIBERT

Wir betrachten eine ganze Funktion $w = f(z)$, deren Umkehrfunktion $z(w)$ genau einen logarithmischen Windungspunkt oder, allgemeiner, eine unmittelbare Randstelle (direkt kritische transzendente Stelle) über $w = \infty$ besitzt und somit nach dem Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors mindestens von der Ordnung $\frac{1}{2}$ ist, sofern die Riemann'sche Fläche im Sinne von Ullrich zerfällbar ist. Die Nullstellen von $f'(z)$ seien (nach wachsenden Beträgen geordnet) mit b_n bezeichnet; ferner sei

$$h_n = | f(b_n) |.$$

Dann wird gezeigt, daß sich die untere Wachstumsschranke von $\frac{1}{2}$ auf 1 erhöht, sobald die algebraischen Verzweigungspunkte h_n von $z(w)$ sich hinreichend stark gegen einen endlichen Wert, etwa gegen $w = 0$, häufen. Insbesondere ist hierfür die folgende Bedingung hinreichend:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\log_2 1/h_n}{\log n} > 1.$$

In diesem Fall besitzt die Funktion $z(w)$ bei $w = 0$ eine mittelbare Randstelle (indirekt kritische transzendente Stelle).

Der Beweis stützt sich auf die Hadamard'sche Abschätzung ganzer Funktionen nach unten, den klassischen Satz von Denjoy-Carleman-Ahlfors sowie die Tatsache, daß eine ganze Funktion von nichtganzzahliger Ordnung keine endlichen Borel'schen Ausnahmewerte besitzt. Ähnliche Resultate wurden kürzlich von Huckemann in einer noch nicht publizierten Arbeit auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Anwendung des Modulsatzes von Teichmüller, gewonnen.

WÜRZBURG, UNT. DALLENBERGWEG 10.

PROBLÈMES DE NEUMANN RELATIFS AUX ÉQUATIONS DU CALCUL DES VARIATIONS

GUIDO STAMPACCHIA

Soit $F(x, u, p)$ une fonction de $2n + 1$ variables $[x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_n)]$ continue et ayant ses derivées jusqu'à celles du deuxième ordre continues pour x dans un domaine T et pour toutes les valeurs finies de u, p. La forme quadratique $\sum_{i,j}^{1\ldots n} F_{p_i p_j} \lambda_i \lambda_j$ soit définie positive, le discriminant ayant une limite inférieure positive. Soit $\Phi(x, u)$ une fonction continue ainsi que Φ'_u pour x en $\mathscr{F}T$ et pour toutes les valeurs finies de u. Les fonctions F et Φ satisfont aussi à des conditions quantitatives opportunes.

Soit $u_0(x)$ une fonction qui satisfait aux conditions suivantes:

a) elle est absolument continue par rapport aux variables $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$;

b) elle a ses derivées partielles $\dfrac{\partial u_0}{\partial x_i}$ sommables L^2 $(i = 1, 2, \ldots, n)$;

et donne un extrémum à l'expression:

$$I(u) = \int_T F(x, u(x), p(x))\, dx + \int_{\mathscr{F}T} \Phi(x, u(x))\, dx \qquad \left(p_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

On démontre que les dérivées du premier ordre de $u_0(x)$ satisfont aussi à des conditions analogues aux conditions a), b) et que $u_0(x)$ satisfait presque partout en T à l'équation d'Euler (par rapport à F) et presque partout sur $\mathscr{F}T$ à la condition:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} \nu_i + \Phi_u = 0,$$

ν_i étant les cosinus directeurs de la normale intérieure à $\mathscr{F}T$.

On donne aussi un theorème d'existence du minimum absolu pour $I(u)$; et, après cela, on peut déduire des résultats sur les problèmes que le titre indique.

UNIVERSITÉ DE GÊNES-ITALIE,
INSTITUT DE MATHÉMATIQUE.

DIE ERZEUGUNG VON MODIFIKATIONEN KOMPLEXER MANNIGFALTIGKEITEN DURCH σ-PROZESSE

WILHELM STOLL

Eine *Modifikation* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ liege vor, wenn gilt:

a. Komplexe Mannigfaltigkeiten G und H der Dimension 4 sind gegeben.

b. Die Teilmengen M von G und N von H sind abgeschlossen und in je einer höchstens zweidimensionalen analytischen Menge aus G bezw. H enthalten.

c. Durch τ wird $A = G - M$ pseudokonform auf $B = H - N$ abgebildet. Die Umkehrung ist $v = \tau^{-1}$.

Die Modifikation $\mathfrak{M}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H, B, N, v \\ G, A, M, \tau \end{pmatrix}$ heisse zu $\mathfrak{M}$ *invers*. Es heisse $\mathfrak{M}$ *offen*, wenn mit $U \supset M$ auch $\tau(U \cap A) \cup N$ offen ist, und *beiderseits offen*, wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}^{-1}$ offen sind. Wenn G und H kompakt sind, ist $\mathfrak{M}$ beiderseits offen. Es heisse $\mathfrak{M}$ *meromorph*, wenn für jede zweidimensionale komplexe Mannigfaltigkeit $L \subset G$ mit $\overline{L} \cap M = L \cap M = \{P^*\}$ die Menge der Häufungspunkte aller Folgen $Q_\mu = \tau(P_\mu)$ mit $P_\mu \in L \cap A$ und $\lim_{\mu \to \infty} P_\mu = P^*$ höchstens einen Punkt enthält. Ist v in H analytisch fortsetzbar, so heisse $\mathfrak{M}$ *analytisch*.

Die Zahlenkugel S^2 trage homogene Koordinaten $\zeta_1 : \zeta_2$. Mit

$$\begin{aligned} &D^* = \{\mathfrak{z} \mid |z_1| < 1, |z_2| < 1\}, \; M^* = \{\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z} = 0\}, && A^* = D^* - M^*, \\ &E^* = (D^* \times S^2) \cap \{(\mathfrak{z}, \zeta_1 : \zeta_2) \mid z_1 \zeta_2 - z_2 \zeta_1 = 0\}, && \\ &N^* = E^* \cap \{(\mathfrak{z}, \zeta_1 : \zeta_2) \mid z_1 = z_2 = 0\} = M^* \times S^2, && B^* = E^* - N^*, \\ &\sigma(\mathfrak{z}, \zeta_1 : \zeta_2) = \mathfrak{z} && \end{aligned}$$

ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} D^*, A^*, M^*, \sigma \\ E^*, B^*, N^*, \sigma^{-1} \end{pmatrix}$ eine beiderseits offene, analytische Modifikation. Wird dieser lokale Prozess in einer Menge $M \subset G$ ohne Häufungspunkte ausgeführt, so entsteht eine beiderseits offene, analytische Modifikation $\mathfrak{S}_M = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \sigma_M \\ H, B, N, v_M \end{pmatrix}$, die der *Hopfsche σ-Prozess* in M heisse. Nun gilt:

Satz:

Voraussetzung. 1. Die Modifikation $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} G, A, M, \tau \\ H, B, N, v \end{pmatrix}$ sei meromorph und beiderseits offen.

2. In M und N liegen höchstens endlich viele zweidimensionale, irreduzible analytische Mengen.

Behauptung. 1. Komplexe Mannigfaltigkeiten $H_0 = G, H_1, \ldots, H_s$ und endliche Mengen $M_\nu \subset H_\nu$ mit $M_0 \subseteqq M$ und $M_s = \Phi$ existieren, so dass H_ν aus $H_{\nu-1}$ durch einen σ-Prozess $\mathfrak{S}_\nu = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} H_{\nu-1}, & A_{\nu-1}, & M_{\nu-1}, & \sigma_{M_{\nu-1}} \\ H_\nu &, B_\nu &, N_\nu &, v_{M_{\nu-1}} \end{pmatrix}$ in $M_{\nu-1}$ hervorgeht und $\tau v_{M_0} \ldots v_{M_{\nu-1}}$ innerhalb H_ν auf $A_{\nu-1}$ und nur $A_{\nu-1}$ zu δ_ν analytisch fortsetzbar ist. Durch δ_s wird H_s analytisch *auf* H abgebildet.

2. Komplexe Mannigfaltigkeiten $\underline{H}_0 = H, \underline{H}_1, \ldots, \underline{H}_{\underline{s}}$ und endliche Mengen $\underline{M}_\nu \subset \underline{H}_\nu$ mit $\underline{M}_0 \subseteqq N$ und $\underline{M}_{\underline{s}} = \Phi$ existieren, so dass $\underline{H}_\nu$ aus $\underline{H}_{\nu-1}$ durch einen σ-Prozess $\underline{\mathfrak{S}}_\nu = \mathfrak{M}\begin{pmatrix} \underline{H}_{\nu-1}, & \underline{A}_{\nu-1}, & \underline{M}_{\nu-1}, & \sigma_{\underline{M}_{\nu-1}} \\ \underline{H}_\nu &, \underline{B}_\nu &, \underline{N}_\nu &, v_{\underline{M}_{\nu-1}} \end{pmatrix}$ in $\underline{M}_{\nu-1}$ hervorgeht und $v\, v_{\underline{M}_0} \ldots v_{\underline{M}_{\nu-1}}$ innerhalb $\underline{H}_\nu$ auf $\underline{A}_{\nu-1}$ und nur $\underline{A}_{\nu-1}$ zu $\underline{\delta}_\nu$ analytisch fortsetzbar ist. Durch $\underline{\delta}_{\underline{s}}$ wird $\underline{H}_{\underline{s}}$ analytisch *auf* G abgebildet.

3. Zu einer pseudokonformen Abbildung π von H_s auf $\underline{H}_{\underline{s}}$ lässt sich $\sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-1}} \sigma_{\underline{M}_{\underline{s}-2}} \ldots \sigma_{\underline{M}_0} \tau v_{M_0} \ldots v_{M_{s-1}} = \underline{\delta}_{\underline{s}}^{-1} v \delta_s$ fortsetzen.

Somit wird $\mathfrak{M}$ durch beiderseitiges Einsetzen endlich vieler „Trägersphären" erzeugt. Ist Voraussetzung 2 verletzt, so kann man $\mathfrak{M}$ mit endlich oder unendlich vielen σ-Prozessen erzeugen. Bei analytischen Modifikationen gelten entsprechende Sätze (mit $\underline{s} = 0$); sie wurden für endliche Mengen M von H. Hopf bewiesen.

LITERATUR

H. BEHNKE und K. STEIN. Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Annalen, **124**, S. 1—16, (1951).

H. HIRZEBRUCH. Über vierdimensionale Riemannsche Flächen. Math. Annalen, **128**, S. 1—22, (1952).

H. HOPF. Über komplex-analytische Mannigfaltigkeiten. Rend. di. Mat. Roma (V), **X**, S. 1—14, (1951).

TÜBINGEN, EBERTSTR. 8, DEUTSCHLAND.

TOTAL MONOTONE FASTPERIODISCHE FUNKTIONEN

NICOLAS STULOFF

In Anlehnung an die Hausdorff'sche Definition der totalen Monotonie für reelles Argument gelte für komplexes s die folgende *Definition* 1: „Eine für $R(s) > 0$ analytische und für $R(s) \geqq 0$ stetige Funktion $f(s)$, $s = \sigma + it$, sei *total monoton* genannt, wenn $(-1)^n f^{(n)}(\sigma) \geqq 0$ für alle $\sigma > 0$ und $n = 0, 1, 2, \ldots$" Nun wird jeder total monotonen Funktion $f(s)$ zugeordnet die Funktion $a(\Lambda)$, erklärt für $\Lambda > 0$ durch $a(\Lambda) = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{e}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\Lambda}\right)$ und man zeigt, dass $a(\Lambda)$ nur für eine höchstens abzählbare Menge der Λ von 0 verschieden ist und dass $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda)$ konvergiert. Die somit erhaltenen Mengen $\{\lambda_\nu\}$ bzw. $\{a_\nu\}$ nennen wir die zu $f(s)$ gehörigen Dirichletexponenten bzw. Dirichletkoeffizienten und kommen zu der *Definition* 2: „Eine total monotone analytische Funktion $f(s)$, $R(s) > 0$, soll fastperiodisch genannt werden, wenn $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda) = f(0)$ ist." Man beweist den *Satz* 1: „Eine total monotone Funktion $f(s)$, $s = \sigma + it$, ist dann und nur dann in eine Dirichletsche Reihe $\sum_{\Lambda>0} a(\Lambda)e^{-\Lambda s}$, $a(\Lambda) \geqq 0$, $\Lambda > 0$, $R(s) \geqq 0$ entwickelbar, wenn sie fastperiodisch ist." Der in Def. 2 eingeführte Begriff der Fastperiodizität ist gerechtfertigt, denn es gilt der *Satz* 2: „Eine total monotone analytische Funktion $f(s)$ ist dann und nur dann fastperiodisch nach Def. 2, wenn sie im Sinne von H. Bohr fastperiodisch ist in $(0, \infty)$, $s = \sigma + it$." Ein besonders einfaches Theorem ergibt sich für den Fall, dass die Exponentenmenge $\{\lambda_\nu\}$ keine Häufungspunkte im Inneren von $(0, \infty)$ besitzt: *Satz* 3: „Eine total monotone Funktion ist dann und nur dann fastperiodisch und die dazugehörige Menge $\{\lambda_\nu\}$ ist ohne Häufungspunkte, wenn es zu jeder Zahl $0 < \Lambda < \infty$ zwei Zahlen $0 < \varkappa_1 < \Lambda$ und $\infty > \varkappa_2 > \Lambda$ gibt, derart dass $\liminf_{n\to\infty} \left(-\frac{e^{\Lambda/\varkappa}}{\Lambda}\right)^n f^{(n)}\left(\frac{n}{\varkappa}\right) \leqq C$ ist für $\varkappa = \varkappa_1$ und $\varkappa = \varkappa_2$." Bei der Betrachtung auf der reellen Achse sind also die fastperiodischen Funktionen des Satzes 2 dann durch dieses einfache Verhalten ausgezeichnet, wenn sie ein diskretes Exponentenspektrum besitzen. Es lässt sich zu Satz 3 ein konkretes Rechenbeispiel angeben.

Universität München
München-Obermenzing, Bernasconi Str. 68,
Germany, USA-zone

QUELQUES PROPRIÉTÉS RELATIVES AUX SÉRIES ENTIÈRES ET AUX FONCTIONS ANALYTIQUES CORRESPONDANTES

Jean Teghem

On connaît, par des travaux antérieurs, les conditions de convergence des transformées $\Pi(\alpha)$ et $[E, \beta]$ (respectivement de Laurent et d'Euler-Knopp) d'une série entière $\Sigma a_n z^n$; les domaines de convergence se déterminent à partir des points singuliers de la fonction analytique correspondante. D'autre part, on peut déterminer très simplement, à l'aide des coefficients de la série, les domaines de convergence des transformées $\Pi(\alpha z^{-1})$ et $[E, \beta z]$.

Par la comparaison de ces résultats, on obtient des conditions sur les coefficients de la série, pour que la fonction analytique correspondante ait à l'infini un zéro où un pôle d'ordre inférieur à un entier donné, ou encore pour que l'origine soit extérieure à l'enveloppe convexe des points singuliers.

On obtient aussi des propriétés permettant de déterminer, à l'aide des coefficients de la série, l'intersection de certaines régions définies à partir des points singuliers.

CH^ÉE. DE BRUXELLES,
296, FOREST, BELGIQUE.

ÜBER DAS PHRAGMÉN-LINDELÖFSCHE PRINZIP

NAZIM TERZIOGLU

Wir betrachten in der Halbebene $R(\zeta) \geqq 0$ eine analytisch-reguläre Funktion $f(\zeta)$, welche in den endlichen Punkten der imaginären Achse beschränkt ist, z.B.

$$|f(i\eta)| \leqq 1, \quad (-\infty < \eta < \infty). \tag{1}$$

Wir werden im folgenden das Phragmén-Lindelöfsche Prinzip mit Hilfe eines Mittelwertes nach T. Carleman behandeln.

Zu diesem Zweck wird

$$\begin{cases} \log \zeta = z (= x + iy), & -\tfrac{1}{2}\pi < y < \tfrac{1}{2}\pi \\ \log f(\zeta) = u(x, y) + iv(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

gesetzt.

Wir bezeichnen ein Teilgebiet des Streifens (2_1), wo $u(x, y) > 0$ ist, mit G und seinen Rand mit Γ; auf Γ wird

$$u(x, y) = 0 \text{ sein } \quad (z \in \Gamma).$$

Die Gerade $x = \lambda$ (Konstante) habe mit dem Gebiet G die Strecke θ_λ gemein, deren Länge mit $\theta(\lambda)$ bezeichnet wird. Wir werden dann mit T. Carleman eine positive Funktion $m(\lambda)$ mit Hilfe des Integrals

$$m^2(\lambda) = \int_{\theta_\lambda} u^2(\lambda, y)\, dy \tag{3}$$

einführen. Für diesen Mittelwert werden folgende Abschätzungen gewonnen:

$$m^2(\lambda) \geqq m_0^2 + m_0 m_0'(e^{2\lambda} - 1), \quad (0 < \lambda) \tag{4}$$

$$\frac{m(\lambda)}{\operatorname{sh} \lambda} > m_0' + m_0 \operatorname{cth} \lambda. \qquad (0 < \lambda) \tag{5}$$

Da $m^2(\lambda) < \theta(\lambda) \log^2 M(\lambda) < \pi \log^2 M(\lambda)$, $(M(\lambda) = \operatorname*{Max}_{|\zeta| = e^\lambda} |f(\zeta)|)$ ist, kann die Behauptung des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips aus (4) oder aus (5) gefolgert werden.

ISTAMBUL.

ÜBER VOLLSTÄNDIGE ERWEITERUNGEN LINEARER, STETIGER ABBILDUNGEN

ELMAR THOMA

Unter einem σ-Vektorverband R wird ein Vektorverband mit reellen Zahlen als Operatoren (Rieszscher Raum) verstanden, in welchem die Vereinigung bzw. der Durchschnitt jeder nach oben bzw. nach unten beschränkten abzählbaren Teilmenge aus R existiert; es ist dann z.B. $\underline{\lim}$ alg $a_n = \bigvee_{v=1}^{\infty} (\bigwedge_{n=v}^{\infty} a_n)$ erklärt. — $w(M)$ sei insbesondere der σ-Vektorverband der endlichen, reellen Funktionen mit dem gemeinsamen Definitionsbereich M. Betrachtet werden im folgenden die linearen, stetigen Abbildungen F eines Untervektorverbandes r von R in $w(M)$, in Zeichen $w(M)/F/r$ oder kürzer F/r. Dabei besagt „stetig": Aus $f_n \geqq f_{n+1}$, $f_n \in r$, $n = 1, 2, \ldots$ und lim alg $f_n = 0$ in R folgt lim alg $F(f_n) = 0$, wobei 0 die Null der Addition in R bzw. in $w(M)$ ist.

Das Problem ist, bei Zugrundelegung eines jeweils bestimmten Prozesses P, jedes lineare, stetige F/r zu einem linearen, stetigen F/r', der sogenannten „P-Erweiterung" zu erweitern, derart, dass r' mit $r \subset r' \subset R$ ein σ-Untervektorverband von R ist und dass die P-Erweiterung „P-vollständig" ist, d.h. nicht mehr P-erweiterbar ist. Es werden zwei Prozesse $P = A$ und $P = Q$ zugrunde gelegt. Von diesen Prozessen arbeitet A mit der Bildung von lim alg in R und $w(M)$, besitzt also verbandsalgebraischen Charakter, während Q in R Limesbildungen bezüglich einer Metrik (genauer Quasimetrik) heranzieht. Der Vergleich der A-vollständigen und der Q-vollständigen Erweiterung ergibt: Die Q-Erweiterung ist Verengung der A-Erweiterung.

Die Prozesse A und Q sind Verallgemeinerungen von Erweiterungsprozessen, die bei Integralerweiterungen Verwendung finden. (A entspricht der Erweiterung eines Integrals mit Hilfe monotoner Folgen, vergleiche etwa McShane, Integration, Princeton (1947). Q entspricht der Erweiterung eines Integrals mit Hilfe einer Norm, Vergleiche M. H. Stone, Notes on Integration I, Proc. nat. Acad. Sci. USA 34 (1948).)

Insbesondere ergibt die Anwendung der Q-Erweiterung auf eine Abbildung $w(M)/F/r$, wobei M eine einelementige Menge ist, eine Ausdehnung des Stone'schen Verfahrens der Erweiterung mit Hilfe einer Norm auf Funktionale, die nicht notwendig positiv sind.

MÜNCHEN 27, EISENSTEINSTR. 1.

EIN ABSCHÄTZUNGSSATZ FÜR LÖSUNGEN STURMSCHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

JOHANNES GÜNTER THOMAS

Herr R. E. Langer (Madison, Wis., USA) hat in einer im Jahre 1931 erschienenen Arbeit (Transact. Amer. Math. Soc. 33 (1931), p. 23—64) die asymptotische Entwicklung eines Hauptsystems von Lösungen bei einer Differentialgleichung der Form $u''(x) + (\lambda g(x) + h(x))\, u(x) = 0$ angegeben, bei der $g(x)$ genau eine Nullstelle in dem als reell vorausgesetzten Integrationsintervall hat. Er ging dabei von den asymptotischen Darstellungen Hankelscher Zylinderfunktionen aus.

Ref. gewinnt eine Abschätzung bestimmter Partikularlösungen von Differentialgleichungen der genannten Art für gewisse Werte $|\lambda|$ und alle Werte x im Integrationsintervall, indem er von Integraldarstellungen der Zylinderfunktionen ausgeht. Es ergibt sich im besonderen, daß unter der Voraussetzung $\lambda g(x) \geqq 0$ der absolute Betrag einer durch die Anfangsbedingung $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = 1$ definierten Lösung der Differentialgleichung im Integrationsintervall für große Werte $|\lambda|$ abgeschätzt wird durch einen Ausdruck, der eine gebrochene lineare Funktion von $|\lambda|^{\frac{1}{\nu+2}}$ ist, wenn ν die Vielfachheit der Nullstelle der Funktion $g(x)$ angibt.

POTSDAM (DEUTSCHLAND),
NEUFAHRLAND, REHWEG 3.

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN DER KONFLUENTEN HYPERGEOMETRISCHEN FUNKTIONEN

FRANCESCO G. TRICOMI

Es handelt sich hauptsächlich um das asymptotische Verhalten der fundamentalen „konfluenten" Funktion

$$\Phi(a, c; x) \equiv {}_1F_1(a; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+n-1)}{c(c+1)\ldots(c+n-1)} \frac{x^n}{n!}$$

im Reellen, für $a \to -\infty$, c beschränkt und x beliebig.

Man findet, daß frühere Untersuchungen des Verf. (Annali Matem. (4) **28** (1949), 263—289) über die Laguerreschen Polynome — d.h. über den Fall $a = -n$ — auf den allgemeinen Fall ausgedehnt werden können.

Je nachdem $x = O(\varkappa^{\varrho})$, $\varrho < 1/3$; $a\varkappa \leqq x \leqq b'\varkappa$, $(b' < 4)$; $x = 4\varkappa + O(\varkappa^{1/3})$; $b''\varkappa \leqq x$, $(b'' > 4)$ wo $\varkappa = c/2 - a$ und a, b', b'' feste positive Zahlen bedeuten, sind vier Fälle zu unterscheiden. Der erste Fall war schon mit der obigen Arbeit des Verf. erledigt. In den anderen drei Fällen lauten die einfachsten Ergebnisse:

$$e^{-x/2}\Phi(a, c; x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)(2\varkappa\cos\theta)^{1-c}}{\sqrt{\pi\varkappa}\sin 2\theta}\,[\sin\Theta + O(\varkappa^{-1})], \quad \theta = \underset{(0,\pi/2)}{\arc\cos}\sqrt{\dfrac{x}{4\varkappa}}, \\ \qquad\qquad \Theta = \varkappa(2\theta - \sin 2\theta) + (\tfrac{1}{4} - a)\pi \\ \dfrac{1}{\pi}\Gamma(c)3^{1/3}(2\varkappa)^{2/3-c}[A_1(t)\cos a\pi + A_2(t)\sin a\pi + O(\varkappa^{-2/3})], \\ \qquad\qquad x = 4\varkappa - (\tfrac{16}{3}\varkappa)^{1/3}t \\ \Gamma(c)\sin a\pi\,\dfrac{(2\varkappa\cosh\vartheta)^{1-c}}{\sqrt{\pi\varkappa}\sinh 2\vartheta}\exp[\varkappa(\sinh 2\vartheta - 2\vartheta)]\,.\,[1+O(\varkappa^{-1})], \\ \qquad\qquad \cosh\vartheta = \sqrt{\dfrac{x}{4\varkappa}}. \end{cases}$$

Dabei bedeuten $A_1(t)$ und $A_2(t)$ beide „Airyschen" Funktionen, d.h. gewisse Kombinationen der Zylinderfunktionen $J_{\pm 1/3}$.

Diese Formeln sind einfacher und — mit ihren (hier nicht angegebenen) folgenden Gliedern — schärfer als alle anderen dem Verf. bekannten.

Die Arbeit *in extenso* wird im Archiv der Mathematik erscheinen.

TORINO (ITALIEN) CSO. RE UMBERTO 21 BIS.

NON SUMMABLE GENERALIZED LAPLACIANS

WALDEMAR J. TRJITZINSKY

This is a continuation of author's works in the Annali di Matematica [serie IV, t. 31 (1950); pp. 143—230] and in the Mémorial des Sciences Math. [Fasc. 125 (1954); pp. 1—92], relating to methods, involving amongst others those of totalizations and serving to find anti-laplacians of non summable functions. In the present work the hypotheses regarding the first order derivatives (of the solutions) are much lightened. A new method is introduced, consisting essentially of a suitable totalization, followed by a recourse to the methods of integral equations. The larger significance of this work consists in the use of totalizations in the field of elliptic partial differential equations. Much of the inspiration for such developments has been derived from the works of A. Denjoy, the originator of totalizing methods.

UNIVERSITY OF ILLINOIS,
URBANA, ILL, U.S.A.

BLOCH FUNCTIONS AND THE DEFINITION OF A NEW CONSTANT

CENGIZ ULUÇAY

R. M. Robinson stated without proof (Duke Math. Journal, vol. 2, 1936) that every Bloch function of the first or second kind maps the unit circle K conformally onto an open boundaryless Riemann surface and every Bloch function of the third kind maps the unit circle K conformally onto a schlicht domain which comprises the whole plane such that every point of the plane is either an interior point or a boundary point.

Let $w = f(z) = z + \ldots$ be a Bloch function of the first or second kind and R be the Riemann surface generated by w. For a non sufficiently smooth boundary arc one can find a boundary point P such that the region N_i in R determined by a circle γ, centre at P, is not penetrated by a circle, say, $\mathfrak{B}$.

The function $f(z)$ maps $R - \overline{N}_i = R_1$ conformally onto a region (z') of K. By mapping conformally (z') onto K by means of $z' = \varphi(z)$, $0 = \varphi(0)$, we obtain the function $f(\varphi(z)) = f_1(z)$ which maps conformally K onto R_1. It is now possible to continue analytically $f_1(z)$ across a certain boundary arc of K. It is clear that the process can be repeated so as to obtain finally the Riemann surface $R^* = R + N_e$ where $N_e = \gamma - \overline{N}_i$. The function $f^*(z) = az + \ldots$ which maps conformally K onto R^* is superordinate to $f(z)$. Hence $|a| > 1$. On the other hand for a sufficiently smooth boundary arc it is possible to find a point P on this arc and a point A on $|z| = 1$ such that to a small radial segment I issuing from A there corresponds in R an analytic arc which is approximately a small straight segment J issuing from P. By cutting R and K along J and I respectively and then mapping conformally the slitted circle K onto K one arrives without any further difficulty to the desired contradiction (Communications of the Faculty of Sciences, Ankara University 1954). The elimination of these two cases yields the Theorem stated above. In particular it follows that a Bloch function of the first or second kind is an automorphic function. Among others we have used this result for the determination of the exact values of $\mathfrak{B}$ and $\mathfrak{L}$ respectively (Konform Tasvir, Publications of Ankara University, 1954).

For a Bloch function of the third kind, the case of a non sufficiently smooth boundary arc can be trivially eliminated. The case of a sufficiently smooth boundary arc is being disposed of by the use of a Theorem due to Carathéodory on the one-one correspondence between the points of two Jordan boundary arcs.

We finally define a new constant $\mathfrak{C}$ as follows. We consider all slitted planes whose fundamental group is not the unit element. Hence the class $\{f\}$ of normalized analytic functions which map the unit circle K onto the universal covering surfaces are not schlicht in K. Let $C' = C'(f)$ be the upper bound of the radii of all circles contained in the slit plane. $\mathfrak{C}$ is defined to be the minimum of the numbers C'. From the first result on Bloch functions it follows that $\mathfrak{L} < \mathfrak{C}$. Since a Bloch function of the third kind can obviously be approximated by a sequence belonging to $\{f\}$ (loc. cit) it follows that $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{C}$. We constructed an example $f^* \in \{f\}$ (Bulletin of the Amer. Math. Soc. vol. 54, N. 9, 395t. 1948.) and obtained the upper bound $\mathfrak{L}^* \geqq \mathfrak{C}$. It is very likely that $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{C}$ and consequently $\mathfrak{A} \geqq \mathfrak{L}^*$ (loc. cit. 396t).

ANKARA ÜNIVERSITESI F. F.

ZUR VARIATIONSRECHNUNG MEHRFACHER INTEGRALE

WALDEMAR VELTE

Im R^n wird das Variationsproblem in Parameterdarstellung

$$\int f(x_i, p_{i_1 \dots i_m}) \, dt_1 \dots dt_m = \text{Extr.}$$

betrachtet, wobei die $p_{i_1 \dots i_m}$ die m-reihigen Unterdeterminanten der Matrix $\left(\frac{\partial x_i}{\partial t_\alpha}\right)$ $(i = 1, 2, \dots, n;\ \alpha = 1, 2, \dots, m;\ m < n)$ bezeichnen. $f(x, p)$ sei positif und nach allen Variablen x, p genügend oft stetig differenzierbar. Ferner sei $f(x, cp) = c\, f(x, p)$ für $c > 0$.

Es wird das Analogon zur Carathéodory'schen Theorie mehrfacher Variationsintegrale in gewöhnlicher Form entwickelt: hinreichende Bedingungen, Legendre'sche Transformation, Hamilton-Jacobi'sche Differentialgleichung bis zur Einbettbarkeit einer Extremalen in ein geodätisches Feld. (Man erhält eine, in den $p_{i_1 \dots i_m}$ lineare Theorie).

MATHEM. INSTITUT, BISMARCKSTR. 24,
GIESSEN/LAHN (DEUTSCHLAND).

INFINITE MATRICES ASSOCIATED WITH BASIC SETS OF POLYNOMIALS

PAUL VERMES

The basic sets $p_n(z) = (z + \alpha^n)^n$ and $q_n(z) = (z + a_j)^n$, $n = j \pmod{h}$, have been investigated by M. T. Eweida, *Duke Math. J.* 14 (1947), M. N. Mikhail, *Thesis, London* (1951), M. Nassif, *Proc. Math. Phys. S. Egypt* 4 (1952), R. P. Boas, unpublished (1952). Boas employs the generating function $\Sigma\, q_n(z)w^n/n!$, and replacing w by $w\alpha^p = we^{2i\pi p/h}$, he obtains h linear equations for each function $E_j(zw) = \sum\limits_{h\,|\,s-j} (zw)^s/s!$. He finds that the order of $q_n(z)$ is 1 and the type $1/|\varrho|$, where ϱ is the smallest zero of the functional determinant $\Delta = \det\, (\alpha^{jp}\, e^{a_j w \alpha^p})$. Nassif uses a generating function of the reciprocal set which he leaves undetermined, and solving h differential equations, he obtains essentially the same determinant Δ, and the same order and type as Boas.

I consider the matrices of the coefficients, and obtain explicit expressions for the reciprocal matrix. The coefficient matrix of $p_n(z)$ is $P \equiv (p_{nk})$, $n, k = 0, 1, \ldots$, where $p_{nk} = \binom{n}{k}\alpha^{n(n-k)}$, so that $P = FAF^{-1}$, where F is the diagonal matrix $f_n = \alpha^{n(n-1)/2}/n!$, and $a_{nk} = \alpha^{(n-k)(n-k-1)/2}/(n-k)!$. Introducing the sub-diagonal matrix $U \equiv (u_{nk})$ with $u_{nk} = \delta_{n,\,k+1}$ (Kronecker's symbol), it follows that $A = \Sigma a_n U^n$, where $a_n = \alpha^{n(n-1)/2}/n!$. Hence A has a two-sided reciprocal $A^{-1} = \Sigma b_n U^n$, defined by the associated functions $a(z) = \Sigma\, a_n z^n$, and $b(z) = 1/a(z) = \Sigma b_n z^n$, and P has the reciprocal $P^{-1} = FA^{-1}F^{-1}$. Applying J. M. Whittaker's formulae, the order of $p_n(z)$ is 1, and its type $1/|\varrho|$, where ϱ is the smallest zero of the integral function $a(z)$. The coefficient matrix of the set $q_n(z)$ is expressible as $Q = FAF^{-1}$, where F is the diagonal matrix $f_n = 1/n!$. Here I introduce the diagonal matrices D_j $(j = 0, 1, \ldots, h - 1)$ with $d_n = \delta_{[n]j}$, where $n = [n] \pmod{h}$, and then $A = D_0 \exp\,(a_0 U) + \ldots + D_{h-1} \exp\,(a_{h-1} U)$. Also $D_j D_k = \delta_{jk} D_j$, so that $D_j E_k(aU) = E_k(aU) D_{[j-k]}$. This leads to the matrix identity $B = SA$, where B is an $h \times h$ determinant with commutative infinite-matrix elements $b_{nk} = E_{[n+k+1]}(a_n U)$, and S is the determinant B bordered by a last column $(D_0, D_1, \ldots, D_{h-1}, 0)$ and by a last row $(1, 1, \ldots, 1, 0)$. Thus B is an integral function of U, essentially the same function as Δ. The reciprocal of the matrix B is the inverse function and $A^{-1} = B^{-1}S$, $Q = FB^{-1}SF^{-1}$. Whittaker's formulae give the same order and type as obtained by Boas and Nassif. If $a_j = \alpha^j$, where $\alpha^h = 1$, then B has h linear factors, each of the form $\Sigma \alpha^{n(n-1)/2}(\alpha^p U)^n/n!$.

BIRKBECK COLLEGE, UNIVERSITY OF LONDON,
MALET STREET W.C. 1

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU LEMME FONDAMENTAL DU CALCUL DES VARIATIONS

IVAN VIDAV

On peut énoncer, comme une généralisation du lemme fondamental du calcul des variations, le théorème suivant:

Soit $f(x, t)$ une fonction continue de deux variables x, t dans le carré $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq t \leqq 1$ et telle qu'il existe au moins une fonction continue $\eta_0(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, satisfaisant à la condition

$$\operatorname*{Min}_{0 \leqq t \leqq 1} \int_0^1 f(x, t)\eta_0(x)dx > 0.$$

Si la fonction continue $F(x)$ jouit de la propriété que l'inégalité

$$\int_0^1 F(x)\eta(x)dx \geqq 0$$

est remplie pour toute fonction continue $\eta(x)$ satisfaisant à la condition

$$\int_0^1 f(x, t)\eta(x)dx \geqq 0, \quad 0 \leqq t \leqq 1,$$

alors il existe au moins une fonction non décroissante $\alpha(t)$, telle qu'on ait

$$F(x) = \int_0^1 f(x, t)d\alpha(t).$$

On peut fonder la démonstration de ce théorème sur le lemme d'approximation suivant:

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$, $0 \leqq x \leqq 1$, des fonctions continues linéairement indépendantes. Soit ensuite $\eta_0(x)$, $\int_0^1 \eta_0^2(x)dx = 1$, une fonction continue, qui rende toutes les integrales $\int_0^1 f_i(x)\eta_0(x)dx$ positives. Posons $1/k = \operatorname*{Min}_{i=1,2,\ldots,n} \int_0^1 f_i(x)\eta_0(x)dx$. Si la fonction $F(x)$, $\int_0^1 F^2(x)dx = 1$, est continue dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ et telle qu'on ait $\int_0^1 F(x)\eta(x)dx \geqq 0$ pour toute fonction continue $\eta(x)$ satisfaisant aux conditions: $\int_0^1 \eta^2(x)dx \geqq 1$, $\int_0^1 f_i(x)\eta(x)dx \geqq \varepsilon$, $i = 1, 2, \ldots, n$, où $\varepsilon > 0$ et $2k\varepsilon < 1$, on peut trouver des constantes non négatives $c_1, c_2, \ldots, c_n$ telles qu'on ait, pour $0 \leqq x \leqq 1$,

$$\left| F(x) - \sum_{i=1}^{i=n} c_i f_i(x) \right| \leqq 2k\varepsilon.$$

10, RIMSKA C.,
LJUBLJANA, YOUGOSLAVIE

SOPRA UN PROBLEMA DI VALORI AL CONTORNO PER L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$

MARIO VOLPATO

Posizione del Problema

Siano: $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$ una funzione reale delle variabili reali $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$, definita nello strato S: $a \leqq x \leqq b$; $|y|$, $|y'|$, $\ldots$, $|y^{(n-1)}| < +\infty$; $\alpha < \lambda < \beta$; $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}$, $n+1$ numeri reali qualsiasi; $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, un gruppo T_{n+1} di $n+1$ punti qualsiasi dell' intervallo (a, b) e si consideri il problema:

$$(1) \qquad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda) \\ y(x_1) = c_1, y(x_2) = c_2, \ldots, y(x_n) = c_n, y(x_{n+1}) = c_{n+1} \end{cases}$$

nelle incognite λ ed $y(x)$.

Ipotesi:

I) In S la funzione $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$ risulti misurabile rispetto ad x e continua rispetto a $(y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda)$.

II) Esistano due funzioni $p(x, \lambda)$, $q(x, \lambda)$ sommabili, rispetto ad x, in (a, b) continue e monotone, rispetto a λ, in (α, β), tali che risulti

$$p(x, \lambda) \leqq f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda) \leqq q(x, \lambda).$$

III) Posto

$$\varphi_\nu(t/T_{n+1}) = (x_{n+1} - t)^{n-1} - \sum_{\nu+1}^{n}{}_j \, (x_j - t)^{n-1} \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_j x_i), \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

ove si conviene che sia

$$(x_{n+1} x_j x_i) = \frac{x_{n+1} - x_i}{x_j - x_i}, \quad \sum_{n}^{n}{}_j a_j = a_n, \quad \sum_{n+1}^{n}{}_j a_j = 0,$$

esistano due numeri reali c, d, con $\alpha < c < d < \beta$, tali che risulti

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) \, q(t, c) dt \leqq c_{n+1} - \sum_{1}^{n}{}_j c_j \prod_{1}^{n}{}_{i \neq j} (x_{n+1} x_j x_i) \leqq$$
$$\leqq \frac{1}{(n-1)!} \sum_{1}^{n}{}_\nu \int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi_\nu(t/T_{n+1}) \, p(t, d) \, dt,$$

oppure la relazione che da questa si ottiene scambiando fra loro c, d.

Tesi:

Esiste almeno una soluzione $[\lambda_0, y_0(x)]$, con $y_0(x)$ assolutamente continua assieme alle sue prime $n-1$ derivate in (a, b), del problema (1).

Un notevole caso particolare:

Nel caso in cui sia

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}, \lambda) = \lambda g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

la II) va sostituita con la

II$_1$) Esistano due funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x)$, $(\varphi(x) \leqq \psi(x))$ non negative e sommabili in (a, b) tali che risulti

$$\varphi(x) \leqq g(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \leqq \psi(x),$$

e la III) va sostituita con la

III$_1$) Esista almeno un intervallo $(x_\nu, x_{\nu+1})$, $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, ove risulta

$$\int_{x_\nu}^{x_{\nu+1}} \varphi(x)\, dx > 0.$$

VIA PIETRO SILVESTRI N. 1,
PADOVA, (ITALIA).

ON AN INTEGRAL OF MARCINKIEWICZ

DANIEL WATERMAN

If $f(\tau) \in L^p$, $p > 1$, in $(-\infty, \infty)$, we may proceed analogously to Marcinkiewicz (see A. Zygmund, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 55, p. 181) and define

$$\mu(\tau) = \left\{ \int_0^\infty \frac{[F(\tau + t) + F(\tau - t) - 2F(\tau)]^2}{t^3}\, dt \right\}^{\frac{1}{2}}$$

where $F(\tau) = C + \int_0^\tau f(x)dx$. It may be shown that as in the case of functions on the interval $(0, 2\pi)$, μ and f have the relation

$$A_p \left\{ \int_{-\infty}^\infty |f|^p\, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq \left\{ \int_{-\infty}^\infty \mu^p\, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}} \leqq A_p \left\{ \int_{-\infty}^\infty |f|^p\, d\tau \right\}^{\frac{1}{p}}$$

where the A_p's denote different constants depending on p.

The right-hand inequality is a consequence of

$$\mu < C\, g^*$$

where

$$g^*(\tau) = \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sigma\, d\sigma \int_{-\infty}^\infty |\Phi'(\sigma + it)|^2 \frac{\sigma}{\sigma^2 + (\tau - t)^2}\, dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

Φ being the analytic function given by

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(f(t)+i\tilde{f}(t)\right)\frac{\sigma}{\sigma^2+(\tau-t)^2}\,dt,$$

for this inequality has been shown by the author to hold for g^*. The left hand inequality is demonstrated by methods similar to those of Zygmund (loc. cit.) and Littlewood and Paley (see Proc. London Math. Soc., vol. 42, p. 52) after affecting a reduction of the problem to related problems over finite intervals.

PURDUE UNIVERSITY, IND.

FUNKTIONENTHEORETISCHE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

HANS WITTICH

Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktionentheoretischer Grundlage beschäftigt sich mit den Eigenschaften der Lösungen. Nach der neueren Entwicklung der Funktionentheorie scheint es angebracht, Wachstums- und Wertannahmeeigenschaften stärker zu betonen. Man gelangt so recht zwangläufig zu Sätzen über die Nichtexistenz ganzer Lösungen gewisser Differentialgleichungen, zu einem funktionentheoretisch befriedigenden Beweis des Malmquistschen Satzes u.a.m. Umgekehrt lassen sich durch Forderungen an das Wachstums- und Wertannahmeverhalten Klassen gewöhnlicher Differentialgleichungen charakterisieren. Z.B. gilt: Wenn die lineare Differentialgleichung

$$w^{(n)}+p_1(z)w^{(n-1)}+\dots+p_n(z)w=0$$

mit ganzen Koeffizienten $p_j(z)$ nur Lösungen von endlicher Ordnung besitzt, dann sind die Koeffizienten $p_j(z)$ Polynome. Eine weitere Wachstumseinschränkung gestattet dann den Schluss auf konstante Koeffizienten.

KARLSRUHE, DEUTSCHLAND.

SPECTRAL DECOMPOSITION OF OPERATORS WITH A LINEAR SPECTRUM

FRANTIŠEK WOLF

The operators A in Banach space, here considered, are those whose spectrum $\sigma(A)$ is either on a bounded portion of the real line or on the unit circle. The results can be easily generalized to operators with a spectrum in a rectifiable curve. The spectral decomposition is of the generalized type $f(A) = \int_{\sigma(A)} f(\lambda) d^n E(\lambda)$ where (i) $f(\lambda)$ is of class $C^{(n)}$ in an open set containing $\sigma(A)$ (ii) the integral is essentially Bochner's (Fouriersche Integrale, also F. Wolf, Trig. Integrals, Univ. of Calif. Press 1946, L. Schwartz, Distributions). The class of operators A admitting this decomposition can be characterized in the following alternative ways: (i) $R_\lambda(A) = O\left(\text{dist}\,(\lambda, \sigma(A))\right)^{-n+2}$ (ii) the polynomials $f(A)$ as functions of f prove to be continuous under the topology of C^n. Or, if $\sigma(A)$ is in the unit circle (iii) $\| A^k \| \leqq M k^{n-1}$, $k = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ This is an extension of E. R. Lorch's class of "weakly almost periodic" operators. This class includes nilpotent operators of order not more than $n-1$. The generalized decomposition of the identity $E(\lambda)$ is outside of $\sigma(A)$ a polynomial of order $n-1$, hence the integral is independent of $f(\lambda)$ outside of $\sigma(A)$ and $\int f d^n E \int g d^n E = \int fg\, d^n E$ which yields an orthogonality property of $E(\lambda)$. An eigenspace S_{λ_0} defined as the annihilator of $g(A)$ such that $\lambda \neq \lambda_0 \to g(\lambda) \neq 0$ and $g(\lambda_0) = g'(\lambda_0) = \ldots = g^{(n-1)}(\lambda_0)$ is such that $A - \lambda_0 I$ is nilpotent in S_{λ_0}. If $h'(\lambda_0) = \ldots = h^{(n-1)}(\lambda_0) = 0$, then $h(A)$ is a scalar in S_{λ_0}. There exists an expanding family of manifolds $M(\lambda)$, such that $\sigma(A\,|M(\lambda_0))$ is $\sigma(A) \cap \{\lambda \,|\, \lambda \leqq \lambda_0\}$ and $M(-\infty) = \theta$ and $M(\infty)$ the whole space. This "decomposition" has as its essential features (i) it exhibits that the "support" (the smallest closed set such that $f(\lambda) = 0$ on it implies $f(A) = 0$) of the mapping $f \to f(A)$ is $\sigma(A)$. (ii) If $\sigma_A(x) (\subseteqq \sigma(A))$ the spectrum of x is the support of $f \to f(A)x$, and $f, f', \ldots f^{(n-1)}$ are zero exactly on a closed set S, then $f(A)x = 0$ defines an invariant subspace $\mathfrak{S}_S$ of A, such that $\sigma_A(x) \subseteqq S$. (iii) If S_1 and S_2 differ by a neighborhood of a point of $\sigma(A)$, then the corresponding invariant subspaces are different. Into the polynomials p introduce the norm $\| p(A) \|$ and denote the completed space by $\mathfrak{A}_A$. Under the above conditions on A $\mathfrak{A}_A$ contains C^n as a subspace. Sometimes $\mathfrak{A}_A$ might turn out to be q.a. (quasianalytic) on $\sigma(A)$. Then to an arbitrary closed set S we cannot find in $\mathfrak{A}_A$ a function equal to zero on S and the construction of $\mathfrak{S}_S$ is impossible. But as long as $\mathfrak{A}_A$ is not q.a, there exist "localizing" functions and the above ideas still apply. If $\sigma(A)$ is on the unit circle and there is a $p(t)$, even, subadditive non-decreasing for $t \geqq 0$, $\lim_{t \to \infty} tp'(t) = \infty$, $\int_1^\infty p(t)/t^2 dt < \infty$, $\|A^n\| \leqq e^{p(n) - \log(1+n^2)}$ $n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$ then $\mathfrak{A}_A$ is not q.a. An alternative condition expressed for real $\sigma(A)$ is $\int \log^+ \max_\lambda \| R_{\lambda + i\mu}(A) \| \, d\mu < \infty$.

UNIV. OF CALIFORNIA, BERKELEY, CALIF.

FK-RÄUME

KARL ZELLER

Ein FK-Raum ist ein (lokalkonvexer) F-Raum, der aus Zahlenfolgen $x = \{x_k\}$ besteht und in dem die $x_k = x_k(x)$ stetige Linearformen sind. Wir geben einen Ueberblick über Theorie und Anwendung der FK-Räume.

Die Verwendung von F-Räumen bietet den Vorteil, dass man mehr Fälle als mit B-Räumen umfasst (wichtig bei allgemeinen Matrixtransformationen und funktionentheoretischen Fragen) und im Vergleich zu Köthe-, LF- und F_σ-Räumen über mehr allgemeine Sätze verfügt. Diese Sätze beruhen hauptsächlich auf dem Kategorienprinzip (mit dem man u. a. Singularitäten kondensiert und die Stetigkeit linearer abgeschlossener Transformationen nachweist) und dem Hahn-Banachschen Erweiterungssatz (mit dem man gewisse lineare Operationen konstruiert).

Die Forderung über die $x_k(x)$ bewirkt, dass die Topologie eines FK-Raumes E durch die zugrunde liegende Folgenmenge E^* eindeutig bestimmt ist: je grösser die Menge, desto gröber die Topologie. Durch Untersuchung der Topologien kann man daher oft entscheiden, ob ein FK-Raum in einem anderen enthalten ist: eine Frage, auf die sich viele Konvergenzprobleme zurückführen lassen. Ferner ist jede Matrixabbildung zwischen zwei FK-Räumen stetig.

Wir geben nun Beispiele für die Anwendung von FK-Räumen. Die Lösung der Probleme beruht darauf, dass wir vorkommende Mengen als FK-Räume auffassen und die oben genannten Sätze anwenden.

Matrixtransformationen: Genaue Bedingungen für Matrizen, die vorgeschriebene Abbildungen (von einem Raum E in einem Raum F) bewirken, insbesondere Konvergenzfaktoren- und Vergleichssätze. Umkehrung von Transformationen.

Limitierungstheorie. Struktur der Wirkfelder. Verträglichkeit. Einteilung der Verfahren nach topologischen Gesichtspunkten wie Perfektheit und Abschnittskonvergenz. Darstellbarkeit von Verfahren mittels Matrizen.

Funktionentheorie. Divergenzerscheinungen bei Potenzreihen. Nichtfortsetzbare Funktionen. Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen.

Wir nennen einige Autoren, die Beiträge für das vorliegende Gebiet geleistet haben: Die „polnische Schule" (Banach usw.), G. Köthe, G. Lorentz, der Bourbakikreis, A. Wilansky.

Eine ähnliche Theorie kann man für Mengen von Funktionen (statt Folgen) aufbauen.

DEPARTMENT MATHEMATICS, UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA,
PHILADELPHIA, U. S. A.

Section III

GEOMETRY AND TOPOLOGY

ON THE CLASSIFICATION OF RATIONAL SURFACES

ALDO ANDREOTTI

Given a non-singular rational surface without exceptional curves of the first kind, we intend to solve the problem of finding all possible types of such surfaces with respect to the group of birational transformations without exceptions. The result we obtain is as follows: *Every such surface is birationally equivalent without exceptions either to the projective plane, or to a non-singular quadric, or to a rational normal ruled surface of even order.*

This result is obtained by making use of a paper of Hirzenbruch [1] and proving that the analytic structures considered by him are the only allowable *algebraic* structures for the simply-connected manifolds he treated. These manifolds are nothing else than topological models of the Riemann varieties of the projective plane and of the rational normal ruled surfaces. The structures on them are the natural ones induced by the surrounding complex space. These structures are analytically distinct despite the fact that the topological types of these varieties, because of a theorem of Steenrod,[2] are those of the projective plane, of the product of 2-spheres, and of the sum of the second kind of two projective planes.

Let us call *algebraic* a structure on a 2n-dimensional topological variety, a structure which can be transformed into the natural one on an algebraic model of the given variety. Having proved what are the only allowable algebraic structures for the three topological varieties mentioned above, to get our result we have only to prove the topological equivalence of the Riemann varieties of non-singular rational surfaces without exceptional curves of the first kind, to the first or to the second of the above types (the third type is to be excluded because of the absence of the exceptional curves of the first kind). This result stresses the value of the classification given by C. Segre of non-singular rational normal ruled surfaces.[3]

VIA ARNALDO DA BRESCIA 12, TURIN, ITALY.

[1] Hirzenbruch, *Über eine Klasse einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*, "Math. Annalen" Bd. 124, pp. 77—86, (1951).

[2] N. Steenrod, *Classification of Sphere Bundles*, Annals of Math., pp. 294—311 (1944).

[3] A similar result is partially stated in a paper of G. Vaccaro (*Le superficie razionali prive di curve eccezionali di prima specie*, Rend. Lincei, s. 8, t. 4, pp. 549—551 (1948)); however, a rigorous proof of this theorem in the way suggested by this author seems to give rise to some difficulty.

BEGRÜNDUNG DER GEOMETRIE AUS DEM SPIEGELUNGSBEGRIFF

FRIEDRICH BACHMANN

Bei der Begründung metrischer Geometrien in der Ebene hat J. Hjelmslev das Rechnen mit Spiegelungen als ein wesentliches Beweismittel verwendet. Indem man die geometrischen Objekte durch die Spiegelungen an ihnen ersetzt, kann man eine axiomatische Basis für das Rechnen mit Spiegelungen rein gruppentheoretisch formulieren. Man wird so dazu geführt, die Konsequenzen von Axiomen über die involutorischen Elemente von Gruppen, welche aus involutorischen Elementen erzeugbar sind, zu entwickeln. Es stellt sich die Aufgabe, die Gruppen zu bestimmen, deren involutorische Elemente gegebenen Axiomen genügen, und andererseits gegebene geometrische Transformationsgruppen als abstrakte Gruppen durch Gesetze zu kennzeichnen, denen ihre involutorischen Elemente genügen. Es soll über diesen Problemkreis, welcher in neuerer Zeit von verschiedenen Autoren gefördert worden ist, und über Grundgedanken, die dabei entwickelt wurden, berichtet werden.

KIEL, CLAUSEWITZSTR. 12

KINEMATIK IN DER PROJEKTIVEN DIFFERENTIALGEOMETRIE

MARTIN BARNER

Die projektive Kinematik hat sich in ihrer Anwendung auf die projektive Differentialgeometrie bei verschiedenen Fragestellungen bewährt und hat zu neuen geometrischen Ergebnissen geführt. — Ein sehr einfaches Beispiel bieten die Flächen mit einer Schar konisch-ebener Kurven; sie hängen von sechs Funktionen einer Veränderlichen ab. Man bewegt eine Ebene so projektiv, daß die Tangenten an die Bahnkurven durch einen Punkt gehen. Jede feste Kurve in der bewegten Ebene erzeugt dann eine solche Fläche und jede Fläche mit einer Schar konisch-ebener Kurven ist so darstellbar. — Es gibt eine Reihe interessanter Sonderfälle, z.B. Flächen, die eingehüllt werden von einer Quadrikschar, so daß jede Quadrik die Fläche längs eines Kegelschnitts in zweiter Ordnung berührt. Diese „Projektiv-Kanalflächen" hängen von drei Funktionen einer Veränderlichen ab und enthalten die Projektivrotationsflächen als Sonderfall.

Als weitere bedeutsamere Anwendungen der Kinematik seien u.a. erwähnt die Behandlung der Komplexflächen (vergl.: Math. Ann. **126**, 119—137 und

418—446 (1953)) und die Abwicklung von Kurven und Regelflächen, ferner in der Lie-Geometrie z.B. die Flächen mit einer Schar spärischer Kurven.

FREIBURG/BR. MATH. INSTITUT,
HEBELSTR. 40

STRUCTURE OF GROUP-VARIETIES

IACOPO BARSOTTI

A group-variety is an irreducible subvariety G of a projective space over an arbitrary field k, such that there exist a proper subvariety F of G (the degeneration locus of G), and a rational mapping D of $G \times G$ onto G, having the following properties: if $P, Q \in G - F$, then $R = D[P \times Q] \in G - F$, each one of the three points P, Q, R is determined rationally by the other two, and $G - F$ becomes a group if we formally write $R = PQ$. If F is empty, G is abelian. If k is algebraically closed, one can define group-subvarieties, homomorphisms, isomorphisms in a manner similar to the one familiar in group-theory; if V is a group-subvariety of G, the factor-variety G/V can be defined, and the three homomorphism theorems are valid with only slight modifications due to the existence of inseparable homomorphisms. If $G - F$ is a commutative group, G contains exactly one maximal irreducible rational group-subvariety V, and $G/V = A$ is abelian; moreover, G can be constructed starting from A, V, and a factor set of A into V (notion adapted from group-theory). V itself is the direct product of finitely many straight lines, each with the additive or multiplicative law of composition, if k has characteristic zero; if k has characteristic $p \neq 0$, V is the direct product of finitely many multiplicative straight lines, and of a group-variety W such that P^{p^e} is the identity for any non-degenerate $P \in W$, and for a fixed positive integer e; such W is called periodic, and can be obtained by piecing together additive straight lines (but is not necessarily their direct product). The group of the factor sets of an abelian variety A into a multiplicative straight line, modulo the factor sets associate to the identical, is isomorphic to the Picard variety of A. If G is not commutative, and C is its center, G/C is a Vessiot variety (= representative variety of a linear group) if k has characteristic zero, or is in one-to-one algebraic correspondence with a Vessiot variety if k has characteristic $\neq 0$.

DEPT. OF MATH., UNIV. OF PITTSBURGH,
PITTSBURGH 13, PA., U. S. A.

ZUR FLÄCHENTHEORIE IN FINSLERSCHEN RÄUMEN [1]

Woldemar Barthel

Für einen Punktraum mit *Finslerscher Metrik*

$$ds = L(x, \dot{x})dt \tag{1}$$

hat Busemann das Volumenelement durch einen Integrodifferentialausdruck

$$dJ^{(n)} = \mathfrak{f}(x)dx^1 \dots dx^n \tag{2}$$

aus der Längenfunktion abgeleitet und damit das p-dimensionale Flächenelement

$$dJ^{(p)} = F^{(p)}(x, x_\varrho)du^1 \dots du^p \tag{3}$$

als innere Größe definiert. Durch diesen Inhaltsbegriff wurde eine geschlossenere differentialgeometrische Untersuchung jener Räume möglich.

Bei der *Kurventheorie* ist in erster Linie die *Längen*funktion $F^{(1)}(x, x_1) = L(x, \dot{x})$ und das invariante Differential

$$DX^i = dX^i + X^k \gamma^i_{kh}(x, X)dx^h \tag{4}$$

eines *Vektors* X^i von Bedeutung. Wir beschränken uns hier jedoch auf die Erörterung der *Oberflächen*funktion $F^{(n-1)}(x, x_\varrho) = f(x, \mathfrak{p})$, wobei $\mathfrak{p}_i = \| \delta^k_i x^k_1 \dots x^k_{n-1} \|$ ist. Sie bildet mit dem invarianten Differential

$$\mathcal{D}\mathfrak{P}_i = d\mathfrak{P}_i - \mathfrak{P}_k \Gamma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})dx^h \tag{5}$$

einer *Vektordichte* $\mathfrak{P}_i$ *vom Gewicht* (-1) die Grundlage der *Hyperflächentheorie*. Genügen die $\Gamma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})$ einer gewissen Bedingung, aus welcher die Invarianz des Oberflächeninhaltes einer Vektordichte gegenüber Parallelverschiebung ($\mathcal{D}\mathfrak{P}_i = 0$) folgt, so läßt sich ihre noch verbleibende Unbestimmtheit durch einen schiefsymmetrischen Tensor $\Sigma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})$ charakterisieren.

Das begleitende n-Bein

$$x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \quad \mathfrak{N}^i = \frac{\partial f(x, \mathfrak{p})}{\partial \mathfrak{p}_i} \tag{6}$$

einer Hyperfläche $x^i(u^\varrho)$ genügt den *Weingartenschen Ableitungsgleichungen*

$$\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = -\mathfrak{B}^\beta_\alpha(u^\varrho)x^i_\beta.$$

Indem man nun durch $\mathcal{D}_\alpha \mathfrak{N}^i = 0$ „geodätische Hyperflächen" definiert und diese als Krümmungsnorm benutzt, lassen sich die Hauptkrümmungen der Hyperfläche geometrisch durch die Krümmung gewisser Flächenstreifen auf der Hyperfläche und ihrem lokalen Transversalenbild ausdrücken.

[1] Literaturangaben siehe im Referat „Über Minkowskische und Finslersche Geometrie" in den Ergebnissen des Convegno Internazionale di Geometria Differenziale, Venedig 1953.

Für die *Minimalhyperflächen* als Extremalen der Oberflächenvariation folgt, wenn man die Überschiebung mit $\mathfrak{N}^i$ als Index Null bezeichnet, die Bedingung

$$\mathfrak{B}^{\varrho}_{\varrho} + \Sigma^{k}_{0k} = 0, \tag{7}$$

während die als Lösungen des *isoperimetrischen Problems* auftretenden Hyperflächen notwendig die Gleichung

$$\mathfrak{B}^{\varrho}_{\varrho} + \Sigma^{k}_{0k} = \mathfrak{f}(x)\,.\,\mathrm{const} \tag{8}$$

erfüllen müssen.

Die den Volumenbegriff bestimmende Skalardichte $\mathfrak{f}(x)$ vom Gewicht $+1$ ermöglicht es, jedem Tangentenvektor $\dot{x}^i(t)$ einer Kurve durch

$$\mathfrak{f}(x)\dot{x}^i = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x, \mathfrak{p})^2}{\partial \mathfrak{p}_i\, \partial \mathfrak{p}_k}\mathfrak{p}_k \tag{9}$$

eine Vektordichte $\mathfrak{p}_k(t)$ vom Gewicht (-1) zuzuordnen. Man kann dann in Verallgemeinerung der Distanz in Minkowskischen Räumen durch

$$d^*s = f(x(t), \mathfrak{p}(t))dt \tag{10}$$

die „*Duallänge*" $^*s$ dieser Kurve erklären, die im allgemeinen keine innere Größe mehr darstellt. Im Spezialfall der Riemannschen Geometrie wird sie natürlich mit der durch (1) gemessenen Länge identisch. Die Bestimmung der *Extremalkurven* bezüglich dieser Duallänge ergibt die Gleichungen

$$\mathfrak{f}\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{N}_i}{dt} = f\left[\Sigma^0_{0i} + \partial_i \log\frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} - \mathfrak{N}_i\partial_0 \log\frac{\mathfrak{f}}{\sqrt{\mathfrak{G}}} - f\frac{\partial \log\sqrt{\mathfrak{G}}}{\partial \mathfrak{p}_r}(\Gamma^0_{ri} - \mathfrak{N}_i\Gamma^0_{r0})\right], \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{N}_i(t) = \dfrac{\mathfrak{p}_i(t)}{f(x, \mathfrak{p})}$ und $\mathfrak{G}(x, \mathfrak{p}) = \left\| \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2 f(x, \mathfrak{p})^2}{\partial \mathfrak{p}_r\, \partial \mathfrak{p}_s} \right\|^{\frac{1}{n-1}}$ ist.

Nun erhebt sich die Frage, ob der Tensor $\Sigma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})$ so gewählt werden kann, daß die *geodätischen Hyperflächen* $\left(\dfrac{\mathfrak{D}}{\partial u^\alpha}\mathfrak{N}^i(u^\varrho) = 0\right)$ zu den Minimalhyperflächen gehören und die „*dual-geodätischen Linien*" $\left(\dfrac{\mathfrak{D}}{dt}\mathfrak{N}_i(t) = 0\right)$ mit den Extremalen der Duallänge identisch sind. Tatsächlich kann man einen Tensor $\Sigma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})$ angeben, der dies erfüllt und *ohne* zusätzliche Voraussetzungen die Koeffizienten $\Gamma^k_{ih}(x, \mathfrak{P})$ der invarianten Differentiation (5) vollständig bestimmt. Insbesondere sind dann die Minimalhyperflächen durch das Verschwinden der mittleren Krümmung

$$H \equiv \frac{1}{\mathfrak{f}(x(u))}\mathfrak{B}^{\varrho}_{\varrho}(u) = 0 \tag{12}$$

gekennzeichnet, und für die Lösungen des isoperimetrischen Problems ist

$$H = \text{const} \tag{13}$$

notwendig.

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES, SAARBRÜCKEN

NEUTRAL FIELDS ON ALGEBRAIC CURVES

MARIO BENEDICTY

Neutral field on an algebraic curve C is the set of all the linear series of the curve C, for which certain fixed pairs of points of C are neutral. The theory of neutral fields has been treated, from a geometrical point of view, by F. Severi (*Funzioni quasi abeliane*, 1947).

We will give here the first elements of an algebraic foundation of the above quoted theory, and the treatment will be the same as given by C. Chevalley in his *Introduction to the theory of algebraic functions of one variable* (1951).

Let R be a field of algebraic functions of one variable over an arbitrary field, and let K be the field of constants of R. Let $\mathfrak{n}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \delta)$ be integral divisors of degree 2: the *neutral pairs*. These divisors define a subring Γ of K, the *neutral ring*, containing K; conversely, the neutral pairs are uniquely determinated by their neutral ring Γ. The units of Γ form a subgroup γ of the multiplicative group of R.

There are two binary relations between the divisors of R: we define $\mathfrak{a} \equiv \Gamma^{\mathfrak{b}}$, or $\mathfrak{a} \equiv_{\gamma} \mathfrak{b}$, if there is an element x in Γ or respectively in γ, such that $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{d}(x)$, where $\mathfrak{d}(x)$ is the divisor of x. The former relation is reflexive and transitive, the latter is also symmetric. These relations allow us to define: neutral classes, order and dimension of a neutral class. Let $\mathfrak{a}$ be a divisor, such that $\mathfrak{b} \equiv \Gamma^{\mathfrak{a}}$ implies that the dimension of $\mathfrak{b}$ is equal to the dimension of $\mathfrak{a}$; then the class determinated by $\mathfrak{a}$ will be named a *maximal class*.

Then it is possible to define the *neutral genus* and the *neutral canonical class*, and to prove the Riemann-Roch's theorem.

13, VIA CLATERNA,
ROMA (ITALY)

ZUR SYNTHETISCHEN BEGRÜNDUNG DER PROJEKTIVEN GEOMETRIE DER EBENE MIT HILFE DES ARCHIMEDISCHEN POSTULATES

FRIEDRICH BENNHOLD

Der Pappus-Pascal'sche Satz wird bewiesen aus folgendem Schnittpunktsatz $\gamma^{(n)}$ zusammen mit den Anordnungsaxiomen und dem Archimedischen Postulat in projektiver Form:

Sind $g_1 \parallel g_2$, die Punkte V_0, V_1 auf g_1, W_0 auf g_2 gegeben und konstruiert man rekursiv die Punkte W_i auf g_2, V_i auf g_1 gemäß der Vorschrift: $V_i W_i \parallel V_0 W_0$, $W_i V_{i+1} \parallel W_0 V_1$ $(i = 1, 2, \ldots)$, so ist für ein beliebig fest gewähltes natürliches n: $V_0 W_{n-1} \parallel V_n W_{2n-1}$.[1]

Beweisskizze: Aus den genannten Voraussetzungen wird zunächst ein 8-parametriger Spezialfall $\bar{\gamma}$ des Pappus'schen Satzes bewiesen. Aus $\bar{\gamma}$ zusammen mit dem Archimedischen Postulat folgt dann ein 9-parametriger Spezialfall des Pappus'schen Satzes, und hieraus endlich mit Hilfe des Archimedischen Postulates der allgemeine Pappus'sche Satz.

FRANKFURT/MAIN, DEUTSCHLAND,
LANDGRAF PHILIPPSTR. 9.

ZUR GEOMETRIE EINER KLASSE VON GRUPPEN

PETER BERGAU

Es wird eine Klasse von abstrakten, aus ihren involutorischen Elementen erzeugbaren Gruppen G betrachtet. Diese Klasse enthält die binären projektiven Gruppen, insbesondere die Bewegungsgruppe der ebenen hyperbolischen Geometrie. Der Gruppe G wird die „Gruppenebene von G", deren Punkte die involutorischen Elemente aus G sind, und der „Gruppenraum von G", dessen Punkte die sämtlichen Elemente aus G sind, zugeordnet. Es wird die geometrische Struktur der Gruppenebene und des Gruppenraumes bestimmt, und es werden die Wechselbeziehungen zwischen Sätzen über die Gruppenebene und über den Gruppenraum studiert, die sich aus einer Deutung des Gruppenraumes in der Gruppenebene ergeben.

KIEL, MATHEM. SEMINAR

---

[1] Die eine Konfigurationsgerade ist nur zur bequemeren Formulierung auf die $\overset{\infty}{g}$ gelegt.

GROUPES D'HOLONOMIE HOMOGÈNE DES VARIÉTÉS RIEMANNIENNES

MARCEL BERGER

Soit V_m une variété riemannienne. On étudie ici essentiellement le groupe d'holonomie homogène restreint σ de V_m. On en déduit des résultats sur le groupe d'holonomie homogène (non restreint) Ψ et les formes à dérivée covariante nulle de V_m.

§ 1. — Supposons σ irréductible. Le résultat fondamental est le suivant:

Théorème 1. — Si V_m est *non symétrique*, σ ne peut-être que: pour $V_{2n+1}: SO(2n+1)$; pour V_{4n+2}: $SO(4n+2)$, $U(2n+1)$, $SU(2n+1)$; pour V_{4n}: $SO(4n)$, $U(2n)$, $SU(2n)$, $Sp(n)$, $T^1 \times Sp(n)$, $Sp(1) \times Sp(n)$. Il y a trois exceptions: pour $V_7 : G_2$; pour $V_8 : SO(7)$; pour $V_{16} : SO(9)$.

La marche de la démonstration est la suivante: σ est un groupe *orthogonal, irréductible*; tous ces groupes ont été déterminés par E. Cartan, ce qui permet d'expliciter leurs algèbres de Lie Σ en matrices antisymétriques. Le tenseur de courbure de V_m appartient à Σ, pour les deux premiers indices. Si σ n'est pas l'un des groupes précédents, Σ est alors de forme très particulière ce qui entraîne, à l'aide des relations classiques du tenseur de courbure et des identités de Bianchi, que le tenseur dérivée covariante du tenseur de courbure est identiquement nul.

Remarques: a) — On constate que la liste donnée est exactement celle des groupes de Lie *compacts transitifs* et *effectifs* sur les sphères.

b) — Ces résultats restent valables si la *signature* de la métrique de V_m est quelconque (à des modifications évidentes des groupes ci-dessus).

§ 2. — On sait que σ est la composante connexe de l'identité de Ψ. En recherchant les composantes connexes dans $SO(m)$ des groupes énumérés au § 1, on peut ainsi déterminer complètement les élements de Ψ qui peuvent ne pas appartenir à σ. Mentionnons-en la conséquence suivante:

Théorème 2. — Si une variété admet un revêtement pseudo-kählérien (resp. kählérien) de dimension complexe impaire, irréductible, elle est elle-même pseudo-kählérienne (resp. kählérienne).

§ 3. — Une forme différentielle extérieure à dérivée covariante nulle est invariante par Ψ donc par σ. Les résultats du § 1 permettent d'énumérer complètement les formes à dérivée covariante nulle possibles de V_m. On constate en particulier le:

Théorème 3. — S'il existe sur V_m une forme à dérivée covariante nulle non triviale, V_m est: soit symétrique, soit réductible, soit pseudo-kählérienne.

Inversement on peut caractériser le groupe d'holonomie homogène d'une variété *irréductible non symétrique* par l'existence sur V_m de formes extérieures qui doivent être: soit à dérivée covariante nulle $\big(U(n), SU(n), Sp(n)\big)$, soit vérifier certaines propriétés de récurrence $\big(Sp(1) \times Sp(n), T^1 \times Sp(n)\big)$.

11 AV. SCHNEIDER CLAMART (SEINE) FRANCE

THE MATHEMATICS OF THE HUMAN BLOODGROUPS AND THE ALGEBRAIC LINECONGRUENCES

FELIX BERNSTEIN

In the author's theory of heredity of the bloodgroups O, A, B, AB it is requested that the point $x = O + B, y = O + A, z = O$ lies on a Steiner surface. The Weierstrass parameters $p + q + r = 1$ become frequencies of the hereditary factors being of anthropological significance for every population. Their best values are determined, according to Gauss, by maximising a probability whose two partial derivatives determine a straight line and for variable parameters a line-congruence of order 4 and class 2, whose dual congruence was studied by Caporali, Stahl, Hirst, Reye and Sturm in connection with the general theory of algebraic congruences by E. E. Kummer. Abandoning the use of a „Leitfläche" instrumental in his first theory, Kummer uses none in the algebraic theory. In the new approach two „Leitflächen" are used consisting of two algebraic surfaces in *birational correspondence*, with corresponding points connected by the line of the congruence. The equations

$$(1 + \lambda)\, x = p\lambda + p^2, \quad (1 + \lambda)\, y = q\lambda + q^2, \quad (1 + \lambda) z = r\lambda + r^2$$

obviously define a line connecting the point $x = p, y = q, z = r$ of the plane $x + y + z = 1$ with the point $x = p^2, y = q^2, z = r^2$ of the Steiner surface. Dually the equations

$$(1 + \lambda)\, x = p/q + \lambda\, s/q, \quad (1 + \lambda)\, y = q/s + \lambda p/s, \quad (1 + \lambda) z = s/p + \lambda q/p$$

define a line of a (2,4) connecting corresponding points in two Cayley surfaces.

From the image in the Klein-Plücker space the „Leitflächen" are won by genuine projection.

Singularities derived by Kummer through the focal surfaces are given here a priori through the scheme of heredity and its subcases, yielding generating elements from which the rest of the singularities can be determined.

When dominance is dropped in the scheme of heredity a congruence in five dimensions is defined where the surface of Veronese takes the place of that of Steiner. Generalisation requested by the *Rh*-groups with more hereditary factors lead to simple formulae of n-dimensional space. When triploids (XYY-

males and XXXfemales) occur in the population, congruences, different from those of Kummer, are defined so that his approach and the new approach overlap, but differ in objects and classification.

BASEL, MATH. INSTITUT D. UNIV. RHEINSPRUNG.

EINE VERALLGEMEINERUNG DER FORMELN VON FRENET UND EINE ISOMORPHIE GEWISSER TEILE DER DIFFERENTIAL-GEOMETRIE DER RAUMKURVEN

STANKO BILINSKI

Der Kurve C des dreidimensionalen Euklidischen Raumes, die mit der Gleichung $\vec{r} = \vec{r}(s)$ gegeben ist, seien die zwei unendlichen Folgen $\varkappa_1(s)$, $\varkappa_2(s)$, $\ldots, \varkappa_i(s), \ldots; \tau_1(s), \tau_2(s), \ldots, \tau_i(s), \ldots$ von Skalarfunktionen zugeordnet, die folgendermassen definiert sind: $\varkappa_1 = \varkappa_1(s)$ sei die Krümmung und $\tau_1 = \tau_1(s)$ die Windung der Kurve C, ferner sei

$$\varkappa_{i+1} = \underset{+}{\sqrt{\varkappa_i^2 + \tau_i^2}}, \quad \tau_{i+1} = \frac{\varkappa_i \dot{\tau}_i - \dot{\varkappa}_i \tau_i}{\varkappa_i^2 + \tau_i^2}, \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

wobei die Ableitungen nach dem Parameter s durch Punkte bezeichnet sind. Die Funktion $\varkappa_i(s)$ werden wir „die i-te Krümmung" und die Funktion $\tau_i(s)$ „die i-te Windung" der Kurve C nennen. Jedem Punkt $T(s)$ der Kurve C seien nun zwei unendliche Vektorenfolgen $\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3, \ldots, \vec{\xi}_i, \ldots; \vec{\eta}_1, \vec{\eta}_2, \vec{\eta}_3, \ldots, \vec{\eta}_i, \ldots$ zugeordnet. Dabei ist $\vec{\xi}_1$ der Tangentenvektor, $\vec{\xi}_2$ der Hauptnormalvektor, $\vec{\eta}_1$ der Binormalvektor, und es gelten folgende Rekursionsformeln:

$$\vec{\xi}_{i+1} = \vec{\eta}_i \times \vec{\xi}_i, \quad \vec{\eta}_{i+1} = \frac{\tau_i \vec{\xi}_i + \varkappa_i \vec{\eta}_i}{\underset{+}{\sqrt{\varkappa_i^2 + \tau_i^2}}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Alle Vektoren ξ_i, η_i sind Einheitsvektoren und jedes Vektortripel

$$D_i \equiv \{\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_{i+1}, \vec{\eta}_i\}$$

bestimmt in dieser Reihenfolge ein rechtes rechtwinkliges Dreikant. Das Dreikant D_i nennen wir „das i-te begleitende Dreikant" der Kurve C.

Für die Einheitsvektoren des Dreikants D_i sind folgende Ableitungsgleichungen gültig:

$$\begin{aligned} d\vec{\xi}_i/ds &= \qquad \varkappa_i \vec{\xi}_{i+1} \qquad , \\ d\vec{\xi}_{i+1}/ds &= -\varkappa_i \vec{\xi}_i \qquad + \tau_i \vec{\eta}_i, \\ d\vec{\eta}_i/ds &= \qquad -\tau_i \vec{\xi}_{i+1}. \qquad (i = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Für $i = 1$ sind diese Gleichungen mit den Frenetschen Formeln identisch.

Für die Einheitsvektoren des Dreikants D_i und für die i-te Krümmung $\varkappa_i$ und die i-te Windung τ_i gelten also die gleichen Beziehungen wie für die entsprechenden Größen des Dreikants D_1. Daher wird jeder Satz über Raumkurven für dessen Beweis die Frenetschen Formeln hinreichend sind, auch dann gültig bleiben, wenn man die Elemente des Dreikants D_1 durch die entsprechenden Elemente des Dreikants D_i $(i = 2, 3, 4, \ldots)$ ersetzt. So wird ein gewisser Teil der Differentialgeometrie der Raumkurven isomorph auf einen anderen Teil dieser Geometrie abgebildet. Dadurch ergeben sich aus bekannten Sätzen neue Sätze über Raumkurven, oder Verallgemeinerungen bekannter Sätze.

ZAGREB, SVIBOVAC 10, YUGOSLAVIA

SUR LE ROULEMENT DES SURFACES REGLÉES

LUTFI BIRAN

1. — Si on désigne par $\vec{X}_1(t)$, $\vec{X}_2(t)$ et $\vec{X}_3(t)$ les vecteurs dualistiques unitaires représentatifs du triédre $Ox_1x_2x_3$ en mouvement, on obtient (1, 2) les formules suivantes

$$\frac{d\vec{X}_i}{dt} = -\Delta_j \vec{X}_k + \Delta_k \vec{X}_j$$

i, j, k désignant une permutation paire de (1, 2, 3). Le vecteur dualistique *non* unitaire

$$\vec{\Gamma} = \vec{\omega} + \varepsilon \vec{\omega}_0 = \Sigma_{j=1}^{3} \Delta_j \vec{X}_j, \qquad (\varepsilon^2 = 0)$$

caractérise le mouvement hélicoidal tangent: la droite

$$\vec{G} = \vec{\Gamma}/\sqrt{\vec{\Gamma}^2}$$

est l'*axe*, $\vec{\omega}$ la *rotation instantanée*, $\vec{\omega}_0$ la *vitesse* de 0, $h = (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}_0)/(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$ le *pas* du mouvement. La dérivée du vecteur dualistique d'une droite $\vec{X}$ liée au triédre est

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Gamma} \wedge \vec{X}$$

et $\vec{\Gamma}$ reçoit le nom de *vitesse instantanée* du triédre.

2. — Soit $\vec{\Gamma}_{g/h}$ la vitesse instantanée de E_g dans le mouvement (E_g/E_h): on a

$$\vec{\Gamma}_{2/0} = \vec{\Gamma}_{2/1} + \vec{\Gamma}_{1/0} \tag{1}$$

et l'axe instantané

$$\vec{G} = \frac{\vec{\Gamma}_{1/0}}{\sqrt{\vec{\Gamma}^2_{1/0}}}$$

engendre dans E_0 l'axoide Σ_f, dans E_1 l'axoide Σ_m: on dit que Σ_f est la surface réglée *base*, Σ_m la surface réglée *roulante* du mouvement. Les normales centrales de ces surfaces coïncident à chaque instant. Les trois axes $\vec{G}_{2/0}$, $\vec{G}_{2/1}$, $\vec{G}_{1/0}$ appartiennent donc à une même *recticongruence*.

3. — Soient E_1 et E_2 deux solides en mouvement hélicoidal autour des axes fixes X_1, X_1^* de E_0. L'axe instantanée G du mouvement (E_2/E) doit couper perpendicularement l'axe A de la recticongruence définie par X_1, X_2. $\Gamma_{2/1}$, $\Gamma_{2/0}$, $\Gamma_{1/0}$ désignant les intensités des vitesses instantanées corréspondantes, (1) devient

$$\Gamma_{2/1}\vec{G} = \Gamma_{2/0}\vec{X}_1^* - \Gamma_{1/0}\vec{X}_1$$

d'ou

$$\Gamma_{2/0}\vec{X}_1^* \wedge \vec{G} = \Gamma_{1/0}\vec{X} \wedge \vec{G}.$$

Indiquons par $\Phi = \varphi + \varepsilon\varphi_0$, $\Phi^* = \varphi^* + \varepsilon\varphi_0^*$ les angles dualistiques que $\vec{G}$ forme avec $\vec{X}_1$, $\vec{X}_1^*$. On a encore

$$\Gamma_{2/0}\vec{A}\sin\Phi^* = \Gamma_{1/0}\vec{A}\sin\Phi$$

où $\vec{A}$ est le vecteur dualistique de l'axe de la rectiongrence de $(\vec{X}_1, \vec{X}_1^*, \vec{G})$. On a donc

$$\Gamma_{2/0}\sin\Phi^* = \Gamma_{1/0}\sin\Phi,$$

soit, en posant

$$\Gamma_{2/0} = \omega^* + \varepsilon\omega_0^*, \qquad \Gamma_{1/0} = \omega + \varepsilon\omega_0,$$
$$\omega^* + \varepsilon\omega_0^*/\omega + \varepsilon\omega_0 = \text{Sin}\,\Phi/\sin\Phi^*.$$

Les réglées Σ_m, Σ_f engendrées dans E_1, E_0 sont donc *à pente dualistique constante*. Enfin

$$\omega^*/\omega = \text{const.} \qquad \omega^*/\omega(h^* - h) = \text{const.};$$

donc *si le rapport des rotations et la differénce des pas restent constants la base et la roulante du mouvement sont à pente dualistique constante.*

4. — Dans le cas ou ces quantités ne sont pas constantes, X_1, X_1^* demeurant fixes, Σ_m et Σ_f *roulent* l'une sur l'autre. Ceci étant, la connaissance de Σ_f permet de déterminer, par la condition de roulement, les éléments de l'axoide Σ_m.

BIBLIOGRAPHIE

[1] LUTFI BIRAN, *Mouvement à un paramètre,* Revue de la Faculté des Sciences de l'Université d'Istanbul, Série A, Tome XII, (1947), pp. 208—229.

[2] ———, *Extension de la construction de Savary à l'espace réglé,* dans la même „Revue", Série A, Tome XIII, (1948) pp. 160—164.

ISTANBUL ÜNIVERSITESI FEN FAKÜLTESI,
ISTANBUL, TÜRKIYE.

NOUVELLES BASES AXIOMATIQUES DE GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

EUGÈNE BLANC

Soit E une collection quelconque d'au moins deux objets appelés points et soit définie sur E une famille F d'équivalences δ; toute classe D (mod δ) sera appelée „droite de direction δ"; a étant un point, $a \in D$ s'énonce: a est sur D ou D passe par a. La propriété évidente:

Quels que soient a et $\delta \in F$, il passe par a une droite de direction δ, assure dès à présent le caractère euclidien de notre construction.

Nous dirons que F définit sur E une préstructure euclidienne, si les axiomes suivants sont valables:

I. Toute droite contient au moins deux points.

II. Si a et b sont distincts, il existe au moins une D les contenant et par conséquent une δ telle que $a = b(\delta)$

III. $a \neq b$ et $a \equiv b$ (δ_1) et $a \equiv b$ $(\delta_2) \rightarrow \delta_1$ et δ_2 identiques.

La relation entre droites „avoir même direction" est alors une équivalence, la notion de parallélisme entre droites en résulte et la propriété ci-dessus s'énonce exactement comme le postulat d'Euclide.

On introduit successivement des axiomes dimensionnels, chacun permettant de définir de nouvelles équivalences conduisant aux notions de plan et d'hyperplans à $3, 4, \ldots, n, \ldots$ dimensions.

Pour que les plans possèdent les propriétés habituelles:

Deux droites d'un même plan sont parallèles ou concourantes,

Si D contient a et b de P, elle est dans P,

il est nécessaire d'introduire le nouvel axiome (qui joue un rôle fondamental)

T . a, b, c non alignés et m sur bc et $m \neq b$ et $m \neq c \rightarrow$ la parallèle à ab menée par m coupe ac en un point n (nécessairement distinct de a, b, c, m).

Cet axiome suffit d'ailleurs à assurer la régularité des propriétés des hyperplans de tous ordres. Il entraîne aussi:

Toutes les droites sont des ensembles de points equipotents,
et permet de transporter toute ordination d'une droite sur toutes les autres droites.

Enfin l'introduction d'un axiome „arguésien", tel que:
A . $aa'//bb'$ et $a'a''//b'b''$ et $ab//a'b'//a''b'' \rightarrow aa''//bb''$ assure d'une part (Hilbert) la prolongeabilité de toute structure plane en une structure spatiale dont elle est la trace, et permet d'autre part l'introduction du groupe des translations et celle d'une structure de corps sur chaque droite. L'espace apparait alors comme un produit cartésien d'espaces rectilignes isomorphes entre eux.

17, Rue Bardoux, Clermont (P de D). France.

EINIGE RESULTATE ÜBER DIE EINBETTUNG ZWEIDIMENSIONALER RAUMFORMEN KONSTANTER KRÜMMUNG IN HÖHERE RÄUME KONSTANTER KRÜMMUNG

Danilo Blanuša

Es bedeute der Reihe nach R_n, S_n, H_n einen n-dimensionalen euklidischen, sphärischen bzw. hyperbolischen (Lobatschefskyschen) Raum. R_∞ sei der Hilbertsche Raum. Unseres Wissens sind bisher folgende isometrischen und singularitätenfreien Einbettungen zweidimensionaler Raumformen in obengenannten Räumen möglichst niedriger Dimensionszahl > 2 bekannt oder im Druck.

a) Raumformen positiver konstanter Krümmung. S_2 im R_3, S_3 und H_3 (alles trivial). Elliptische Ebene im R_4, S_4 und H_4 [3], [4].

b) Raumformen verschwindender Krümmung. R_2 im R_3 (trivial) und im H_3 (Grenzkugel). Euklidischer Zylinder im R_3 (trivial) und im H_3 (Rotationsfläche). Euklidischer einseitiger Zylinder (unendlich breites Möbiussches Band) im R_4, S_4 und H_4 [5]. Torus im S_3 (Cliffordsche Flächen) und daher auch im R_4 und H_4 (da diese Räume den S_3 enthalten). Kleinscher Schlauch mit Selbstdurchdringung im R_4 [2]; ohne Selbstdurchdringung im R_5 [6]. Letztere Fläche befindet sich gleichzeitig in einem S_4. Folglich ist die Einbettung auch im H_5 geleistet.

c) Raumformen negativer konstanter Krümmung im R_∞. Hyperbolische Ebene [1], [7], [8]. Zylinder mit hyperbolischer Metrik (enthalten in [8]). Einseitiger Zylinder mit hyperbolischer Metrik [9].

Als neue Resultate werden besprochen: 1. R_2 im S_4. 2. Euklidischer Zylinder im S_3. 3. Kleinscher Schlauch (ohne Selbstdurchdringung) im R_4 und H_4.

Hiermit ist für die zweidimensionalen Raumformen konstanter positiver und verschwindender Krümmung die eingangs formulierte Einbettungsfrage gelöst.

LITERATUR

[1] L. BIEBERBACH, Comm. math. helv. 4, 1932, S. 248—255.
[2] C. TOMPKINS, Bull. Amer. Math. Soc. 47, 1941, S. 208.
[3] D. BLANUŠA, Nachr. Österr. Math. Ges., Wien 1952, No. 21/22, S. 40.
[4] ———, Le plan elliptique plongé isométriquement dans un espace à quatre dimensions ayant une courbure constante. Glasnik mat.-fiz. i astr. (Periodicum math.-phys. et astr.) zagre. (Im Druck.)
[5] ———, Le plongement isométrique de la bande de Möbius infiniment large euclidienne dans un espace sphérique, parabolique ou hyperbolique. Bull. int. Acad. yougosl. (im Druck.)
[6] ———, Zbornik radova Srpske akademije, Matem. Inst. I, Beograd 1951, S. 91—100. (Deutsche Zusammenfassung).
[7] ———, Monatsh. f. Math., Wien 1953, 57, S. 102—108.
[8] ———, Plongement isométrique de l'espace hyperbolique à n dimensions à distance finie d'un point dans l'espace de Hilbert. Bull. int. Acad. yougosl. (Im Druck.)
[9] ———, Bull. Sci., Conseil des Acad. de la RPF Yougoslavie, T. 1, No. 2, 1953, S. 38.

ZAGREB, HERCEGOVAČKA 37. YUGOSLAVIA

BOOLEAN GEOMETRY II

LEONARD MASCOT BLUMENTHAL

A Boolean semimetric space arises by associating with each two elements a, b of an abstract set S an element $d(a, b)$ of a Boolean algebra as "distance", the association being subject to the requirements that $d(a, b) = d(b, a)$ and $d(a, b) = 0$ if and only if $a = b$. In a previous paper (Boolean Geometry I, Rend. Circ. Mat. Palermo, vol. I (Ser. II) 1952, pp. 343—360) the writer studied the distance geometry of the Boolean semimetric space B obtained when S is itself a Boolean algebra B and $d(a, b) = a \,.\, b' + a' \,.\, b \in B(+, ., $ and $'$ denote the Boolean operations in B). Then $d(a, b) + d(b, c) \supset d(a, c)$, $(a, b, c \in B)$ and the space is Boolean *metric*. Every congruence (isometry) of the space with itself is expressible in the form $f(x) = d(x, a)$, segments are defined as congruent images of maximal chains, and metric properties of segments (together with a theory of the two kinds of betweenness present in such spaces) are established. The methods and results are entirely algebraic, no topology being assumed for the space.

In the present investigation it is first established that for every Boolean algebra, the Boolean metric space B defined above is congruently contained in a metrically *convex* Boolean metric space over a Boolean algebra that contains the original one as a sub-algebra. The congruence is, in fact, an isomorphism, and since metric convexity of B is easily seen to be equivalent to lack of atoms in the underlying algebra, it follows that every Boolean algebra may be embedded isomorphically in an atom-free Boolean algebra. Assuming from now on that B is atom-free (metrically convex) and lattice-complete, concepts involving continuity, based on the introduction of the Birkhoff-Kantorovich order topology (sequential or directed set) are defined. It is seen that B is also metrically complete. Arcs are defined as homeomorphs of maximal chains. Since every motion (congruence of B with itself) is a homeomorphism and every congruence between any two subsets of B is extendible to a motion, segments are arcs. One seeks to determine what metric and topological properties of arcs and segments in ordinary metric spaces are valid in the very different environment provided by a Boolean metric space. Homeomorphisms between maximal chains with the same end-elements, connectedness properties of chains, characterizations of segments among arcs (by having a length equal to the distance of the end-elements, for example) are considered. A theory of continuous curves is also begun.

University of Missouri,
Columbia, Missouri U.S.A.

BEMERKUNGEN ZUR HOMOTOPIETHEORIE

Ewald Burger

Kleinere Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen Homologie- und Homotopieinvarianten der Abbildungen eines n-dimensionalen Polyeders K in einen Raum, der in den Dimensionen $< n$ asphärisch ist, unter Benutzung der von Eilenberg-MacLane (Ann. of Math. 43 (1942)) gegebenen Beschreibung der Kohomologiegruppen von K durch die ganzzahligen Homologiegruppen.

Frankfurt a. M.,
Brüder Grimm Str. 57

THE SPACE OF KÄHLER METRICS

Eugenio Calabi

Let M^n be a closed, n-dimensional complex manifold. We assume that M^n admits at least one Kähler metric $g_{\alpha\beta^*}$; its associated closed exterior form $\omega = \sqrt{-1}\, g_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$ determines a real cohomology class, called the principal class of the metric. Consider the space Ω of all infinitely differentiable

Kähler metrics in M^n with the same principal class; the topology of Ω is defined by the L^2 topology of the tensorial components of metrics in Ω in compact subregions of co-ordinate domains. If $R_{\alpha\beta^*}$ is the Ricci tensor of any metric in Ω, then the Ricci form $\sqrt{-1}\, R_{\alpha\beta^*}\, dz^\alpha \wedge dz^{\beta^*}$ is closed and its cohomology class is $2\pi C^{(1)}$ ($C^{(r)} = r$th Chern class).

Theorem 1. Given in M^n any real, closed, infinitely differentiable exterior form Σ of type (1, 1) and cohomologous to $2\pi C^{(1)}$, there exists exactly one Kähler metric in Ω whose Ricci form equals Σ.

The proof proceeds by joining the Ricci form of one metric in Ω with Σ by a differentiably parametrized arc in the same linear space of forms (for example by linear interpolation) and constructing a corresponding parametrized path in Ω, then by proving that it is unique, and that its terminal point is independent of the path.

One can introduce in Ω a generalized Riemannian structure by defining the metric form $ds^2 = \left(\dfrac{\partial\omega(t)}{\partial t}, \dfrac{\partial\omega(t)}{\partial t}\right) dt^2$, where $\omega(t)$ represents a differentiable path in Ω. One shows that between any two points in Ω there exists exactly one geodesic, that the topology induced by the geodesic distance coincides with the chosen one, and that Ω with this metric is isometric with a geodesically convex subset of a Hilbert sphere.

If $g_{\alpha\beta^*}$ belongs to Ω and Σ is its Ricci form, then (Σ, Σ) is stationary with respect to first order variations in Ω, if and only if the contravariant components of the gradient of the scalar curvature generate a group of complex analytic transformations of M^n. If M^n has the property that each one-parameter complex transformation group of M^n (if any exist) leaves no point fixed, or if it is the Gaussian sphere, then this implies that the scalar curvature is constant, that Σ is harmonic, and that (Σ, Σ) is minimized.

Theorem 2. If M^n has the restrictive property described above, then there exists a metric in Ω which minimizes (Σ, Σ), unique but for analytic transformations of M^n, and characterized by the property that the scalar curvature is constant.

LOUISIANA STATE UNIV.
BATON ROUGE 3, LOUISIANA, U.S.A.

ON TWO DIMENSIONAL ASPHERICAL COMPLEXES

WILFRED HALLIDAY COCKCROFT

Let L be a connected two dimensional C. W. complex. Let K denote the complex $L \cup \{e_i^2\}$, where $\{e_i^2\}$, $i = 1, 2, \ldots$, is a set of 2-cells which are adjoined to the 1-section of L in the usual way. I consider the question: if L is non-aspherical, can K be aspherical? An answer to this question would of course imply an answer to the question: is a subcomplex of an aspherical two dimensional complex itself aspherical? *Assuming L to be finite* I prove

Theorem I. *If $\pi_1(L)$ is* (i) *an Abelian group, or* (ii) *a finite group, or* (iii) *a free group, then K is non-aspherical if L is non-aspherical;*

Theorem II. *If L has only one 2-cell, then K is non-aspherical if L is non-aspherical.*

Two incidental results possibly of interest are

(a) *the only non-trivial commutative fundamental groups of finite connected two dimensional aspherical complexes are the infinite cyclic group and the free Abelian group on two generators;*

(b) *a finite connected two dimensional complex which has a free fundamental group and which is acyclic in dimension two is aspherical.*

KING'S COLLEGE,
ABERDEEN, SCOTLAND

SUR DES SURFACES PARTICULIÈRES

MARCEL DECUYPER

Pour les surfaces dont les lignes asymptotiques des deux familles appartiennent à des complexes linéaires, un foyer quelconque d'une directrice de Wilczynski se trouve dans un plan focal de l'autre. A chaque point de la surface, on associe ainsi un quadrilatère $FF'ff'$: ses sommets F, F' sont les foyers de la première directrice, f et f' sont ceux de la seconde, le côté Ff est l'intersection d'un plan focal de la première directrice et d'un plan focal de la seconde; de même pour $F'f'$. On démontre que ces côtés Ff et $F'f'$ sont aussi les diagonales du quadrilatère de Demoulin de la surface de départ. Réciproquement, pour toute surface dont les diagonales du quadrilatère de Demoulin coupent les directrices aux foyers de celles-ci, les asymptotiques appartiennent à des complexes linéaires.

D'autre part, les congruences des directrices forment un couple stratifiable conjugué, les surfaces de stratification forment une double famille de surfaces toutes du même type que la surface de départ et admettant toutes mêmes directrices de Wilczynski et mêmes quadrilatères de Demoulin.

176, RUE DU G[AL] DE GAULLE,
MONS EN BAROEUL (NORD) FRANCE

DECOMPOSITIONS OF A SPHERE

T. Dekker and J. de Groot

S denotes the twosphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $\aleph$ the cardinal of real numbers, $\overline{\overline{M}}$ the cardinal of a set M.

It is possible to decompose S into mutually disjoint (non empty) sets A_m

$$S = \bigcup_{m\in M} A_m \qquad (1 < \overline{\overline{M}} \leqq \aleph), \tag{1}$$

such that *any* given family (with cardinal less than or equal to $\aleph$) of congruence relations

$$\bigcup_{m'\in M'} A_{m'} \cong \bigcup_{m''\in M''} A_{m''} \qquad (0 \Subset M',\ M'' \Subset M) \tag{2}$$

is satisfied. The sums in (2) are therefore unequal to S, but are otherwise chosen at random.

This theorem is known, if the mentioned cardinals are *finite* (Robinson, Adams). One needs the use of the axiom of choice. To establish a proof, we prove the existence of a free (non Abelian) subgroup with $\aleph$ generators of the group of congruent (distance preserving) mappings of S onto itself. Then we are able to use the basic ideas of Robinsons proof. Moreover one may require in a number of cases certain geometrical properties from the sets A_m, such as being totally imperfect.

Examples. 1. S is the sum of mutually disjoint sets $A_i (i = 1, 2, \ldots)$, such that all possible sums of sets A_j (the empty sum and the sum equal to S excluded) are congruent to each other. In particular are the A_i congruent to each other.

2. S is the sum of an increasing wellordered system of subsets of S (with cardinal $\aleph$) of mutually congruent sets.

3. It is possible to divide S into mutually disjoint sets B_m, C_m, reassemble each pair by congruent mappings such that any number ($\leqq \aleph$) of copies of S is formed: $B_m \cup C_m \underset{2}{=} S$, $(m \in M,\ \overline{\overline{M}} \leqq \aleph)$.

References

[1] F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (1914), 469—472.
[2] S. Banach and A. Tarski, Fund. Math. **6** (1924), 244—277.
[3] W. Sierpiński, Fund. Math. **33** (1945), 229—234, 235—244.
[4] R. M. Robinson, Fund. Math. **34** (1947), 246—260.
[5] J. F. Adams, Journ. London Math. Soc. **29** (1954), 96—99.

Mathematisch Instituut,
Amsterdam.

SUR LA COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

PIERRE ERNEST DOLBEAULT

Ω^p (resp. E^p) désignant le faisceau des germes de p-formes différentielles holomorphes (resp. holomorphes fermées) sur une variété analytique complexe V, la cohomologie à coefficients dans Ω^p (resp. E^p) est interprétée au moyen de la d''-cohomologie (resp. d-cohomologie) des formes différentielles (ou des courants) sur V. Les relations entre les cohomologies à coefficients dans Ω^p et dans E^p prennent des formes particulières dans le cas des variétés kählériennes compactes et des variétés de Stein, et expliquent les analogies entre les propriétés de ces variétés. Les résultats précédents fournissent, en termes de formes différentielles sur V: 1) les invariants topologiques et analytiques attachés aux espaces fibrés analytiques principaux de base V, à fibre abélienne; 2) la condition pour que de tels espaces fibrés admettent une connexion analytique; 3) une caractérisation des diviseurs des fonctions thêta; (les fonctions thêta, définies sur une variété analytique complexe quelconque, comprennent les fonctions thêta introduites par K. Kodaira sur les variétés kählériennes compactes et les fonctions automorphes multiplicatives de Stein sur les polycylindres).

Une étude des systèmes de parties singulières de p-formes différentielles méromorphes fermées 1) fournit des conditions d'existence pour les formes méromorphes fermées sur V, dont les parties singulières sont données; 2) permet l'étude des $(p+1)$-formes de seconde espèce distinguées. Les résultats ne sont complets que dans la cas $p = 1$.

Si la sous-variété polaire d'une p-forme méromorphe fermée (pour $p > 1$) est sans singularité, la forme est de seconde espèce. Dans un cas où les singularités de la sous-variété polaire sont simples, il existe un courant prolongeant le courant défini, en dehors de la sous-variété polaire, par une p-forme méromorphe. D'où, pour $p > 1$, un théorème d'existence pour les formes méromorphes fermées ayant une sous-variété polaire de multiplicité un, et une interprétation plus précise d'un résultat du paragraphe précédent.

120, BD A. PINARD MALAKOFF (SEINE) FRANCE

ÜBER FASERNWEISE HOMOTOPIEÄQUIVALENZ VON FASERRÄUMEN

ALBRECHT DOLD

Zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$, $i = 1, 2$, heißen fasernweise homotopieäquivalent (R. Thom, Annales de l'Ecole Normale 69, S. 164), wenn es stetige Abbildungen $h_1 : B_1 \to B_2$ und $h_2 : B_2 \to B_1$ gibt, die für jedes $x \in X$

die Faser über x in die Faser über x abbilden (d.h. $h_1(p_1^{-1}(x)) \subset p_2^{-1}(x)$ und $h_2(p_2^{-1}(x)) \subset p_1^{-1}(x)$; sog. „fasernweise Abbildungen") und die die Eigenschaft haben, daß die zusammengesetzten Abbildungen $h_1 \circ h_2$ und $h_2 \circ h_1$ durch eine fasernweise Deformation in die Identität übergeführt werden können. Dabei ist eine fasernweise Deformation eine solche, bei der jeder Punkt nur innerhalb seiner Faser sich bewegen darf.

Es wird der Satz bewiesen, daß zwei Faserräume $\mathfrak{B}_i = \{B_i, p_i, X, Y_i, G_i\}$ (X ein Polyeder, Y_i lokal kompakt) schon dann fasernweise homotopieäquivalent sind, wenn es eine fasernweise Abbildung $h : B_1 \rightarrow B_2$ gibt, deren Einschränkung auf eine Faser eine (gewöhnliche) Homotopieäquivalenz zwischen Bild- und Urbildfaser ist. Beim Beweis spielen die Abbildungsräume $Y_i^{Y_j}$, $i, j = 1, 2$ (mit der „kompakt-offenen" Topologie) eine wesentliche Rolle, insbesondere die in $Y_i^{Y_i}$ durch das Zusammensetzen von Abbildungen definierte stetige Multiplikation.

Als Anwendung erhält man eine Klassifikation der Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, Y, G\}$ ($S^m = m$-Sphäre, Y lokal kompakt) bezüglich der fasernweisen Homotopieäquivalenz, die der auf Feldbau zurückgehenden Klassifikation dieser Faserräume bezüglich der gewöhnlichen Äquivalenz entspricht. Genauer gesagt handelt es sich beide Male nur um eine Zurückführung des Klassifikationsproblems auf die Berechnung gewisser Homotopiegruppen.

Unter Benutzung der Ergebnisse von Serre über die Homotopiegruppen der Sphären (Annals of Math. 54, S. 425) werden im Falle $Y = S^n$, $G = O^{n+1} =$ orthogonale Gruppe in $(n + 1)$ Variablen die in Frage kommenden Homotopiegruppen teilweise berechnet. Damit ergibt sich: Eine volle Klasse fasernweise homotopieäquivalenter Faserräume $\mathfrak{B} = \{B, p, S^m, S^n, O^{n+1}\}$ enthält genau dann unendlich viele paarweise nicht äquivalente Faserräume, wenn $m \equiv 0$ (4) und $n > \frac{m}{2}$ ist. Für $m \leqq 3$ oder $n \leqq 2$ ist fasernweise Homotopieäquivalenz gleichbedeutend mit Äquivalenz.

Mathematisches Institut,
Hauptstr. 47—51, Heidelberg.

LE RANG DES 4-RÉSEAUX DE COURBES DANS LE PLAN

Albert Dou

Un 4-réseau, T^4, est défini par ses fonctions explicites

$$s - s(u, v) = 0, \quad t - t(u, v) = 0 \tag{1}$$

On dit que T^4 est de rang un, deux ou trois (au maximum) selon qu'il y a une, deux ou trois relations linéairement indépendantes du type

$$R \equiv S(s) + T(t) + U(u) + V(v) = 0. \tag{2}$$

On dira que T^4 est linéaire, s'il est au moins de rang un, et bilinéaire s'il est au moins de rang 2. Nous donnerons deux formes de la condition nécessaire et suffisante pour que T^4 soit linéaire. Nous donnerons aussi les conditions de bilinéarité et du rang maximum; et on peut déduire facilement le théorème de Blaschke, qui affirme que le rang maximum est 3.

Supposons que T^4, étant donné par (1), soit linéaire. De (2) on déduit

$$\begin{aligned} \partial R/\partial u &= S'(s) \,.\, s'_u + T'(t) \,.\, t'_u - U'(u) = 0, \\ \partial R/\partial v &= S'(s) \,.\, s'_v + T'(t) \,.\, t'_v - V'(v) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Ce système montre que U' et V' étant connues, S' et T' sont déterminées univoquement. En dérivant à nouveau (3), on obtient

$$\partial^2 R/\partial u^2 \equiv s'^2_u \,.\, S'' + t'^2_u \,.\, T'' + s''_{uu} \,.\, S' + t''_{uu} \,.\, T' = U''. \tag{4}$$

$$\partial^2 R/\partial u \partial v \equiv s'_u s'_v \,.\, S'' + t'_u t'_v \,.\, T'' + s''_{uv} \,.\, S' + t''_{uv} \,.\, T' = 0. \tag{5}$$

$$\partial^2 R/\partial v^2 \equiv s'^2_v \,.\, S'' + t'^2_v \,.\, T'' + s''_{vv} \,.\, S' + t''_{vv} \,.\, T' = V''. \tag{6}$$

Δ étant la résultante du système des équations (3), (4), (5), (6), c. à. d., le déterminant formé par leurs coefficients et termes indépendantes, il en résulte que

$$\Delta \equiv K \,.\, U'' + L \,.\, V'' + M \,.\, U' + N \,.\, V' = 0 \tag{7}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour la linéarité de T^4. Dans (7) les coefficients K, L, M, N sont des fonctions connues qu'on peut déduire de s et de t. Si nous dérivons successivement (5) par rapport à u et à v, nous obtenons d'abord deux équations du troisième ordre, d'inconnues S', T', S'', T'', S''', T'''. En dérivant ces deux dernières nous en obtenons trois autres, une dérivation nouvelle nous en donne 4 autres, soit un total de 10 équations linéaires homogènes, à 10 inconnues S', T', . . ., S^V, T^V. L'annulation de la résultante Δ de ce système est aussi la condition nécessaire et suffisante du cinquième ordre différentiel que doivent satisfaire s et t pour que T^4 soit linéaire. La caractéristique de la matrice de Δ doit être 8 pour que T^4 soit bilinéaire, et 7 pour que T^4 soit de rang 3. Cette dernière condition se réduit à une condition du troisième ordre et deux du quatrième. Comme 7 est la valeur minimum que peut avoir la dite caractéristique, il en résulte que 3 est le rang maximum de T^4.

BIBLIOGRAPHIE

W. BLASCHKE und G. BOL, „Geometrie der Gewebe". Berlin, 1938. Springer.

A. DOU S.J., „Cuatritejidos planos", Memoria de la Acad. Barcelona, 1953.

COLEGIO S. FRANCISCO DE B.,

SAN CUGAT - BARCELONA, ESPAGNE.

THE PROJECTIVE ORTHOGONAL AND LINEAR FRACTIONAL REPRESENTATIONS OF THE SIMPLE GROUP OF ORDER 360

WILLIAM LEONARD EDGE

1. The alternating group $\mathscr{A}_6$ is isomorphic to

(i) $PO_2(4, 3)$: the group of projectivities, of determinant $+1$ in an S_3 wherein homogeneous coordinates are all marks of $GF(3)$, which leave Q, the quadric $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$, invariant;

(ii) $LF(2, 3^2)$: the group of projectivities, on an S_1 whereon homogeneous coordinates are all marks of $GF(3^2)$, imposed by matrices whose determinants are squares in this field.

This paper offers an explanation of these isomorphisms, disclosing in S_3 and S_1 sets of 6 geometrical objects that undergo permutation by the group.

2. S_3 consists of 40 points whereof Q contains 10. Of the remaining 30 15 satisfy $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 + 1$ and are *positive*, 15 satisfy $x^2 + y^2 + z^2 = t^2 - 1$ and are *negative*. Q pairs as polars the 130 lines of S_3, the polars of its 45 chords being skew to Q. The other 40 lines are tangents, 2 of either sign, polars of each other, at each point of Q. A tangent has, in addition to its contact, 4 points all similarly signed and is thereby signed accordingly. The 15 points of either sign are vertices of 6 pentahedra whose edges are all tangents; every 2 of these 6 pentahedra share one vertex. The 360 projectivities of $PO_2(4, 3)$ act as a permutation group on the 6 pentahedra of either sign, and on their polar pentagons.

3. S_1 consists of 10 points among which are 30 harmonic sets of 4. Of these 30 sets 15 are *positive* and 15 *negative* according as the discriminant of the Hermitian form whose 4 zeros constitute the set is $+1$ or -1. Hermitian forms are defined through the non-identical automorphism of $GF(3^2)$. The 15 sets of either sign can be arranged as 6 quintuples; every 2 of the 6 quintuples share one set. The 360 projectivities of $LF(2, 3^2)$ act a as permutation group on the quintupels of either sign.

16 CHAMBERS ST., EDINBURGH,
SCOTLAND

A NEW FOUNDATION OF THE GEOMETRY OF CIRCLES.

GÜNTHER EWALD

As B. L. van der Waerden and L. J. Smid (Math. Ann. vol. 110 (1934), p. 753) have pointed out there is an analogy between the plane projective geometry and the geometry of circles, since for the axiomatic foundation of either of them, in addition to the elementary axioms on "intersection" and "join", a configuration property is needed. In projective geometry one usually uses the theorems of Pappus or Desargues. The latter of them is implied by the former, but not conversely. In the geometry of circles there is an analogous relationship between the theorem of Miquel and the so-called "Bushel Theorem" (Büschelsatz). Van der Waerden and Smid use the former one as a basis for the ordinary geometry of circles leaving the question open which geometry can be built on the Bushel Theorem analogously.

By a method different from van der Waerden's it can be shown that this geometry is essentially the geometry of plane cuts of a convex surface. We therefore call it convex geometry of circles. The axioms of incidence, ordering, and continuity applied are similar to axioms A 1 to A 10 and A 17 used by B. Petkantschin (Annuaire de l'Université de Sofia II, Faculté Physiko-Mathématique, vol. 1 (1940), p. 219—325 and Jber. DMV 51 (1941), p. 124—147) for his axiomatic foundation of Möbius' geometry in the complex plane. (By the way, his axiom A 9 can be deduced from the others).

An other result obtained by the referent is a characterisation of the ordinary geometry of circles by an additional application of orthogonality axioms. At first the theory of bushels of mutually tangent and orthogonal circles is developed axiomatically. By means of circles, bushels of circles and bundles of circles a 3-dimensional projective space can be constructed by using "oppositions" in the sense of K. Menger (Duke Math. J. 17 (1950), p. 1). — A convex part of the space thus obtained which is of significance for the convex geometry of circles can be constructed without orthogonality axioms. The method applied here is based on a paper by K. Reidemeister (J. reine angew. Math., vol. 154 (1925), p. 8—15). — By using oppositions a correlation between points and planes in this projective space is defined. The points and circles of our geometry of circles may be identified with the points of the fundamental domain of this correlation and with the plane cuts of the ellipsoid thereby obtained, respectively. So one is led to the ordinary geometry of circles.

This result may be interpreted as an axiomatic foundation of the tetracyclic coordinates of the circles.

NEUES STUDENTENHEIM Z. 65.,
MAINZ.

SUR LA CATÉGORIE DES CLASSES DE COHOMOLOGIE D'UN ESPACE

ISTVÁN FÁRY

Désignons par $H(X)$ l'anneau de cohomologie de l'espace compact X à coefficients dans un anneau A; $H(X) = \Sigma_{p \geqq 0} H^p(X)$, et nous posons $H^+(X) = \Sigma_{p \geqq 1} H^p(X)$. Si $h \in H^+(X)$ nous notons par $\operatorname{kat}(h)$ le plus petit entier m, tel qu'il existe m fermés $F_1, \ldots, F_m$ recouvrant X, et tels que h soit annulé par les homomorphismes canoniques $H(X) \to H(F_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Notons que la fonction $\operatorname{kat}(h)$ est analogue à la catégorie homologique $\operatorname{kat}(X)$ de l'espace X. On démontre facilement: 1° $\operatorname{kat}(h) < +\infty$, et $\operatorname{kat}(h) = 1$ équivaut $h = 0$; 2° si $h, k \in H^+(X)$, et $\alpha, \beta \in A$, alors $\operatorname{kat}(\alpha h + \beta k) \leqq \operatorname{kat}(h) \operatorname{kat}(k)$; 3° $\operatorname{kat}(hk) \leqq \min(\operatorname{kat}(h), \operatorname{kat}(k))$ (hk est le cup-produit); 4° si $\operatorname{kat}(h) \leqq n$, alors $h^n = 0$. Dans le cadre de la théorie de Jean Leray on peut utiliser la fonction kat pour démontrer l'unicité de $H(X)$. Autres applications de cette fonction.

1, PLACE DU PANTHÉON, PARIS (5E)

ON DEVELOPABLE SURFACES IN THE FOUR DIMENSIONAL SPACE OF CONSTANT CURVATURE

GERMÁN FERNÁNDEZ

Let Σ be a surface $(x = x, y = y, z_1 = z_1(x, y), z_2 = z_2(x, y))$ in the 4-dimensional space of constant curvature S_4. Let P be a point of Σ and $(P; e_1, e_2, e_3, e_4)$ be a frame of orthogonal unit vectors, such that e_1, e_2 are in the tangent and e_3, e_4 in the normal plane to Σ at P. As is known (see, for instance, Wong, Trans. Am. Math. Soc. vol 59, 467—507, 1946) to each direction u through P on Σ, corresponds a vector of "normal curvature" $a_{11}(u)$ and a vector of "geodesic torsion" $a_{12}(u)$, both contained in the normal plane and whose end points describe the so called "conic of curvature" Q.

Using the method of moving frames of Cartan, we consider the case of developable surfaces, defined by curvatura of Gauss $= 0$, i.e. by the partial differential equation of the second order $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, with $a_{ij} = a_{ij}^{(3)} e_3 + a_{ij}^{(4)} e_4$ and $a_{ij}^{(k)} = \dfrac{w_i^k}{w^j}$, where $w_i^k (= e_k \,.\, De_i)$, $w^j (= e_j, dP)$ are pfaffian forms of the coordinates of the space.

We solve this equation for some particular cases and give the corresponding geometrical interpretation. Among others we obtain the following results:

a. Every surface of the type $x = x$, $y = y$, $z_1 = z_1(x)$, $z_2 = z_2(y)$ is developable.

b. For developable surfaces, the conic of curvature Q is tangent to e_3 and e_4. This gives a classification of these surfaces, according to the class of Q. The cases in which Q is a circle or reduces to a segment are analysed.

c. If Q reduces to a segment with the end point at P, and only in this case, the developable surface is a ruled surface.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS,
1 ESQ 47., CIUDAD EVA PERÓN., REPUBLICA ARGENTINA.

MINDESTZAHLEN VON KOINZIDENZPUNKTEN

WOLFGANG GEORG FRANZ

Sind f und g zwei stetige, ein-mehr-deutige Abbildungen eines Raumes $\mathfrak{M}$ in einen Raum $\mathfrak{N}$, so heißt ein Punkt p von $\mathfrak{M}$ ein Koinzidenzpunkt (KP) des Abbildungspaares (f, g), wenn in $\mathfrak{N}$ gilt $f(p) = g(p)$. Wenn $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ und g die Identität ist, handelt es sich um den Spezialfall der Fixpunkte. Wenn $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ beide endliche n-dimensionale Mannigfaltigkeiten sind, läßt sich eine der bekannten Lefschetz-Hopf-Reidemeister-Weckenschen Fixpunkttheorie analoge Theorie der Koinzidenzpunkte entwickeln, die jedoch an einigen wesentlichen Stellen neue Überlegungen notwendig macht. — Zunächst beweise man im Bereich der Homologietheorie folgende drei Tatsachen: (1) f und g lassen sich so deformieren, daß nur endlich viele KP auftreten. Bereits diese Tatsache erfordert zum Beweis gegenüber dem Fixpunktfall eingehendere Betrachtungen und insbesondere das Eingehen auf die n-Dimensionalität von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. — (2) Für isolierte KP lässt sich in naheliegender Weise ein KP-Index definieren. Liegen dann nur endlich viele KP vor, so gilt für die Summe j ihrer Indizes, die sogenannte algebraische KP-Zahl oder den KP-Index $j = j(f, g)$ des Abbildungspaares (f, g):

$$j = \sum_{r=\sigma}^{n} (-1)^r \, sp\, (\gamma_r f_r).$$

Hierin bedeutet f_r den durch die Abbildung f induzierten Homomorphismus der r-dimensionalen rationalzahligen Homologiegruppe $\mathfrak{B}_r$ von $\mathfrak{M}$ in die r-dimensionale Homologiegruppe $\mathfrak{C}_r$ von $\mathfrak{N}$; γ_r bedeutet den der Abbildung g entsprechenden Umkehrhomomorphismus, der $\mathfrak{C}_r$ in $\mathfrak{B}_r$ abbildet, sp bedeutet die Spurbildung. Bei den Beweisen und bei der Darstellung der Homomorphismen durch Matrizen spielen die Mannigfaltigkeitseigenschaften von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, insbesondere die Schnittmatrizen der Homologieringe von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ eine entscheidende Rolle. — (3) Eine der eben genannten entsprechende Formel, die sich anstatt auf die Homologieklassen auf die Ketten einer Simplizialzerlegung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ und deren duale Zellteilung bezieht, erlaubt die Berechnung von j in endlich vielen Schritten. Solche Formeln wurden bereits 1926 von Lefschetz aufgestellt. — Zahlreiche Anwendungen dieser Formeln liegen auf der Hand. Sie ergeben für den Fixpunktfall leicht modifizierte oder verschärfte Resultate. — Die Homotopietheorie der Koinzidenzpunkte beruht auf der Analogisierung des Nielsenschen Begriffes der Fixpunktklassen zum Begriff der KP-Klassen. Die Fixpunkte werden so in endlich viele Klassen eingeteilt, und jeder von ihnen entspricht ein Klassenindex j_ν $(\nu = 1, \ldots, h)$, $j = \sum_{\nu=1}^{h} j_\nu$. Bezeichnet man mit f und g zugleich die durch die Abbildungen induzierten Homomorphismen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}$ in die Fundamentalgruppe $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{N}$, so entspricht der geometrischen Einteilung in KP-Klassen eine rein gruppentheoretische Einteilung der Elemente von $\mathfrak{H}$ in Klassen: Die Elemente δ_1 und δ_2 aus $\mathfrak{H}$ heissen (f, g)-konjugiert, wenn es ein γ aus $\mathfrak{G}$ gibt mit $\delta_2 = f(\gamma)\delta_1 g(\gamma^{-1})$. Die Klassenindizes lassen sich aus einer der Spurformel unter (3) analogen Formel ohne weiteres ablesen, die im Gruppenring von $\mathfrak{H}$ operiert und einen entsprechenden Homotopie-KP-Index j^* nach Art des Reidemeisterschen Fixpunkt-index in einfacher Weise kombinatorisch ausdrückt. — Schließlich läßt sich durch Übertragung und Erweiterung der Theorie von Wecken beweisen, daß die Klassenzahl h die genaue Minimalzahl der KP für alle zu (f, g) homotopen Abbildungspaare darstellt, jedenfalls wenn $n \geqq 3$ ist.

FRANKFURT A.M., BLANCHARDSTR. 20

IRREDUCIBLE CONVEX SETS

DAVID GALE

An irreducible convex set is one which cannot be expressed as a vector space sum of two dissimilar sets. More precisely, given a compact convex set C in n-space we are concerned with reductions of the form $C = A + B$. Any such set C has infinitely many *trivial reductions* $C = \lambda(C + a) + (1 - \lambda)(C - a)$ where $0 \leqq \lambda \leqq 1$, and a is any vector. A set which has only trivial reductions is called *irreducible*. This paper is concerned with determining the reducibility or irreducibility of various classes of finite dimensional convex sets. We summarize our results as follows:

1. All "sufficiently smooth" sets (for example sets whose boundaries are twice continuously differentiable) are reducible.
2. In the plane the only irreducible sets are line segments and triangles.

3. Every convex polyhedron in n-space is the sum of irreducible convex polyhedra. Thus, every polygone is the sum of triangles and segments.

4. Simplexes in all dimensions are irreducible.

5. An n dimensional polyhedron is said to have its $(n-1)$-faces in general position if exactly n such faces meet at each vertex. All such polyhedra except the simplexes are reducible. Thus, for example, of the regular solids the cube and dodecahedron are reducible.

6. A sufficient condition that a polyhedron be irreducible is obtained. As an application of this we can show that the other regular solids, the tetrahedron, octahedron and icosahedron are irreducible.

7. An n dimensional set which is the join of a point with a set of lower dimension is irreducible.

These results are conveniently displayed by the following listings:

A. Reducible sets
- (i) "Smooth" sets.
- (ii) Two dimensional sets other than triangles.
- (iii) Polyhedra with faces in general position other than simplexes, e.g. cube, dodecahedron.

B. Irreducible sets
- (i) simplexes.
- (ii) octahedron, icosahedron.
- (iii) join of point with a set of lower dimension.

Brown University,
Providence

SUR CERTAINES TRANSFORMATIONS CRÉMONNIENNES ASSOCIÉES AUX CONGRUENCES DE DROITES D'ORDRE UN

Luc Gauthier

Dans un espace projectif S_r à r dimensions défini sur un corps K, considérons une congruence C d'ordre 1 de droites. Soit F la variété focale propre de C: on sait que la dimension de F, éventuellement réductible impure, n' excède pour aucune des composantes la valeur $r-2$. On peut donc envisager des faisceaux linéaires d'hypersurfaces V_{r-1} admettant les composantes de F comme sous-variétés singulières avec des multiplicités diverses. Pour simplifier l'exposé, nous ferons l'hypothèse, nullement essentielle, que F est irréductible de dimension $r-2$, C étant alors à foyers distincts.

Définition des transformations Crémoniennes T:

Associons à C deux faisceaux $|V^{(r-1)n+1}|$ et $|V'^{(r-1)m+1}|$ admettant F avec les multiplicités respectives n et m. Si on associe dans une projectivité h les deux faisceaux, deux points P et P' de S_r sont correspondants dans T lorsque la droite PP' appartient à la congruence C et que les hypersurfaces V passant par P et V' passant par P' (respectivement) sont homologues dans h.

L'ensemble des transformations T formées à partir d'une focale F fixée forment un groupe.

Les variétés fondamentales de T sont, outre les variétés bases des faisceaux $|V|$ et $|V'|$, les focales singulières et les focales spéciales de C.

Dans le cas où S_r est un plan projectif complexe, C est un faisceau de droites et T une transformation de Jonquières. Dans le cas où S_r est un S_3 complexe, T est une transformation de M. L. Vest.

Définition des involutions I:

Associons à C un faisceau $|V^{(r-1)k+2}|$ admettant F avec la multiplicité n. Les hypersurfaces de ce faisceau découpent sur les droites de C les couples d'une involution I. Les involutions I contiennent comme cas particuliers les transformations T dans lesquelles les deux faisceaux $|V|$ et $|V'|$ sont confondus et h involutive. Le produit de deux involutions I quelqonques relatives à une même focale F est une transformation T.

Définition des transformations rationnelles R:

Les involutions I sont rationnelles, et définissent une transformation $R(1, 2)$ qui associe leurs couples aux points de S_r.

52 Cours Léopold
Nancy (France)

EINIGE KUBISCHE UND QUADRATISCHE CREMONA-TRANSFORMATIONEN DES PROJEKTIVEN R_n IN SICH

Henning Germer

Eine Anzahl spezieller C.—T.: $y = T(x)$ des R_2 und R_3 lassen sich mit Vorteil diskutieren, wenn ihr begleitendes Strahlensystem (b.S.), die Gesamtheit der Geraden $\overline{xy}$, einem einfacheren Bildungsgesetz genügt. Beispiel: die projektive Inversion $\overline{xy}$ bilden ein Strahlenbündel. Es liegt daher nahe, das b.S. einer bekannten C.—T. zur Konstruktion anderer Transformationen zu verwenden. Man hat dann zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen man bei gegebenem Ansatz rationale oder cremonasche Transformationen erhält.

Zu diesem Verfahren wird folgendes Beispiel im projektiven R_n über dem komplexen Zahlkörper durchgeführt (x, y, ξ, η seinen Zeilenmatrizen; A, K, konstante $(n+1)$-reihige quadratische Matrizen):

Gegeben das b.S. einer beliebigen Kollineation $x' = xA$ und eine Korrelation $\varphi(x, y) \equiv xK\tilde{y} = 0$. Der Schnittpunkt y der Geraden $\overline{xx'}$ mit der Hyperebene $\eta = xK$ genügt der rationalen Abbildungsgleichung

$$\varrho \cdot y = x' \cdot \varphi(x, x) - x \cdot \varphi(x, x'). \tag{1}$$

Die Umkehrung von (1) ist nicht notwendig rational. Sei etwa $(2 \leqq)\ g + 1$ $(\leqq n + 1)$ der Grad des Minimalpolynoms $p(\lambda)$ zu A, $p(A) = \{0\}$, und K beliebig angenommen. Dann beschreibt $y = x\ (\mu A + \lambda E)$ zu festem x alle Punkte von $\overline{xx'}$, und mit der formalen Umkehrung

$$x = y(\mu A + \lambda E)^{-1} \tag{2}$$

erhält man zu festem y im allg. eine rationale Normkurve g-ten Grades in dem bezüglich A kleinsten invarianten Unterraum des R_n durch y als Ort der Punkte, deren Strahlen $\overline{xx'}$ den Punkt y enthalten.

Ist nun $q(\lambda)$ vom Grad $h + 1 \leqq g + 1$ der Teiler kleinsten Grades von $p(\lambda)$ so, daß

$$q(A) \cdot K = \{0\}, \tag{3}$$

so sind genau h verschiedene Schnittpunkte von (2) mit $\xi = x\tilde{K}$ Urbilder nach (1) zu hinreichend allgemeinem y, die übrigen $g—h$ verteilen sich auf die Fundamentalmannigfaltigkeiten $x' = \sigma x$ und $\varphi(x, x) = \varphi(x, x') = 0$ von (1); die Umkehrung ist h-deutig algebraisch. Nach Diskussion der Bedingungen für K, unter denen ein solcher Schnittpunkt für alle y F-Punkt wird, bestätigt man auch die Umkehrung dieser Aussage und erhält folgende Sätze:

A. (1) ist genau dann eine $(1, h)$-deutige rationale Transformation, wenn der kleinste Teiler $q(\lambda)$ von $p(\lambda)$, der (3) erfüllt, vom Grade $h + 1$ ist.

B. (1) ist genau dann C.—T. des R_n in sich, wenn der kleinste Teiler $q(\lambda)$ von $p(\lambda)$, der (3) erfüllt, vom Grade 2 ist. Dann ist der Grad der Transformation (1) $\leqq 3$, der der Umkehrung $\leqq$ Min $(2q + 1, 2n — 1)$, und diese Grenzen werden angenommen.

Unter Benützung der Jordanform für A kann man jede (1) — im Falle B auch die Umkehrung — explizit angeben und vollständig diskutieren.

WÜRZBURG, BOHLLEITENWEG 13/0.

BIRATIONAL COVARIANTS OF LINEAR SYSTEMS OF CURVES ON ALGEBRAIC SURFACES.

FRANCESCO GHERARDELLI

This work deals with the determination of the functional equivalence of a covariant curve of the system of the prime sections of an algebraic surface, lying in a space of any number of dimensions.

The definition we give of a covariant curve of a linear system is also applied to the system of the level curves of the simple integrals of the first kind belonging to an irregular surface. Thus we obtain the extension of a well-known theorem by Noether.

The second part of this work is concerned with the application of the above determined covariant curves to the problem of the determination of an upper bound for the maximum of the birational transformations of an algebraic surface into itself.

The birational covariant curve, J, of a pluricanonical system $|kK|$ (simple and at least ∞^3) is invariant as it is the system $|kK|$. Under convenient hypotheses the number of the birational transformations of the surface into itself does not exceed the number of the birational transformations of the curve J into itself.

If the surface is irregular these results attain a further precision.

VIA GALVANI 11,
FIRENZE (ITALY).

FAISCEAUX DE SURFACES ALGÉBRIQUES IRRÉGULIÈRES

LUCIEN GODEAUX

Dans le carré de l'expression

$$x_1^{2n} + x_2^{2n} + x_3^{2n} + x_4^{2n},$$

affectons les doubles produits du signe —; nous obtenons ainsi un polynome F_n d'ordre $4n$. Considérons le faisceau de surfaces

$$F_n + k(x_1x_2x_3x_4)^v = 0; \tag{1}$$

il contient deux surfaces dégénérées en quatre surfaces d'ordre n, pour $k = \pm 8$, et une surface formée des quatre faces du tétieèdre de référence T, comptées n fois. Sa base est constituée par seize courbes d'ordre n situées 4 par 4 dans les faces de T. Les surfaces irréductibles du faisceau (1) possèdent, pour $n > 1$, $12n$ tacnodes distribués $2n$ par $2n$ sur les arêtes de T. En un de ces tacnodes, le plan tangent passe par l'arête opposée de T et la surface possède $n - 1$ droites doubles infiniment voisines successives du point double.

Une telle singularité impose $\frac{1}{2}n(n-1)$ conditions aux surfaces adjointes d'ordre $n-4$ et la surface a le genre arithmétique

$$p_a = \tfrac{1}{3}(14n^3 - 30n^2 + 22n - 3).$$

On peut d'autre part former facilement l'équation de ces surfaces adjointes et on trouve que le genre géométrique est

$$p_g = \tfrac{1}{12}(n^4 + 46n^3 - 70n_2 + 4n - 12)$$

si n est pair,

$$p_g = \tfrac{1}{12}(n^4 + 44n^3 - 70n^2 + 40n - 3)$$

si n est impair. Dans chaque cas, on trouve que les surfaces (1) sont irrégulières pour $n > 1$.

37, QUAI ORBAN,
LIÉGE

PRODUCTS OF FUNDAMENTAL GROUPS

HUBERT BRIAN GRIFFITHS

If K is the union of two finite connected complexes K_1, K_2, which have precisely one point in common, then by a classical theorem, the fundamental group $\pi_1(K)$ is the free product $\pi_1(K_1) \circ \pi_1(K_2)$. This is first generalised: for $i = 1, 2$, let X_i be metric spaces with precisely one common point, and with union X. The injections $\alpha_i : \pi_1(X_i, x) \to \pi_1(X, x)$ induce a homomorphism $\alpha : \pi_1(X_1, x) \circ \pi_1(X_2, x) \to \pi_1(X, x)$, and the kernel of α is zero. If one of the X_i is $1 - LC$ at x, then α is onto. An example is given where neither X_1 nor X_2 is $1 - LC$ at x, and each $\pi_1(X_i, x) = 0$, yet where $\pi_1(X)$ has cardinal $\geqq$ cardinal $\mathbf{c}$ of the continuum. Next, let X_* be the union of a sequence of metric spaces X_n, all mutually disjoint except for one common point, x, and such that diam $X_n \to 0$ as $n \to \infty$. Let $\pi_1(X_n, x)$ be the image of a homomorphism w_n of a word semi-group W_n, so that there is an induced homomorphism $w_* : \mathbf{H}\ W_n \to \mathbf{H}\, \pi_1(X_n, x)$, where $\mathbf{H}$ denotes the (topologised) unrestricted free product. Then $\pi_1(X_*, x) = w_*\ \mathbf{H}\ W_n$. If no $\pi_1(X_n, x)$ is zero, then $\pi_1(X_*, x)$ made Abelian has cardinal $\geqq \mathbf{c}$. Hence, if each X_n is arc-wise connected, then X cannot be $1 - LC$ at x unless it is at x also locally connected in the sense of singular homology over the integers. The algebraic technique uses certain infinite matrices $\beta(y)$ of integers, (defined for any element y of an unrestricted free product of semi-groups) and estimates of the departure of β from homomorphic behaviour.

MATHEMATICS DEPT., THE UNIVERSITY,
BRISTOL, ENGLAND.

KONGRUENZSÄTZE FÜR ISOMETRISCHE, OFFENE, VOLLSTÄNDIGE FLÄCHEN POSITIVER KRÜMMUNG

KARL PETER GROTEMEYER

Mit Hilfe eines Integralsatzes hat G. Herglotz einen recht einfachen und eleganten Nachweis des Satzes erbracht, daß zwei isometrisch aufeinander abgebildete, dreimal stetig differenzierbare Eiflächen kongruent oder symmetrisch sind. Dem von Herglotz benutzten Integralsatz läßt sich ein anderer Integralsatz zur Seite stellen, der sich besonders zur Anwendung auf Flächen eignet, die in mindestens einer Richtung eine einwertige Projektion besitzen.

Es seien $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$ zwei isometrische, dreimal stetig differenzierbare Flächen. ξ und ξ^* ihre Normalenvektoren; $g_{ik} = g^*_{ik}$ der Tensor der ersten, B_{ik} und B^*_{ik} die Tensoren der zweiten Fundamentalformen der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{x}^*$. Setzt man $A_{ik} = B_{ik} - B^*_{ik}$, so ist:

$$(1) \qquad \iint \frac{\| A_{ik} \|}{\| g_{ik} \|} \xi dO = \oint \left\{ (a - a^*)\dot{\mathfrak{x}} + (b - b^*)[\xi \dot{\mathfrak{x}}] \right\} ds.$$

(Vgl. Math. Zeitschr. 58, 41—45, (1953).)
(a bzw. a^* = geodätische Windung, b bzw. b^* = Normalkrümmung der Randkurve von $\mathfrak{x}$ bzw. $\mathfrak{x}^*$.) Auf isometrischen Flächen, auf denen nur endlich viele Geraden liegen, folgt die Kongruenz oder Symmetrie aus dem identischen Verschwinden von $\| A_{ik} \|$. Auf nicht negativ gekrümmten Flächen ist $\| A_{ik} \|$ nicht positiv.

Für isometrische Mützen lassen sich aus (1) recht einfach eine Reihe von Kongruenzaussagen gewinnen, indem man (1) mit dem Vektor der einwertigen Projektionsrichtung multipliziert und solche Voraussetzungen über den Rand wählt, daß das Randintegral verschwinden muß. (Eigenschattengrenzen; ebener Rand. Dazu vgl. Math. Zeitschr. 58, 272—280; 59, 278—289, (1953).) Ähnliche Methoden lassen sich auch auf andere, allgemeinere Flächenklassen anwenden. Die offenen, volständigen Flächen positiver Gaussscher krümmung liefern ein einfaches Beispiel für die Behandlung von unbeschränkten Flächen. Auf grund eines Ergebnisses von J. J. Stoker über die Existenz mindestens einer einwertigen Projektionsrichtung für die Flächen der genannten Klasse, ist (1) anwendbar und liefert unter anderen das folgende Ergebnis:

Es sei $\mathfrak{U}$ eine offene, vollständige, dreimal stetig differenzierbare Fläche mit positiver Gaussscher Krümmung K. Ferner sei $\overset{(\mathfrak{U})}{\iint} K\, d^0 = 2\pi$. Dann ist jede zu $\mathfrak{U}$ isometrische Fläche, die dreimal stetig differenzierbar ist, zu $\mathfrak{U}$ kongruent oder symmetrisch.

Ein ähnlicher Satz ist von A. V. Pogorelov mit anderen Methoden, die zusätzliche Voraussetzungen erfordern, bewiesen worden, Daß ein zum hier ausgesprochenen analoger Satz für die offenen, vollständigen konvexen Flächen mit einer Totalkrümmung kleiner als 2π nicht gelten kann, hat Olovjanisnikov gezeigt.

MATH. INSTITUUT DER UNIVERSITÄT FREIBURG I.BR.,
FREIBURG I. BR., HEBELSTRASSE 40 (DEUTSCHLAND)

UNE SUITE EXACTE DANS LA THÉORIE DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES COMPLEXES

HEINRICH GUGGENHEIMER

Soit

$$\dots \xrightarrow{\delta} C^{r-1} \xrightarrow{\delta} C^{r} \xrightarrow{\delta} C^{r+1} \xrightarrow{\delta} \dots$$

un complexe algébrique et $(\sigma) = (\dots \sigma_{r-1}, \sigma_r, \dots .)$ une suite d'automorphismes, σ_r opérant sur C^r. En posant

$$\delta_\sigma = \sigma_{r+1}^{-1} \delta \sigma_r$$

on obtient un second complexe algébrique

$$\dots \xrightarrow{\delta_\sigma} C^{r-1} \xrightarrow{\delta_\sigma} C^{r} \xrightarrow{\delta_\sigma} C^{r+1} \xrightarrow{\delta_\sigma} \dots$$

La suite (σ) est dite *intégrable* si l'on a toujours

(1) $$\delta\delta_\sigma = j\ \delta_\sigma \delta, \qquad j \in \text{groupe des coefficients.}$$

Dans ce cas, les groupes de cohomologie

$$H^r_\sigma = \{c^r, \delta c^r = \delta_\sigma c^r = 0\} / \{c^r, c^r = \delta e^{r-1} = \delta_\sigma f^{r-1}\}$$

sont localement triviales et l'on a la suite exacte

$$\dots \xrightarrow{p^*} H^{r-2}_\sigma(C'') \xrightarrow{D^*} H^r(C') \xrightarrow{i^*} H^r(C) \xrightarrow{p^*} H^r(C'') \xrightarrow{D^*} \dots$$

ou D^* est l'opérateur induit par $D = \delta\delta_\sigma$. On peut montrer que les groupes de cohomologie ainsi introduits sont isomorphes à des groupes de cohomologie ordinaires, mais en général pour des groupes de coefficients différents dans les dimensions paires et impaires.

Une application immédiate est fournie par les variétés kählériennes closes. On considère la cohomologie des formes différentielles à coefficients complexes, et l'on prend pour σ l'opérateur différentiel C. Dans ce cas on a $d\, C^{-1}dC = -\, C^{-1}dCd$ et il suit de théorèmes dus à M. Hodge que les groupes de cohomologie en question sont tous isomorphes aux groupes de de Rham ordinaires, et on a ainsi une suite exacte supplémentaire qui permet de multiples applications, surtout dans la théorie des variétés algébriques.

RHEINLÄNDERSTR. 5 BASEL

ZUR KINEMATISCHEN HAUPTFORMEL DER INTEGRALGEOMETRIE

HUGO HADWIGER

Die neuere Entwicklung der Integralgeometrie hat mannigfaltige Verallgemeinerungen der kinematischen Hauptformel [1] von Blaschke und Santaló hervorgebracht. Hier sind vor allem die Ausdehnungen der integralgeometrischen Lehrsätze auf höhere (auch nichteuklidische) Räume zu nennen, welche von Santaló und Chern erzielt wurden [2].

Die neu angestrebten Erweiterungen, von welchen hier die Rede sein soll, beschränken sich vorläufig noch auf euklidische Räume, greifen aber in einer anderen Richtung weiter. — Es werden bewegungsinvariante Integrale mit Funktionen bewegter Körper gebildet, welche nicht explizite gegeben sind, sondern von denen nur bekannt ist, dass sie zu einer durch gewisse Eigenschaften auf axiomatische Weise implizite charakterisierten Funktionenklasse gehören. — Auf Grund neuerer Ergebnisse über additive und invariante Körperfunktionen (Funktionale) lassen sich allgemeine kinematische Integralsätze aufstellen, welche die einschlägigsten Formeln der klassischen Integralgeometrie umfassen. — An dieser Stelle soll eine derartige Verallgemeinerung der kinematischen Hauptformel mitgeteilt werden. Die den Betrachtungen zugrunde gelegte Körperklasse ist der Konvexring K, d.h. der kleinste Mengenring über dem System der konvexen Körper des k-dimensionalen euklidischen Raumes E_k. Insbesondere bilden die Polyeder einen Teilring von K. Für die Körper $A \in K$ lassen sich die Minkowskischen Quermassintegrale $W_i(A)$ ($i = 0, 1, \ldots, k$) als Crofton-Integrale von $\chi(AE_i)$ mit einer im E_k beweglichen i-dimensionalen 'Ebene' E_i definieren, wo χ die Charakteristik von Euler-Poincaré bezeichnet. Ist φ ein über K erklärtes additives Funktional, so dass also $\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$ gilt, das weiter bedingt-stetig sein soll (d.h. stetig für konvexe A), und das im Unendlichen genügend stark verschwindet, so ist das über alle Bewegungen von A im E_k erstreckte kinematische Integral von $\varphi(A)$ eine lineare Form der $W_i(A)$, wobei die nur von φ abhängigen Koeffizienten als Crofton-Integrale von $\varphi(E_i)$ mit einer beweglichen Ebene E_i dargestellt werden können. — Setzt man insbesondere hier $\varphi(A) = \chi(A_0 A)$, wobei $A_0 \in K$ ein ruhender Körper ist, so ergibt sich das kinematische Integral von $\chi(A_0 A)$ als einfache Bilinearform der $W_i(A_0)$ und $W_i(A)$. Dies ist die bekannte Hauptformel. Sie erscheint als Sonderfall eines allgemeineren Integralsatzes, aus dem sich zahlreiche verwandte kinematische Formeln herleiten lassen.

BERN/HOCHFELDSTRASSE 31

---

[1] W. Blaschke. Vorlesungen über Integralgeometrie; 2. Heft. Hamburger Math. Einzelsch. **22**, 1937. Insb. § 38.

[2] L. A. Santaló. Geometria integral en espacios de curvatura constante. Publ. Comision Nacional de la Energia Atomica; Ser. Mat. Vol. **1** (No. 1), Buenos Aires 1952.

S. S. Chern. On the kinematic formula in the euclidean space of n dimensions. Amer. J. Math. **74**, 227—236, 1952.

DIFFERENTIAL EQUIVALENCE

PRESTON C. HAMMER

Under what conditions would one say that two functions, or two sets have the same differential properties? Here a class of definitions of differential equivalence and differential congruence are given extrinsically and intrinsically for sets in metric linear spaces. The basic idea is that of mapping with preservation of differential properties. While the theory in general is still in the formative stages, the author has shown among other results that a necessary and sufficient condition for two arbitrary vector-valued functions, with values in unitary space, defined on an adequately connected subset of a normed linear space to be differentially equivalent is that they differ by a constant vector.

In dealing with planar curves the writer has, for example, shown uniqueness of a curve determined by differential properties and an initial point, despite the fact that the curve has no tangent lines. In other words, differential equivalence underlies some of the theory of ordinary differential equations and gives a new approach to the basic theory. The ramifications suggested in the direction of partial differential equations and higher order equations as well as in surface theory are numerous and almost certain to be rewarding.

In another direction, the methods of differential equivalence have led to the formulation of a more general approach to the numerical integration of ordinary differential equations and new methods are now being investigated by Mr. Jack Hollengsworth and the writer.

In yet another particular case, the writer was led by his theory of quasi-pencils and by differential equivalence to an analytical formulation for constant breadth convex surfaces in n-space; these surfaces being differentially equivalent under the transformation obtained to the unit sphere.

UNIVERSITY OF WISCONSIN

RETRACTION OF METRIC AND NON-METRIC SPACES

OLOF HANNER

A space X is called an absolute retract [absolute neighborhood retract] relative to a class Q of spaces (abbreviated AR(Q) [ANR(Q)]) if 1) $X \epsilon Q$, 2) whenever X is topologically imbedded as a closed subset of a Q-space Z, then X is a retract of Z [of a neighborhood of X in Z].

In Borsuk's original definition Q was the class of compact metric spaces. But if X is a closed interval, X is an AR(compl. reg.). (For a completely regular space can always be imbedded in a normal space. Hence we can apply Tietze's extension theorem.) Therefore we will assume that Q is any class between these two extreme cases: the compact metric spaces and the completely regular spaces.

Let now Q be a subclass of Q_1 and take $X \epsilon Q$. In order to be an AR(Q_1) [ANR(Q_1)], X has to be an AR(Q) [ANR(Q)]. But in general this condition is not sufficient.

Thus the question is: if X is an AR(Q) [ANR(Q)], when is it an AR(Q_1) [ANR(Q_1)]? The answer in a few cases (some of which are rather trivial) is as follows:

$Q = \{$compact metric$\}$, $Q_1 = \{$separable metric$\}$, no further restriction.

$Q = \{$separable metric$\}$, $Q_1 = \{$metric$\}$, no further restriction.

$Q = \{$metric$\}$, $Q = \{$paracompact$\}$, X has to be topologically complete.

$Q = \{$metric$\}$, $Q_1 = \{$normal$\}$, X has to be topologically complete and separable.

$Q = \{$metric$\}$, $Q_1 = \{$completely regular$\}$,
a. AR-case X has to be compact,
b. ANR-case X has to be locally compact and separable.

2 WITTSTOCKSGATAN,
STOCKHOLM, SWEDEN.

HOMOLOGICAL RESOLUTIONS OF COMPLEXES WITH OPERATORS

ALEX HELLER

The structure of chain complexes with operators, and thus of spaces with operators, is studied by means of homological resolutions. If Λ is a supplemented algebra with diagonal map over a hereditary ring K and X is a K-projective Λ-complex, a homological resolution of X is a bigraded module $T = \Sigma_{0 \leqq j \leqq i} T_{ij}$ with a derivation $d : T \to T$ having homogeneous components $d_{ijk} : T_{ij} \to T_{i-1,k}$, $k = j, j+1, \ldots, i-1$. It has the properties $X_i \subset T_{i0}$; T_{ij} for $j > 0$ and T_{i0}/X_i are Λ-projective; $T_{ii} \leftarrow T_{i+1,i} \leftarrow \ldots$ is exact for all i; $X \subset T$ is a chain equivalence. Maps and chain homotopies of homological resolutions are defined so as to preserve all structure.

It is proved that every K-projective Λ-complex X has a homological resolution, that any map $f : X \to X'$ can be extended to a map of corresponding homological resolutions, and that homotopies of maps of complexes can be extended to homotopies of the extended maps.

From this theorem follows the invariance of the following constructions on homological resolutions: for any Λ-module H a spectral sequence starting with $E^1_{kl} = \mathrm{Tor}^\Lambda_l (H_k(X), H)$ for $k > 0$ such that if $A \subset X$ and X/A is projective then E^1_{ol} depends only on A, and terminating with $\mathfrak{G}H(H \otimes_\Lambda X)$; a sequence of invariants $k^{q+1}(X)$, lying in groups determined canonically by X and giving a classification of such complexes.

The following topological theorem is a consequence. If Γ is a group of prime order operating on a cell-complex, then the Euler characteristic of the fixed subcomplex can be computed from the homology of Γ with coefficients in the homology of the total complex. Also, inequalities can be given for the even and odd-dimensional parts. The Smith fixed-point theorem (for smooth maps) is a special case.

HARVARD UNIVERSITY

PLANE CONTINUA AND HOMEOMORPHISMS THEREOF WITH EQUI-CONTINUOUS, NON PERIODIC ITERATES

ERIK HEMMINGSEN

Let M be a plane continuum. Let f be a homeomorphism of M onto M for which the family of all iterates of f is equicontinuous and non-periodic. If M has a non-periodic interior point, then M must be topologically either a disc or an annulus and f must essentially be an irrational rotation, which, in case M is an annulus, can also permute the boundary curves. If the orbit of each point of M has a connected closure, then M is topologically either a disc, an annulus, or a circle and f an irrational rotation as before. If the closures of the orbits of points of M are allowed to be disconnected and if there are no non-periodic interior points, then M can be very complicated. However, f is then a periodic function on the closure of the interior of M.

SYRACUSE UNIVERSITY,
SYRACUSE 10, NEW YORK U.S.A.

MORPHOLOGIE DER FIGUREN UND DER KONFIGURATIONEN

HORST HERRMANN

Sei $\{M\} = M_0, M_1, \ldots$ eine geordnete Gesamtheit von Mengen, deren Elemente $Z_i^\alpha \in M_i$ *Zellen* der *Ordnung* i genannt werden, und sei eine Gesamtheit von *Inzidenzrelationen* $Z_i^\alpha \subset_{ij} Z_j^\beta$, $i < j$, erklärt, so heiße das hierdurch gekennzeichnete Gebilde eine *Figur* $F = \{M, \subset_{ij}\}$ mit dem *primären Inzidenzbegriff* $\subset_{ij}$. Die Figuren $F' = \{M', \subset_{ij}\}$ mit $M_i' \subset M_i$, $Z_i' \in M_i'$, heißen *Unterfiguren*. — Sind die M_i abzählbare Mengen, so kann die Figur durch Inzidenztafeln beschrieben und durch nach Zellen bezifferte *Figurkomplexe* sowie einen nach Ordnungen bezifferten oder gerichteten *Strukturkomplex* trivial realisiert werden. Hierbei werden die Zellen durch Punkte, die Relationen durch entsprechende Verbindungsstrecken dargestellt. Nichttrivial heißen alle hiervon verschiedenen *Realisierungen*. Durch Auswahlen von Zellengesamtheiten und zugehörigen Relationengesamtheiten erhält man *auszuzeichnende Unterfiguren*, insbesondere Felder, Sterne, Koppelketten, Inzidenzketten, sowie Durchschnitte, Vereinigungen und Abschließungen von Unterfiguren. Struktureinsichten werden durch *Strukturzahlen* (Anzahlen von Auswahlen von Relationen) und *abgeleitete Inzidenzbegriffe* ermöglicht, insbesondere wenn Struktureigenschaften des primären Inzidenzbegriffes gegeben sind oder postuliert werden. Beziehungen zwischen verschiedenen Figuren werden durch *Abbildungen* gekennzeichnet, *interne* Abbildungen ergeben sich durch Umordnen in den Zellenmengen wie durch Umordnen der Zellenordnungen. Eine Figur heißt *variant*, wenn sie mindestens zwei Unterfiguren mit mindestens einer gemeinsamen Zellenmenge enthält. Gesamtheiten von Figuren, in deren Zellen- und Relationenmengen genau alle Zellen und Relationen von F vorkommen, heißen *Zergliederungen* von F, sinngemäß sind *Kompositionen* erklärt. — Unter *Morphologie* der Figuren werden alle Aussagen über diese Gebilde verstanden, die sich mit Hilfe von Strukturzahlen gewinnen lassen.

Konfigurationen sind die besonderen Figuren, in denen die Anzahl der Inzidenzrelationen $Z_i^\alpha \subset_{ij} Z_j^\beta$ für jede $Z_i^\alpha \in M_i$ den gleichen Wert a_{ji}, für jede $Z_j^\beta \in M_j$ den gleichen Wert a_{ij} hat. Sind die M_i endliche Mengen mit a_i Elementen, so werden die *Hauptkennzahlen* a_i und die *Nebenkennzahlen* a_{ij} zur *Figurmatrix* $F = (a_{ij})$, $a_{ii} = a_i$, der Konfiguration F zusammengestellt. Die Kennzahlen einer Konfiguration genügen etlichen Produktrelationen, die sich durch Abzählen von Inzidenzketten ergeben. — Das *Konfigurationenproblem* verlangt Aussagen über die *Realisierbarkeit* von Figurmatrizen durch Strukturkomplexe sowie deren nichttriviale Realisierung, über die *Verträglichkeit* von Inzidenzbegriffen mit Figurmatrizen, über die *Gesamtheit der Inzidenzbeziehungen* in vorgegebenen Konfigurationen, sowie über die *Deutbarkeit* von Streckenkomplexen als Strukturkomplexe. Die für Figuren entworfenen Begriffe gestatten weitgehende Behandlung solcher Fragen, beispielsweise ergeben sich notwendige Bedingungen für die Realisierbarkeit einer Figurmatrix durch einen transitiven Inzidenzbegriff (Zeilenmonotonie der Figurmatrizen), insbesondere unter Inzidenzpostulaten (Ungleichungen zwischen den Kennzahlen), die für etliche Gattungen von Zellenmengen verfügbar sind. Man erhält z.B. *Gesamtheiten von Figurmatrizen,* die durch projektive Konfigurationen realisierbar sind, sowie durch Zergliederungen *Gesamtheiten von Schließungssätzen und Inzidenztheoremen.*

KRIEMHILDSTRASSE 29,
BRAUNSCHWEIG, DEUTSCHLAND.

ON THE HOMOTOPY GROUPS OF THE UNION OF SPHERES

PETER JOHN HILTON

Blakers and Massey have recently drawn attention to the role of $\Sigma = S^{p_1} \vee \ldots \vee S^{p_n}$ as a universal example for homotopy constructions. In fact, the set of all constructions from dimensions $p_1, \ldots, p_n$ ($p_i > 1$) to dimension q is in $(1 - 1)$ correspondence with the elements of $\pi_q(\Sigma)$. We sketch the calculation of $\pi_q(\Sigma)$, but, for simplicity's sake, state the theorem only for $p_1 = \ldots = p_n = p$. Then

Theorem. $\pi_q(\Sigma)$ is isomorphic to the direct sum of λ_k copies of $\pi_q(S^{k(p-1)+1})$, where $\lambda_k = \frac{1}{k} \sum_{d|k} \mu(d) n^{\frac{k}{d}}$, and k ranges over the positive integers.

Moreover, each summand is embedded in $\pi_q(\Sigma)$ by a suitable multiple Whitehead product.

The method used extends that due to Serre which he used to solve the case

$p_1 = \ldots = p_n = p$, where p is odd. Partial results had also been obtained by G. W. Whitehead, J. C. Moore and the author. The necessary algebraic generalizations are due essentially to J. A. Green.

Let X be an arcwise-connected space, Ω_X the space of loops on X, ϱ the standard isomorphism $\varrho : \pi_{p+1}(X) \simeq \pi_p(\Omega_X)$, σ the natural homomorphism $\sigma : \pi_p(\Omega_X) \to H_p(\Omega_X)$, $\tau = \sigma\varrho$. Since Ω_X is an H-space, its homology admits a Pontrjagin multiplication $*$. Then, if $\alpha \in \pi_{p+1}(X)$, $\beta \in \pi_{q+1}(X)$, Samelson has shown that $\tau[\alpha, \beta] = (-1)^p(\tau\alpha * \tau\beta - (-1)^{pq}\tau\beta * \tau\alpha)$.

Now take $X = \Sigma = S^{p_1} \vee \ldots \vee S^{p_n}$ and let ι_{p_i} be represented by the injection $S^{p_i} \to \Sigma$, $e_i = \tau\iota_{p_i}$. Then Bott and Samelson have shown that $H(\Omega_\Sigma)$ is a free ring generated by the e_i. The Birkhoff-Magnus-Witt theory of Lie algebras embedded in associative algebras may then be adapted, using the notion of pseudo-commutator (p.c.) to show that $H(\Omega_\Sigma)$ is additively freely generated by certain monomials in the basic p.c.'s; the latter, generalizing the basic commutators of P. Hall, correspond under τ with certain Whitehead products in Σ. The number of basic p.c.'s of 'weight' k is λ_k.

We form a space T, a product of spheres, of suitable dimensions, in $(1 - 1)$ correspondence with the basic p.c.'s and describe a 'limit map' $\Phi : \Omega_T \to \Omega_\Sigma$ which induces an isomorphism of $H(\Omega_T)$ with $H(\Omega_\Sigma)$. By a theorem due to Serre Φ induces isomorphisms $\pi_{q+1}(\Omega_T) \simeq \pi_{q+1}(\Omega_\Sigma)$, all q, so that $\pi_q(\Sigma) \simeq \pi_q(T)$, all q. Moreover, the isomorphism may be analysed to show just how the terms in $\pi_q(T)$ are embedded in $\pi_q(\Sigma)$.

As an easy application it may be shown that if $\alpha \in \pi_p(X)$, $\beta \in \pi_q(X)$, $\gamma \in \pi_r(X)$, then

$$(-1)^{pr}[[\alpha, \beta], \gamma] + (-1)^{qp}[[\beta, \gamma], \alpha] + (-1)^{rq}[[\gamma, \alpha], \beta] = 0.$$

It may also be seen that there is always a Hopf homomorphism $\pi_r(S^n) \to \pi_r(S^{2n-1})$ which suspends to the author's H^*. In fact, we always have $\chi\pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) = E\pi_r(S^{2n-1})$, where $\chi : \pi_{r+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n) \to \pi_{r+1}(S^{2n})$ is the 'shrinking' homomorphism.

PEMBROKE COLLEGE,
CAMBRIDGE

SUR DES INVARIANTS ATTACHÉS AUX SECTIONS DANS LES ESPACES FIBRÉS

GUY HIRSCH

La donnée de sections dans un espace fibré $\tilde{M}$ permet de construire certains invariants homologiques; il existe des relations entre ceux-ci et les invariants attachés à la *structure multiplicative* de l'anneau de cohomologie de $\tilde{M}$; dans certains cas, ces invariants sont liés au *second obstacle* (lorsque les espaces sont des variétés).

Je considère seulement le cas où la fibre est totalement $\not\sim 0$, c'est-à-dire où il y a homomorphisme de $\tilde{H}$ (groupe de cohomologie de $\tilde{M}$) *sur* $\check{H}$ (groupe de cohomologie de la fibre). $\tilde{H}$ est alors isomorphe au produit tensoriel $H \otimes \check{H}$ (H = groupe de cohomologie de la base). Cet isomorphisme Φ n'est pas canonique. (L'existence d'une section n'entraîne pas l'isomorphie, comme le montrent des exemples, soit base $= S^1$ et fibre = tore, soit base $= S^{4-k}$ et fibre $= S^k \times S^3$.) Une section dans $\tilde{M}$ permet de restreindre le choix des isomorphismes Φ; d'où des invariants attachés à la section.

La structure multiplicative de $\tilde{H}$ est décrite par des homomorphismes qui dépendent aussi du choix de Φ; il y a des relations entre les invariants qu'ils définissent et ceux que détermine la section.

Une 2e section définit (par comparaison avec la 1e) un homomorphisme g (multiplicatif) de $\check{H}$ dans un quotient de $H \otimes \check{H}$. g est aussi lié à la structure multiplicative et aux isomorphismes Φ qu'on peut associer à la 2e section.

Si $\tilde{M}$ est le produit topologique où les sections représentent des diagrammes d'applications, g se réduit à l'homomorphisme inverse de H. Hopf.

Lorsque les espaces sont des variétés orientables, certains des invariants correspondent à des cocycles introduits par H. Hopf (obstacle s'opposant à la réunion de 2 sections, différence de 2 sections); ceux-ci sont liés au second obstacle; on obtient donc des relations entre le second obstacle et les invariants de la structure multiplicative.

223, Bd de Smet de Naeyer,
Brussel

DER SATZ VON RIEMANN-ROCH UND DAS TODDSCHE ARITHMETISCHE GESCHLECHT FÜR ALGEBRAISCHE MANNIGFALTIGKEITEN

Friedrich E. P. Hirzebruch

Es sei V_n eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit von n komplexen Dimensionen, die singularitätenfrei in einen komplex-projektiven Raum einbettbar ist. Eine solche Mannigfaltigkeit wird kurz algebraische Mannigfaltigkeit genannt. Jeder Divisor D von V_n bestimmt ein komplex-analytisches Bündel $\{D\}$ über V_n mit der komplexen Geraden C_1 als Faser und der Gruppe $C^* = GL(1, C)$ als Strukturgruppe. Ein solches Bündel wird kurz Geradenbündel genannt. Umgekehrt kann jedes Geradenbündel F aus einem Divisor erhalten werden (Kodaira-Spencer). Der komplexe Vektorraum aller globalen holomorphen Schnittflächen des Geradenbündels F wird mit $H^o(V_n, F)$ bezeichnet. Wenn $F = \{D\}$, dann entsprechen die Elemente von $H^o(V_n, F)$ in natürlicher Weise eineindeutig den auf V_n meromorphen Funktionen g mit $(g) + D \geqq 0$. Hier bezeichnet (g) den Divisor der meromorphen Funktion g. Mit K werde das kanonische Bündel von V_n bezeichnet, das durch die Divisoren der meromorphen n-Formen von V_n gegeben wird. Die Hindernis-Cohomologieklasse von K ist $-c_1$, wo c_1 die erste Chernsche Klasse ist $(c_1 \in H^2(V_n, Z))$. Der Riemann-Rochsche Satz für algebraische Kurven V_1 besagt:

$$\dim H^o(V_1, F) - \dim H^o(V_1, K - F) = f + \frac{c_1}{2}.$$

Hier bezeichnet f den Grad von F und c_1 die Euler-Poincarésche Charakteristik von V_1.

Dieser Satz kann auf beliebig dimensionale algebraische Mannigfaltigkeiten V_n und ein beliebiges komplex-analytisches Bündel W über V_n mit dem komplexen Vektorraum C_q als Faser und der Gruppe $GL(q, C)$ als Strukturgruppe in folgender Weise verallgemeinert werden: Es bezeichne $H^i(V_n, W)$ die i-dimensionale Cohomologiegruppe von V_n mit Koeffizienten in dem Faisceau der lokalen holomorphen Schnittflächen von W. Diese Cohomologiegruppen sind endlich-dimensionale komplexe Vektorräume (Cartan-Serre, Kodaira) und verschwinden für $i > n$. Für den Fall eines Geradenbündels F gilt: $H^i(V_n, F) \approx H^{n-i}(V_n, K - F)$ (Serre). Es wird $\chi(V_n, W) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(V_n, W)$ gesetzt.

Satz: Die „Euler-Poincarésche Charakteristik" $\chi(V_n, W)$ kann als ein „Polynom" in der Chernschen Klasse $c_1 \in H^2(V_n, Z)$, den Pontrjaginschen Klassen von V_n und den Chernschen Klassen des Bündels W dargestellt werden. Die Pontrjaginschen Klassen hängen bekanntlich nur von der differenzierbaren Mannigfaltigkeit V_n ab.

In einer demnächst in den Proc. Nat. Acad. Sci. USA erscheinenden Note findet man eine genaue Beschreibung dieser Polynome. Diese Note kündigt die in diesem Vortrag besprochenen Resultate an und gibt Literaturhinweise. Der obige Satz enthält im wesentlichen alle bisher für algebraische Mannigfaltigkeiten bekannten Riemann-Rochschen Sätze (er war bekannt für $n = 1$ und beliebiges q (A. Weil), und für $n = 2, 3$ und $q = 1$). Er enthält auch die Tatsache, dass das arithmetische Geschlecht $\Pi(V_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i g_i = \chi(V_n, 0)$ als Polynom in den Chernschen Klassen dargestellt werden kann (J. A. Todd).

Hier bezeichnet 0 das triviale Geradenbündel, g_i ist die Anzahl der linear-unabhängigen holomorphen Differentiale vom Grade i auf V_n. Auch das „Geschlecht" $\chi^p(V_n) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^{p,q}$ kann als Polynom in den Chernschen Klassen dargestellt werden ($h^{p,q}$ = Anzahl der linear-unabhängigen harmonischen Differentialformen vom Typ (p, q) von V_n). Mit Hilfe dieser Tatsache und eines Satzes von Lefschetz kann man alle $h^{p,q}$ eines vollständigen Durchschnitts von Hyperflächen in einem komplex-projektiven Raum berechnen.

INSTITUTE FOR ADVANCED STUDY,
PRINCETON, NEW JERSEY, U. S. A.

GENERALIZATION OF A THEOREM OF G. DE RHAM AND EXPRESSION OF HOPF INVARIANT AS AN INTEGRAL

MICHEL KERVAIRE

A^p and B^q being exterior differential forms on a manifold, a^p and b^q the corresponding cochains, we have

$$\int_{c_r} A^p \cdot B^q = a^p \cup b^q(c_r) \qquad (r = p + q)$$

if and only if

$$a^p \cup b^q(c_r) = a^p \cup b^q(Uc_r)$$

for every subdivision Uc_r of the finite differentiable chain c_r ($\cup$ denotes cup-product).

The proof uses a refinement of the method of B. Eckmann and E. R. Brändli, Comm. Math. Helv., 24, 1950.

The above theorem (which is a generalization of the third de Rham's theorem) permits us to express the Steenrod functional product using differential forms.

The Hopf invariant, as a special case of functional product, may then be expressed by an integral formula which generalizes the one discovered by J. H. C. Whitehead.

The above method provides for the Whitehead formula a perhaps simpler proof which is independent of the possibility of fibering spheres by spheres.

STEINWIESSTR. 4,
ZÜRICH 32.

PROJEKTIVE UND AFFINE EBENEN MIT NACHBARELEMENTEN

WILHELM KLINGENBERG

Wir betrachten ein Axiomensystem für eine freie projektive Ebene ε_p, in welcher nicht die Eindeutigkeit von Verbindungsgerade und Schnittpunkt gefordert wird. Zwei Punkte oder Geraden heissen benachbart, wenn sie mehr als eine Verbindungsgerade oder mehr als einen Schnittpunkt besitzen. In einer freien projektiven Ebene $\bar{\varepsilon}_p$ mit den üblichen Eindeutigkeitsforderungen ist jeder Punkt und jede Gerade nur zu sich selber benachbart.

Auf Grund unserer Axiome erweist sich in ε_p die Relation „benachbart" als klassenbildend. Wenn wir die Klassen benachbarter Punkte und Geraden zu Grosspunkten und Grossgeraden zusammenfassen, so erhalten wir eine Ebene vom Typ $\bar{\varepsilon}_p$.

Den Übergang von ε_p zu einer Ebene ε_a von affinem Typus vollzieht man durch Auszeichnung einer Geraden g^* als „ausgezeichneter uneigentlicher Geraden" sowie aller zu g^* benachbarter Geraden und der hiermit inzidierenden Punkte als „uneigentlich". In ε_a ist dann mit Hilfe von g^* eine transitive Parallelitätsrelation erklärt; es gibt aber im allgemeinen durch einen Punkt zu einer Geraden noch weitere Nichtschneidende.

Durch Hinzunahme geeigneter Schnittpunktsätze (es handelt sich bei gegebenem ε_a in ε_p um den „kleinen Desargues" und um den affinen Satz von Pappos-Pascal mit der Beschränkung auf ein festes Geradenpaar mit eindeutigem Schnittpunkt) kann man ε_p (und entsprechend ε_a) einen H-Ring R_H als Koordinatenbereich zuordnen: Ein H-Ring ist ein kommutativer Ring mit Einselement, in welchem jeder Nichtnullteiler Einheit ist und von je zwei Nullteilern wenigstens einer den anderen teilt. Speziell ist also ein Körper ein H-Ring.

Die Punkte und Geraden von ε_p lassen sich dann in der üblichen Weise durch homogene geordnete Elementtripel mit Elementen aus R_H beschreiben. Dabei sind aber nicht alle Elemente des Tripels Nullteiler, wie überhaupt an die Stelle der Eigenschaft „nicht Null" bei der Geometrie über einem Körper hier die Eigenschaft „nicht Nullteiler" tritt. Das Auftreten von Nullteilern in R_H ist durch das Auftreten von Nachbarelementen in ε_p bedingt.

Umgekehrt genügt jede in der üblichen Weise aus den Elementen eines H-Ringes erklärte projektive Ebene unserem Axiomensystem. Die Nullteiler in R_H bilden ein teilerloses Ideal P. R_H/P bildet den Koordinatenkörper der zugehörigen Grossgeometrie.

Alle bekannten Typen von H-Ringen lassen sich als Restklassenringe von allgemeinen Bewertungsringen darstellen und aus jedem Bewertungsring lässt sich durch Restklassenbildung nach einem geeigneten Ideal I ein H-Ring gewinnen. Dabei muss I zum Ideal P der Nichteinheiten des Bewertungsringes gehören und P muss das kleinste Primideal sein, welches A enthält. Es ist nicht bekannt, ob diese Eigenschaft die H-Ringe kennzeichnet.

HAMBURG,
GERMANY/HARVESTEHNDENWEG 10

LINEARE RÄUME MIT LINEARER TOPOLOGIE

GOTTFRIED MARIA KÖTHE

E sei ein linearer Raum über einem beliebigen Körper K. Ist $\{U_\alpha\}$ eine Filterbasis aus linearen Teilräumen U_α von E mit $\bigcap_\alpha U_\alpha = (0)$ und führen wir auf E die durch die U_α als Nullumgebungsbasis erklärte lineare Topologie $\mathfrak{T}$ ein, so wird E ein lineartopologischer Raum $E[\mathfrak{T}]$. Diese Räume wurden von S. Lefschetz (Algebraic Topology, Chapter II) eingeführt, er hat die Struktur der linear kompakten und der lokal linear kompakten $E[\mathfrak{T}]$ bestimmt: Jeder linear kompakte Raum ist isomorph einem topologischen Produkt $\omega_d(K)$ von d(Kardinalzahl) zu K isomorphen diskreten Körpern, jeder lokal linear kompakte ist isomorph $\varphi_d(K)\times \omega_{d'}(K)$, $\varphi_d(K)$ die topologische direkte Summe von d Körpern K. Für die lokal linear kompakten Räume beweist Lefschetz einen dem Pontrjaginschen entsprechenden Dualitätssatz.

Es läßt sich nun eine allgemeine Theorie der lineartopologischen Räume in enger Analogie zur bekannten Theorie der lokalkonvexen Vektorräume entwickeln. Zu jedem $E[\mathfrak{T}]$ existiert der duale Raum E' der stetigen Linearfunktionen auf E. Ist H ein linearer Teilraum von E', so bezeichne $H^\perp$ den Orthogonalraum zu H, d.h. die Menge aller $x \in E$ mit $ux = 0$ für alle $u \in H$. Durchläuft H alle endlichdimensionalen Teilräume von E', so erzeugen die $H^\perp$ als Nullumgebungen die schwache Topologie $\mathfrak{T}_s$ auf E. Vertauschung von E und E' ergibt die schwache Topologie auf E'. Durchläuft H alle linear schwach kompakten Teilräume von E', so erzeugen die $H^\perp$ die der Mackeyschen Topologie entsprechende Topologie $\mathfrak{T}_k$ auf E und es gilt wie in den lokalkonvexen Räumen, daß $\mathfrak{T}_s$ die gröbste und $\mathfrak{T}_k$ die feinste lineare Topologie auf E ist, für die der duale Raum gleich E' ist. Auch zur starken Topologie gibt es ein Analogon: Ein Teilraum $H \subset E[\mathfrak{T}]$ heißt linear $\mathfrak{T}$-beschränkt, wenn $(H + U_\alpha)/U_\alpha$ für jede Nullumgebung U_α endlichdimensional ist. Durchläuft H alle linear $\mathfrak{T}_k$-beschränkten Teilräume von E', so erzeugen die $H^\perp$ die starke Topologie $\mathfrak{T}_b$ auf E. Der zu $E[\mathfrak{T}_b]$ duale Raum braucht nicht mehr gleich E' zu sein. $E[\mathfrak{T}]$ heißt stark reflexiv, wenn der zweimal stark duale Raum zu E wieder E ist und seine Topologie mit der Ausgangstopologie $\mathfrak{T}$ übereinstimmt.

$E[\mathfrak{T}]$ ist dann und nur dann stark reflexiv, wenn in E und in E' jeder linear $\mathfrak{T}_k$-beschränkte abgeschlossene Teilraum linear schwach kompakt und $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_k$ ist. Sind E und E' $\mathfrak{T}_k$-vollständig, so ist $E[\mathfrak{T}_k]$ stark reflexiv. Sind die $E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ stark reflexiv, so auch ihr topologisches Produkt $\Pi E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$ und ihre topologische direkte Summe $\bigoplus\limits_\alpha E_\alpha[\mathfrak{T}_\alpha]$. Alle Räume, die man aus den vollständigen und stark reflexiven $\varphi_{\mathfrak{d}}(K)$ und $\omega_{\mathfrak{d}'}(K)$ durch iterierte Bildung von topologischen Produkten und direkten topologischen Summen erhält, sind vollständig und stark reflexiv. Speziell ist also jeder lokal linear kompakte Raum stark reflexiv, das ist eine leichte Verschärfung des Dualitätsatzes von Lefschetz.

MAINZ, DEUTSCHLAND, BEUTHENERSTR. 1

LIMESRÄUME UND KOMPLETTIERUNG

HANS-JOACHIM KOWALSKY

Der Fréchet'sche Begriff des Limesraumes und seine Modifikationen können in folgender Weise verallgemeinert werden: R sei eine Punktmenge. Unter einer Limitierung von R werde dann eine Abbildung τ von R verstanden, die jedem $x \in R$ ein Ideal τx im Verband aller Filter von R so zuordnet, dass der durch x erzeugte Hauptfilter in τx liegt. Das Paar (R, τ) heisse dann ein Limesraum. Jeder Limitierung entspricht ein Limesbegriff, wenn man definiert: x ist Limes genau der Filter, die in τx liegen. Die (mehrstufigen) Topologien auf R entsprechen eineindeutig denjenigen Limitierungen τ von R, bei denen alle Ideale τx Hauptideale sind. In Analogie zu dem Komplettierungsprozess uniformer Räume kann man für einen Limesraum (R, τ) den Begriff des konvergenten (Cauchy'schen) Filters einführen. Die Limitierung τ und dieser Konvergenzbegriff lassen sich in naheliegender Weise von R auf die Menge $\hat{R}$ der Klassen äquivalenter Cauchy'scher Filter fortsetzen, und $(\hat{R}, \tau)$ ist dann eine komplette Erweiterung von (R, τ). Für spezielle Konvergenzbegriffe in topologischen Räumen stimmt $(\hat{R}, \tau)$ mit bekannten Kompaktifizierungen überein, die hierbei sogleich eine Verallgemeinerung erfahren. Darüber hinaus gestattet diese Auffassung des Erweiterungsprozesses als eine Komplettierung einen Überblick über die Eigenschaften und Beziehungen aller möglichen Erweiterungen.

DEUTSCHLAND, ERLANGEN,
UNIVERSITÄTSSTR. 36

ZUR PROJEKTIVEN KINEMATIK EINPARAMETRIGER QUADRIKSCHAREN

Heinz Kunle

Betrachtet wird eine einparametrige Quadrikschar und deren Hüllfläche, insbesondere für den Fall, daß die Charakteristiken in Vierseite entarten („charakteristische Vierseite"). Diese geometrische Figur ist aus der Theorie der Komplexflächen bekannt. Man bestätigt durch Heranziehung des Kleinschen Geradenraums R_5, daß gegenüberliegende Regelflächen der Vierseitfigur W-transformiert sind. Weitere geometrische Eigenschaften ergeben sich bei Betrachtung der Regelflächen und der Doppelverhältnisscharen auf ihnen.

Interessant sind besonders die Beziehungen zur projektiven Streifentheorie. Der Vierseitfigur gehören nämlich vier Streifen zweiter Ordnung an, die untereinander eng gekoppelt sind. Schmiegebene und Kehlpunkt eines solchen Streifens sind polar bezüglich der jeweiligen Quadrik der Schar. Es werden die Bolschen Streifeninvarianten des Streifenquadrupels berechnet. Die Projektivbogenlänge ist auf allen vier Streifen dieselbe. Es werden Sätze aufgestellt für pangeodätische Streifen, Projektivstreifen und Koinzidenzstreifen im Quadrupel.

Schließlich läßt sich zeigen, daß mit jedem Streifen zweiter Ordnung ∞^1 Vierseitfiguren verknüpft sind. Eine geometrische Erzeugung der Figur wird angegeben.

Math. Inst. der Universität,
Freiburg (Deutschland).

EXISTENZ UND EINDEUTIGKEIT IN DER MEHRDIMENSIONALEN DIFFERENTIALGEOMETRIE

Kurt Leichtweiss

Durch Zurückführung der Ableitungsgleichungen und deren Integrabilitätsbedingungen auf den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Cauchy-Kowalewski lassen sich für mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten folgende Ergebnisse gewinnen:

1) Jeder analytische Riemannsche Raum der Dimension n lässt sich in einen Riemannschen Raum der Dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ lokal, analytisch und isometrisch einbetten.

2) Durch einen beliebig vorgegebenen, analytischen Streifen des eukli-

dischen Raumes E_k geht stets eine und nur eine (analytische) Minimalfläche M_n $(n < k)$.

3) Eine r-Torse der Dimension n: $V_{r,n}$ $(1 \leqq r \leqq n)$ ist im E_k $(k > n)$ als n-dimensionale Mannigfaltigkeit definiert, deren Tangentialebenen nur von r Parametern abhängen. Eine r-Torse ist, wenn sie Hyperfläche ist, durch einen (beliebig vorgebbaren) r-dimensionalen Streifen eindeutig bestimmt; es existieren auch nichtzylindrische und nichtkonoide r-Torsen, welche nicht Hyperflächen sind. Die r-Torsen sind im allgemeinen nur für $r = 1$ abwickelbar.

4) In der relativen Differentialgeometrie einer analytischen Hyperfläche $\mathfrak{x}$ bezüglich einer auf $\mathfrak{x}$ durch parallele Tangentialebenen bezogenen analytischen Eichfläche $\mathfrak{e}$ gilt: Das Hyperflächenpaar $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ ist durch einen Streifen und durch die Beziehung von einer linear gebrochenen Funktion der elementarsymmetrischen Funktionen der Relativhauptkrümmungen von $\mathfrak{x}$ zu geodätischen Parallelkoordinaten von $(\mathfrak{x}, \mathfrak{e})$ sowie durch die Beziehung des Affinabstands vom Koordinatennullpunkt zu $\mathfrak{e}$ bezüglich $\mathfrak{x}$ zu denselben Koordinaten als „natürliche Gleichungen" eindeutig charakterisiert. Hieraus ergeben sich in den Fällen $\mathfrak{e} = \mathfrak{x}$ (Salkowskische affine Differentialgeometrie), $\mathfrak{e} =$ Affinnormalenvektor von $\mathfrak{x}$ (Blaschkesche affine Differentialgeometrie) und $\mathfrak{e} =$ gewöhnlicher Normalenvektor von $\mathfrak{x}$ (gewöhnliche metrische Differentialgeometrie) wichtige Sonderfälle.

5) Eine analytische, n-dimensionale Mannigfaltigkeit im k-dimensionalen euklidischen Raum $(k > n)$ ist dort durch ein System von $k - n$ Invarianten als Funktionen geodätischer Parallelkoordinaten und durch einen Anfangsstreifen im wesentlichen eindeutig bestimmt; die Invarianten können dabei im wesentlichen beliebig analytisch vorgegeben werden. Sie sind geometrisch dadurch charakterisiert, dass die Zahl der nichtverschwindenden von ihnen gerade die Einbettungszahl der Mannigfaltigkeit darstellt.

6) Eine zweidimensionale, analytische Fläche im vierdimensionalen euklidischen Raum ist durch einen Anfangsstreifen, den Betrag des Vektors der mittleren Krümmung und durch eine verallgemeinerte Gausssche Krümmung als Funktionen geodätischer Parallelkoordinaten eindeutig charakterisiert.

FREIBURG I.B., HEBELSTR. 40
(MATHEM. INST.)

ON THE CLASSIFICATION OF LINEAR COMPLEXES OF PLANES

CARMELO LONGO

It is known that the classification of the linear *complexes of planes* in a projective space S_n with respect to the projective group, is equivalent to the classification of *trivectors* in a centro-affine space S_{n+1}.

The classifications for $n = 5$ and $n = 6$ have been already given (Landsberg, Reichel, Weitzenböck, Veneroni, C. Segre, Schouten, Papy, Gourewitch, Bompiani). The above classifications are based on the following geometrical elements:

1. *Singular line,* i.e. a line, such that every plane through it belongs to the complex.

2. *The Locus of the singular points of kind h* (or, according to Schouten, *invariant domain* (Invariante Gebiete)), where singular point of kind h is a point P, such that the singular lines through it belong to an $S_{2h+\varepsilon}$, with $\varepsilon = 0, 1$, according with the parity of n; the $S_{2h+\varepsilon}$ will be called the *singular space* associated with P.

3. *The order χ of the group of homographies transforming the complex onto itself.*

I give the full classification of linear complexes for $n = 7$ (i.e. trivectors of rank 8). I prove that the classification may be reached, by assuming as fundamental the idea of *singular total plane,* such that any line in it is singular; that is, I prove that, for $n \leqq 7$, projectively equivalent complexes are characterized by their configuration Σ of the singular total planes. For $n = 7$, in addition to the complex of the general type (without singular total planes), there is a complex that, following Bompiani, will be named of the *special type,* with a single singular total plane, and, moreover, 11 particular types with at least two singular total planes and, therefore, necessarily having at least a point P, singular of kind 2. I reach the classification of the latter types, by studying the configurations of the singular total planes through P.

Besides, I give the classification of the complexes with at least a singular point of kind 3, for $n = 8$.

Finally, I give the classification of the *pencils of complexes* in S_5.

V. TERNI, 74-ROMA (ITALY).

POINTS SINGULIERS DES SURFACES DU TROISIÈME ORDRE DE LA GÉOMÉTRIE FINIE

ANDRÉ MARCHAUD

Dans un Mémoire *Sur une classe de points singuliers des surfaces du troisième ordre de la Géométrie finie* (Journ. Math., t. 31. — Fasc. 4, 1952) j'ai commencé l'étude des points singuliers des surfaces S_3 du troisième ordre non décomposées.

Une S_3 est par définition un ensemble fermé de l'espace projectif dont chaque section plane est une courbe du troisième ordre au plus, l'une au moins étant du troisième ordre et non décomposée (c'est-à-dire sans droite). *Il n'est fait aucune hypothèse sur l'existence des tangentes a ces courbes* (définies immédiatement à partir du continu).

Un point 0 d'une S_3, isolé ou dont le voisinage sur elle est contenu dans le faisceau des tangentes en 0 (paratingent) est dit *singulier*. Lorsque S_3 est algébrique et du troisième degré cette définition équivaut (pour les points réels) à la définition classique. Le point est singulier de première ou de seconde espèce suivant que son voisinage contient ou non des points non singuliers.

On ne pourrait résumer ici les résultats de l'étude complète des points singuliers: distribution et propriétés corrélatives de S_3. En voici un (à rapprocher d'une proposition de C. Juel, qui raisonne sur une surface possèdant partout *par hypothèse* un plan tangent continu — Die Elementarfläche dritter Ordnung mit vier konischen Doppelpunkten, Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. 1920).

Soit S une S_3, possèdant 4 points singuliers de première espèce: O_i, dont 3 quelconques ne sont pas alignés.

1. — Les O_i sont les seuls points singulier de S et définissent un tétraèdre dont les arêtes sont sur S.

2. — S contient 3 autres droites et 3 seulement: diagonales du quadrilatère découpé par les faces du tétraèdre sur *un* plan Π, définissant *une* surface du troisième degré Σ, laquelle a mêmes points singuliers et droites que S.

3. — En tout point non singulier d'une arête le faisceau des tangentes, commun à S et Σ, est le plan défini par l'arête et l'intersection de Π avec l'arête opposée.

4. — La trace sur Π de la face du tétraèdre opposée à un sommet n'a aucun point commun avec un seul des 4 triangles définis par les droites de S situées dans Π; l'intérieur de ce triangle se projette sur S, du sommet correspondant, suivant un morceau (ouvert) de surface simple de Jordan à faisceau des tangentes partout plan, donc *a plan tangent continu.*

19 Bd Jourdan Paris xive.

SELECTION THEOREMS FOR CONTINUOUS FUNCTIONS

Ernest Arthur Michael

Let X, Y be topological spaces, and F a function from X to the space 2^Y of non-empty, closed subsets of Y. A *selection* for F is a continuous $f : X \to Y$ such that $f(x) \in F(x)$ for every $x \in X$. If $A \subset X$ is closed, then F has the *extension* (resp. *neighborhood extension*) *property modulo* A if every selection for $F \mid A$ can be extended to a selection for F (resp. for $F \mid U$ for some open

$U \supset A$). In this note we give some sufficient conditions for F to have these properties.

Suppose that X is paracompact, Y complete metric, and F lower semi-continuous (i.e. $\{x \in X \mid F(x) \cap U \neq \Phi\}$ is open in X for every open $U \subset Y$). Then we have the following two theorems, essentially generalizing the extension theorems of Dugundji [Pacific J. Math. 1 (1951), 353—367] and Kuratowski [Fund. Math. 24 (1935), 269—288] which deal with the special case where F is a constant mapping.

THEOREM 1. If Y is a Banach space, and if $F(x)$ is convex for every $x \in X$, then F has the extension property modulo every closed $A \subset X$.

THEOREM 2. If $A \subset X$ is closed, with covering dimension $(X - A) \leqq n + 1$, and if $\{F(x)\}_{x \varepsilon X}$ is equi-LC^n (see below), then F has the neighborhood extension property modulo A. If, moreover, all homotopy groups of order $\leqq n$ of every $F(x)$ vanish, then F has the extension property modulo A.

We have called a collection $\mathscr{B}$ of subsets of Y *equi-LC^n* if, whenever $y \in B_0 \in \mathscr{B}$ and $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta(y, \varepsilon) > 0$ such that, for any $k \leqq n$ and any $B \in \mathscr{B}$, every continuous map of the k-sphere into $B \cap S_\delta(y)$ is homotopic to a constant map in $B \cap S_\varepsilon(y)$.

Our final Theorem 3 below asserts that, in certain special cases, the homotopy vanishing requirements in Theorem 2 can be considerably relaxed. Part (a) of Theorem 3 is closely related to the covering homotopy theorem and the homotopy extension theorem.

THEOREM 3. Suppose that, for some fixed metric ϱ on Y, Y is complete, F is continuous with respect to the natural uniform structure induced on 2^Y by ϱ, and $\{F(x)\}_{x \varepsilon X}$ is equi-LC^n in such a way that δ does not depend on y. Then each of the following two conditions is sufficient for F to have the extension property modulo A.

(a) $X = Z \times [0, 1]$, where Z is paracompact with dimension $(Z) \leqq n$, and $A = (Z \times \{0\}) \cup (C \times [0, 1])$ with C closed in Z.

(b) X is an $(n + 1)$ — simplex, A is its boundary, and $\pi_n(F(x_0)) = 0$ for some $x_0 \in X$.

MATHEMATICS DEPT., UNIVERSITY OF WASHINGTON,
SEATTLE 5, WASH. U. S. A.

THE INVARIANCE OF THE KNOT-TYPES

EDWIN E. MOISE

Let P and P' be simple closed polygons in Euclidean 3-space E^3, and suppose that there is an orientation-preserving homeomorphism f, of E^3 onto itself, such that $f(P) = P'$. It is shown that P and P' must then have the same knot-type in the classical sense: that is, P can be thrown onto P' by a piecewise linear isotopy of E^3 onto itself.

This invariance theorem for the knot-types of polygons makes it possible to generalize the basic definitions of knot-theory in the following way: Let J be a simple closed curve in E^3 which is *tamely imbedded*, in the sense that there is a homeomorphism g, of E^3 onto itself, such that $g(J)$ is a polygon P. We may then suppose, without loss of generality, that g preserves orientation. Under the latter condition, the knot-type of P is independent of the choice of g, for if P' is the image of J under an orientation-preserving homeomorphism g', of E^3 onto itself, then gg'^{-1} satisfies the hypothesis for f in the invariance theorem, and P and P' are of the same knot-type.

Thus we can define the knot-type of any tamely imbedded simple closed curve J as the knot-type which contains all of the corresponding polygons P; and we can define knot-equivalence by means of orientation-preserving homeomorphisms of E^3 onto itself. This gives a true generalization of the classical theory, using purely topological rather than combinatorial concepts.

The proof of the invariance theorem (Annals of Mathematics, vol. 59 (1954) pp. 159—170) leans heavily on the methods and results of a previous paper of the author (Annals of Mathematics, vol. 56 (1952) pp. 96—114.)

547 Elm St., Ann Arbor,
Michigan U. S. A.

ÜBER DIE ERWEITERUNGEN TOPOLOGISCHER RÄUME

Georg Nöbeling

Sind E und F zwei topologische Räume, $\overline{}$ und $\stackrel{\sqcap}{}$ ihre Topologien, so heisse F eine Erweiterung von E, wenn $E \subseteqq F$, $\overline{A} \subseteqq \stackrel{\sqcap}{A}$ für $A \subseteqq E$ und $\stackrel{\sqcap}{E} = F$ ist. Die Erweiterungen F eines festen Raumes E zerfallen in Klassen: F_1 und F_2 liegen in derselben Klasse, wenn jede beschränkte, stetige, reelle Funktion $f \mid E$, die auf F_1 stetig fortsetzbar ist, auch auf F_2 stetig fortsetzbar ist und umgekehrt. Das System aller auf die Erweiterungen einer Klasse fortsetzbaren Funktionen $f \mid E$ ist ein Ring $\mathfrak{R}$ (im Sinne der Algebra), der alle Konstanten enthält und abgeschlossen ist bezüglich gleichmässiger Konvergenz. Diese Ringe entsprechen eineindeutig dem Klassen (insbesondere ist die zu einem beliebigen solchen Ring gehörige Klasse nicht leer). In jeder Klasse gibt es eine kleinste bikompakte Erweiterung $\beta_{\mathfrak{R}}\, E$; jede Erweiterung dieser Klasse lässt sich stetig in $\beta_{\mathfrak{R}}\, E$ so abbilden, dass E identisch auf sich abgebildet wird.

Ist $\mathfrak{R}_1 \subseteqq \mathfrak{R}_2$, so existiert eine stetige Abbildung von $\beta_{\mathfrak{R}_2} E$ auf $\beta_{\mathfrak{R}_1} E$, die auf E die Identität ist. Wenn E ein vollständig regulärer T_1-Raum ist, os ist $\beta_{\mathfrak{R}} E = \beta E$ für den Ring aller beschränkten, stetigen, reellen Funktionen $f \mid E$.

ERLANGEN (DEUTSCHLAND) LAMMERSTR. 5.

SUR LA THÉORIE DES COMPLEXES DE COURBES

CONSTANTIN PAPAÏOANNOU

L'objet de cette conférence est d'étudier un complexe de courbes analytiques quelconque en comparaison avec le complexe de courbes caractéristiques d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous établissons une correspondance entre un complexe de courbes quelconque et un complexe spécial par une équation aux dérivées partielles cette correspondance nous permet d'associer à un complexe de courbes quelconque une congruence que j'appelle „congruence focale" du complexe spécial, correspondant au complexe consideré, par une équation de monge.

Nous étudions la correspondance établie et nous terminons par l'examen du problème de l'extension des résultats précédents à l'espace euclidien à n dimensions.

LACOUIDON 22, ATHÈNES (9), GRÈCE

KÄHLER SPACES WHICH ARE RIEMANN EXTENSIONS

EDWARD MCWILLIAM PATTERSON

In terms of canonical coordinates (x^i, ξ_i) the metric of a Riemannian $2n$-space admitting a parallel field π of null n-planes is given by $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j + 2dx^i d\xi_i$. If g_{ij} is a quadratic function of the ξ's, i.e. if $g_{ij} = X^{pq}_{ij}\xi_p\xi_q - 2\Gamma^p_{ij}\xi_p + c_{ij}$, for some functions X^{pq}_{ij}, Γ^p_{ij} and c_{ij}, then the space is called a Riemann extension with respect to π.

A Kähler space K^{2n} is a Riemannian $2n$-space whose metric is given, in terms of coordinates $(y^i, y^{i'})$, called Kähler coordinates, by $ds^2 = 2g_{ij'}\, dy^i dy^{j'}$, where $g_{ij'.k} = g_{kj'.i}$ and $g_{ij'.k'} = g_{ik'.j'}$ (a dot denotes ordinary partial differentiation).

A Riemannian $2n$-space is a K^{2n} if and only if it admits two parallel fields of non-intersecting null n-planes. If a K^{2n} is a Riemann extension with respect to one of these fields, then canonical coordinates can be chosen so that $g_{ij} =$

$X^{pq}_{ij}\xi_p\xi_q$ where $X^{(rs}_{p[i}X^{t)\,p}_{j]\,k}=0$ and $X^{rs}_{ij.k}=X^{rs}_{ik.j}$. In particular, these equations are satisfied if $X^{pq}_{ij}=\frac{1}{2}\theta(\delta^p_i\delta^q_j+\delta^p_j\delta^q_i)$ where θ is a constant; the metric is then given by $ds^2=\theta\xi_i\xi_j dx^i dx^j+2dx^i d\xi_i$. In Kähler coordinates, this metric is Fubini's metric of complex projective n-space.

A K^{2n} is symmetric in Cartan's sense if and only if it is a Riemann extension with respect to both parallel fields of null n-planes. Canonical coordinates with respect to one of these parallel fields can be chosen so that $g_{ij}=X^{pq}_{ij}\xi_p\xi_q$, where the X's are constants satisfying several sets of identities, including $X^{(rs}_{p[i}X^{t)\,p}_{j]\,k}=0$ and $X^{r(s}_{pi}X^{t)p}_{jk}=X^{st}_{p(j}X^{rp}_{k)i}$. In particular, these identities are satisfied if $X^{pq}_{ij}=\frac{1}{2}\theta(\delta^p_i\delta^q_j+\delta^p_j\delta^q_i)$; thus the metric $ds^2=\theta\xi_i\xi_j dx^i dx^j+2dx^i d\xi_i$ is symmetric. (It is invariant under the group of transformations of the form $x^i=a^i_j\bar{x}^j$, $\bar{\xi}_i=a^j_i\xi_j$, where a^i_j are arbitrary constants such that the matrix (a^i_j) is non-singular.) Various facts concerning symmetric Kähler spaces can be obtained from the above two sets of identities. In particular canonical for the metrics of irreducible four-dimensional Kähler spaces can be found.

26 Argyle Street, St. Andrews, Scotland

SECHSECKGEWEBE UND POTENZASSOZIATIVE LOOPS

Günter Pickert

Ein 3-Gewebe G ist genau dann Sechseckgewebe (s. Reidemeister, Vorl. über Grundlagen d. Geometrie, 1930), wenn in jeder seiner Loops jedes Element ein Inverses besitzt (Bol, Math. Ann. 114, 1937). Wegen der Isotopie aller Loops von G bedeutet das: In einer (und damit in jeder) Loop L von G folgt aus $x+a=b+u$, $b+y=v+a$, $x+y=b+a$ stets $v+u=b+a$. Mit der rekursiven Definition $(n+1)\cdot c=n\cdot c+c$, $0\cdot c=0$ folgt daraus

$$n\cdot c+m\cdot c=(n+m)\cdot c \text{ und } n\cdot c+m\cdot(-c)=\begin{cases}(n-m)\cdot c & \text{für } n\geqq m\\ (m-n)\cdot(-c) & \text{für } n<m.\end{cases}$$

Somit liegt jedes Element von L in einer assoziativen Unterloop von L: *Die Loops eines Sechseckgewebes sind potenzassoziativ.* Dieser Satz entspricht in der Gewebetheorie dem Ergebnis von Moufang (Math. Ann. 105, 1931) über die Konstruktion des Möbius-Netzes in einer projektiven Ebene.

Archimedische Anordnung von G bedeutet für die dann ebenfalls angeordnete Loop L: Zu $a, b>0$ und $c, d<0$ gibt es n, m mit $n\cdot a>b$ und $n\cdot c<d$. Das von Hölder (Ber. sächs. Akad. 53, 1901) zum Beweis der Kommutativität einer archimedisch angeordneten Gruppe verwandte Verfahren zeigt in diesem Fall, dass L kommutativ ist. Da aus der Kommutativität aller

Isotope von L die Assoziativität folgt, hat man damit den von allen Stetigkeitsbetrachtungen freien Kern des Thomsenschen Sechseckgewebesatzes (Boll. Un. Mat. Ital. 6, 1927) in der folgenden Gestalt rein algebraisch gewonnen: *Ein archimedisch angeordnetes Sechseckgewebe ist isomorph — auch bez. der Anordnung — zu einem Gewebe aus Geraden dreier Parallelenbüschel der reellen affinen Ebene.*

TÜBINGEN-LUSTNAU, WALDECKSTR. 1,
DEUTSCHLAND.

ZUR HOMOTOPIE VON ABBILDUNGEN EINES POLYEDERS IN EINE SPHÄRE

DIETER PUPPE

Als Beitrag zum Klassifikationsproblem der Abbildungen eines Polyeders K^n in eine Sphäre S^m für beliebige Dimensionen n und m wird folgende Teilfrage behandelt:

K^n sei eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, e^n eine n-Zelle einer Zerlegung von K^n und $f_\alpha : K^n \to S^m$ eine Abbildung, so daß $f_\alpha \mid K^n - e^n$ konstant ist und $\alpha \in \pi_n(S^m)$ durch $f_\alpha \mid e^n$ repräsentiert wird; in welchen Fällen ist dann f_α wesentlich? Die allgemeine Theorie der gerüstweisen Konstruktion von Deformationen lehrt, daß diese Frage mit dem Klassifikationsproblem für die auf K^{n-1} nullhomotopen Abbildungen $K^n \to S^m$ äquivalent ist. Der Weg zur Beantwortung führt über die Deutung einer Deformation $K^n \times I \to S^m$ als Abbildung von K^n in den Raum der Wege auf S^m. Mit Hilfe der Untersuchungen von Serre (Ann. of Math. 54 S. 425 und 58, S. 258) über die Homotopiegruppen der Sphären und die Homologiegruppen der Wegeräume gelangt man zu dem Ergebnis: f_α ist immer wesentlich, wenn α in $\pi_n(S^m)$ unendliche Ordnung hat, d. h. wenn entweder $n = m$ und $\alpha \neq 0$ oder $n = 2m - 1$, $m =$ gerade und die Hopf'sche Invariante $\gamma(\alpha) \neq 0$ ist. Dagegen gibt es zu jedem anderen α eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K^n, so daß f_α nullhomotop ist.

Daraus folgt insbesondere, daß für gerades m jede $(2m - 1)$-dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit wesentliche Abbildungen auf die S^m gestattet. Allgemeiner läßt sich zeigen: Ist m gerade, $n = 2m - 1$ und enthält die Kohomologiegruppe $H^n(K^n)$ Elemente größerer Ordnung als 2, so gibt es wesentliche Abbildungen $K^n \to S^m$. In denjenigen Dimensionen m, für die es in $\pi_{2m-1}(S^m)$ Elemente mit ungerader Hopf'scher Invariante gibt, genügt es sogar, $H^n(K^n) \neq 0$ zu fordern. Ist die n-te Betti'sche Zahl von K^n

nicht 0, so gibt es unendlich viele Abbildungsklassen $K^n \to S^m$. Für $m < n < 2m - 1$ oder $n = 2m - 1$ und m = ungerade kann ein analoger Satz nicht gelten. Es gibt nämlich in diesen Fällen immer eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf die S^m abbilden läßt.

Mathematisches Institut,
Heidelberg, Hauptstr. 47—51.

SUR LE PROBLÈME DES QUATRE COULEURS

Ismail Ratib

Errera montre qu'une carte irreductible ne peut admettre un anneau formé d'un nombre pair d'hexagones et un nombre pair de pentagones, ceux-ci étant deux à deux adjacents, sous réserve d'une restriction concernant l'introduction possible d'isthme dans la carte réduite. Nous disons qu'il est possible de démontrer avec une méthode similaire que le même énoncé est valable pour un nombre impair d'hexagones dans l'anneau, si 2 hexagones voisins de l'anneau favorablement placés sont adjacents à un hexagone et un pentagone étrangers à l'anneau.

17, Rue Ibrahim Pacha.

PSEUDO-ABELIAN VARIETIES

Leonard Roth

The pseudo-Abelian varieties are a generalisation of the elliptic surfaces first studied by Painlevé and Enriques. A pseudo-Abelian variety W_p of type q is a p-dimensional algebraic variety which is invariant under a continuous group of ∞^q transformations whose trajectories form a congruence of Picard varieties. The particular case $p = 3$, which comprises the elliptic and hyperelliptic threefolds, has been studied in recent publications of the writer. A paper on the general case is in course of publication (Proc. Cambridge Phil. Soc.).

An important subclass of these varieties consists of the improperly Abelian varieties, i.e. the varieties W_p which map involutions of superficial irregularity $q < p$ on a Picard variety V_p. It may be shown that W_p is pseudo-Abelian of type q and that it is representable parametrically by means of Abelian functions of genera lower than p (whence the name).

Imperial College of Science,
London. S.W. 7

ON A CLASS OF CYLINDRICAL CONGRUENCES

Giacomo Saban

1. Cylindrical line congruences, i.e. congruences whose spherical representation reduces to a curve on the unit sphere, have interesting geometrical properties, as has been shown in some recent papers devoted to a particular type of such congruences (see n. 5). Some results concerning a more general class have been obtained here.

2. The rays of a general cylindrical line congruence can be grouped to form a one-parameter family of cylinders or a one-parameter family of developable surfaces (Strazzeri). If any one of the non-cylindrical scrolls of a cylindrical congruence has a director plane, the developable surfaces of the congruence are planes.

3. The cylinders of a cylindrical line congruence may also reduce to planes: in this case we shall call the congruence a "p-congruence". The dual unit vector $\vec{R}$ of a ray of a p-congruence may then be written

$$\vec{R}(s,t) = \vec{G}(s) - \varepsilon t[\sin\varphi(s)\,\vec{N}(s) + \cos\varphi(s)\,\vec{T}(s)] \qquad (\varepsilon^2 = 0) \tag{1}$$

where the dual unit vectors $\vec{G}$, $\vec{N}$ and $\vec{T}$ represent respectively the generator, the normal and the orthogonal tangent in the central point of the generator, of a non-cylindrical scroll of the congruence.

The rays of a p-congruence are parallel lines lying on a one-parameter family of planes: these planes envelope a developable surface (which is one of the sheets of the focal surface of the congruence) and are therefore the osculating planes of a skew curve.

4. The generators of the focal developable do not generally belong (as rays) to the p-congruence. This is the case only when the dual vectorial equation (1) assumes the form

$$\vec{R}(s,t) = \vec{G}(s) - \varepsilon t\,\vec{T}(s) \tag{2}$$

and the focal developable then corresponds to $t = -\delta/q$, where δ and q are respectively the parameter of distribution and the real part of the dual torsion of the scroll generated by $\vec{G}$. The focal developable is then, however, the only true developable surface belonging to the congruence, as the ∞^1 developable surfaces of the congruence coincide with the ∞^1 cylinder-planes. Furthermore, such p-congruences are the only isotropic cylindrical congruences, i.e. the parameter of distribution at a ray is independent of the scroll passing through the ray.

5. The only p-congruences for which the central point on a ray is independ-

ent of the scroll passing through the ray, are the p-congruences of equation

$$\vec{R}(s, t) = \vec{G}(s) + \varepsilon\, t \vec{N}(s); \tag{3}$$

they are called "synectic congruences" and many of their properties have been studied by other authors (Study, Kuiper, Kula). Synectic congruences are furthermore the only p-congruences and the only cylindrical congruences that are also congruences of normals.

ISTANBUL ÜNIVERSITESI MATEMATIK ENSTITÜSÜ,
ISTANBUL (TURKEY).

ON THE NORMAL RECTILINEAR CONGRUENCE ALONG LINES OF CURVATURE

NILOS SAKELLARIOY

Let (1) $x = x(u_1, u_2)$ be the (vector) equation of a surface S of class C^4, $\dfrac{\partial x}{\partial u_1} \times \dfrac{\partial x}{\partial u_2} \neq 0$, (where $\times$ denotes vector multiplication). Let S be free of umbilical points (let $H^2 > K$), where $K = K(u_1, u_2)$, $H = H(u_1, u_2)$ of class C'' the roots $k_i (i = 1, 2)$ of the equation $k^2 - 2Hk + K = 0$ and the corresponding radii of curvature R_i different and of class C''. Let $\zeta(u_1, u_2)$ be the unit normal vector of S at (u_1, u_2) which is of class C^3. By virtue of Rodrigues formulae we have:

$$\frac{\partial x}{\partial u_1} + R_1 \frac{\partial \zeta}{\partial u_1} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial u_2} + R_2 \frac{\partial \zeta}{\partial u_2} = 0, \quad (R_1 \neq R_2, \neq 0),$$

if $u_i =$ const. are lines of curvature of S. Let

$$\xi = x(u_1, u_2) + \lambda \cdot \zeta(u_1, u_2) \tag{2}$$

be the (vector) equation of the normal rectilinear congruence along lines of curvature of S, $2p$ the distance of two focal points, (1) the director surface of (2) and $\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial u_1}\right)^2 = e$, $\dfrac{\partial \zeta}{\partial u_1} \cdot \dfrac{\partial \zeta}{\partial u_2} = f$, $\left(\dfrac{\partial \zeta}{\partial u_2}\right)^2 = g$ the fundamental Kummer's magnitudes. The equation of the director middle surface of (2) is: $\bar{x} = x + (R_1 + R_2)/2 \cdot \zeta(u_1, u_2)$, and is $f = 0$. The vector equations of the two evolutes surfaces $S^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ of S are the following $\left(\text{because } \varrho = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)\right)$:

$$\begin{cases} S^{(1)} : x^{(1)} = \bar{x} + \frac{1}{2}(R_1 - R_2) \,.\, \zeta(u_1, u_2) = x(u_1, u_2) + R_1(u_1, u_2) \,.\, \zeta(u_1, u_2), \\ S^{(2)} : x^{(2)} = x(u_1, u_2) + R_2(u_1, u_2) \,.\, \zeta(u_1, u_2). \end{cases} \tag{3}$$

We seek to find relations between R_i and $\zeta(u_1, u_2)$. Using the procedure to find the Guichard's differential equations for the solution of the problem *"given the spherical images of the developable surfaces, we ask to find the corresponding rectilinear congruence"* [1], for the case which we consider $f = 0$, $a = \frac{1}{2e} \cdot \frac{\partial e}{\partial u_2}$, $b = \frac{1}{2g} \cdot \frac{\partial g}{\partial u_1}$, we get

$$\boxed{\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = (R_2 - R_1) \cdot a, \ \frac{\partial R_2}{\partial u_1} = (R_1 - R_2) \cdot b}$$

$$e \cdot \frac{\partial R_1}{\partial u_2} : \frac{\partial e}{\partial u_2} + g \cdot \frac{\partial R_2}{\partial u_1} : \frac{\partial g}{\partial u_1} = 0.$$

We find the expressions of the magnitudes of the first and second class of $S^{(i)}$ and we have

$$F^{(i)} = \frac{\partial R_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial u_2}, \ M^{(i)} = 0, \ \zeta^{(1)} = -\frac{\partial x}{\partial u_1} : \sqrt{E}, \ \zeta^{(2)} = -\frac{\partial x}{\partial u_2} : \sqrt{G}.$$

We note that "*if* $\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = 0$ *and therefore* $a = 0$, $b = 0$, *the curves* $u_i =$ *const. on* $S^{(i)}$ *are lines of curvature*" and we get the result, "if $\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = 0$, then $\frac{\partial \zeta}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$ and if $\frac{\partial \zeta}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1 \partial u_2} = 0$, then the $u_i =$ const. are lines of curvature on the evolutes $S^{(i)}$"

By using $R_1 = \frac{E}{L}$, $R_2 = \frac{G}{N}$ and supposing $\frac{\partial R_1}{\partial u_2} = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial u_1} = 0$, we have

$$L : \frac{\partial L}{\partial u_2} = E : \frac{\partial E}{\partial u_2}, \ N : \frac{\partial N}{\partial u_1} = G : \frac{\partial G}{\partial u_1}.$$

$L = e^{f_1(u_1)} E$, $N = e^{f_2(u_2)} \cdot G$, or $L = \psi_1(u_1) \cdot E$, $N = \psi_2(u_2) \cdot G$, $\frac{\partial \zeta}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1 \partial u_2} = 0.$

Voulis Str. 3,
Athens, Greece.

[1] Kommerell: Theorie der Raumkurven und Krummen Flächen, Bd. II, p. 154—5.

ON THE KINEMATIC FORMULA IN SPACES OF CONSTANT CURVATURE

LUIS A. SANTALÓ

Let Q_0, Q_1 be two compact orientable hypersurfaces imbedded in a space of constant curvature K of n ($\geqq 2$) dimensions. Let $M_i^{(\alpha)}$ ($i = 0, 1, \ldots, n-1$) be the integrated mean curvatures of Q_α ($\alpha = 1, 2$), i.e. if $S_i^{(\alpha)}$ are the *i-th* elementary symmetric functions of the $n-1$ principal curvatures of Q_α, we denote

$$M_i^{(\alpha)} = \binom{n-1}{i}^{-1} \int_{Q_\alpha} S_i^{(\alpha)} dA_\alpha$$

where dA_α is the element of area of Q_α. Let Q_0 be fixed and Q_1 be moving, and let dQ_1 be the kinematic density of Q_1. Let χ_α, $\chi(Q_0 \cap Q_1)$ be the Euler-Poincaré characteristic of Q_α and $Q_0 \cap Q_1$ respectively ($= 1$ if they are topological spheres). Then, the kinematic formula (the "principal formula" of the integral geometry) in spaces of constant curvature K is the following:

$$\int \chi(Q_0 \cap Q_1) dQ_1 = O_1 O_2 \ldots O_{n-1} \left(-\frac{2\varepsilon_n}{O_n} K^{n/2} V_0 V_1 + V_1 \chi_0 + V_0 \chi_1 \right) +$$

$$O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \frac{1}{n} \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n}{h+1} M_h^{(0)} M_{n-2-h}^{(1)} +$$

$$2 O_1 O_2 \ldots O_{n-2} \sum_{s=0}^{n-4} \frac{O_{n-s}}{O_s} M_s^{(0)} \left\{ \sum_{t=[(s-\varepsilon_n)/2]+1}^{(n-3-\varepsilon_n)/2} c_{stn} M_{2t+\varepsilon_n-s-1}^{(1)} \right\}$$

where V_0, V_1 are the volumes bounded by Q_0, Q_1, and

$$O_i = 2\pi^{(i+1)/2} / \Gamma((i+1)/2), \quad \varepsilon_n = \tfrac{1}{2}(1 + (-1)^n)$$

$$c_{stn} = \binom{n-1}{2t+\varepsilon_n} \binom{2t+\varepsilon_n}{s} \frac{O_{n+s-2t-\varepsilon_n+1}}{O_{2t+1+\varepsilon_n-s} O_{n-2t-\varepsilon_n} O_{n-2t-1-\varepsilon_n}} K^{(n-2t-1-\varepsilon_n)/2}.$$

The integration is extended over all positions of Q_1. For $K = 0$ this formula gives that of Blaschke-Chern (Am. J. Math. **74**, 227—236, 1952).

The formula contains a great deal of particular cases:

a. If Q_1 is a geodesic hypersphere of radius ϱ, we have $M_i^{(1)} = O_{n-1} K^{i+1-n} \sin^{n-1-i} \sqrt{K}\varrho \cos^i \sqrt{K}\varrho$ and the formula gives, after division by $O_1 O_2 \ldots O_{n-1}$, the volume of the parallel body to Q_0 at distance ϱ (generalized Stainer's formula).

b. If $K = 1$, to the body bounded by Q_0 corresponds the "dual" body Q_0^* bounded by the hypersurface parallel to Q_0 at distance $\pi/2$. The volume of

Q_0^* results

$$V_0^* = \tfrac{1}{2}\, O_n - (1-\varepsilon_n) V_0 - \sum_{i=1}^{(n-1+\varepsilon_n)/2} \binom{n-1}{2i-1} \frac{O_n}{O_{n-2i}\, O_{2i-1}} M_{n-2i}^{(0)}.$$

c. If Q_1 degenerates in a linear variety of dimension r $(> O)$, if we denote by dL_r the density for such linear spaces, the formula gives

$$\int \chi(Q_0 \cap L_r)\, dL_r = \frac{O_{n-2}\, O_{n-3} \ldots O_{n-r}}{O_1 O_2 \ldots O_r} \Big\{ \varepsilon_r K^{r/2} O_{n-1} V_0 +$$

$$+ \sum_{i=\varepsilon_r}^{(r-1+\varepsilon_r)/2} \binom{r-1}{2i-\varepsilon_r} \frac{O_r\, O_{r-1}\, O_{n-2i+\varepsilon_r}}{O_{2i-\varepsilon_r}\, O_{r-2i-1+\varepsilon_r}\, O_{r-2i+\varepsilon_r}} K^{(r-2i-1+\varepsilon_r)/2} M_{2i-\varepsilon_r}^{(0)} \Big\}$$

where the integral is extended over all L_r of the space.

Cochabamba 780 Dep. 11,
Buenos Aires (Argentina).

PROJEKTIV-GEOMETRISCHE SÄTZE ÜBER LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN 2. ORDNUNG

Robert M. F. Sauer

Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, welche die gesuchte Funktion $f(x, y)$ nicht explizit enthält ($\alpha f_{xx} + 2\beta f_{xy} + \gamma f_{yy} + \varrho f_x + \sigma f_y = 0$) lässt sich stets auf die Normalform $L[f] \equiv a f_{xx} + 2b f_{xy} + c f_{yy} = 0$ bringen. Für die Lösungen $f(x, y)$ dieser Differentialgleichung $L[f] = 0$ mit $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$ und die durch Legendre-Transformation ($\xi = f_x$, $\eta = f_y$, $\varphi(\xi, \eta) = x\xi + y\eta - f$, $x = \varphi_\xi$, $y = \varphi_\eta$) zugeordneten Lösungen der quasilinearen Differentialgleichung $\Lambda[\varphi] \equiv a\varphi_{\eta\eta} - 2b\varphi_{\eta\xi} + c\varphi_{\xi\xi} = 0$ gelten folgende geometrische Sätze:

1) Die Flächen f und φ sind dual-projektiv aufeinander bezogen. Ihre Punkte und Tangentialebenen entsprechen sich im Polarsystem des Paraboloids $2f = x^2 + y^2$. Infolgedessen bildet sich jedes konjugierte Kurvennetz und jede Asymptotenlinie der einen Fläche wieder in ein konjugiertes Kurvennetz und eine Asymptotenlinie der anderen Fläche ab.

2) Die Grundrisse entsprechender konjugierter Kurvennetze der Flächen f und φ sind reziprok-orthogonale Netze in den Ebenen $f = 0$ und $\varphi = 0$. Die Grundrisse der Asymptotenliniennetze sind gegenläufig-orthogonale Netze.

3) Im hyperbolischen Bereich $ac - b^2 < 0$ sind die Integralflächen f der Differentialgleichung $L[f] = 0$ diejenigen Flächen, für welche das Charakteristikennetz $a\,dy^2 - 2b\,dy\,dx + c\,dx^2 = 0$ der x, y-Ebene Grundriss eines konjugierten Kurvennetzes ist.

4) Die Zentralkollineationen des x, y, f-Raums mit der x, y-Ebene als Fixebene und dem uneigentlichen Punkt der f-Achse als Fixpunkt verknüpfen die Lösungen „projektiv-verwandter" Differentialgleichungen $L[f] = 0$, bei denen die Charakteristikennetze zueinander projektiv sind. Man gewinnt auf diese Weise aus den Lösungen einer Differentialgleichung $L[f] = 0$ eine explizite Darstellung für die Lösungen aller projektiv-verwandten Differentialgleichungen.

Die geometrischen Beziehungen zwischen den Flächen f und φ lassen sich durch ebeneckige Streckenzuggitter differenzengeometrisch verdeutlichen.

MÜNCHEN 38 (GERMANY), ROMANSTRASSE 34

MINDESTZAHLEN VON KOINZIDENZPUNKTEN

HELGA SCHIRMER

Der Vortrag schliesst sich an die Ausführungen von W. Franz über Koinzidenzpunkte an; insbesondere geht er näher ein auf die Beweismethoden des beweistechnisch schwierigsten Teiles der Theorie, nämlich des Approximationssatzes und des Satzes über die geometrische Koinzidenzpunkt-Mindestzahl einer Abbildungsklasse. Darüber hinaus werden einige Ergebnisse über Koinzidenzpunkt-Mindestzahlen bei Abbildungen einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^m$ in eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}'^n$ — wobei $m \gtreqless n$ ist — behandelt, von denen vor allem der Fall $m = n + 1$ wegen seiner Anwendungen auf die Theorie homotoper Abbildungen bei Fix- und Koinzidenzpunkten interessiert.

Ist f eine Abbildung von $\mathfrak{M}^m$ in $\mathfrak{M}'^n$, so gibt es eine zu f benachbarte Abbildung f', so dass (f, f') auf allen 0-, 1-, . . ., $(n - 1)$-dimensionalen Simplexen von $\mathfrak{M}^m$ koinzidenzpunktfrei ist und auf allen r-dimensionalen Simplexen $(r = n, n + 1, \ldots, m)$ nur Koinzidenzpunkte auf $(r - n)$-dimensionalen linearen Räumen hat. Für $m = n$ lässt sich damit der Approximationssatz beweisen. Ist nämlich (f, g) ein Abbildungspaar von $\mathfrak{M}^n$ in $\mathfrak{M}'^n$, so kann f in einer Umgebung der Koinzidenzpunkt-Menge von (f, g) so zu f' deformiert werden, dass (f', g) nur reguläre Koinzidenzpunkte hat.

Ist $\mathfrak{M}^m$ das Produkt von $\mathfrak{M}'^n$ mit der Einheitsstrecke, also $m = n + 1$, so ergibt sich bei geeigneter Lage der Koinzidenzpunkt-Geraden ein einfacher Beweis für die Existenz regulärer Homotopien, d.h. von Homotopien $\{(f_t, g_t), 0 \leqq t \leqq 1\}$, bei denen für jedes t (f_t, g_t) nur reguläre Koinzidenzpunkte hat. Durch Spezialisierung folgt ein entsprechender Satz für Fixpunkte. Bisher wurde nur für den Fixpunktfall mit $n = 2$ ein recht komplizierter Beweis veröffentlicht. Es erhebt sich weiter die Frage, wie weit man die Anzahl der Koinzidenzpunkte eines regulären Abbildungspaares (f, g) von $\mathfrak{M}^n$ in $\mathfrak{M}^n$ durch homotope Abänderung der Abbildungen verringern kann; es zeigt sich, dass es in jeder Abbildungsklasse Abbildungspaare gibt, die in jeder wesentlichen Koinzidenzpunkt-Klasse nur einen einzigen Koinzidenzpunkt enthalten.

Der Beweis dieser Tatsache wird zunächst für Deformationen geführt, d.h. für Abbildungspaare (f, g), bei denen f zu g homotop ist. Hier gibt es höchstens eine einzige wesentliche Koinzidenzpunkt-Klasse. Eine Verschärfung der Überlegungen, die zum Beweis des Approximationssatzes führten, gestattet die Konstruktion eines Abbildungspaares mit höchstens einem Koinzidenzpunkt.

Ist (f, g) ein beliebiges reguläres Abbildungspaar, so lassen sich je zwei zur selben Klasse gehörende Koinzidenzpunkte p und q zu einem vereinigen. Da es eine Umgebung von p und q gibt, in der f zu g homotop ist, lässt sich dieser Fall auf den der Deformationen zurückführen.

Die Untersuchung eines analogen Problems für $m \neq n$, insbesondere $m = n + 1$, führt zu Ergebnissen, die für die zuerst von J. Weier angeschnittene Frage nach normalen Abbildungsscharen aufschlussreich sind.

FRANKFURT a. M.,
SCHUMANNSTR. 58.

ÜBER BRÜCKENDARSTELLUNGEN VON KNOTEN

HORST SCHUBERT

Eine Knotenlinie im R^3 ist eine Brückendarstellung eines Knotens, wenn sie aus Streckenzügen in zwei parallelen Ebenen und dazu senkrechten Strecken besteht, wobei die halbe Anzahl der senkrechten Strecken als Brückenzahl bezeichnet wird. Jeder Knoten x besitzt Brückendarstellungen, $b(x)$ sei die minimale Brückenzahl aller dieser Darstellungen. Der Kreis ist der einzige Knoten mit $b(x) = 1$. Die Invariante $b(x)$ erweist sich als nützlich für die Betrachtung der Begleitknoten eines Knotens:

Die Knotenlinie k in der 3-Sphäre stelle den Knoten x dar. $\mathfrak{V}$ sei ein verknoteter Vollring, der k nicht-trivial im Inneren enthält, d. h. k liegt nicht in einer Teilkugel von $\mathfrak{V}$ und ist nicht Seele. Ist dann α die kleinste Anzahl von Schnittpunkten, die k mit einer Meridianfläche von $\mathfrak{V}$ besitzt, so stellen die Seelen von $\mathfrak{V}$ einen Begleitknoten λ der Ordnung α von x dar. Betrachtet man ein System von Vollringen $\mathfrak{V}_i (i = 1, 2, \ldots n)$, bei dem jeder Vollring die Komplemente der übrigen im Inneren enthält, und bei dem $\mathfrak{V}_i$

mit k den Begleitknoten λ_i der Ordnung α von x darstellt, so gilt

$$b(x) \geqq \sum_{i=1}^{n} \alpha(b(\lambda_i) - 1) + \alpha.$$

Hieraus läßt sich folgern, daß jeder Knoten nur endlich viele Begleitknoten besitzt, und es kann jedem Begleitknoten eine endliche Vielfachheit zugelegt werden. Ferner erhält man: $b(x) - 1$ ist für das Produkt von Knoten additiv, für einen Schlingknoten x mit Diagonalknoten λ gilt $b(x) = 2b(\lambda)$, für einen Schlaufknoten x mit dem Trägerknoten λ und der Umlaufzahl α gilt $b(x) = \alpha b(\lambda)$.

MATHEMATISCHES INSTITUT,
HEIDELBERG, HAUPTSTR. 47—51.

AN APPROACH TO N-DIMENSIONAL EUCLIDEAN AND NON-EUCLIDEAN GEOMETRY

JACOB SEIDEL

An inner-productspace Σ is a real linear space such that to each pair of elements a_i, a_j there is attached a real number, their inner-product, which satisfies the conditions $(a_i, a_j) = (a_j, a_i)$; $(\lambda a_i, a_j) = \lambda(a_i, a_j)$, λ real; $(a_i + a_j, a_k) = (a_i, a_k) + (a_j, a_k)$. We shall restrict ourselves to inner-product-spaces of finite dimension. The matrix formed by the inner products of a finite set of elements is called the Gramian matrix of these elements. Two square matrices P and Q are congruent, whenever $Q = R^T PR$ for some non-singular square R. Further $\pi(P)$, $[\nu(P)]$, stands for the number of positives [negatives] in any diagonalmatrix which is congruent with P.

Σ is called semisimple, whenever $a \in \Sigma$ and $(a, a_i) = 0$ for all $a_i \in \Sigma$ implies $a = 0$. Σ is called proper, if it contains at least one element b with $(b, b) > 0$. An IH space is a proper inner-productspace such that every proper subspace is semisimple.

THEOREM. The only possible IH spaces are:

1. Spaces such that for the Gramian matrix P of each finite set of elements $\nu(P) = 0$ holds;

2. Spaces such that for the Gramian matrix P of each finite set of elements, which span a subspace Γ, either $\pi(P) = 1$ or $\pi(P) = 0$ holds according as Γ is proper or not.

The theorem is proved with the aid of the

LEMMA. In an IH space Σ let $a_1, \ldots, a_n$ constitute an independent basis for a proper subspace Γ. Let $a_1, \ldots, a_n$ together with any other elements $b_1, \ldots, b_m$ of Σ have the Gramian matrix $\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$. Then $(B - C^T A^{-1} C)$ is (semi) definite.

Identifications of elements of spaces (1) lead to spherical and elliptic geometry. Identifications of elements of spaces (2) lead to hyperbolic and euclidean geometry.

WILGENLAAN 13, DELFT.

SUR UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SURFACES À COURBURE MOYENNE CONSTANTE

FERRUH ŞEMİN

Etant donnée une surface réelle S, une courbe tracée sur celle-ci sera appelée une courbe-G, si en chaque point P de G, le plan normal à S passant par la tangente à G coupe la surface suivant une section surosculée en P par son cercle de courbure en ce même point. Sur chaque S, il y a en général trois familles composées de telles courbes. Le but de ce travail est de montrer que *la condition necessaire est suffisante pour que ces trois familles de courbes forment un reseau à* 120° — c'est-à-dire qu'en chaque point P de S, deux quelconques des trois courbes appartenant chacune à une famille différente fassent un angle de 120° entre elles — *est que la surface soit une surface à courbure moyenne constante.*

İSTANBUL ÜNIVERSITESI MATEMATIK ENSTITÜSÜ,
İSTANBUL, TÜRKIYE

ZERLEGUNG VON FLÄCHEN VOM GESCHLECHT EINS IN ÄHNLICHE RECHTECKE

ALFRED STÖHR

Jede Zerlegung eines Torus in Rechtecke ergibt durch Übergang zur universellen Überlagerungsfläche eine doppeltperiodische Zerlegung der Ebene in Rechtecke und umgekehrt. Dieser Zerlegung der Ebene entspricht im Sinne von [1] ein ohne Überschneidungen in der Ebene gelegenes doppeltperiodisches Netzwerk, in dem Ströme und Spannungen herrschen, die ebenfalls diese doppelte Periodizität zeigen. Bezeichnet man mit ω_1, ω_2 zwei den Torus kanonisch zerschneidende Wege, mit u_1, u_2 die Potentialgefälle längs ω_1, ω_2 und mit $i_2, -i_1$ die durch ω_1, ω_2 hindurchtretenden Ströme, so bestehen Relationen

$$u_1 = r_{11}i_1 + r_{12}i_2, \qquad u_2 = r_{21}i_1 + r_{22}i_2,$$

wobei die positiv definite symmetrische Matrix (r_{kl}) nur vom Netzwerk abhängt. In der universellen (u, i)-Überlagerungsebene entsprechen ω_1, ω_2 die Vektoren $\mathfrak{w}_1 = (u_1, i_2)$, $\mathfrak{w}_2 = (u_2, -i_1)$. Jeder Wahl von i_1, i_2 entspricht eine Zerlegung dieser Ebene in Rechtecke, wobei durch eine topologische Betrachtung sichergestellt werden kann, dass die Rechtecke sich lückenlos und ohne Überdeckung aneinanderfügen. Wählt man die Widerstände des Netzwerks speziell so, dass

$$(*) \qquad r_{11}r_{22} - r_{12}r_{21} = 1$$

ist, so gilt für die Skalarprodukte

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_1^2 &= u_1^2 + i_2^2 &&= r_{11} \cdot k \\ (\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2) &= u_1u_2 - i_1i_2 &&= r_{12} \cdot k \\ \mathfrak{w}_2^2 &= u_2^2 + i_1^2 &&= r_{22} \cdot k \end{aligned}$$

mit

$$k = r_{11}i_1^2 + 2r_{12}i_1i_2 + r_{22}i_2^2.$$

Verändert man i_1, i_2, so werden die jeweils von $\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2$ aufgespannten Periodenparallelogramme einander ähnlich; beschränkt man sich auf solche i_1, i_2, für die k konstant ist, so erhält man eine einparametrige Schar von Zerlegungen desselben Torus in Rechtecke. Sind alle Zweigwiderstände im Netzwerk einander gleich, etwa gleich r, so sind alle Rechtecke ähnlich. Wird dabei r durch (*) normiert, so stehen $\mathfrak{w}_1^2$, $(\mathfrak{w}_1, \mathfrak{w}_2)$, $\mathfrak{w}_2^2$ in rationalen Verhältnissen zueinander; es treten also genau diejenigen Periodenparallelogramme auf, die auch bei der Veranschaulichung ganzzahliger definiter binärer quadratischer Formen durch Punktgitter sowie bei den singulären Moduln der komplexen Multiplikation auftreten.

Auf die Möglichkeit der Zerlegung eines Torus in Rechtecke wird ohne nähere Ausführung bereits in den Schlussbemerkungen von [1] hingewiesen. Bei Zulassung von Verzweigungen und mehrfachen Überdeckungen lassen sich die obigen Überlegungen auch auf Flächen vom Geschlecht > 1 sinngemäss übertragen. Die Betrachtungen können als elementares Analogon zu Potentialfunktionen auf kompakten Riemannschen Flächen, Riemannschen Periodenmatrizen usw. gelten. Die Heranziehung dualer Netzwerke liefert weitere Gesichtspunkte. Ferner bestehen Beziehungen zu neueren Methoden der Berechnung komplizierter Netzwerke [2].

LITERATUR

[1] R. L. BROOKS, C. A. B. SMITH, A. H. STONE and W. T. TUTTE, The Dissection of Rectangles into Squares. Duke Math. J. **7**, 312—340 (1940); vergl. auch anknüpfende Arbeiten von C. J. Bouwkamp, C. A. B. Smith, W. T. Tutte.

[2] G. KRON, A Set of Principles to Interconnect the Solutions of Physical Systems. J. Appl. Phys. **24**, 965—980 (1953), sowie die dort zitierte Literatur.

GÖTTINGEN, BUNSENSTR. 3—5.

MINIMALFLÄCHEN DES ISOTROPEN RAUMES

KARL STRUBECKER

Die Geometrie des isotropen dreidimensionalen Raumes $R_3(x, y, z)$ stützt sich auf die Gruppe G_6 der isotropen Bewegungen;

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi\,, \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi, \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \quad . \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Das invariante absolute Gebilde des isotropen Raumes ist selbstdual und besteht aus dem schneidenden Geradenpaar $x^2 + y^2 = 0$ der Fernebene $t = 0$. Die Geometrie des isotropen Raumes ist daher selbstdual.

Die Fläche Φ: $z = z(x, y)$ (2) habe als Ort der Tangentenebenen $z = ux + vy + w$ die Gleichung $w = w(u, v)$ (3). Das isotrope Bogenelement von Φ lautet dann $ds^2 = dx^2 + dy^2 = I$ (4) und (dual) das Winkelelement $d\sigma^2 = dp^2 + dq^2 = III$ (5). Man kann $d\sigma$ auch als isotropes sphärisches Bogenelement der Fläche Φ deuten, wenn man Φ durch parallele Tangentenebenen auf die isotrope Einheitskugel $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ (6) abbildet.

Die isotrope *Normalkrümmung* der Flächenrichtung du: dv hat dann die Form

$$\frac{1}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2s\,dxdy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{II}{I}.$$

Es gibt in jedem regulären Flächenpunkte zwei auf der Fläche konjugierte *Hauptkrümmungsrichtungen*, aus deren Hauptkrümmungen $1/R_1$ und $1/R_2$ die Invarianten

$$K = rt - s^2, \qquad 2H = r + t = \Delta z \tag{7}$$

fließen.

Als *isotrope Minimalfläche* bezeichnen wir jene mit $2H = \Delta\, z(xy) = 0$ (8). Das sind die Extremalen des Dirichletschen Variationsproblems

$$0 = \frac{1}{2}\iint\limits_{\mathfrak{B}} \nabla^2\, dxdy = \text{Min} \tag{9}$$

bei fester Randkurve k, die man mittels komplexer analytischer Funktionen $f(x+iy)$ in der Gestalt $z = \Re f(x+iy)$ oder $z = \Im f(x+iy)$ (10) darstellen kann. Damit sind diese oft als *harmonische Flächen* oder *Potentialflächen* bezeichneten Flächen, deren vielfache Analogien mit den Minimalflächen des euklidischen Raumes schon vielfach bemerkt worden sind, wirklich mit *Minimalflächen* allerdings eines *isotropen Raumes* identifiziert.

Man kann übrigens das Dirichletsche Integral (9) im isotropen Raume als eine *Relativoberfläche* deuten, wenn man die isotrope Einheitskugel (6) als *Eichfläche* im Sinne der relativen Differentialgeometrie wählt.

Es ist dann leicht das *Cauchysche Anfangswertproblem* auch im isotropen Raume durch ein der *Schwarzschen Formel* analoges Integral zu lösen:

Ist der reelle analytische Anfangsstreifen

$$x = x(\alpha),\ y = y(\alpha),\ z = z(\alpha),\ p = p(\alpha),\ q = q(\alpha), \tag{11}$$

$dz = p dx + q dy$ gegeben, so lautet die durch ihn laufende *isotrope Minimalfläche*

$$\begin{cases} x = \Re[x(\alpha + i\beta) + iy(\alpha + i\beta)], \quad y = \Im[x(\alpha + i\beta) + iy(\alpha + i\beta)], \\ z = \Re\int [p(\alpha + i\beta) - iq(\alpha + i\beta)] \cdot [dx(\alpha + i\beta) + i dy(\alpha + i\beta)]. \end{cases} \tag{12}$$

Es ist mit dieser Formel leicht z.B. den folgenden *Satz* zu beweisen, daß eine isotrope Minimalfläche Φ, die eine (die absolute Gerade nicht schneidende) *gerade* Linie g enthält, bezüglich dieser Geraden g (im isotropen Sinne) *symmetrisch* ist. Das isotrope Gegenstück der *assoziierten Minimalflächen* lautet $z = \Re[f(x + iy)e^{i\alpha}]$ (13). Man kann auch zu vielen *speziellen Minimalflächen* des euklidischen Raumes genaue isotrope Gegenstücke angeben. Interessant ist z.B. die Fläche $z = \frac{3}{2}\Im(x+iy)^{2/3}$ (14), die das isotrope Analogon der Minimalfläche von Enneper darstellt. Diese Fläche ist algebraisch und (wie im Euklidischen Falle) von 9. Ordnung und 5.Klasse, nach Maßgabe ihrer Ordnungsgleichung $27^3(x^2+y^2)^2 z^3 + (27xy+16z^3)^3 = 0$ (15) und ihrer Klassengleichung $(u^2 + v^2)^2 w + uv = 0$ (16) oder $w = \frac{1}{2}\Im(v + iu)^{-2}$ (17).

Die *Potenzflächen* Π_m: $z = m\Im(x + iy)^{1/m}$ (18), zu denen für $m = 3/2$ die isotrope Enneper-Fläche (14) gehört, spielen eine hervorragende Rolle in der *Theorie der euklidischen Schraubung* S.

Erfolgt die Schraubung S mit dem Parameter $p = 1$ um die z-Achse, so haben nämlich die *Punkte* P *der Potenzfläche* Π_m Bahnschmiegebenen σ, welche *die Potenzfläche* Π_{m+1} *umhüllen.*

Beispielsweise haben für $m = 1$ die Punkte P der *Ebene* $z = \Im(x + iy) = y$ (19) Bahnschmiegebenen σ, welche die Potenzfläche Π_2 (4.Ordnung, 3.Klasse) $z = 2\Im(x + iy)^{1/2}$ (20) oder $4xz^2 - 4y^2 + z^4 = 0$ (21) umhüllen, die ein *Grenzfall von Steiner's Römischer Fläche* ist.

Ähnlich haben die Punkte P der *Quadrik* $\Pi_{1/2}$: $z = \frac{1}{2}\Im(x+iy)^2 = xy$ (22) Bahnschmiegebenen σ, welche die isotrope Enneper-Fläche $\Pi_{3/2}$: $z = \frac{3}{2}\Im(x+iy)^{2/3}$ (23) umhüllen. Damit ist auch eine einfache *Konstruktion* dieser interessanten Enneper-Fläche des isotropen Raumes gewonnen, die der Konstruktion von Darboux für die euklidische Enneper-Fläche mittels konfokaler Parabeln ebenbürtig ist.

KARLSRUHE, HERTZSTRASZE 16.

UNE CUBIQUE REMARQUABLE

J. H. TUMMERS

Les théorèmes suivants ne sont — à ma connaissance — pas connus.

THÉORÈME 1. Etant donné le triangle ABC, soit γ une conique, tangente aux côtés BC, CA, AB du triangle, et soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC, les *points de contact des tangentes*, menées de I à la conique γ sont des *points conjugués* dans une transformation d' *inversion isogonale* par rapport au triangle ABC.

Soit la droite tangente à la conique γ.

THÉORÈME 2. Quand la conique γ parcourt le faisceau tangentiel (a, b, c, l) les points de contact L_1, L_2(= points inverses) des tangentes, menées du point I aux coniques du faisceau tangentiel, parcourent une cubique, passant aux points A, B, C du triangle et aux points A_0, B_0, C_0, qui sont les points de rencontre de la droite l avec les côtés BC, CA, AB:

En outre le point I est un point double de la cubique. Cette cubique est *invariante* par rapport à la transformation *d'inversion isogonale*.

Si la droite l a l'équation $lx+my+nz=0$, la cubique — en utilisant des coordonnées normales et le triangle ABC pour triangle fondamental — aura l'équation:

$$\begin{vmatrix} my+nz & (m+n)y & (m+n)z \\ (l+n)x & lx+nz & (l+n)z \\ (l+m)x & (l+m)y & lx+my \end{vmatrix} = 0$$

Remarque: 1°. Les tangentes à la cubique aux sommets A, B, C du triangle forment avec les droites AA_0, BB_0, CC_0 des couples de *droites isogonales*. Ces tangentes en A, B, C coupent les côtés BC, CA, AB en trois points, situés sur la droite, ayant l'équation:

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} + \frac{z}{n} = 0$$

2°. *Cas special*: Au lieu de la droite l nous prenons la droite l', qui coupe les côtés du triangle en A_1, B_1, C_1 de sorte que les angles $AIA_1 — BIB_1 — CIC_1$ *sont droits*, en quel cas les points de contact L_1, L_2 (= points inverses) sont *vus du point* I *sous un angle droit.*

La droite l' a pour équation: $(s - a)x + (s - b)y + (s - c)z = 0$ où $s = \dfrac{a + b + c}{2}$; $a = BC$ etc.

En ce cas nous pouvons ajouter le théorème suivant.

THÉORÈME 3. Quand la conique γ parcourt le faisceau tangentiel (a, b, c, l'), la droite L_1L_2 enveloppe une conique, tangente aux bissectrices extérieures du triangle ABC, et aux droites AA_1, BB_1, CC_1, et dont le centre coincide avec le centre du cercle circonscrit.

STEYL (HOLLANDE).

HYPEROSCULATING CIRCLES AT A SURFACE AT ONE POINT, AND RELATED QUESTIONS

GIUSEPPE VACCARO

I prove the following result: *Let* P *be a simple* (*ordinary*) *point of a surface in a Euclidean* S_3: *there are* 10 *curves through* P, *having at* P *an osculating circle with* 4*th order contact.*

The above theorem is obtained in two different ways, that may easily be related, and give origin to two kinds of research. The preceeding problem, in fact, may be reduced to each one of the following questions:

a. to find the number of the tangents with 4-point contact at a surface F of S_3, whose contact point belong to a line of F, simple for F, and having two $(n\text{-}1)$-uple points for the surface.

b. to find the number of the planes through a non-parabolic point P of a surface Φ of S_4, which have, at P, a contact of the 4th order with Φ.

4, VIA A. CARONCINI, ROME (ITALY).

SULLA CARATTERISTICA DEI COMPLESSI SIMPLICIALI n-DIMENSIONALI χ-OMOGENEI

MICHELANGELO VACCARO

La caratteristica di un complesso simpliciale n-dimensionale C^n ammette, oltre l'espressione classica $\sum_{0}^{n}{}_i (-1)^i\alpha^i$, altre espressioni, sempre combinazioni lineari delle α^i, sotto la semplice ipotesi che il complesso simpliciale sia χ-omogeneo, ossia che l'intorno combinatorio di ogni suo k-simplesso, che è un complesso $(n-k-1)$-dimensionale, abbia caratteristica χ uguale alla caratteristica della sfera S^{n-k-1} della stessa dimensione. Questa ipotesi è equivalente a dire che l'intorno n-dimensionale (aperto, omeomorfo ad una n-cella) di ogni punto del poliedro P^n corrispondente abbia la stessa caratteristica $\chi = (-1)^n$ dell'intorno dei punti dello spazio euclideo E^n.

Vengono infatti dedotte da questa ipotesi di χ-omogeneità tre diversi sistemi di relazioni tra i numeri α^i di un complesso simpliciale C^n e mediante essi altrettante espressioni della caratteristica di C^n mediante i soli numeri α^i relativi alle dimensioni i congrue ad n modulo 2.

Per i primi valori dispari di n si fa vedere inoltre che la caratteristica di un complesso simpliciale χ-omogeneo è identicamente nulla.

VIA ENEA 65,
ROMA (ITALIA).

SUR UNE REPRÉSENTATION DE L'ESPACE RÉGLÉ DANS E_4

PAUL VINCENSINI

Le représentation des droites de l'E_3 ordinaire sur une hyperquadrique de E_5 se prête mal aux études métriques. Pour ces dernières, la correspondance (C) entre droites $A(p_{ij})$ de E_3 et points $a(x, y, z, t)$ d'un E_4 euclidien dont E_3 est la section $t = 0$, définie par:

$$\varrho p_{12} = x + iy, \quad \varrho p_{13} = z + it, \quad \varrho p_{14} = -1, \quad \varrho p_{34} = x - iy, \quad \varrho p_{42} = z - it,$$

$\varrho p_{23} = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$, présente un certain intérêt.

Deux droites A concourent si leurs images a sont sur une droite isotrope de E_4, et (C) associe les complexes linéaires, congruences, demi-quadriques, gerbes de droites ou plans réglés de E_3, respectivement aux hypersphères, sphères, cercles, plans totalement géodésiques de E_4.

Les tangentes d'une surface S de E_3 ont pour images les points d'une hypersurface de E_4, lieu de ∞^2 droites isotropes constituant une congruence (I), les images de deux tangentes conjuguées étant conjuguées par rapport aux foyers (images des tangentes asymptotiques). (I) coupe E_3 suivant *une transformée de Lie de* S, dont les normales sont les projections orthogonales des rayons de (I) sur E_3, ses centres de courbure étant les projections des foyers de (I).

Ces propriétés, et d'autres encore, se prêtent remarquablement à une étude métrique de l'E_3 réglé.

Supposons, à titre d'exemple, que dans l'image (I) de S les foyers φ, φ' de I soient conjugués par rapport aux intersections M, M', de I avec E_3 et l'hyperplan H de E_4 parallèle à E_3 à la distance ik. Les projections F, F' de φ, φ' sur E_3, centres de courbure de la trace Σ de (I) sur E_3 au point M où I coupe E_3, vérifient $\overline{MF} \times \overline{MF'} = k^2$, et Σ est à *courbure constante*. D'autre part, E_3 et H correspondent à des complexes linéaires de E_3 réglé contenant les tangentes *conjuguées* de S d'images M, M', et Σ *est transformée de Lie d'une surface* (R) *de Wilczynsky*.

Si H est l'hyperplan ∞ de E_4, F et F' sont *symétriques* par rapport à M; Σ est *minima* et *transformée* elle-aussi *de Lie d'une* (R).

D'où un rapprochement nouveau entre les surfaces à courbure constante et minima, toutes transformées de Lie de surfaces (R) d'ailleurs géométriquement intéressantes.

FACULTÉ DES SCIENCES.
PLACE VICTOR-HUGO, MARSEILLE (FRANCE)

HOMOLOGY ON ALGEBRAIC VARIETIES

ANDREW HUGH WALLACE

V is a non-singular algebraic variety in projective space over complex numbers, Π a pencil of hyperplanes parametrized by z, say, L a linear $(n-3)$-space on the axis of Π. Linear $(n-2)$-spaces through L are parametrized by z and w, say. V_z is the section of V by the hyperplane in Π of parameter z, $V_{z,w}$ the section by the $(n-2)$-space of parameters z, w. Write $V_Z = \cup V_z$, $z \in Z$, $V_{Z,W} = \cup V_{z,w}$, $z \in Z$, $w \in W$, for any sets Z, W. Also let P be the section of V by the axis of Π.

Theorem 1. Π and L can be so chosen that:

1. All the V_z are nonsingular except a finite number $V_{z_1}, \ldots, V_{z_k}$, each of which has exactly one singularity $C_1, \ldots, C_k$ respectively.

2. For fixed z with a finite number of exceptions the $V_{z,w}$ are non-singular except for a finite number, each of which has one singularity. Exactly two of these tend to C_i as $z \to z_i$.

Theorem 2. $V - \cup V_{z_i}$ is the continuous image of a fibre bundle X, a certain sub-bundle X' being mapped on P, and $H_q(V_K, P) \cong H_q(X_K, X'_K)$ (X_K, X'_K are the parts of X, X' over K) for all q. This enables known results on the homology of fibre bundles, in particular the spectral sequence, to be applied to V_K. The theorem is proved by putting a metric on V and using normal bundles of the V_z.

Theorem 3. If N_i is a small circular neighbourhood of z_i, V_{z_i} is a deformation retract of $V_{\overline{N}_i}$. The proof is carried out by constructing "orthogonal trajectories" to the V_z around V_{z_i}.

The main results to be proved are:

Theorem 4. Let V_{z_0} be a non-singular section of V in Π, λ_i a real analytic path from z_0 to z_i for each i.

1. $H_q(V, V_{z_0}) = 0$, for $q \leqq r-1$.

2. $H_q(V, V_{z_0})$ is generated by the injection images of the groups $H_q(V_{\lambda_i}, V_{z_0})$, $i = 1, \ldots, k$, $q \leqq r$.

3. For each i $H_r(V_{\lambda_i}, V_{z_0})$ is generated by the class of a hemispherical relative cycle Δ_i.

4. If z_0 is sufficiently near z_i, Δ_i may be constructed in an arbitrary neighbourhood U' of C_i, and if U is a given neighbourhood of C_i, U' may be so chosen that Δ_i is unique up to a homotopy in U.

The proof is by induction on r. (2) follows from Theorem 2 along with an application of the spectral sequence. To study $H_q(V_{\lambda_i}, V_{z_0})$, z_0 may be taken as close as desired to z_i and a retraction and excision argument, using the "orthogonal trajectories" of Theorem 3, shows that any element of this group may be represented by a relative cycle γ in a preassigned neighbourhood of C_i. If $d\gamma = \mu$, the induction hypothesis along with part (2) of Theorem 1 and a number of homotopies which can be constructed in a neighbourhood U' of C_i shows that $\mu \sim 0$ in $U' \cap V_{z_0}$ if $q < r$ and $\sim$ a certain spherical cycle in $U' \cap V_{z_0}$ if $q = r$. The required results follow since U' may be taken so small as to be homologically trivial.

University College of North Staffordshire

A TYPE OF CONNECTIVITY

Raymond Louis Wilder

In earlier investigations [see especially the author's *Topology of Manifolds*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub., vol. 32, 1949, (hereafter referred to as *TM*), Chap. XI], the author has introduced and studied a property of subsets of a locally compact space S symbolized by $(P, Q; G)^r$, where G is a group of compact r-cycles and P, Q are open subsets of S such that $P \supset \overline{Q}$ and $\overline{Q}$ is compact. As originally defined in *TM*, a subset M of S is $(P, Q; G)^r$ if for all choices of P and Q, at most a finite number of r-cycles of G on $M \cap Q$ are lirh (= linearly independent relative to homology) on $M \cap P$. However, alternative definitions, better adapted to certain types of problems, may be given (as for instance in terms of coverings of S). Analogously, $(P, Q; G)_r$ may be defined for G a group of compact cocycles.

The most important choice for G is the group of bounding cycles, in which case the symbol $(P, Q; \sim)^r$ is employed [in the case of cocycles, $(P, Q; \sim)_r$]. Dualities reminiscent of the dualities between homology groups hold: Thus $(P, Q; \sim)_r$ and $(P, Q; \sim)^{r-1}$ are dual for all compact S; and if S is both $(P, Q; \sim)_r$ and $(P, Q; \sim)_{r+1}$, then for every closed subset M of S, property $(P, Q; \sim)_r$ of M is dual to property $(P, Q; \sim)_{r+1}$ of $S - M$. Various other dualities, heretofore unpublished, also hold.

These concepts are closely related to local connectedness properties; indeed, they embody a type of "macro-connectedness". If S is $(P, Q; Z)^r$, Z the group of compact r-cycles of S, then S is $r - lc$; the reverse does not generally hold. However, if S is $(P, Q; \sim)^{r-1}$ then $r - lc$ does imply $(P, Q; Z)^r$. For open sets there are relations with "ulc" properties: For example, if an open subset U of S is $(P, Q; Z)^r$ and is ulc^n_{r+1}, then U is $(P, Q; Z)^s$ for all s such that $r \leqq s \leqq n$.

For S not compact, the special case $P = S$ affords a useful property, generally stronger than semi-connectedness (= "small" cycles bound) but not as strong as finiteness of the Betti number. In a natural way, it provides a definite of "$p^r(S) \leqq \omega$". If S has $(P, Q; \sim)^r$ and is semi-$(n+1)$-connected, then it is $(S, Q; Z)^{r+1}$; thus if S is compact, $p^{r+1}(S)$ is finite and otherwise $p^{r+1}(S) \leqq \omega$. New dualities between the "(P, Q)" properties are obtained by use of the "(S, Q)" properties, as well as generalizations of previously obtained theorems.

1617 Cambridge Road,
Ann Arbor, Michigan.

PARALLEL DISTRIBUTIONS

Thomas James Willmore

Let V_n be an n-dimensional differentiable manifold, of class C^∞, which admits a distribution M of tangent m-planes. We examine the general question whether there exists an affine connection Γ defined globally over V_n with reference to which the distribution becomes parallel i.e. the planes of the distribution form a field of parallel m-planes with respect to the connection. This general question can be restricted in several ways, for example V_n may be compact and orientable, M may be intergrable and Γ may be symmetric or even a Riemannian connection. Corresponding to each triple (V_n, M, Γ)

there is the problem of obtaining a set of necessary and sufficient conditions so that M shall be parallel with respect to some Γ defined globally over V_n. The problem of constructing a suitable connection locally is trivial; indeed such a connection can always be defined. If the distribution is integrable the connection is symmetric, and in this case a Riemannian connection can be constructed giving the required parallelism.

Interesting results are obtained when one tries to extend over the whole manifold a suitable connection which has been defined locally. We prove that if V_n admits a distribution of m-planes, then a connection can be defined globally over the manifold so that the distribution becomes parallel; moreover, a necessary and sufficient condition for the connection to be symmetric is that the distribution shall be involutive. This proves that the most general laminated structure can be generated by means of a symmetric affine connection. Similar results are obtained when the manifold admits m independent parallel vector fields.

These global existence theorems are no longer valid when the connection is restricted to be Riemannian. In fact we construct an infinite set of manifolds V_n such that no continuous vector field admitted by V_n can be made into a parallel vector field by a suitable choice of Riemannian metric defined globally over V_n.

37 A, North Bailey, Durham City England,
Gt. Britain

SUBFLAT AFFINELY CONNECTED SPACES

Yung-Chow Wong

In an affinely connected N-dimensional space A_N with symmetric connection Γ^i_{jk}, the covariant derivative of a contravariant (covariant) vector $\lambda^i(\mu_j)$ is defined by

$$\lambda^i_{/k} \equiv \partial_k \lambda^i + \Gamma^i_{jk}\lambda^j \qquad (\mu_{j/k} \equiv \partial_k \mu_j - \Gamma^i_{jk}\mu_i).$$

If $\lambda^i_{/k} = 0$ $(\mu_{j/k} = 0)$, the vector $\lambda^i(\mu_j)$ determines a field of parallel contravariant (covariant) vectors, which for brevity will be called a *contra-field* (*co-field*).

An AK^*_N is defined to be an A_N whose curvature tensor B^i_{jkl} satisfies the relations

$$B^i{}_{jkl/m} = B^i{}_{jkl}\varkappa_m,$$

$$B^i{}_{jkl}\nu_m + B^i{}_{jlm}\nu_k + B^i{}_{jmk}\nu_l = 0,$$

where $\varkappa_m$, ν_m are some vectors of which ν_m is non-zero. A special class of AK^*_N

is constituted by the K_N^* spaces of H. S. Ruse and A. G. Walker, which are the Riemannian AK_N^* spaces.

It is well known that an A_N is flat if and only if it has N contra-fields or co-fields (L. P. Eisenhart), and that a Riemannian A_N having $N-1$ contra-fields or co-fields is flat, and one having $N-2$ contra-fields or co-fields is a K_N^* (A. G. Walker). Recently, it is found that certain non-flat AK_N^* have $N-1$ contra-fields and $N-1$ co-fields (Y. C. Wong).

In this lecture, I shall discuss the non-flat A_N which have $N-1$ contra-fields and $N-1$ co-fields. Such A_N will be called *subflat* A_N. Obviously, no subflat A_N can be Riemannian. Among others, the following results will be proved:

An A_N is subflat if and only if it admits a coordinate system in which the only non-zero component of Γ^i_{jk} is

(a) Γ^1_{11} *which does not depend on x^1 alone,*

or (b) Γ^1_{22} *which does not depend on x^2 alone.*

In particular, an A_N is a subflat AK_N^* if and only if it admits a coordinate system in which the only non-zero component of Γ^i_{jk} is

$$\Gamma^1_{11} = \Theta(x^1, x^2) \qquad \textit{where } \partial_2\Theta \neq 0,$$

$$\textit{or } \Gamma^1_{22} = \begin{cases} \Phi(x^1, x^2) \ \textit{where } \partial_1\Phi \neq 0, \\ \textit{or } \Phi(x^2, x^3) \ \textit{where } \partial_3\Phi \neq 0. \end{cases}$$

It follows that a subflat A_2 is an AK_2^*.

An A_N is subflat if and only if its curvature tensor can be written in the form

$$B^i{}_{jkl} = \tfrac{1}{2}A^i B_{/j}(B_{/k}C_{/l} - B_{/l}C_{/k}),$$

where $\quad A^i_{/m} = -CA^i B_{/m}, \quad B_{/jm} = CB_{/j}B_{/m}, \quad A^i B_{/i} = 2,$

or $\quad A^i_{/m} = 0, \quad B_{/jm} = 0, \quad A^i B_{/i} = 0$

according as the subflat A_N is of the type (a) or (b).

A subflat A_N is of the type (a) or (b) according as it has not or has a co-field pseudo-orthogonal to all the $N-1$ contra-fields.

University of Hong Kong, Hong Kong.

ABSTRACT CELL COMPLEXES

Shaun Wylie

In an infinite abstract cell-complex it is possible to define homology and cohomology theories of two kinds. In particular, if the cell-complex satisfies a condition of intercept finiteness, these theories appear in a natural way. One consequence of this is that an infinite simplicial complex, which need not be star-finite, has a homology theory based on a class of infinite chains.

Duality theorems of the Pontrjagin type can be proved for these infinite chains and their homology groups, after the definition of a character has been suitably modified.

TRINITY HALL,
CAMBRIDGE

SOME REMARKS ON ALMOST COMPLEX MANIFOLDS

KENTARO YANO

Consider a $2n$-dimensional manifold with an almost complex structure $\varphi^i{}_j$: $\varphi^i{}_j\varphi^j{}_k = -\delta^i_k$, $(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n)$. The eigenvalues of the matrix (φ^i_j) being $+i$ and $-i$, we denote by $\xi^i_\alpha(x)$ and $\xi^i_{\bar\alpha}(x)$ n linearly independent eigenvectors corresponding to the eigenvalues $+i$ and $-i$ respectively, $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$.

Putting

$$(1)\qquad p^i{}_j = \tfrac{1}{2}(\delta^i_j - i\varphi^i{}_j), \qquad q^i{}_j = \tfrac{1}{2}(\delta^i_j + i\varphi^i{}_j),$$

we obtain:

In order that an almost complex structure $\varphi^i{}_j$ of class C^ω be induced by a complex structure, it is necessary and sufficient that (i) the equations $p^i{}_j dx^j = 0$ be completely integrable, or (ii) n eigenvectors of $\varphi^i{}_j$ corresponding to eigenvalues $+i$ $(-i)$ be tangent to a family of (conjugate) manifolds of n complex dimensions, or (iii) the tensor φ^i_j satisfies

$$(2)\qquad T^i{}_{kl} \equiv \left(\frac{\partial p^i{}_t}{\partial x^u} - \frac{\partial p^i{}_u}{\partial x^t}\right) q^t{}_k\, q^k{}_l = 0.$$

Since

$$T^i{}_{kl} = t^i{}_{ks}\varphi^s{}_l - i t^i{}_{kl},$$

equation (2) is equivalent to the condition of Eckmann and Frölicher where the tensor $t^i{}_{kl}$ is Nijenhuis' commitant constructed from $\varphi^i{}_j$.

We denote by $(\xi^\alpha_j, \xi^{\bar\alpha}_j)$ the matrix inverse to $(\xi^i_\alpha, \xi^i_{\bar\alpha})$ and put $X_\alpha f = \xi^i_\alpha(\partial f/\partial x^i)$, $X_{\bar\alpha} f = \xi^i{}_{\bar\alpha}(\partial f/\partial x^i)$, then we obtain:

In order that an almost complex structure $\varphi^i{}_j$ of class C^ω be induced by a complex structure, it is necessary and sufficient that $X_{\bar\alpha} f = 0$ be completely integrable, that is,

$$(3)\qquad \Omega^\alpha_{\bar\beta\bar\gamma} \equiv -\left(\frac{\partial \xi^\alpha_j}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^\alpha_k}{\partial x^j}\right)\xi^j_{\bar\beta}\,\xi^k_{\bar\gamma} = 0.$$

This is the condition given by Ch. Ehresmann and P. Libermann. From the formulas

$$T^{i}{}_{jk} = \xi^{i}_{\alpha}\,\xi^{\bar\beta}_{j}\,\xi^{\bar\gamma}_{k}\,\Omega^{\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma}, \qquad \Omega^{\alpha}_{\bar\beta\bar\gamma} = \xi^{\alpha}_{i}\,\xi^{i}_{\bar\beta}\,\xi^{k}_{\bar\gamma}\,T^{i}{}_{jk},$$

we can easily see that conditions (2) and (3) are equivalent. Moreover, we have: In order that an almost complex structure φ^i_j of class C^ω be a complex structure, it is necessary and sufficient that one can introduce an affine connexion such that $\varphi^{i}{}_{j;k} = 0$, $p^{i}{}_{r}\, q^{s}{}_{j}\, q^{t}{}_{k}\, S^{r}{}_{st} = 0$, S being the torsion tensor.

THE UNIVERSITY OF TOKYO, TOKYO, JAPAN.

DIHOMOLOGY

ERIK CHRISTOPHER ZEEMAN

Dihomology is a homology theory based on pairs of simplexes, analogous to ordinary homology or cohomology which are based on single simplexes. The pairs considered have some specified geometrical or topological relationship, such as one being a face of the other. The resulting dichain group is bigraduated, with a pair of commuting operators (boundary and/or coboundary). We may therefore apply spectral techniques [1] and obtain sequences in which $E_2, \ldots, E_\infty$ are in general topological invariants.

Example 1: *The sequence on a complex.*

Let K be a finite simplicial complex.
Let R^p_q be the set of pairs (σ^p, σ_q) such that $\sigma^p > \sigma_q$, $\sigma^p, \sigma_q \in K$.
Let M^p_q be the group of sums $\Sigma_{ij} g_{ij}(\sigma^p_i, \sigma^j_q)$, $g_{ij} \in G$, a coefficient group, summed over pairs in R^p_q.
Define $\partial : M^p_q \to M^p_{q-1}$ by $\partial(\sigma^p, \sigma_q) = (\sigma^p, \partial\sigma_q)$,
$\delta : M^p_q \to M^{p+1}_q$ by $\delta(\sigma^p, \sigma_q) = (\delta\sigma^p, \sigma_q)$, where the notation is distributive.
Apply spectral theory and we obtain a topologically invariant sequence, in which
$$\begin{cases} E^{p,q}_2 = H_q(K, H^p(st\sigma, G)) \\ E_\infty \;= G_q H^{\cdot}(K, G), \end{cases}$$
where $H^p(st\sigma, G)$ is a system of local coefficientgroups, one for each simplex $\sigma \in K$.

This sequence relates the local cohomology of K to its global cohomology; for instance if K were the union of a torus and a circle, the essential 1-cocycles would be distinguished by the dimension of the component in which they occur.

[1] J. Leray: L'anneau spectral et l'anneau filtre d'homologie. Jour. de Math. (1950).

For an arbitrary space the definition may be extended by Čech methods upon pairs of coverings, or by using the Alexander & singular complexes of the space. In the finite case we may obtain a duality by interchanging the boundary & coboundary operators.

Example 2: *The*[1] *Leray sequence.*

Suppose that $f : X \to Y$ is a fibre-projection, with fibre F, and suppose that f may be realised by a simplicial map $f : K \to L$, where K, L are finite complexes triangulating X, Y.

Let $R^{p,q}$ be the set of pairs (σ^p, τ^q), $\sigma^p \epsilon K$, $\tau^q \epsilon L$, such that $f(st\sigma^p) \cap st\tau^q \neq 0$. Use two coboundary operators, and, proceeding as in example 1, we recover the Leray sequence in which $\begin{cases} E_2^{p,q} = H^q(Y, H^p(F)) \\ E_\infty \ \ = G_q H^{\cdot}\,(X). \end{cases}$

Dihomology thereby furnishes a means of calculating this sequence which has before been defined only by using faisceaux; and yields (in this simple case) a duality. Again the definition may be extended by Čech methods to an arbitrary continuous map between two topological spaces.

7, Grange Road, Cambridge

SECTION IV

PROBABILITY AND STATISTICS

ORDERED VARIABLES IN BINOMIAL AND POISSON SAMPLES

SOLIMAN HASSAN ABDEL-ATY

It is supposed that a sample of k independant observations is drawn from a binomial (or Poisson) population. Assuming that these k values are arranged in ascending order of magnitude the moments of the r^{th} variable (in order of magnitude) are obtained for small samples. Approximations to the moments of the r^{th} ordered variable are obtained by adding a rectangular variable to the discrete and making assumptions (i) of normality (ii) of a Pearson Type I for the distribution of the modified variable thus obtained. These moments are compared with each other and as far as possible with the exact results.

From these moments approximations to the distribution of (i) the median (ii) the quartiles (iii) the interquartile distance (and other allied measures) are obtained. Skeleton tables of percentage points are worked out.

Sampling experiments are described which check the algebraic processes. The above work is repeated for the Poisson distribution using the assumption that the modified variable is distributed as a Pearson Type III distribution.

STATISTICS DEPT., UNIVERSITY COLLEGE,
LONDON.

STATISTICS AND THE THEORY OF PROBABILITY

BENEDETTO BARBERI

It appears to be essential for the progress of a scientific discipline to have an explicit and, if possible, unequivocal statement of its distinctive position in the system of the forms of knowledge, and of what constitutes its logical basis.

This requirement includes the need for an ever clearer distinction between probability concepts and statistical concepts to indicate the limits of their respective natures and functions in the system of the mathematical sciences.

The theory of probability, traced back to its historical origin as a mathematical science of individual judgements concerning events, must not be confused with the new statistical science, which is a "real" mathematical science cast, so to say, in the form of things and facts as they appeared at given points in space and time.

This necessary distinction does not imply any antinomy or opposition between the mathematical disciplines: on the contrary, they can mutually assist each other. In the expression of the degree of certitude in regard to a given event, the theory of probability can be very materially assisted by experience provided by statistics; statistics, in turn, finds in the theory of probability a powerful support for its forecasts and for the interpretation of the results of observations made on the modes of being and becoming of real phenomena.

The tendency to reduce theoretical statistics to a probability scheme, arises from not observing the difference between the two disciplines. In its most advanced forms the theory of sample estimates, is really a statistical theory which can be developed in complete independence from the classical probability scheme, though these schemes can play an important part in studying the behaviour of accidental errors — which represent only one aspect of the theory of estimations.

As a mathematical science of real phenomena, statistics extends not only to distributive or static phenomena but also to phenomena of motion.

VIA C. BALBO,
ROMA.

NEYMAN'S ψ_k^2 TEST OF GOODNESS OF FIT WHEN THE NULL HYPOTHESIS IS COMPOSITE

DAVID ELLIOTT BARTON

Summary: When testing a simple hypothesis for goodness of fit to observational data Neyman transforms the observed variables to variables rectangularly distributed by means of the Probability Integral Transformation. He evolves a series of test-functions ψ_k^2 which have the same distribution whatever the laws tested. An extension Ψ_k^2 to grouped and discrete data has been made elsewhere by the present writer.

When the law tested is composite, parameters of the law have to be estimated from the data and so the Probability Integral Transformation produces other than rectangular variables. It is shown that ψ_k^2 and Ψ_k^2 have distributions no longer independent of the law tested; moreover, these distributions depend on the method of estimation used.

The large sample distributions of ψ_k^2 and Ψ_k^2 are derived by matrix

methods and shown to lead to a generalization of the chi-squared loss-of-degrees-of-freedom rule. Maximum Likelihood estimation is seen to give great simplification. The distribution of Ψ'^2_k is found approximately in the more complex case where continuous data are grouped into groups whose edges are functions of the estimators.

The large sample power of the test of the composite hypothesis is found against a set of alternatives previously introduced by the writer.

57 Gloucester Ave,
London N.W. 1.

A GENERALIZATION OF THE METHOD OF m RANKINGS

A. Benard and Ph. van Elteren

The method of m rankings due to M. Friedman [5] is a test for the hypothesis that m rankings of equal length are independent and that for each of these all permutations of the ranks have equal probabilities. If the ranks are arranged in the rows of a rectangular scheme, the test statistic used is the variance of the column-totals. This method is a non-parametric analogon of the test for the columneffect in the two-way analysis of variance with one observation per cell. The test has been generalized by J. Durbin [4] to incomplete block designs. The further generalization proposed here is applicable to schemes with an arbitrary number of observations in each cell.

We denote the number of rankings by m, the number of columns by n, the number of observations in cell (μ, ν) (μ^{th} ranking, ν^{th} column) by $k_{\mu\nu}$ and $\sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu\nu}$ by k_μ; then the arithmetic mean of the ranks in the μ^{th} ranking is $\frac{1}{2}(k_\mu+1)$. Subtracting this from these ranks, we get the reduced ranks. The sum of the reduced ranks in cell (μ, ν) is denoted by $\tilde{\boldsymbol{u}}_{\mu\nu}$ and the column-total $\sum_{\mu=1}^{m} \tilde{\boldsymbol{u}}_{\mu\nu}$ by $\tilde{\boldsymbol{u}}_\nu$.

If there are no ties we have under the assumption that the hypothesis tested (which is the same as the hypothesis of Friedman's original test) is true:

$$\sigma_{\nu\nu'} = \mathscr{E}\boldsymbol{u}_\nu \boldsymbol{u}_{\nu'} = \frac{1}{12} \sum_{\mu=1}^{m} k_{\mu\nu}(\delta_\nu^{\nu'} k_\mu - k_{\mu\nu'})\ (k_\mu + 1)$$

where

$$\delta_\nu^{\nu'} = \begin{cases} 0 \text{ if } \nu \neq \nu' \\ 1 \text{ if } \nu = \nu'. \end{cases}$$

The statistic of the test is a homogeneous quadratic function of $n - 1$ columntotals $\tilde{\boldsymbol{u}}_\nu$; its matrix is the inverse of the covariance matrix of the same

$n-1$ column-totals. Except for degenerate cases, this statistic can be written in the form:

$$\chi_r^2 = - \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1,n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{1,n-1} & \tilde{u}_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sigma_{n-1,1} & \cdots & \sigma_{n-1,n-1} & \tilde{u}_{n-1} \\ \tilde{u}_1 & \cdots & \tilde{u}_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

and it has, under the hypothesis tested, for large values of m asymptotically a χ^2-distribution, with $n-1$ degrees of freedom. The method can be adjusted for the case that ties are present.

The general form of this statistic is difficult to compute but necessary and sufficient conditions can be given for the statistic being a linear combination of the squared column-totals. A number of wellknown non-parametric tests can be considered as special cases of the generalized method of m rankings, in particular Friedman's original method, Durbin's generalization, the k-sample test of Kruskal [6] and Terpstra [7] and the distribution-free test for one-and for two-factor experiments of Brown and Mood [2], [3].

References

[1] A. Benard and Ph. van Elteren, Proc. Kon. Ned. Akad. van Wetenschappen, A **56** (1953), 358—369, Indagationes Mathematicae, **15** (1953), 358—369.

[2] G. W. Brown and A. M. Mood, The American Statistician, **2** (1948), 22.

[3] ———, Proc. Second Berkeley Symposium (1951), 159—166.

[4] J. Durbin, British Jn. of Psych., **4** (1951), 85—90.

[5] M. Friedman, Jn. Am. Stat. Ass., **32** (1937), 675—699.

[6] W. H. Kruskal, Ann. Math. Stat., **23** (1952), 525—539.

[7] T. J. Terpstra, Report S 92 (VP 2) of the Stat. Dep. of the Math. Centre, 1952, Amsterdam.

P. C. Hooftstraat 62, Amsterdam.

Waldecklaan 17, Hilversum.

ON LIMITING DISTRIBUTIONS FOR NORMED SUMS

Harald Bergström

Let $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \ldots$ denote a sequence of independent random variables, where ξ_k has the distribution function (d.f.) $V_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots)$. We consider the d.f. for the normed sum

$$X_n = a_n^{-1}[(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) - b_n] \tag{1}$$

where (a_n) and (b_n) are sequences of norming factors. We call (a_n) the first and

(b_n) the second sequence of norming factors. Putting

$$W_{\nu,\nu+1}(x) = V_{\nu+1}(x),$$
$$W_{\nu,k}(x) = V_{\nu+1}(x) * \ldots * V_k(x)$$

where $(*)$ denotes the convolution, we know that the d.f. of $\boldsymbol{X}_n$ is equal to

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}_n \leqq x) = W_{0,n}(a_n x + b_n).$$

The following limiting problem is fundamental in the theory of probability. When does $W_{0,n}(a_n x + b_n)$ converge to a d.f. $G(x)$,

$$\lim_{n\to\infty} W_{0,n}(a_n x + b_n) = G(x)? \tag{2}$$

We here only require convergence in every continuity point of $G(x)$. However, we also assume that the following condition is satisfied

$$\lim_{n\to\infty} V_\lambda(a_n x) = E(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geqq 0 \end{cases}$$

uniformly with respect to λ for $1 \leqq \lambda \leqq n$. When (2) and (3) hold we say that the sequence $[V_\lambda(x)]$ with the sequences of norming factors (a_n) and (b_n) belongs to the domain of attraction of $G(x)$.

In order to study the convergence (2), when (3) hold we have considered identical expansions. By this method we have found the necessary and sufficient conditions for convergence in very general cases, for instance the Doeblin-Gnedenko conditions in the case of a stable d.f. $G(x)$.

We put the problem in the following way. Let $[V_\lambda(x)]$ and $[G_\lambda(x)]$ denote two sequences of d.f.'s. When do $[V_\lambda(x)]$ and $[G_\lambda(x)]$ with the same first sequence of norming factors (a_n) belong to the domain of attraction of the same d.f. $G(x)$?

Let η be a positive number which varies and $c_{\lambda n}$ and $c'_{\lambda n}$ numbers depending on η such that

$$\int_{|t|<\eta} [E(t) - V_\lambda(a_n t + c_{\lambda n})]\mathrm{d}t = 0 \qquad \int_{|t|<\eta} [E(t) - G_\lambda(a_n t + c'_{\lambda n})]\mathrm{d}t = 0,$$

and define $V_\lambda(n, x)$, $G_\lambda(n, x)$, $W_{\lambda,k}(n, x)$ and $\Gamma_{\lambda,n}(n, x)$ by

$$\begin{aligned}
V_\lambda(n, x) &= V_\lambda(a_n x + c_{\lambda n}), \quad G_\lambda(n, x) = G_\lambda(a_n x + c'_{\lambda n}), \\
W_{\lambda,\lambda}(n, x) &= E(x), \; W_{\lambda,\lambda+1}(n, x) = V_{\lambda+1}(n, x), \\
W_{\lambda,k}(n, x) &= V_{\lambda+1}(n, x) * \ldots * V_k(n, x), \\
\Gamma_{\lambda,\lambda}(n, x) &= E(x), \quad \Gamma_{\lambda,\lambda+1}(n, x) = G_{\lambda+1}(n, x), \\
\Gamma_{\lambda,k}(n, x) &= G_{\lambda+1}(n, x) * \ldots * G_k(n, x).
\end{aligned}$$

Then we may consider the difference, $W_{0,k}(n, x) - \Gamma_{0,k}(n, x)$, where k is an index that we choose suitably.

We have studied this difference by the help of the following identical expansion

$$[W_{0,k}(n, x) - \Gamma_{0,k}(n, x)] * \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) =$$
$$= \sum_{\lambda=1}^{k} [V_\lambda(n, x) - G_\lambda(n, x)] * W_{0,\lambda-1}(n, x) * \Gamma_{\lambda,k}(n, x) * \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)$$

where $\varphi(x)$ is the normal d.f. with zero mean and unity standard deviation and σ is a positive number, which we choose suitably. The necessary and sufficient condition that $[V_\lambda(x)]$ with the first sequence of norming factors (a_n) shall belong to the domain of attraction of a d.f. $G(x)$ when $[G_\lambda(x)]$ with the first sequence of norming factors (a_n) belongs to the domain of attraction of $G(x)$ can now very generally be given in the form

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x} \left| \sum_{\lambda=1}^{n} [V_\lambda(n, x) - G_\lambda(n, x)] * \varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right) \right| = 0$$

for every $\eta > 0$ and $\sigma > 0$. ($c_{\lambda n}$ and $c'_{\lambda n}$ depend on η and therefore $V_\lambda(n, x)$ and $G_\lambda(n, x)$ depend on η). From this condition more suitable conditions can easily be obtained in special cases.

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA,
GÖTEBORG.

ON THE POWER OF A DISTRIBUTION-FREE TEST OF FIT

Z. WILLIAM BIRNBAUM

Let $H(x)$, the hypothesis, be a continuous cumulative probability function of a random variable $\boldsymbol{X}$; $(\boldsymbol{Y}_1, \boldsymbol{Y}_2, \ldots, \boldsymbol{Y}_n)$ an increasingly ordered sample of a random variable $\boldsymbol{Y}$ which has the c.p.f. $G(y)$, the alternative; $\boldsymbol{F}_n(s)$ the empirical cumulative distribution function defined by $\boldsymbol{F}_n(s) = 0$ for $s < \boldsymbol{Y}_1$, $\boldsymbol{F}_n(s) = \frac{j}{n}$ for $\boldsymbol{Y}_j \leqq s < \boldsymbol{Y}_{j+1}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $\boldsymbol{F}_n(s) = 1$ for $\boldsymbol{Y}_n \leqq s$. It is well known that, if $G = H$, the statistic $\boldsymbol{D}_n^+ = \sup_{(s)} \{H(s) - \boldsymbol{F}_n(s)\}$ has a probability distribution which depends on n but not on H. In an earlier paper (Annals of Math. Stat. **24**, 1953, 484—489) the author obtained sharp lower and upper bounds for a test of fit based on $\boldsymbol{D}_n^+$, for the class of alternatives G such that $\sup_{(s)} \{H(s) - G(s)\} = \delta$ is a given positive number. In the present paper sharp bounds are obtained for the same test of H against a) alternatives G such that $\delta > 0$ is given and $H(s) \geqq G(s)$ for all s (i.e. the random variable

X is "stochastically smaller" than Y, b) alternatives G such that $q = \int_{-\infty}^{+\infty} H(s)dG(s) = \text{Prob } (X < Y)$ is a given number, c) alternatives such that q is a given number $> \frac{1}{2}$ and $H(s) \geqq G(s)$ for all s.

UNIVERSITY OF WASHINGTON,
SEATTLE, WASH., U. S. A.

EVALUATIONS STOCHASTIQUES D'ERREURS

CHARLES BLANC

Lorsqu'on recherche des informations sur les erreurs dues à l'emploi de méthodes approchées, on s'efforce souvent de trouver des bornes pour ces erreurs; dans de nombreux cas, les expressions ainsi obtenues sont difficilement utilisables et surtout mal adaptées à une étude comparative de diverses méthodes. La comparaison peut se faire par contre très exactement si l'on examine non pas des bornes, mais des moyennes d'erreurs (ce qui est du reste souvent plus important pour l'utilisateur); ces moyennes sont établies sur un ensemble de données, ensemble pourvu d'une mesure (probabilité). Cela revient à considérer les données comme aléatoires; alors la solution exacte, la solution approchée, l'erreur elle-même, sont aléatoires. De plus, si les opérations à effectuer sont toutes linéaires, la connaissance des moments d'ordres un et deux des données permet de calculer les moments de mêmes ordres de l'erreur.

Considérons par exemple les diverses méthodes de résolution numérique d'un problème aux limites: il y a essentiellement les méthodes d'approximation linéaire d'une part, celles d'équations aux différences d'autre part. Les considérations de bornes d'erreurs ont été impuissantes, à ma connaissance, dans l'étude comparative de ces méthodes. Le point de vue stochastique par contre conduit assez simplement au résultat. Si l'on considère la fonction inconnue $X(P)$ comme aléatoire, l'erreur au point P est une fonctionnelle linéaire $Y(P) = L\, X(P)$, qui dépend évidemment de la méthode envisagée; si l'on admet que $X(P)$ a des moments $\mathscr{E}\, X(P) = 0$, $\mathscr{E}\, X(P)X(Q) = r(P-Q)$ (fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux), hypothèse au moins aussi naturelle que celles que l'on est amené à faire dans les études de bornes d'erreurs, on a, en supposant L et $\mathscr{E}$ permutables,

$$\mathscr{E}\, Y(P) = 0, \quad \mathscr{E}\, Y(P)\, Y(Q) = L_P L_Q\, r(P-Q);$$

il est commode, pour les calculs numériques, de considérer la représentation spectrale de r, ce qui permet de faire une étude en partie indépendante du choix de r.

On a pu établir ainsi qu'à travail égal, les méthodes d'équations aux différences sont en moyenne préférables à celles d'approximations linéaires; que pour les équations aux différences, on améliore en moyenne autant le résultat en prenant une maille plus fine qu'en prenant un opérateur aux différences plus perfectionné, mais qu'en général les méthodes plurilocales (Mehrstellenverfahren) sont les plus favorables.

CH. MONTOLIVET 28,
LAUSANNE.

APPLICATION DE LA NOTION DE FONCTION CARACTÉRISTIQUE À L'ÉTUDE DE QUELQUES PROBLÈMES DE MÉCANIQUE STATISTIQUE

ANDRÉ JOSEPH LUCIEN BLANC-LAPIERRE

Le problème fondamental de la mécanique statistique consiste à répartir un certain nombre de particules dans un ensemble d'états distincts, compte tenu de certaines restrictions telles que, par exemple, la condition que l'énergie totale ait une valeur donnée. R. H. Fowler (Statistical Mechanics, Cambridge University Press (second edition), 1936) a indiqué une méthode de calcul qui permet de calculer les valeurs moyennes des grandeurs liées à cette distribution. Elle repose sur des identifications ingénieuses de coefficients dans certains développements en série. Dans le présent article on montre que l'emploi des fonctions caractéristiques conduit directement au résultat de R. H. Fowler. Cela découle du fait que le problème fondamental de la mécanique statistique se rattache au suivant: Soient L variables aléatoires $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots \boldsymbol{a}_L$ susceptibles de prendre des valeurs entières 0, 1, 2, ... et $\Phi(u_1, u_2, \ldots u_L)$ leur fonction caractéristique. Quelle est la fonction caractéristique $\Phi_1 [u_1, u_2, \ldots u_L; S_1, S_2]$ des $\boldsymbol{a}_1, \ldots \boldsymbol{a}_L$, conditionnellement lorsque l'on impose des liaisons (deux par exemple) telles que:

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_L \boldsymbol{a}_L = S_1 \tag{1}$$

$$\mu_1 \boldsymbol{a}_1 + \mu_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \mu_L \boldsymbol{a}_L = S_2 \tag{2}$$

(λ, μ, S nombres entiers certains donnés)?

La solution de ce problème est très simple. Le changement de variable $U = e^{iu}$ permet de retrouver diverses formules indiquées par Fowler. A partir de $\Phi(u_1, u_2, \ldots u_L; S_1, S_2)$ on calcule aisément les moments.

En mécanique statistique $\boldsymbol{a}_j$ représentera le nombre de particules dans l'état d'indice j. L'équation (1) avec des λ tous égaux à 1 pourra signifier que le nombre des particules est S_1 et (2) fixera l'énergie totale. Cependant, le problème est un peu plus compliqué.

a) parce qu'il y a une infinité de variables $\boldsymbol{a}_j$;

b) parce que la loi de probabilité de l'une des variables peut être singulière dans le sens suivant: Prenons le cas de la statistique de Einstein-Bose; elle attribue des poids égaux à toutes les valeurs entières de $\boldsymbol{a}_j$ et cela empêche de normer la probabilité. Ces difficultés peuvent être facilement écartées par des passages à la limite simples. Le point de vue développé par l'auteur a des rapports étroits avec celui du livre A. I. Khinchin, Mathematical foundations of statistical Mechanics (traduit par G. Gamow), Dover Publications, New-York, 1949.

18 Ave Foureau Lamy
Alger.

ON A GENERAL METHOD FOR CONSTRUCTING COMPLETELY ORTHOGONAL, $2^k \times 2^k$ SQUARES ($k \geqq 1$) BY USING CLOSED ORTHOGONAL SYSTEMS OF K-NIONS

Volodymyr Bohun-Chudyniv

In this author's last three papers: (1) "On orthogonal and non-orthogonal closed systems of K-nions and their application"; (2) "On a method of determining orthogonal square matrices with differing integers (also complex numbers, quaternions, octonions, sedenions, etc.)"; (3) "On a general method for constructing orthogonal square matrices of *every order* with differing integers"; were considered this author's methods for determining orthogonal square matrices of 2^k, 2^k-1; $(2^{1+\lambda}-1)2^\beta$ ($k \geqq 2$; $\lambda \geqq 1, \beta \geqq 1$; $\lambda \geqq 0, \beta \geqq 2$) orders, and of every order (Bull. Amer. Math. Soc. Abstracts 58-6-621, 59-2-232, 59-6-523), satisfying all conditions of the Euler problem (Novi Comm. Acad. Petr. Vol. 15 (1770), 75; Comm. Arith. Vol. 1, 427—443).

The aims of this paper are:

(A) To show that all types of diagonal Latin $2^k \times 2^k$ squares ($k \geqq 1$) are separate cases of the author's closed orthogonal systems of K-nions.

(B) To give a general method for constructing sets of completely orthogonal $2^k \times 2^k$ squares ($k \geqq 1$) by using the author's orthogonal systems of K-nions of 2^k rank, and 3 of the author's lemmas.

(C) To give the method and expression for determining the number of all different types of sets of Latin $2^k \times 2^k$ squares, and the number of all possible types of sets of completely orthogonal $2^k \times 2^k$ squares for each value of k.

(D) To show that Yates' completely orthogonal Latin $2^3 \times 2^3$ squares, that were illustrated in Fisher's "The design and analysis of experiments", are one of the separate cases of sets that can be obtained from the author's system of K-nions for $k = 3$.

(E) To show that sets of completely orthogonal $(2^k - 1) \times (2^k - 1)$ squares $(k \geqq 2)$ can be constructed from the sets of completely orthogonal $2^k \times 2^k$ squares.

BIBLIOGRAPHY.

[1] J. J. SYLVESTER, "Thoughts on inverse orthogonal matrices etc.", Philosophical Magazine (4) vol. 34 (1867) pp. 461—475.

[2] A. C. PALEY, "On orthogonal matrices", Journal of Mathematics and Physics vol. 12 (1933) pp. 311—320.

[3] W. L. STEVENS, "The completely orthogonalized Latin square", Ann. Eugen., 9 (1939), 82.

[4] R. A. FISHER, "Completely orthogonal 9 × 9 squares. A correction", Ann. Eugen., 11 (1942), 402.

[5] R. C. BOSE and K. R. NAIR, "On complete sets of Latin squares", Sankhya, 5 (1942), 361.

[6] V. CHUDYNIV-BOHUN, "Solution of the Euler Problem", Ukrainian Academy of Science, Regensburg, Germany, 1947 (see Math. Rev. Vol. 13, No. 10, p. 913 (1952)).

[7] R. A. FISHER, "The design of experiments", Oliver and Boyd, Edinburgh, 1947.

280 E 10 ST.,
NEW YORK 9, N.Y., U.S.A.

NORMALISATION OF FREQUENCY FUNCTION

P. K. BOSE

It has been found that most of the important sampling distribution tend towards normality as n, the sample size increases indefinitely. But at any stage of investigation for moderate values of n the assumption of normality will introduce considerable error in the statistical calculations. In this paper an attempt has been made to estimate the maximum amount of error which an investigator is liable to commit at any stage of operation by assuming the sampling distribution function of any statistic to be represented by a normal distribution function.

Let $F(x)$ and $f(x)$ be the distribution and frequency function of x, a standardized variate whose sampling distribution we are considering and let $\Theta(x)$ and $\Phi(x)$ be the similar functions for the normal. Then we may write

$$F(x) = \Theta(x) + R(x); \; f(x) = \Phi(x) + r(x)$$

As indicated above $R(x)$ and $r(x)$ gradually diminish with increasing n.

There are different statistical models for representing a non normal frequency function by a normal function and certain other terms. The particular form which we propose to use in this case is given below

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j \Phi^j(x) \text{ where } \Phi^j(x) \text{ is the } j^{\text{th}} \text{ derivative of } \Phi(x)$$

and the C_j's are known.

Retaining terms up to the $0(n^{-1})$; $f(x)$ can be represented as

$$f(x) = \Phi(x) - \sqrt{\beta_1}/6\, \Phi^{\mathrm{III}}_{(x)} + \beta_2 - 3/24\, \Phi^{\mathrm{IV}}_{(x)} + \beta_1/72\, \Phi^{\mathrm{VI}}_{(x)} \tag{1}$$

The incomplete probability integrals for $f(x)$ and $\Phi(x)$ may be written as $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$ and $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\mathrm{d}x$. We want to find out the different combinations of β_1 and β_2 for some maximum possible difference of the two incomplete probability integrals or for some different values of n, the sample size or for some values of β_1 and β_2 the maximum possible difference of the two incomplete probability integrals. For any value of x the difference between the two incomplete probability integrals may be written as

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{\beta_1}}{6}\Phi^{\mathrm{II}}_{(x)} + \frac{\beta_2-3}{24}\Phi^{\mathrm{III}}_{(x)} + \frac{\beta_1}{72}\Phi^{\mathrm{V}}_{(x)} =$$

$$= -\left[\frac{\sqrt{\beta_1}}{6}H_2(x) + \frac{\beta_2-3}{24}H_3(x) + \frac{\beta_1}{72}H_5(x)\right]\Phi(x) \tag{2}$$

$$(-1)^j\, \Phi^j(x) = H_j(x)\Phi(x)$$

$H_j(x)$ is a Hermite polynomial.

Now let us try to find out the value of x for which the corresponding absolute error in the probability integral is maximum; for this we require

$$\left[\frac{\sqrt{\beta_1}}{6}H_3(x) + \frac{\beta_2-3}{24}H_4(x) + \frac{\beta_1}{72}H_6(x)\right]\Phi(x) = 0; \tag{3}$$

$\dfrac{\sqrt{\beta_1}}{6}H_4(x) + \dfrac{\beta_2-3}{24}H_5(x) + \dfrac{\beta_1}{72}H_7(x)$ is positive or negative according as (2) is positive or negative (4).

We can make use of the above set of equations in two ways. (i) We may assign an error $\mathrm{d}x$ which is permissible then we can draw $(\beta_1 - \beta_2)$ diagrams for each values of $\mathrm{d}x$. (ii) For different values of n we can calculate the maximum error which we may commit by taking a non normal frequency function as represented in (1) to be equivalent to the normal function. In the present paper both approaches have been discussed. For important distributions such as (i) χ^2-distribution, (ii) $\sqrt{2\chi^2}$-distribution (iii) t-distribution (iv) F-distribution, special tables have been constructed showing the maximum error possible for each value of the sample size n.

DEPARTMENT OF STATISTICS, CALCUTTA UNIVERSITY,
CALCUTTA.

A PROCESS RELATED TO CERTAIN VISUAL PHENOMENA

ARTHUR H. COPELAND SR.

The firing of a neuron when it is stimulated by light on the retina is a discrete non-markovian random process. An increase in the amount of light on the retina produces an increase in the probability of a firing within a given interval of time. Thus the time between firings tends to decrease as the light increases. However the neuron also exhibits fatigue. The degree of fatigue depends upun the rapidity with which the neuron has been firing. Fatigue tends to decrease the probability of firing within a given interval of time and hence to increase the time between firings.

This investigation consists in formulating suitable hypotheses relative to the distribution associated with this process and then studying the character of the distribution. The distribution is a generalization of the Poisson distribution. The purpose of the investigation is to aid in the understanding of certain visual phenomena and in particular the phenomenon of negative after-image.

UNIVERSITY OF MICHIGAN,
ANN ARBOR, MICH. U.S.A.

A NOTE ON THE FORMAL USE OF COMPLEX PROBABILITIES IN THE THEORY OF STOCHASTIC PROCESSES

DAVID R. COX

A great simplification is achieved in the theory of a wide range of stochastic phenomena in continuous time whenever the various 'life-times' can be represented by independent random variables with p.d.f.'s of the form λe^{-t}. For the chance of 'death' in an interval δt is then unconditionally $\lambda \delta t + o(\delta t)$ and a Markov process with a finite or enumerable number of states is obtained.

(The life-times may be the service-times of customers in a queue, the quantities of goods removed or added to a store, the division-times of bacteria, etc.). In 1920 A. K. Erlang showed, in effect, that the Markov property can be retained when the life-times are distributed proportionally to χ^2_{2k}; he regarded the life as divided into k stages, the times in each being independently distributed with p.d.f. $\lambda e^{-\lambda t}$. The division into stages is a mathematical device not necessarily having physical significance.

Arne Jensen has given the extension when the λ's for the different stages are not equal; the present paper outlines further generalizations which appreciably extend the type of distribution that can be represented.

If $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ are the λ's for the separate stages, the p.d.f., $f(t)$, of total 'life-time' has Laplace transform $f^*(s)$ given by

$$f^*(s) = \prod_{j=1}^{k} (1 + \lambda_j^{-1} s)^{-1}. \tag{1}$$

First, purely as a formal device, choose complex λ_j such that (1) is the Laplace transform of a p.d.f., $f(t)$. For example if $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a + i$, $\lambda_3 = a - i$,

$$f(t) = a(a^2 + 1)e^{-at}(1 - \cos t). \tag{2}$$

Therefore the distribution (2) may be represented formally by a threestage model with constant probabilities. This allows a representation of positive random variables for which $f^*(s)$ is the reciprocal of a polynomial.

To cover certain rational $f^*(s)$, choose $\lambda_j, p_j, q_j = 1 - p_j, j = 1, \ldots, k$ with $p_k = 1$, such that

$$f^*(s) = \sum_{j=1}^{k} q_1 \ldots q_{j-1} p_j \prod_{l=1}^{j} (1 + \lambda_l^{-1} s)^{-1} \tag{3}$$

is the Laplace transform of a p.d.f. Then the distribution corresponding to (3) may be represented by a k-stage model in which $\lambda_j e^{-\lambda_j t}$ is the p.d.f. of 'life-time' in the j^{th} stage and where, at the end of the j^{th} stage, 'death' occurs with probability p_j and the $(j + 1)^{\text{th}}$ stage is begun with probability q_j. Some conditions under which a rational $f^*(s)$ corresponds to a probability distribution have been given in a recent series of papers by E. Lukacs and O. Szász.

Some special cases of (1) and (3) are considered and the application of the method indicated.

STATISTICAL LABORATORY, ST ANDREW'S HILL,
CAMBRIDGE, U.K.

TESTS FOR SKEWNESS AND KURTOSIS WITH ORDERED VARIATES

F. N. DAVID and NORMAN LLOYD JOHNSON

In previous publications methods have been given of approximating to the moments of the distributions of functions of ordered variates. We have obtained Normal significance levels for Yule's skewness criterion

$$\frac{\text{Upper Quartile} + \text{Lower Quartile} - 2\times\text{Median}}{\text{Inter-Quartile Distance}}$$

Here we discuss the power of this test against specifically defined alternatives and discuss the construction of other tests for skewness, based on ordered variates.

It appears that

$$\frac{\text{Range}}{\text{Inter-Quartile Distance}}$$

would be a criterion useful for testing for kurtosis. Properties of this statistic are discussed.

The effect of slight changes in the tails of population distributions on tests for skewness and kurtosis is also discussed.

DEPT. STATISTICS, UNIVERSITY COLLEGE,
GOWER ST., LONDON, W.C. 1.

SEQUENTIAL TEST WITH THREE POSSIBLE DECISIONS FOR THE COMPARISON OF TWO UNKNOWN PROBABILITIES

CONSTANCE VAN EEDEN

We consider two series of independent trials, e.g. two processes, each trial resulting in a success or a failure with probabilities p, $1-p$ and p', $1-p'$ respectively for the two processes.

Executing the trials in pairs consisting of one trial for each process, a sequential test with two possible decisions, developed by Wald [1] (p. 106), may be used for the comparison of p and p'.

For groups of trials of both processes a sequential test with two possible decisions has been described in [2]. This test is carried out as follows:

Suppose the group of trials constituting the i^{th} step of the test consists of n_i trials for the first process and m_i trials for the second one. If the of successes for the two processes are $\boldsymbol{a}_i$ and $\boldsymbol{b}_i$ respectively, then number

$$\boldsymbol{x}_i = 2\left\{\text{arc sin}\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}_i}{n_i}} - \text{arc sin}\sqrt{\frac{\boldsymbol{b}_i}{m_i}}\right\}$$

is for large n_i and m_i approximately normally distributed with mean

(1) $\mu = \mathscr{E}\boldsymbol{x}_i = 2\{\text{arc sin}\sqrt{p} - \text{arc sin}\sqrt{p'}\} = 2\,\text{arc sin}\{\sqrt{pq'} - \sqrt{p'q}\}$ $\begin{matrix} q' = 1 - p' \\ q = 1 - p \end{matrix}$

and variance (2) $\sigma_i^2 = \sigma^2(\boldsymbol{x}_i) = (n_i + 1)n_i^{-2} + (m_i + 1)m_i^{-2}$ (see e.g. [3]).

The ordinary sequential test with two possible decisions for the mean of a normal distribution with known variance, given by Wald [1] (p. 117), may then be applied to the $\boldsymbol{x}_i$.

Both abovementioned tests for comparing two unknown probabilities can be generalized to tests with three possible decisions. For the first one this generalization may be based directly on a method described by de Boer [4].

The test for groups of trials can be generalized by applying the test with three possible decisions for the mean μ of a normal distribution with known variance, developed by Sobel and Wald [5] to the abovementioned random variables $\boldsymbol{x}_i$.

For this test two values ξ and η and four values μ_1, μ_2, μ_3 and μ_4 of μ must be chosen, with (3) $\mu_1 < \xi < \mu_2 < \mu_3 < \eta < \mu_4$ the three possible decisions being

(4) 1. $\mu < \xi$, 2. $\mu > \eta$, 3. $\xi \leqq \mu \leqq \eta$,

the intervals (μ_1, μ_2) and (μ_3, μ_4) being indifference regions.

To translate this into terms of p and p', let

(5) $$\sqrt{pq'} - \sqrt{p'q} = \delta$$

then (see (1)) we have $\mu = 2\,\text{arcsin}\ \delta$.

The functional relation between p and p' for a given value of δ^2 is given by those two parts of the ellipse

(6) $$p^2 + p'^2 - 2\,pp'(1 - 2\delta^2) - 2\delta^2(p + p') + \delta^4 = 0$$

for which $\delta^2 \leqq p + p' \leqq 2 - \delta^2$; this set of points (p, p') consists of a part $\mathscr{C}$ for which $p > p'$ and a part $\mathscr{C}'$ for which $p < p'$.

Choosing two values ε and ζ and four values $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ and δ_4 of δ, with

(7) $$\delta_1 < \varepsilon < \delta_2 < 0 < \delta_3 < \zeta < \delta_4,$$

(δ_1, δ_2) and (δ_3, δ_4) constituting the indifference regions, the three decisions (4) are equivalent with:

(8) 1. $\delta_1 < \varepsilon$, 2. $\delta_2 > \zeta$, 3. $\varepsilon \leqq \delta \leqq \zeta$

and hence with the following decisions for p and p':

(9) 1. the point (p, p') lies outside the part $\mathscr{C}'$ of the ellipse (6) corresponding to $\delta = \varepsilon$,
2. the point (p, p') lies outside the part $\mathscr{C}$ corresponding to $\delta = \zeta$,
3. the point (p, p') lies between or on the parts $\mathscr{C}'$ and $\mathscr{C}$ corresponding to $\delta = \varepsilon$ and $\delta = \zeta$.

The probabilities of errors are determined as described in [5].

REMARK. It is not necessary that p and p' are constant throughout the experiment. We only need a constant δ.

REFERENCES

[1] A. WALD, Sequential analysis, New York 1944.
[2] Statistical Research Group of the Columbia University, Sequential analysis of statistical data, applications, section 3, New York 1945.
[3] R. A. FISHER, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **42** (1922), 321—341.
[4] J. DE BOER, Appl. Sci. Res. **3** (1953), 249—259.
[5] M. SOBEL and A. WALD, Ann. Math. Stat. **20** (1949), 502—522.

VAN EEGHENSTRAAT 47.
AMSTERDAM.

A UNIFIED APPROACH TO THE ALLOCATION PROBLEM IN SAMPLING THEORY

GUSTAV ELFVING

Given a set of possible experiments, an allocation is a rule stating which of the experiments shall be performed and how many times each of them shall be repeated. The question how to find an optimal allocation for a given estimation purpose has recently been treated by Elfving (Ann. Math. Statistics **23**, 255) and, in a more general and complete form, by Chernoff (ibid. **24**, 586). In the regression version used by the former writer, the problem is as follows. Let each experiment Y consist of one or more observations $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots$ The observation vector $\boldsymbol{y}$ is assumed to be of form $\boldsymbol{y} = A\theta + \boldsymbol{z}$ where A is a known coefficient matrix, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)'$ the unknown parameter vector, and $\boldsymbol{z}$ a random vector with mean $\mathscr{E}(\boldsymbol{z}) = 0$ and covariance matrix $\mathscr{E}(\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}') = \Lambda$. Then the "linear information matrix" of the experiment is $M = A'\Lambda^{-1}A$. If experiments $Y_1, \ldots, Y_m$ are performed randomizedly in proportions $p_1, \ldots, p_m$, the information matrix of the mixed experiment $\overline{Y}$ is $\overline{M} = \Sigma p_i M_i$; $\overline{Y}$ reflects what happens when the Y_i are performed a large number of times in proportions p_i. — An optimal design for estimating (say) θ_1 is obtained by minimizing the element μ'' of $\overline{M}^{-1}$ with respect to $p_1, \ldots, p_m$. It turns out that this requires at most k non-zero p_i's, k being the number of parameters. There are several devices for discarding the irrelevant experiments. — If the experiments are at different costs c_i, this is accounted for simply by replacing the M_i by M_i/c_i. — Mathematically, the problem consists in minimizing certain rational functions on a convex set in $\frac{1}{2}k(k+1)$-space.

The notions sketched above enable a unified treatment of several widely used but conceptually somewhat disparate sampling techniques, for example: (a) ordinary stratified sampling, (b) double sampling with stratification, (c) double sampling with ratio or regression estimation, (d) two-stage sampling. They also throw some light on the purport of randomization procedures.

SJÖTULLSGATAN 21A,
HELSINGFORS, FINLAND.

UNE FAÇON D'INTRODUIRE LA NOTION DE „MESURE", PARTICULIÈREMENT CONVENABLE POUR LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

BRUNO DE FINETTI

1. On peut introduire la *mesure* $\mu(E)$ pour une famille $\mathscr{E}$ de sousensembles E d'un espace $\mathscr{C}$ quelconque en se donnant une fonctionnelle $\mu(f)$ définie sur une famille $\mathscr{A}$ de fonctions $f \in \mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ = espace des fonctions réelles bornées définies sur $\mathscr{C}$), et en posant en particulier $\mu(E) = \mu(f_E)$, $f_E(x) =$ fonction indicatrice de E ($f = 1$ pour $x \in E$, et $f = 0$ pour $x \notin E$). Cela simplifie l'exposé de la methode proposée, qui semble particulièrement convenable dans la théorie des probabilités.

2. Admettons pour $\mu(f)$ les Axiomes suivants: (si: $f_1, f_2, f \in \mathscr{A}$)

I. $\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2)$ (additivité *simple*);

II. si $f(x) \geqq 0$ pour tout x, $\mu(f) \geqq 0$ (positivité);

III. $\mu(1) = 1$ („1" étant la fonction constante, $= 1$) (normalisation).

Il en resulte, entre autre, que $\inf(f) \leqq \mu(f) \leqq \sup(f)$.

3. On peut toujours prolonger $\mu(f)$ de $\mathscr{A}$ à $\mathscr{A}' \supset \mathscr{A}$ (et même à la totalité $\mathscr{F}$); le prolongement n'est cependant univoque que sur le système linéaire $\mathscr{L} = L\mathscr{A}$ des combinaisons linéaires de f_h (en nombre fini) et sur sa „ferméture absolue" $F_0\,\mathscr{L}$ (ensemble des fonctions f pour lesquelles, quel que soit $\varepsilon > 0$, on trouve $f_1, f_2 \in \mathscr{L}$ telles que $f_1 \leqq f \leqq f_2$ (sur tout $\mathscr{C}$) et $\mu(f_2) - \mu(f_1) < \varepsilon$). Si $\varphi \notin F_0\,\mathscr{L}$, on peut prolonger μ en choisissant pour $\mu(\varphi)$ n'importe quelle valeur $a \leqq \mu(\varphi) \leqq b$ $(a < b)$, avec $a = \sup_{f \in \mathscr{N}} \{ \inf_{x \in \mathscr{C}} [\varphi(x) + f(x)]\}$ (N = ensemble des $f \in \mathscr{A}$ avec $\mu(f) = 0$) (b: symétriquement).

4. Les axiomes établis permettent maintenant d'introduire d'une façon simple toute restriction ultérieure et de la nuancer d'après toutes exigences possibles (en évitant les difficultés qui surviennent d'ordinaire en les introduisant d'emblée comme axiomes). On peut se demander, en première ligne, s'il est possible de prolonger $\mu(f)$ en imposant les valeurs pour $f \in \mathscr{A}_1$. En d'autres mots: si $\mu_1(f)$ et $\mu_2(f)$ sont deux mesures resp. dans $f \in \mathscr{A}_1$ et $f \in \mathscr{A}_2$, existe-t-il une mesure $\mu(f)$, définie sur $F_0L(\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)$, coincidente avec μ_1 et μ_2 dans leurs domaines de définition? — Condition necéssaire et suffisante: $L(\mathscr{N}_1+\mathscr{N}_2)$ ne doit conténir aucune f avec inf $(f) > 0$ ($\mathscr{N}_i$ = ensemble des $f \in \mathscr{A}_i$ avec $\mu_i(f) = 0$).

5. Bien de cas particuliers se ramènent à cela. P. ex.:

a) imposer $\mu(E) = 0$ pour tous les E d'une famille $\mathscr{E}$;

b) imposer l'invariance de la mesure par rapport à un groupe G (p. ex.: dans l'espace euclidien, les mouvements rigides), ce qui revient à $\mu(f) = 0$ lorsque $f = f_1 - f_2$, f_1 et f_2 fonctions indicatrices de deux ensembles E_1 et E_2 „superposables" par rapport à G (et apparténant, si l'on veut affaiblir la condition, à une famille $\mathscr{E}$).

6. Même l'additivité complète (ou σ-additivité) peut s'exprimer de façon nuançée. C'est bien connu qu'elle corresponde à la *continuité*: $\mu(f_n) \to \mu(f)$ si $f_n \to f$ d'une façon convenable. On dira que $\mu(f)$ est *continue par rapport au système linéaire* $\mathscr{S}$ si $\mu(f_n) \to 0$ pour toute suite $f_n \in \mathscr{S}$ de fonctions uniformément bornées convergentes ponctuellement vers zéro. On appellera „fermeture de $\mathscr{L}$ par rapport à $\mathscr{S}$" le système linéaire $F_{\mathscr{S}}\mathscr{L}$ des fonctions $f = f' + f''$, $f' \in F_0\mathscr{L}$, $f'' = \lim f_n$, $f_n \in \mathscr{S}$; $F_{\mathscr{S}}\mathscr{L}$ est le domaine de prolongement univoque de $\mu(f)$ définie dans $\mathscr{L}$ si on le suppose continu par rapport à $\mathscr{S}$ (admissible si $F_{\mathscr{S}}\mathscr{L}$ ne contient f avec inf $(f) > 0$). La continuité par rapport à $\mathscr{S}_1, \mathscr{S}_2, \ldots, \mathscr{S}_n$ entraîne la cont. par rapport à $L(\mathscr{S}_1 + \ldots + \mathscr{S}_n)$; cela ne vaut plus pour une infinité de $\mathscr{S}$.

VIA CORONEO 43,
TRIESTE, ITALIE.

CONVERGENCE DE LA RÉPARTITION EMPIRIQUE VERS LA RÉPARTITION THÉORIQUE, POUR DES ÉLEMENTS ALÉATOIRES GÉNÉRAUX

ROBERT FORTET

Soit $\mathscr{X}$ un espace quelconque de points x, $\mathscr{B}$ un corps borèlien de sous-ensembles e de $\mathscr{X}$ ($\mathscr{X} \in \mathscr{B}$), $P(e)$ une loi de probabilité sur $[\mathscr{X}, \mathscr{B}]$ [fonction d'ensemble $\geqq 0$, définie et complètement additive pour $e \in \mathscr{B}$, avec $P(\mathscr{X}) = 1$];

soit $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2, \ldots, \boldsymbol{X}_n, \ldots$ une suite indéfinie d'élements aléatoires prenant leurs valeurs dans $\mathscr{X}$, tous de même loi $P(e)$; soit $\varphi(e; x)$ la caractéristique de l'ensemble e $[\varphi(e; x) = 1$ si $x \in e$; $\varphi(e; x) = 0$ si $x \notin e]$; posons: $\boldsymbol{P}_n(e) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(e; \boldsymbol{X}_j)$; la répartition empirique $\boldsymbol{P}_r(e)$ est une loi de probabilité aléatoire; l'étude de sa convergence stochastique, pour $n \to +\infty$, vers la répartition théorique $P(e)$, lorsque la suite $\{\boldsymbol{X}_j\}$ est convenable (par exemple lorsque les $\boldsymbol{X}_j$ sont mutuellement indépendants) est un problème très important, résolu, dans le cas où $\mathscr{X}$ est la droite, par le classique théorème de Glivenko-Cantelli. On peut le résoudre dans des cas beaucoup plus généraux par des théorèmes du genre suivant:

Supposons que $\mathscr{X}$ est séparable et distancié, et que $\mathscr{B}$ contient les sphères de $\mathscr{X}$; désignons par (x', x'') la distance de deux points x', x'' de $\mathscr{X}$, et par $\mathscr{C}_\varrho$ l'ensemble des fonctions numériques de point $f(x)$ sur $\mathscr{X}$, telles que:

$$\frac{|f(x') - f(x'')|}{(x', x'')} \leqq \varrho \quad (\varrho > 0), \text{ quels que soient } x', x'' \in \mathscr{X}.$$

Supposons que les $\boldsymbol{X}_j$ sont mutuellement indépendants, et que $P(e)$ est telle que $\int_{\mathscr{X}} (x_0, x)\, \mathrm{d}P(e) < +\infty$ (oú x_0 est un point quelconque de $\mathscr{X}$); alors, quel que soit ϱ, presque-sûrement la moyenne arithmétique $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(\boldsymbol{X}_j)$ tend, pour $n \to +\infty$, vers $\int_{\mathscr{X}} f(x)\, \mathrm{d}P(e)$, uniformement en f pour $f \in \mathscr{C}_\varrho$.

INSTITUT H. POINCARÉ,
11 RUE P. CURIE, PARIS (5).

CORRELATION FOR TRUNCATED SAMPLES OF A RANDOM FUNCTION [1]

FRANÇOIS N. FRENKIEL and JOSEPH KAMPÉ DE FÉRIET

A stationary random function $f(t, \omega)$ of a real variable t $[-\infty < t < +\infty]$ depends on a parameter ω chosen at random in some abstract space Ω. To a particular choice ω_0, there will correspond a sample of the random function $f(t, \omega_0)$. In many physical applications an experiment does not give values of f for the whole range $-\infty < t < +\infty$ but for a range limited to $-T \leqq t \leqq +T$. Instead of the sample function $f(t, \omega_0)$ one therefore measures

[1] The work of one of the authors (FNF) was supported by the Bureau of Ordnance, Department of the Navy, under Contract NOrd 7386.

a truncated function $f_T(t, \omega_0)$. The relation between the correlation function of the random function and the mean values of the correlations for the sample function is established. The dispersion of the correlations for the sample function around their mean value is determined.

As an example, a piecewise continuous random function resulting from a Bernoulli sequence of trials is studied. Numerical data are obtained using random number tables and correlations for a set of sample functions are determined. The general results found for truncated samples of a random function are then compared with those found for this particular random process.

APPLIED PHYSICS LABORATORY, THE JOHNS HOPKINS UNIVERSITY,
SILVER SPRING, MARYLAND, U.S.A.

CONFIDENCE LIMITS FOR THE RATIO OF TWO MEANS

GERDA KLERK-GROBBEN

The method to determine confidence limits for the ratio of the means ξ and η of two variates with a two-dimensional normal distribution, usual in biological assays (E. C. Fieller, 1944), can be brought into the following more general form.

General formulation.

To determine confidence limits for $\alpha = \dfrac{\xi}{\eta}$ we try to find five functions $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{a}_{11}, \boldsymbol{a}_{12}$ and $\boldsymbol{a}_{22}$ of the observations $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_k$, such that:

1. $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$ are $N(\xi, \eta; \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ distributed with unknown parameters;

2. $$\boldsymbol{z} \stackrel{\text{def}}{=} \eta \boldsymbol{x} - \xi \boldsymbol{y} \tag{1}$$

and

$$\boldsymbol{s_z} \stackrel{\text{def}}{=} + \sqrt{\eta^2 \boldsymbol{a}_{11} - 2\eta\xi \boldsymbol{a}_{12} + \xi^2 \boldsymbol{a}_{22}} \tag{2}$$

are independently distributed;

3. for some known integer f

$$\frac{f \boldsymbol{s}_{\boldsymbol{z}}^2}{\sigma_{\boldsymbol{z}}^2}, \text{ with } \sigma_{\boldsymbol{z}}^2 = \eta^2\sigma_{11} - 2\eta\xi\sigma_{12} + \xi^2\sigma_{22}$$

has a χ_f^2-distribution.

From these conditions it follows that $\boldsymbol{t} = \dfrac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{s_z}}$ has Student's-distribution with f degrees of freedom. If t_ε is determined by

$$\mathrm{P}\left[\left|\frac{\boldsymbol{z}}{\boldsymbol{s_z}}\right| \leqq t_\varepsilon\right] = 1 - \varepsilon,$$

then it follows from (1) and (2), that the inequality

$$(x^2 - t_\varepsilon^2 a_{11}) - 2\frac{\xi}{\eta}(xy - t_\varepsilon^2 a_{12}) + \frac{\xi^2}{\eta^2}(y^2 - t_\varepsilon^2 a_{22}) \leqq 0 \tag{3}$$

has a probability $1 - \varepsilon$.

All values α' which, substituted for $\frac{\xi}{\eta}$, satisfy (3) (the value ∞ included), form a confidence interval for $\alpha = \frac{\xi}{\eta}$ corresponding to the confidence level $1 - \varepsilon$.

Examples.

The method may e.g. be applied to the following situations:

a. independent pairs of observations $(x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$, of x and y are given, where x and y have a simultaneous normal distribution with means ξ and η;

b. independent observations $x_1, \ldots, x_n$ and $y_1, \ldots, y_m$ of x and y are given, where x and y are independently normally distributed with mean ξ resp. η and variance σ_x^2 resp. $\sigma_y^2 = k\sigma_x^2$, provided k is a known constant (biological assays).

The more general case, when the ratio of σ_x^2 to σ_y^2 is unknown, cannot be solved by this method.

c. The confidence limits for the slope of a line when both variates are subject to errors (with a twodimensional normal distribution), given by A. Wald (1940), is another example of this method.

References

[1] E. C. Fieller, Quart. J. Phar. **17** (1944) p. 117—123.

[2] A. Wald, The Annals of Math. Stat., **11** (1940), p. 284—300.

[3] G. Klerk-Grobben, Report S 90 (M 36), 1952, and Report 1953—49(1) of the Statistical Department of the Mathematical Centre, Amsterdam.

[4] H. J. Prins, Report S 90 (M 36a) of the Statistical Department of the Mathematical Centre, Amsterdam, 1953.

Sophiastraat 47,
Aalst (n.b.).

WERTFUNKTION UND VERSICHERUNG

Hellmuth Kneser

Bei ökonometrischen Fragen, die menschliche Handlungen betreffen, pflegt man anzunehmen, dass das Interesse der Person (i) an dem möglichen Zustand (prospect) A durch eine numerische Funktion $F_i(A)$, die Wertfunktion (utility function) gegeben wird, und daß die Aussicht auf mehrere sich ausschliessende Zustände, von denen A_r mit der Wahrscheinlichkeit $p_r \geqq 0$ ($\Sigma p_r = 1$) eintreten wird, durch $\Sigma p_r F_i(A_r)$ bewertet wird. Ist jeder Zustand für die Person (i) gleichwertig mit einem, der sich von dem gegenwärtigen nur durch den Besitz einer grösseren oder kleineren Geldsumme x_i unterscheidet, so kann $F_i(A)$ ersetzt werden durch eine Funktion $f_i(x_i)$ einer numerischen Veränderlichen, die Wertfunktion des Geldes.

Die Ansätze der Spieltheorie sind nur durchführbar, wenn $f_i(x)$ bei jedem (i) linear ist. Seit D. Bernoulli hat man immer auch nichtlineare Wertfunktionen in Betracht gezogen, und auch Experimente weisen auf nichtlinearen Verlauf hin. Demgegenüber wird hier gezeigt, dass unter gewissen allgemeinen Voraussetzungen nichtlineare Wertfunktionen nicht auftreten können, ohne den statischen Charakter der Situation zu stören. Sie geben nämlich Anlaß zu Versicherungsverträgen der folgenden Art: tritt A ein, so zahlt (i) an (k) einen bestimmten Betrag. Hierdurch wird die Situation der möglichen Ereignisse verändert; es entsteht eine Situation, die entweder im Sinne der Spieltheorie trivial ist, oder auf die sich die Theorie anwenden läßt.

Tübingen (Deutschland),
Brunsstr. 31.

SYSTÈMES SEMI-MARKOVIENS À AU PLUS UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE D'ÉTATS POSSIBLES

Paul Pierre Lévy

Généralisant une idée de K. L. Chung, nous dirons qu'un processus est *semi-markovien* s'il peut être défini comme suit: on définit les probabilités de passage $p_{h,k}$ comme dans le *cas markovien* (c.m.); l'état A_k qui succède à A_h étant connu, la durée $\boldsymbol{U}_h$ du séjour dans l'état A_h dépend d'une fonction de répartition (f.r.) a posteriori, $F_{h,k}(u)$, absolument quelconque. La f.r. a priori est $F_h(u) = \Sigma^k p_{h,k} F_{h,k}(u)$. On peut sans restriction essentielle supposer tous les $F_h(+0)$ égaux à 0 ou 1.

Les états instantanés jouant le même rôle que dans le c.m., il suffit ici d'étudier les systèmes sans états instantanés. L'étude des successions d'états possibles s'effectue alors en fonction des $p_{h,k}$ comme dans le c.m. On a toujours pour la durée $\boldsymbol{T}$ de chaque succession possible, $Pr(\boldsymbol{T} = \infty) = 0$ ou 1, et la classification des types de processus subsiste sans modification. Mais $\mathscr{E}(\boldsymbol{T}) = \infty$ ne suffit plus pour que $Pr(\boldsymbol{T} = \infty) = 1$.

L'extension des théorèmes ergodiques est facile. L'étude du premier type suffit à montrer les possibilités nouvelles. Désignons avec Chung par $\boldsymbol{X}(t)$ le temps qui à l'instant t s'est écoulé depuis le dernier changement d'état. Distinguons trois cas (F.c., f.e., ou n.e.) suivant qu'en conservant les $p_{h,k}$ et remplaçant tous les $F_{h,k}(u)$ par $1 - e^{-u}$ on a un processus markovien fortement, faiblement, ou non ergodique.

Cas F.e. — Si tous les $\mu_k = \mathscr{E}(\boldsymbol{U}_h)$ sont finis, on a en première approximation les mêmes théorèmes ergodiques que dans le c.m., avec les mêmes $p_{h,k}$ et les mêmes μ_h. Dans des cas étendus, $\boldsymbol{X}(t)$ a, pour t infini, une distribution limite, et la moyenne $\boldsymbol{M}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \boldsymbol{X}(s)ds$ a une limite presque sûre. Mais il y a des cas d'exception; si les μ_h n'ont pas une borne supérieure finie, le caractère F.e. peut disparaître, et cette limite devenir infinie.

Si μ_1 est infini, les autres μ_h ayant une borne supérieure finie, le temps passé dans l'état A_1 est finalement prépondérant; $\boldsymbol{X}(t) \to \infty$ en probabilité et $\boldsymbol{M}(t) \to \infty$ presque sûrement. Cette conclusion subsiste si plusieurs des μ_h sont infinis. Au point de vue de la comparaison des temps $\boldsymbol{T}_h$ passés jus-qu' à l'instant t dans les différents états, les circonstances les plus variées sont alors possibles. Il peut exister notamment deux suites $\{t'_n\}$ et $\{t''_n\}$ telles que, presque sûrement $\boldsymbol{T}_1 = o(\boldsymbol{T}_2)$ si $t = t'_n \to \infty$ et $\boldsymbol{T}_2 = o(\boldsymbol{T}_1)$ si $t = t''_n \to \infty$. Il peut arriver que $\boldsymbol{T}_h = o(t)$ quel que soit h.

Cas f.e et n.e. Les circonstances possibles sont encore plus variées. Même dans le cas f.e. et si un seul des μ_h est infini, aucune conclusion générale relative à $\boldsymbol{X}(t)$ n'est possible. Même la moyenne $\boldsymbol{M}(t)$ peut avoir des oscillations presque sûres entre des maxima indéfiniment croissants et des minima tendant vers zéro.

38 Avenue Théophile Gautier,
Paris 16e.

APPLICATIONS OF HANKEL TRANSFORMS IN THE THEORY OF PROBABILITY

Reginald Douglas Lord

A spherically symmetrical distribution in s dimensions has a characteristic function which on changing to polar coordinates easily reduces to a Hankel transform of order $(\frac{1}{2}s - 1)$. There results a theory of these distributions parallel to the theory of one-dimensional distributions (and including that of symmetrical one-dimensional distributions as a special case).

The probability function of the distribution of a sum of independent random vectors is obtained in the form of an integral involving Bessel functions, evaluable in closed form in certain cases. Expansions using generalized Laguerre polynomials correspond to type A expansions.

When a spherical distribution is projected onto a space of lower dimension through the centre of the distribution, another spherical distribution is obtained. The two distributions have the same characteristic function, and their probability functions are connected by a simple relation involving derivatives (of fractional order if the difference between the dimensions of the two spaces is odd). Thus problems in higher space are solvable in principle by projecting on to a diameter of the distribution and then working in one dimension.

The exponential distribution and a related one provide illustrations of the theory.

GLENBANK, LENZIE,
GLASGOW, SCOTLAND.

ON CERTAIN PERIODIC CHARACTERISTIC FUNCTIONS

EUGENE LUKACS

Let $F(x)$ be a probability distribution, that is, a nondecreasing, right-continuous function such that $F(-\infty) = 0$ and $F(+\infty) = 1$. The Fourier transform of $F(x)$, that is the function $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x)$ is called the characteristic function of $F(x)$.

A distribution is called a *lattice distribution* if it is purely discontinuous and if its discontinuity points form a (proper or improper) subset of a sequence of equidistant points.

A characteristic function is said to be an *analytic characteristic function* if it is an analytic function coinciding in some neighborhood of the origin with a characteristic function.

We prove the following theorems:

THEOREM 1. An analytic characteristic function which is single valued in the whole complex plane and periodic has either a real or a purely imaginary period. The period is real if and only if the characteristic function belongs to a lattice distribution.

THEOREM 2. A characteristic function is an entire periodic function (not identically equal to one) if and only if it is the characteristic function of a lattice distribution.

For the proof of these theorems we use the following lemma:

Let $\Phi(z)$ be an analytic characteristic function with the strip of convergence $-\alpha < I(z) < \beta$ and assume that there are three real numbers n_1, n_2, n_3 such that

(i) $-\alpha < n_1 < n_2 < n_3 < \beta$

(ii) $n_1 + n_3 = 2n_2$

(iii) $\Phi(in_1) = \Phi(in_2) = \Phi(in_3)$

Then $\Phi(z) \equiv 1$.

3727 Van Ness Street, N.W.
Washington 16, D.C.

ON ALTERNATIVE METHODS OF REPRESENTING UNIVARIATE DISTRIBUTIONS BY MATHEMATICAL CURVES

M. A. Chakradhar Mishra

With a view to ascertaining the exact contribution to higher moments of the Pearsonian System of Frequency Curves, $y = f(x)$, the function

$$\mu_s[X] = \int_{-\infty}^{X} x^s f(x)\,\mathrm{d}x \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x)\,\mathrm{d}x$$

is tabulated for values of X satisfying the equation

$$\int_{-\infty}^{X} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

α having the values .0005, .001, .005, .01, .025, .05 and .95, .975, .99, .995, .999, .9995. These tables demonstrate that the tail areas of standard distributions contribute a very high proportion to higher order moments. Consequently in fitting the parameters of frequency curves by Method of Moments, we would be giving undue weight to stray observations at the tails of the distributions. On the other hand, the Method of Maximum Likelihood leads to equations which are very difficult to solve.

As an alternative approach, a generalised Method of Moments is proposed in the form

$$\lambda_s^{(r)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f^r \mathrm{d}x$$

where $f = f(x)$ is the frequency function. The efficiency of the „Frequency Moments", a particular case of the above for $s = 0$, is studied in some detail and tables are provided to facilitate the fitting of parameters of Pearsonian System of Curves by this Method.

10 Chalcot Gardens,
London, N.W. 3.

TESTS NON-PARAMÉTRIQUES POUR LA COMPARAISON DE DEUX OU PLUSIEURS ÉCHANTILLONS

PAUL DE MUNTER

Une inégalité de Tchebycheff, valable pour deux variables aléatoires, est proposée. Elle permet de déterminer les conditions auxquelles doit satisfaire un test basé sur la considération simultanée de deux valeurs typiques afin qu'il soit consistant. La méthode est appliquée au test proposé par Whitney (1951) pour la comparaison de trois échantillons.

Un test est proposé pour la comparaison de plusieurs échantillons à un échantillon de référence; on démontre que le test est consistant relativement aux alternatives $F_I > F_k$ ou $F_I < F_k$, où F_I est la fonction de distribution de la population standard et F_k la fonction de distribution de la k^e population que l'on compare a F_I. Lorsque le nombre d'échantillons est égal a deux, le test se ramène a certains tests connus du problème des deux échantillons (Dixon (1940), Mathisen (1943)), suivant les valeurs que prend le paramètre dont il dépend. On détermine ainsi les alternatives relativement auxquelles ces tests sont consistants.

CH. D'ALSEMBERG, 684,
UCCLE, BELGIQUE.

PROBABILISTIC THEORY OF CLUSTERING OF GALAXIES WITH PARTICULAR REFERENCE TO THE HYPOTHESIS OF AN EXPANDING UNIVERSE

JERZY NEYMAN

The subject of the theory is the relation between the characteristics of the distribution of galaxies in space and the distribution of their images on a photographic plate. Let $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ be arbitrary solid angles with vertices at the observer. At time $t = 0$ a photograph is taken over ω_i and m_i denotes the limiting magnitude of the plate used. For a galaxy g denote by $T(g)$ the moment in the past at which g emitted the light signal that reaches the observer at time $t = 0$. If at time $T(g)$ the galaxy g was located within ω_i and if its apparent magnitude was brighter than m_i, then the photograph taken over ω_i will contain the image of g. We shall say that g is "visible" in ω_i. Denote by N_i the total number of galaxies visible in ω_i. The principal result obtained is the generating function of the joint distribution of $N_1, N_2, \ldots, N_s$. It is expressed in terms of the characteristics of the spatial distribution of galaxies considered earlier by Neyman and Scott (*Astrophysical Journal*, Vol. 116 (1952), pp. 144—163). They are: expectation of the number of cluster centers in unit volume, the probability law of the number ν of galaxies per cluster, the conditional probability density of coordinates of a galaxy given those of the center of the cluster to which it belongs and the luminosity function of galaxies. In addition, the formula deduced involves two unspecified functions $H_1(t)$ and $H_2(t)$, the first characterizing the law of recession of cluster centers from the observer and the second the law of expansion of each cluster. If $H_1 = H_2 = 0$, then the universe is static. A possible test of the hypothesis of expansion of the universe is based on the comparison between empirical serial quasicorrelations (Neyman, Scott, Shane, *Astrophysical Journal*, Vol. 117 (1953) pp. 92—133) between counts of images of galaxies in regularly spaced squares and their theoretical counterparts depending on H_1 and H_2.

It is hoped that the present results will be published in the Annales de l'Institut Henri Poincaré.

STAT. LAB., UNIV. OF CALIF.
BERKELEY 4, CALIF., U.S.A.

LO SCHEMA DI COOLIDGE GENERALIZZATO

GIUSEPPE POMPILJ

Sunto: La teoria delle rilevazioni per campioni riceve un decisivo contributo dall'introduzione e dall'impiego sistematico delle variabili casuali associate agli schemi classici, opportunamente generalizzati, delle prove ripetute con estrazione senza ripetizione. E precisamente, senza entrare nei dettagli della generalizzazione, si ha la seguente corrispondenza:

Schema di Bernoulli:	campione semplice
Schema di Poisson:	campione stratificato
Schema di Laplace o Lexis:	campione a due stadi
Schema di Coolidge:	campione a due stadi di cui il secondo stratificato.

Per il caso generale: campione a più stadi tutti stratificati occorre un ulteriore schema, che chiamo *schema di Coolidge generalizzato*, a cui resta associata una variabile casuale delle prove ripetute a parecchie alternative che viene qui studiata determinandone i primi momenti.

10, MATTEO RICCI,
ROMA, ITALIE.

GENERALIZED CAUCHY DISTRIBUTIONS

PAUL REECE RIDER

Statistical distributions of the form $C(1 + |x|^k)^{-m}$ are considered. For $k = 2$, $m = 1$ this is the Cauchy distribution. For $k = 2, m = \frac{1}{2}(n + 1)$, $x = n^{-\frac{1}{2}}t$, it is the Student-Fisher distribution with n degrees of freedom. The Cauchy distribution is of interest because the variance of the mean is infinite while that of the median is finite. In this paper a study is made of the case $m = 1$. The value of k is determined for which the variance of the mean and that of the median are equal.

The distribution of the mean for the case $k = 4$, $m = 1$ is derived. Several other special cases are studied.

422 HARMON BOULEVARD,
DAYTON 9, OHIO, U.S.A.

SEQUENTIAL PROCEDURES IN THE ANALYSIS OF VARIANCE

STANLEY RUSHTON

A general method of constructing likelihood ratio criteria for sequential procedures involving the testing of composite hypotheses was first proposed by Wald (1945, 1947). This method made use of weight functions, functions of the nuisance parameters, so chosen that the procedures possessed certain desirable general properties, particularly with regard to the risks of wrong decisions. Such weight functions are just prior distributions for the nuisance parameters and no conditions were given by Wald for a unique choice. But in many commonly occurring situations a natural choice exists among the alternative test criteria to which such weight functions lead, as pointed out by Barnard (1949) — For example, in the case of a sequential t-test. General sufficient conditions for the derivation of unique criteria were subsequently discussed by Barnard (1952) and Cox (1952) and applied to a number of practical sequential tests (see, for example Rushton (1950, 1952a and 1952b).

In analysis of variance situations the natural sequential test to use will be a sequential F-test based on the likelihood ratio

$$\lambda = \varphi(f \mid \delta_1) / \varphi(f \mid \delta_2),$$

where $\varphi(f/\delta)$ is the probability density function of the appropriate sample variance ratio $\boldsymbol{F}$ involving a certain non-centrality parameter δ_2 and δ_1 and δ_2 are two specified values of δ (Rushton 1951, 1952c). The general justification of such likelihood ratio criteria is given in the present paper.

In general, such analysis of variance criteria involve the confluent hypergeometric function $M(\alpha, \gamma, x)$, where

$$M(\alpha, \gamma, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+j)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+j)} \cdot \frac{x^j}{j!}.$$

An extensive tabulation of this function has been completed (Rushton 1951, 1952c, 1952d) to facilitate the application of these tests. The present paper gives detailed applications of these tables to analysis of variance tests. For example, procedures for one-criterion analyses of variance are discussed. These latter situations, based on a one-way classification are usually distinguished according to two general models: "systematic" and "random". In the "random" model the appropriate test is equivalent to that for testing the equality of the variances of two distinct populations, as we point out. On the other hand, the "systematic" model makes use of the function $M(\alpha, \gamma, x)$. Problems associated with approximate procedures and the probability of termination of the sequential procedures, and related questions, are also discussed.

REFERENCES

[1] G. A. BARNARD, (1949): J. R. S. S. (B), **11**, p. 115.
[2] ———, (1952): Biometrika, **39**, p. 144.
[3] D. R. COX, (1952): Proc. Camb. Phil. Soc., **48**, p. 290.
[4] S. RUSHTON, (1950): Biometrika, **37**, p. 326.
[5] ———, (1951): Ph.D. Thesis, University of London.
[6] ———, (1952a): Sankhya, **12**, p. 63.
[7] ———, (1952b): "On $M(\alpha, \gamma, x)$", Sankhya (submitted).
[8] ———, (1952c): "Tables of $M(\alpha, \gamma, x)$", Sankhya (submitted).
[9] A. WALD, (1945): Ann. Math. Stat., **16**,
[10] ———, (1947): "Sequential analysis".

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
IMPERIAL COLLEGE, LONDON S.W. 7, ENGLAND.

WALD'S FUNDAMENTAL IDENTITY FOR GENERAL STOCHASTIC PROCESSES

CAREL LOUIS SCHEFFER

In the theory of sequential analysis Wald's fundamental identity, which is a relation between the probabilities that the sequential procedure will end at the n-th trial and the characteristic function of the transition probabilities, plays an important rôle. Generalizations have been obtained by J. Kemperman and D. van Dantzig. The method used by van Dantzig lends itself to a further generalization to arbitrary hereditary time discrete stochastic processes. In order to obtain this generalization the following conjecture of R. P. Feynman has been proved: Every time a discrete stochastic process can be transformed into a stationary Markov process on the space F_ω of all "paths" (i.e. the space of all finite sequences $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, where $n = l(\pi)$, i.e. the "length" of the path, runs through the set of all natural numbers, and x_i varies over the set of all possible outcomes of the i-th trial).

If $\mathrm{P}_{X_n}^{x_1, \ldots, x_{n-1}}$ are the transition probabilities of a given general time discrete stochastic process, where each x_i runs through a given abstract set E_i provided with a σ-field $\sigma(E_i)$, whereas $X_n \in \sigma(E_n)$, then the stationary Markov process is defined on $F_\omega = \cup F_n$ where $F_n = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, and has transition probabilities $Q_\Lambda^\pi = \mathrm{P}_{\Xi(\pi, \Lambda)}^{x_1, \ldots, x_n}$, where $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (or empty) and $\Xi(\pi, \Lambda) = \mathrm{Ens}\{x \in E_{n+1} \mid \pi x \in \Lambda\}$, πx being the path $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$.

Let σ_ω be a σ-field of subsets of F_ω, and let for each element (path) $\pi \in F_\omega$ a number A^π with $0 \leqq A^\pi \leqq 1$, be defined, which may be interpreted as the probability that the wandering point will be "absorbed" in the "end-point" $x(\pi) = x_n$ of $\pi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; let $\mathscr{I}(\pi)$ denote the path obtained from $\pi = (x_1, \ldots, x_n)$ by omitting $x_n : \mathscr{I}(\pi) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $\mathscr{I}^{k+1}(\pi) = \mathscr{I}(\mathscr{I}^k(\pi))$; $\beta^\pi = \prod_0^{l(\pi)-1} (1 - A^{\mathscr{I}^k(\pi)})$; let further T^π be an arbitrary measurable function on F_ω, subjected to some general conditions of boundedness, $V^\pi = \prod_0^{l(\pi)-1} T^{\mathscr{I}^k(\pi)}$. Let finally f^π be an arbitrary, complex valued, σ_ω-measurable function, which also is subjected to some conditions of boundedness.

Then the following generalization of Wald's fundamental identity can be proved:

The function D_Λ^π defined by

$$D_\Lambda^\pi = \sum_0^\infty \int_\Lambda Q_{(n)\mathrm{d}\tau}^{\ \pi} \beta^{\mathscr{I}(\tau)} A^\tau V^{\mathscr{I}(\tau)},$$

where $Q_{(n)\Lambda}^{\ \pi}$ is the n-fold convolution of Q_Λ^π, whereas $Q_{(0)\Lambda}^{\ \pi}$ is the characteristic function of the set $\Lambda \in \sigma_\omega : Q_\Lambda^\pi = 1$ if $\pi \in \Lambda$ and $= 0$ if $\pi \notin \Lambda$, has the following property: the relation

$$\int_{F_\omega} D_{\mathrm{d}\tau}^\pi f^\tau = \beta^{\mathscr{I}(\pi)} V^{\mathscr{I}(\pi)} f^\pi$$

is equivalent with

$$f^\pi = T^\pi \int_{F_\omega} Q_{\mathrm{d}\tau}^\pi f^\tau$$

for all $\pi \in F_\omega$ for which $\beta^\pi V^{\mathscr{I}(\pi)} \neq 0$.

REFERENCES

[1] D. v. DANTZIG, (1953) Time discrete stochastic processes in arbitrary sets, with applications to processes with absorbing regions and to the problem of loops in Markov chains. Mathematisch centrum Amsterdam (prepublication), to appear in Ann. de l'Inst. H. Poincaré.

[2] R. P. FEYNMAN, (1948) Space time approach to non relativistic quantum mechanics. Rev. Mod. Physics **20** (1948) 367—387.

[3] J. H. B. KEMPERMAN, (1950) The general one dimensional random walk with absorbing barriers, with applications to sequential analysis, (Ph. D.-Thesis, Amsterdam)

[4] A. WALD, (1950) Statistical decision functions, J. Wiley and sons New York.

AMSTERDAM

DISTRIBUTION OF CERTAIN CHARACTERISTICS OF CLUSTERS OF GALAXIES, WITH PARTICULAR REFERENCE TO THE HYPOTHESIS OF AN EXPANDING UNIVERSE

ELIZABETH L. SCOTT

The subject of the present paper is the relation between the distribution of galaxies in space and the distribution of the characteristics of the images of clusters that may be visible on a photographic plate. With reference to the theory published earlier (Neyman and Scott, *Astrophysical Journal*, Vol. 116 (1952), pp. 144—163), consider a cluster C composed of $\boldsymbol{\nu}$ galaxies (where $\boldsymbol{\nu} > 0$ is treated as a random variable). At time $t = 0$ a photograph is taken of this cluster and m^* stands for the limiting magnitude of the plate. For the i^{th} galaxy g_i of the cluster denote by T_i the moment in the past when the galaxy emitted the light that reaches the plate at $t = 0$. Let $\boldsymbol{m}_i$ denote the apparent magnitude of g_i and let $\boldsymbol{\varphi}_i$ denote the angle between the directions from the observer to g_i and from the observer to the center of the cluster C, both referring to the moment T_i. If $\boldsymbol{m}_i < m^*$ then the photograph will contain the image of the galaxy g_i and we shall say that g_i is visible. Denote by $\boldsymbol{\nu}^*$ the number of galaxies of the cluster C that are visible. Also, denote by $\boldsymbol{\Phi}(r)$ the r^{th} largest of the angles $\boldsymbol{\varphi}$ that correspond to visible galaxies of the cluster C, on the assumption that $\boldsymbol{\nu}^* \geqq r$. The angle $\boldsymbol{\Phi}(1)$ is described as the apparent radius of the cluster C. Let k be any fixed number $\geqq 0$.

The principal results obtained include the probability distributions, conditional on $\boldsymbol{\nu}^* > k \geqq r$, of the random variables $\boldsymbol{\nu}^*$, $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{\varphi}_i$ and $\boldsymbol{\Phi}(r)$. These distributions are expressed in terms of the characteristics of the spatial distribution of galaxies: the distribution of $\boldsymbol{\nu}$; the conditional probability density of the coordinates of a galaxy given the coordinates of the center of the cluster to which it belongs; and in terms of the luminosity function of the galaxies.

Also, the formulae deduced involve two functions $H_1(t)$ and $H_2(t)$ contemplated by Neyman (see paper presented at Section IV of the present Congress) that characterize the expansion of the universe. If $H_1(t) = H_2(t) = 0$ then the universe is static. The formulae deduced are interesting by themselves. In addition, if reliable empirical distributions of any or all of the characteristics $\boldsymbol{\nu}^*$, $\boldsymbol{m}_i$, $\boldsymbol{\varphi}_i$, and $\boldsymbol{\Phi}(r)$ of visible clusters are compiled, the same formulae may be useful in estimating the characteristics of the spatial distribution and in testing the hypothesis of expansion of the universe.

STAT. LAB., UNIV. OF CALIF.,
BERKELEY 4, CALIF., U.S.A.

REGENERATIVE STOCHASTIC PROCESSES

WALTER L. SMITH

Let $\{\boldsymbol{t}_i\}, i = 0, 1, 2, \ldots$ be a sequence of non-negative, independent random variables, all but the first of which are identically distributed with a non-zero mean $\mu_1 \leqq \infty$. Let $\boldsymbol{n}_t$ be the maximum k such that $\boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{t}_0 + + \boldsymbol{t}_1 + \ldots + \boldsymbol{t}_{k-1} \leqq t$ (defining $\boldsymbol{n}_t = 0$ when no such k exists). Let $\boldsymbol{x}_t$ be a stochastic process taking values on some abstract space $\mathscr{X}$, on which a Borel field $\mathscr{B}$ of $\boldsymbol{x}$-sets $\mathscr{A}$ is defined, and let $\boldsymbol{b}$ be an abstract random variable taking values on some abstract space $\mathscr{Y}$ ($\boldsymbol{b}$ is to be interpreted as the 'starting conditions' at $t = 0$ and $\mathscr{Y}$ is not necessarily the same space as $\mathscr{X}$). We say the process is *weakly-regenerative* ($\mathscr{Y}$, $\mathscr{B}$) if a sequence $\{t_i\}$ exists such that for each $\mathscr{A} \in \mathscr{B}$ there is a $\lambda_{\mathscr{A}} \geqq 0$ and a function $\varphi_{\mathscr{A}}(.)$ with the property that the conditional probability

$$P\{\boldsymbol{x}_t \in \mathscr{A} \mid \boldsymbol{b};\ \boldsymbol{x}_s,\ s \leqq T_{n_t};\ T_{n_t}\}$$

may be defined as $\varphi_{\mathscr{A}}(t - T_{n_t})$ whenever $t - T_{n_t} \geqq \lambda_{\mathscr{A}}$. When $\lambda_{\mathscr{A}} = 0$ for all $\mathscr{A} \in \mathscr{B}$ we say the process is *strongly-regenerative*.

It has been proved under general conditions that for any (weakly) regenerative process for which $\boldsymbol{t}_0 < \infty$ with probability one,

$$(*) \qquad \lim_{t \to \infty} P\{\boldsymbol{x}_t \in \mathscr{A} \mid \boldsymbol{b}\}$$

exists and is independent of $\boldsymbol{b}$. When the process is strongly-regenerative the limit (*) may be shown equal to

$$(**) \qquad \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty \varphi_{\mathscr{A}}(t)\{1 - F(t)\}\,\mathrm{d}t,$$

where $F(t)$ is the distribution function of $\boldsymbol{t}_1$, and $\mu_1^{-1} = 0$ if $\mu_1 = \infty$.

The tool for the proof of the theorem is renewal theory; the main condition for its validity is either that $\varphi_{\mathscr{A}}(.)$ is of bounded variation in every finite interval (a, b) where $a \geqq \lambda_{\mathscr{A}}$ and that $\varphi_{\mathscr{A}}(.)\{1 - F(.)\} \in L_1(0,\infty)$, or that $\mu_1 < \infty$ and for some k the distribution of $\boldsymbol{T}_k$ has an absolutely continuous component.

The above result represents an attempt to extend the theory developed by Feller for 'discrete-time' processes (in Trans. Amer. Math. Soc., **67**, (1949), 98—119) to a wider class of processes in 'continuous-time'; in particular, it leads to the proof of the existence of a limiting distribution of waiting-times and queue-sizes in the k-server queue process with general independent input and independent service times, thus extending the recent result of D. G. Kendall (Ann. Math. Statist., **24** (1953), 338) on the random-arrivals case.

3 St. Paul's Road,
Cambridge, England.

AN UPPER BOUND FOR THE DEVIATION FROM NORMALITY OF WILCOXON'S TEST STATISTIC FOR THE TWO-SAMPLE PROBLEM IN THE GENERAL CASE

David Johannes Stoker

Given two independent random samples $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ and $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ which are drawn from two populations with (cumulative) distribution functions F and G respectively. Wilcoxon's two-sample test is based on the statistic $\boldsymbol{U}$ defined by the number of pairs (i, j) $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ with $\boldsymbol{y}_j < \boldsymbol{x}_i$ together with half the number of pairs (i, j) with $\boldsymbol{y}_j = \boldsymbol{x}_i$ (cf. Hemelrijk).

If we define

$$\theta = \mathrm{P}(\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x} \mid F, G) + \tfrac{1}{2}\mathrm{P}(\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \mid F, G) = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \big(G(x+0) + G(x-0)\big)\, \mathrm{d}F(x)$$

$$\Gamma_r = \int_{-\infty}^{\infty} \big\{\tfrac{1}{2}(G(x+0) + G(x-0)) - \theta\big\}^r \mathrm{d}F(x)$$

$$\Lambda_r = \int_{-\infty}^{\infty} \big\{1 - \tfrac{1}{2}(F(y+0) + F(y-0)) - \theta\big\}^r \mathrm{d}G(y)$$

$$\sigma_1^2 = (m+n)^{-1}\big\{m\Lambda_2 + n\Gamma_2 + \theta(1-\theta) - (\Lambda_2 + \Gamma_2)\big\}$$

$$\sigma_2^2 = (m+n)^{-1}(m\Lambda_2 + n\Gamma_2),$$

then we have by means of one of Berry's estimates

$$\sup_{-\infty < \xi < \infty} \big| \mathrm{P}[\boldsymbol{U} - \mathscr{E}(\boldsymbol{U} \mid F, G) \leqq \xi\sigma_{\boldsymbol{U}} \mid F, G] - \Phi(\xi) \big| \leqq \Delta(m, n; F, G)$$

where

$$\Phi(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$\sigma_{U^2} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{var}(U \mid F, G) = \sigma_1^2 \qquad \text{(cf. D. van Dantzig)}$$

and

$$\Delta(m, n; F, G) = \frac{1.88 \max\left(n\sqrt{\Gamma_4/\Gamma_2};\ m\sqrt{\Lambda_4/\Lambda_2}\right)}{\sqrt{mn(m+n)} \cdot \sigma_2} + \min_{\delta} \left[\frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\delta^2} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}\sigma_2} \{\delta + \max(\delta, \sigma_1 - \sigma_2)\}\right].$$

Thus $\Delta(m, n; F, G)$ tends to 0 when m and n both tend to infinity, no matter how, unless σ_2 is equal to 0 or tends to 0.

Although better results have been obtained, we only state here the above upper bound because of its simplicity. Also further improvements of the upper bound have been obtained for values of ξ far from 0.

The method used to obtain an upper bound for the deviation from normality of Wilcoxon's statistic, can also be applied to other statistics of the class of statistics introduced by Hoeffding (1948) and Lehmann (1951).

[1] A. C. Berry, The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc., **49** (1941), 122—136.

[2] D. van Dantzig, On the consistency and the power of Wilcoxon's two sample test, Proc. Kon. Ned. Ak. van Wetensch., **A54** (1951), 3—10; Indagationes Mathematicae **13** (1951), 1—8.

[3] C. G. Esseen, Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law, Acta Math, **77** (1945), 1—125.

[4] J. Hemelrijk, Note on Wilcoxon's two sample test when ties are present, Ann. Math. Stat. **23** (1952), 133—135.

[5] W. Hoeffding, A class of statistics with asymptotically normal distributions, Ann. Math. Stat. **19** (1948), 293—325.

[6] E. L. Lehmann, Consistency and unbiasedness of certain non-parametric tests, Ann. Math. Stat. **22** (1951), 165—179.

Lekstraat 73III,

Amsterdam.

ON A BASIC DISTRIBUTION-FREE MULTI-DECISION SOLUTION OF A CERTAIN k-SAMPLE PROBLEM

Hubertus Robert van der Vaart

If k independent random samples of sizes $n_1, n_2, \ldots, n_k$ are drawn from k univariate collections described by k random variables $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$

with *unknown* continuous cumulative distribution functions

$$F_i(x) = F(x - \mu_i) \qquad (i = 1, \ldots, k), \tag{1}$$

then the problem of choosing (*a*) between the sign $<$ and the sign $=$ for each $\leqq$ in (2) and (*b*) between the $k!$ permutations $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ of the integers $1, 2, \ldots, k$ in

$$\mu_{i_1} \leqq \mu_{i_2} \leqq \ldots \leqq \mu_{i_k} \tag{2}$$

constitutes a multi-decision k-sample problem: contrary to various procedures recently proposed to test the hypothesis

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k \tag{3}$$

we admit *all* alternatives (2) to our decision problem.

A solution (comprising some [1, 2] of the above-mentioned procedures) of this problem can be constructed from the k statistics R_i $(i = 1, \ldots, k)$ (Kruskal & Wallis [1]: R_i = sum of ranks in i-th sample when observations are arranged in order). As

$$\sum_{i=1}^{k} R_i = \tfrac{1}{2}N(N+1), \text{ where } N = \sum_{i=1}^{k} n_i, \tag{4}$$

the points actually found in $(R_1, R_2, \ldots, R_k)$-space must lie in a hyperplane; if e.g. $k = 3$ the R_i represent triangular coordinates (the joint probability distribution of $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_k$ under (3) can be — and, partly, has been[1] — calculated exactly from certain recurrence relations). Consider the case $k = 3$. From the obvious inequalities

$$\tfrac{1}{2}n_i(n_i+1) \leqq R_i \leqq \tfrac{1}{2}\, n_i(2N - n_i + 1) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

it follows that all of the points (R_1, R_2, R_3) lie within a certain hexagon, the neighbourhoods of its vertices corresponding to decisions like $\mu_2 < \mu_1 < \mu_3$, the neighbourhoods of the centres of its sides corresponding to decisions like $\mu_1 = \mu_3 < \mu_2$, and the central part of the hexagon corresponding to the decision $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Generalization to $k > 3$ is immediate though somewhat cumbrous. A new trend test (not equivalent to Terpstra's [3] test, though both our $\boldsymbol{R}_i$ and his $\boldsymbol{T}$ are linear functions of his $\boldsymbol{U}_{i,j}$) follows easily from this picture.

The precise boundaries between the various regions, indicated below (5), in R-space depend on the properties required of the performance characteristic and hence also on the function F. If F denotes the normal distribution, the

---

[1] W. H. Kruskal & W. A. Wallis, Jrn. Amer. Stat. Ass. **47** (1952), 583—621.
[2] P. J. Rijkoort, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **A55** (1952), 394—404.
[3] T. J. Terpstra, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **A55** (1952), 327—333.

performance characteristic can be analytically calculated though Monte Carlo methods are perhaps preferable (analytical calculation demands N-tuple integrals of type $\int \ldots \int_{\mathscr{U}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}(z_i-a_i)^2\right\}\prod_{i=1}^{N} dz_i$ to be computed, where $\mathscr{U}$ is defined by $z_1 < z_2 < \ldots < z_N$; to this end we substitute $z_i - a_i = z_i'$ $(i = 1, \ldots, N)$, $2^{-\frac{1}{2}}(-z_i' + z_{i+1}') = y_i$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ and $N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{N} z_i' = y_N$; then $\mathscr{U}$ is defined by $y_i > 2^{-\frac{1}{2}}(\mu_i - \mu_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, N-1)$; y_N can be integrated out and the remaining integrand can be developed in a well-known multiple Fourier-Hermite series the integration of which is immediate). Skewness of F will have some deteriorating influence on the performance characteristic (cf. van der Vaart's [4] results on Wilcoxon's test — equivalent to the present solution if $k = 2$ — in case $n_1 \neq n_2$). The present multi-decision solution may presumably be sharpened by methods like those applied to Wilcoxon's test by Terry [5] and by van der Waerden [6]. Finally we remark that if the $\boldsymbol{x}_i$ be allowed to have different variances, the joint probability distribution of the $\boldsymbol{R}_i$ under hypothesis (3) will depend on the ratios of these variances: though Wilcoxon's test is less sensitive to differences between the variances than Student's test, it is by no means insensitive to them.

BOSHUIZERKADE 11,
LEIDEN, NETHERLANDS.

ON DEVELOPMENT OF SYMMETRIC FUNCTIONS AND SYMMETRIC FUNCTIONAL STATISTICS

M. ZIAUD-DIN

Symmetric functions have played an important part in modern algebraic theory and statistics. In this "Memoir" a brief and up-to-date historical development of symmetric functions has been traced from various points of view such as theory of equations, combinatory analysis, determinants, matrices, number theory, groups and statistics.

Newton in his lectures delivered at Cambridge (1673—1683) published as "Arithmetica Universalis 1707" first established a general relation between the coefficients and the sums of the powers of the roots of an equation, which are symmetric functions. Later on symmetric functions have been developed

[4] H. R. VAN DER VAART, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **A56** (1953), 438—448.
[5] M. E. TERRY, Ann. Math. Stat. **23** (1952), 346—366.
[6] B. L. VAN DER WAERDEN, Math. Annalen **126** (1953), 93—107.

from an algebraic point of view by Waring, Wronski, Brioschi, Meyer-Hirsch, Hammond, Cayley, Macmahon, Vahlen, Cauchy, Trudi, Segar, Muir (T), Decker, Jacobi, Naegelsbach, Kastka, Saalchutz, Roe, Dresden, Kakeya, Tietze, Van der Corput, Turnbull, Aitken, O'Toole, Dwyer, Glaisher, Frobenius, Schur, Littlewood (D. E.) and Richardson, Littlewood, Ziaud-Din, Murnaghan, Todd, Foulkes, Newell, Duncon, Ibrahim, David and Kendall and a large number of other writers.

Symmetric functional statistics was brought in prominence in 1889 by Thiele when he studied symmetric functions with the Law of Errors in statistics. Later on symmetric functional statistics had been a subject of study, particularly in relation to theory of sampling and sampling distributions and research work has been done by Thiele, Craig, Fisher, Carver, O'Toole, Dwyer, Sukhatme, Kendall, David and Kendall, Dressel, Pierce, Ziaud-Din, Tukey, Wishart and others. An account of all the available papers has been embodied in this memoir with research notes.

INSTITUTE OF STATISTICS,
PANJAB UNIVERSITY, LAHORE (PAKISTAN).

Section V

MATHEMATICAL PHYSICS AND APPLIED MATHEMATICS

RICERCHE SULLE SOLUZIONI PERIODICHE DEL PROBLEMA RISTRETTO DEI TRE CORPI

CATALDO AGOSTINELLI

Si considerano le equazioni del movimento di un satellite ettratto da un pianeta e dal Sole con la legge di Newton in un caso più generale di quello di Hill. Si determinano le condizioni per l'esistenza di soluzioni periodiche, se ne studia la stabilità e si assegnano per gli elementi del moto degli sviluppi in serie con procedimenti affini a quelli di Kriloff e Bogoliuboff relativi al caso delle soluzioni periodiche di un'equazione non lineare.

CORSO DUCA ABRUZZI 34BIS,
TORINO.

RECENT RESULTS ON THE EQUATION OF BURNING

FRANZ L. ALT

The temperature distribution resulting from an exothermic chemical reaction in a solid is governed by the equation

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + F(T)$$

if suitable dimensionless units of length, time (t) and temperature (T) are used. For simple reactions $F(T)$ is the Arrhenius expression

$$F(T) = \exp\left(-\frac{1}{T}\right).$$

Other terms are sometimes added to represent heat transfer to the surrounding space, the gradual loss of reagent material etc.

The special case of heat flow in a thin rod of combustible material has been studied in detail. One is interested in stationary solutions in which burning progresses at constant speed along the rod. This case is described by the equation

$$T'' + vT' + \exp\left(-\frac{1}{T}\right) = 0.$$

In a standard way this equation is reduced to a first-order nonlinear differential equation whose solutions are of either of two kinds depending on the value of v. There is a limiting value

$$V = 0.90280\ldots$$

separating the two cases. This critical V, which represents a dimensionless velocity measured in units depending on the thermic properties of the burning process, plays a fundamental rôle for the equation of burning.

The case of spherical domains is also of interest. The results obtained for this case can be compared with temperature measurements taken in samples of combustible porous material (such as fiberboard). If the required thermic constants are known, the differential equation can be solved by power series expansion or numerical integration. More commonly the constants are not known but are to be determined from measurements. For small samples, heat flow within the sample can be shown to be negligible; one obtains a linear relation for $\log (T_p - T_a)$ in terms of $\frac{1}{T_p}$, where T_p is the sample temperature at equilibrium, T_a the ambient temperature. The logarithm of the sample radius enters additively, which is in agreement with measurements taken on samples of different sizes.

NATIONAL BUREAU OF STANDARDS,
WASHINGTON, D.C.

ÜBER DIE BEWEGUNG STARRER KÖRPER MIT NICHT-HOLONOMEN BINDUNGEN IN EINER INKOMPRESSIBLEN FLÜSSIGKEIT

TATOMIR P. ANGELITCH

Die Aufstellung von Bewegungsgleichungen für ein nichtholonomes System, das sich in einer inkompressiblen Flüssigkeit bewegt, wird auf folgende Weise beantwortet.

Man setzt eine unendliche und homogene ideale Flüssigkeit voraus und man nimmt an, wie üblich, dass die Flüssigkeit zusammen mit den starren Körpern ein dynamisches System bildet.

Es sei dann das nichtholonome System durch $n + k$ unabhängige Koordinaten $q^{i'}$ $(i' = 1, 2, \ldots, n, n + 1, \ldots, n + k)$ bestimmt und es seien k nichtholonome Bindungen durch die Gleichungen

$$\dot{q}^{n+\nu} = a_i^\nu \dot{q}^i + a^\nu, \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

wo der Punkt die Ableitung nach der Zeit t bedeutet, gegeben.

Ausserdem seien $Q_{i'}$ die generalisierten Komponenten, der auf das nichtholonome System eingeprägten Kräfte, gegeben.

Nun, unter der Voraussetzung dass die Flüssigkeitsbewegung allein von der Bewegung der starren Körper abhängig ist, wird diese eine Potentialbewegung.

Im Falle der azyklischen Bewegung bestimmt man die kinetische Energie T_3 des gesamten Systems, indem man die kinetische Energie der Flüssigkeit

$$T_1 = \tfrac{1}{2}\beta_{i'j'}\dot{q}^{i'}\dot{q}^{j'}$$

für sich, und die kinetische Energie der starren Körper

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\gamma_{ij}\dot{q}^{i}\dot{q}^{j}$$

für sich bestimmt. Die beiden Ausdrücke lassen sich unter sehr breiten Voraussetzungen ableiten und sie ergeben für die Energie des gesamten Systems

$$T_3 = T_1 + T_2 = \tfrac{1}{2}\alpha_{i'j'}\dot{q}^{i'}\dot{q}^{j'}.$$

Dabei sind im allgemeinen die Koeffizienten $\alpha_{i'j'}$ von allen Koordinaten $q^{i'}$ und von der Zeit t abhängig und genügen der Bedingung $\alpha_{i'j'} = \alpha_{j'i'}$.

Mit Hilfe von Gleichungen (1) aus T_3 lassen sich k generalisierte Geschwindigkeitskomponenten eliminieren und das Resultat bezeichnen wir

$$T = T(t; q^{i'}; \dot{q}^{i}). \tag{2}$$

Dadurch hätten wir die nötigen Angaben für die Aufstellung von Bewegungsgleichungen Lagrangescher Art die auch für nichtholonome Systeme gelten, z.B. wie sie in der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{i}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^{i}} = Q_i + a_i^{\nu}\left(\frac{\partial T}{\partial q^{n+\nu}} + Q_{n+\nu}\right) + \\ + p_{\nu}\left[\frac{da_i^{\nu}}{dt} - \frac{\partial \dot{q}^{n+\nu}}{\partial q^{i}} - \sum_{\mu=1}^{k}\frac{\partial \dot{q}^{n+\nu}}{\partial q^{n+\mu}}a_i^{\nu}\right] \tag{3}$$

durch P. Woronetz (Math. Annalen 1911) gegeben sind. Dabei sind $p_{\nu} = p_{\nu}(t; q^{i'}; \dot{q}^{i})$ die generalisierten Impulse welche den durch die Gleichungen (1) gebundenen Geschwindigkeitskomponenten entsprechen.

Man muss allerdings beachten, dass unser System unendlich viele Freiheitsgrade hat und es offenbar nicht am Platze ist anzunehmen dass die Koordinaten $q^{i'}$ auch die Bewegung individueller Flüssigkeitsteilchen bestimmen. Es muss daher besonders gezeigt werden dass die Bewegung des nichtholonomen Systems durch einfache Einsetzung von T in die Gleichungen (3) bestimmt ist. Zu dem Zweck geht man von der generalisierten Form

$$\int_{t_0}^{t_1}\left[\delta T + Q_{i'}\delta q^{i'} + p_{\nu}\left(\frac{d}{dt}\,\delta q^{n+\nu} - \delta\dot{q}^{n+\nu}\right)\right]dt = 0 \tag{4}$$

des Hamiltonschen Prinzips aus, worin

$$\frac{d}{dt}\,\delta q^{n+\nu} - \delta \dot{q}^{n+\nu} = \left(\frac{da_i^\nu}{dt} - \frac{\partial \dot{q}^{n+\nu}}{\partial q^i} - \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial \dot{q}^{n+\nu}}{\partial q^{n+\mu}}\, a_i^\nu\right) \delta q^i,$$

die sogenannte Hamelsche Übergangsgleichung darstellt. Nach längeren Transformationen, die auf ähnliche Art wie für den Fall der holonomen Systeme durchgeführt werden, kommt man zum Ziel. Also, der Einfluss der Flüssigkeit auf die Bewegung des nichtholonomen Systems, unter angegebenen Voraussetzungen, kommt nur in der Vermehrung der kinetischen Energie des nichtholonomen Systems um die kinetische Energie der Flüssigkeit selbst zum Ausdruck.

Durch ähnliche Betrachtungen wird auch der Fall der zyklischen Bewegung der Flüssigkeit behandelt. Es wird gezeigt dass in diesem Falle zu den Gleichungen (3) noch m Gleichungen von der Form

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\chi}_\lambda}\right) = 0, \tag{5}$$

wenn der Zusammenhang des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes von der $(m + 1)$-en Ordnung ist, wobei χ_λ die Flüsse bezeichnen, hinzugefügt werden müssen. Die Flüsse χ_λ kommen als neue m generalisierte aber zyklische Koordinaten zu den $q^{i'}$ hinzu.

STRAHINIĆA BANA 74,
BELGRAD, JUGOSLAWIEN.

FORCED VIBRATIONS OF ROCARD'S OSCILLATOR

GIUSEPPE AYMERICH

Starting from the elementary theory of the clock, Rocard has devised a simple model of the impulse-excited oscillations that in some respects resemble the relaxation oscillations. The differential equations of a Rocard's oscillator, when a sinusoidal excitation $A \sin \omega_1 t$ is applied, can be written

$$\frac{dx}{dt} = -2\,\epsilon\,\omega[x - x_0 \operatorname{sgn}(x)] + y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 x + A \sin \omega_1 t,$$

where $\operatorname{sgn}(x)$ is the discontinuous function that equals $+1$ for $x > 0$ and -1 for $x < 0$.

Assuming that the coefficient ϵ, the detuning $\sigma = \omega - \omega_1$ and the amplitude A of the excitation are small, and following substantially the method devised by Andronow and Witt for the Van der Pol's equation, harmonic and combination oscillations of the Rocard's model are investigated.

ISTITUTO MATEMATICO,
UNIVERSITÀ CAGLIARI (ITALY).

PLANE FLOW OF COMPRESSIBLE FLUID IN A NON-RIGID TUBE ADAPTING ITSELF INSTANTANEOUSLY TO PRESSURE

GAGANBIHARI BANDYOPADHYAY

When plane compressible flow takes place in a tube the non-uniformity of pressure in different parts of the tube tends to change the cross-section of the tube. The adaptation to the varying pressure is not instantaneous and also the change in the cross-section does not allow the flow to remain strictly plane flow. We have, however, neglected these two effects and set up our equations on the following assumption or approximations (The first is quite a common assumption in the literature for flow through tubes of variable cross section).

(1) The flow is everywhere characterised by the linear velocity u, other components of the velocity being neglected.

(2) The cross-section, σ, is a function of the pressure, p, only. This is equivalent to assuming that the cross-section immediately adapts itself to local pressure and is unaffected by any other cause.

We do not need any assumption regarding the form of the cross section.

With these assumptions the equation of continuity becomes

$$\frac{\partial(\varrho\sigma)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\varrho\sigma u)=0 \tag{1}$$

The equation of motion, however, remains unaffected and we have

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\varrho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{2'}$$

We can write (2′) in the form

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\sigma\varrho}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\sigma\,.\,dp=0 \tag{2}$$

A comparison of (1) and (2) with that of flow in a rigid tube (corresponding to $\sigma=1$) shows that the former equations can be obtained from the latter by putting $\sigma\varrho$ for ϱ and $\int\sigma\,.\,dp$ for p.

Now if in addition we make the usual assumption

$$p = p(\varrho) \tag{3}$$

we can construct a relation between $\int \sigma \, . \, dp$ and $\sigma\varrho$ and thus we obtain the following conclusion:

From any solution of continuous flow in a rigid tube we can build up a solution in an elastic tube, which adapts instantaneously to local pressure, by substituting (both in the given initial conditions and the resultant solution) $\sigma\varrho$ for ϱ and $\int \sigma \, . \, dp$ for p provided $\int \sigma \, . \, dp$ is the same function of $\sigma\varrho$ for the gas in elastic tube as p is of ϱ in the rigid tube.

The method can be extended to shocks as well.

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
KHARAGPUR, INDIA.

SUR LES SOLUTIONS ALÉATOIRES DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN BASS

L'étude des solutions aléatoires des équations de Navier-Stokes (considérées comme une représentation des écoulements turbulents) a fait l'objet de nombreuses publications. Mais, à la suite des travaux de Karman et Howarth (Proc. Roy. Soc., A 164, 1938, p. 192), le problème le plus fréquemment étudié a été celui de l'évolution en fonction du temps des „corrélations doubles" de la vitesse. On sait que, à cause du caractère non linéaire des équations de l'hydrodynamique, l'équation d'évolution des corrélations doubles contient aussi les „corrélations triples". E. Hopf a introduit la fonctionnelle caractéristique de la vitesse, valeur moyenne d'une exponentielle e^{iL}, où L est une fonctionnelle linéaire du vecteur vitesse, et a montré (Journal of rat. Mechanics and Analysis, I, 1952, p. 87) que cette fonctionnelle caractéristique obéit à une équation fonctionnelle qui décrit son évolution dans le temps. Une telle équation ne peut exister pour les moments du second ordre (covariance dans l'espace) du vecteur vitesse. Il serait intéressant de prouver qu'elle ne peut pas exister pour un élément stochastique plus simple que la fonctionnelle caractéristique de E. Hopf. C'est ce que je me propose de discuter, en me limitant au modèle simplifié de turbulence dû à J. M. Burgers, dans lequel les équations de Navier-Stokes sont remplacées par l'équation unique, non linéaire et du second ordre,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\mu\alpha \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{E}$$

Cette équation a été étudiée lorsque le paramètre α est égal à $\frac{1}{2\mu}$. Lorsque $\alpha = 0$, elle se réduit à l'équation de la chaleur, linéaire et du second ordre. On peut démontrer que la solution de E qui se réduit, pour $t = 0$, à une fonction donnée $f(x)$ bornée et intégrable, est une fonction continue de α lorsque α tend vers 0, uniformément par rapport à x. Il en résulte que, s'il-existait une relation fonctionnelle entre la fonction caractéristique de u, valeur mojenne de e^{iyu} (y nombre réel donné) pour $t = 0$, et cette même fonction caractéristique à un instant quelconque t, une telle relation existerait encore pour $\alpha = 0$. Or l'impossibilité d'une telle relation se démontre directement dans le cas de l'équation de la chaleur.

57BIS RUE DE JOUY
CHAVILLE (S. et O.) FRANCE.

EINE NICHTLINEARE INTEGRODIFFERENTIALGLEICHUNG DER THERMODYNAMIK

VOLKER BAUMANN

Zur Beschreibung des Temperaturverlaufes $T(x)$ als Funktion des Ortes, der durch Überlagerung von Wärmeleitung und -strahlung unter speziellen physikalischen Voraussetzungen bewirkt wird, ergibt sich folgendes Randwertproblem für eine nichtlineare Integrodifferentialgleichung:

Zu vorgegebenen nichtnegativen Konstanten m, T_0, T_h sowie einer nichtnegativen stetigen beschränkten Funktion $k(\lambda)$, $\lambda \geqq 0$, ist eine nichtnegative stetige Funktion $T(x)$ gesucht, die für $0 \leqq x \leqq h > 0$ der Gleichung

$$(1) \qquad \int_0^\infty k(\lambda) \left\{ \int_0^h k(\lambda) K_0\big(k(\lambda)\,|x-t|\big)\, E\big(\lambda, T(t)\big)\, dt + 2E\big(\lambda, T(x)\big) \right\} d\lambda$$
$$-\int_0^\infty k(\lambda) \left\{ K_1\big(k(\lambda)(h-x)\big)\, E(\lambda, T_h) + K_1\big(k(\lambda)x\big)\, E(\lambda, T_0) \right\} d\lambda - mT''(x) = 0$$

genügt und die vorgeschriebenen nichtnegativen Randwerte $T(0)$ und $T(h)$ annimmt. Dabei bedeuten $E(\lambda, T) = 2c_1\lambda^{-5}(e^{c_2/\lambda T} - 1)^{-1}$ die Planck'sche Strahlungsfunktion, $K_0(x) = -\int_\infty^\infty e^{-t}\frac{dt}{t}$ und $K_i(x) = -\int_\infty^\infty K_{i-1}(t)dt$.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall $T(0) = T_0$, $T(h) = T_h$ (2).

Über eine Lösung des Problems läßt sich aussagen, daß sie durch Max $[T(0), T(h), T_0, T_h]$ und Min $[T(0), T(h), T_0, T_h]$ beschränkt und im Falle (2) sogar monoton ist. Außerdem können im Falle $k(\lambda) \equiv k$ zwei elementare Funktionen mit den vorgegebenen Randwerten so angegeben werden, daß alle Lösungen des Problems nicht ganz außerhalb des durch diese Funktionen begrenzten Bereichs verlaufen.

Der Existenzbeweis einer Lösung wurde für folgende Fälle geführt:

a. $m = 0, k(\lambda) \equiv k > 0.$

(1) geht dann nach der Transformation $x = \frac{z}{k}$, $v(z) = T^4\left(\frac{z}{k}\right)$ in die der Milne'schen verwandte lineare Integralgleichung zweiter Art über:

$$v(z) + \tfrac{1}{2}\int_0^l K_0(|z-s|)\, v(s)ds - \tfrac{1}{2}[T_h^4 K_1(l-z) + T_0^4 K_1(z)] = 0, \qquad (l = kh).$$

Man kann beweisen, daß die zugehörige Neumann'sche Reihe konvergiert, und die dadurch dargestellte Lösung $v(z)$ stetig, nichtnegativ und bezüglich $z = \frac{1}{2}l$ antisymmetrisch ist. Die Randwerte dieser Lösung können approximativ ermittelt und leicht abgeschätzt werden und sind für $T_0 \neq T_h$ von T_0 und T_h verschieden.

b. $m > 0$, $k(\lambda) \equiv k > 0.$

Zweimalige Integration von (1) ergibt dann für $y(z) = T\left(\frac{z}{k}\right)$ die nichtlineare Integralgleichung

$$(3) \qquad \int_0^l K_2(|z-s|)\, y^4(s)ds - T_h^4 K_3(l-z) - T_0^4 K_3(z) - mk\frac{\pi}{\sigma}\, y(z) = Ez + D$$

mit unbekannten Integrationskonstanten E und D. Ist $y(z)$ eine stetige, monotone, die vorgeschriebenen Randwerte annehmende Funktion, und gilt rekursiv

$$mk\frac{\pi}{\sigma}\, y_n(z) = \int_0^l \left[K_2(|z-s|) - \frac{z}{l}\,(K_2(l-s) - K_2(s)) - K_2(s)\right] y_{n-1}^4(s)ds + f(z)$$

mit einer wohlbestimmten Funktion $f(z)$, so konvergiert die Folge $\{y_n(z)\}$ unter Voraussetzung zweier Ungleichungen für die eingehenden Parameter l, $\frac{m}{k}$, $T(0)$, $T(h)$, T_0, T_h gegen eine stetige, nichtnegative, die vorgeschriebenen Randwerte annehmende Lösung $y(z)$ von (3) mit geeigneten Konstanten E und D.

c. Das unter b) angegebene Verfahren läßt sich auch für nichtkonstantes $k(\lambda)$ in modifizierter Form anwenden, wenn man stärkere Einschränkungen für die eingehenden Parameter voraussetzt.

Der Eindeutigkeitsbeweis kann ohne Einschränkung erbracht werden:

Sind $T_1(x)$, $T_2(x)$ zwei stetige, nichtnegative, die vorgeschriebenen Randwerte annehmenden Lösungen von (1), so ergibt die Integration von

$$\text{(4)} \quad \int_0^\infty k(\lambda) \left\{ \int_0^h k(\lambda) K_2(k(\lambda)\,|x-t|)\,[E(\lambda, T_1(t)) - E(\lambda, T_2(t))]\,dt \right. \\ \left. + 2[E(\lambda, T_1(x)) - E(\lambda, T_2(x))] \right\} d\lambda = m(T_1''(x) - T_2''(x))$$

über den Teilbereich des Intervalles $0 \leqq x \leqq h$, für den $T_1(x) - T_2(x) > 0$, auf der linken Seite von (4) eine positive, auf der rechten eine nichtpositive reelle Zahl.

Diese Methode des Eindeutigkeitsbeweises läßt sich auf eine Reihe ähnlicher Randwertprobleme anwenden.

FRANKFURT/M.,
HEDDERICHSTR. 63.

ON A VARIATIONAL PROBLEM IN THE MATHEMATICAL THEORY OF PRODUCTION

MARTIN JOSEF BECKMANN

In recent years that basic part of mathematical economics which deals with the static theory of resource allocation and production has been recast in terms of the maximisation of linear forms constrained by linear inequalities:

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_x \; a'x \\ &\text{subject to } Bx \leqq c \\ &\qquad\qquad\quad x \geqq 0. \end{aligned}$$

While the solution of this problem is assumed on the boundary of the constraints' set, it can be characterized in terms of non-negative Lagrangean multipliers much as if the maximum had been attained at an internal point.

This paper studies problems involving a continuous time parameter, which arise in the theory of production with the use of capital stocks. One is led to a variational problem

$$\begin{aligned} &\operatorname*{Max}_x \int_0^T g'x\,dt \\ &\text{subject to } A\dot{x} + Bx \leqq c \\ &\qquad\qquad\qquad\quad x \geqq 0 \\ &\qquad\qquad\quad\;\; x(0) = x_0, \end{aligned}$$

where x is a continuous vector function with piecewise continuous derivatives.

Its solution can be characterized in terms of piecewise continuous, nonnegative Lagrangean parameters λ with the properties

$$\begin{aligned} \lambda' A - \dot{\lambda}' B &\geqq g' \\ (\lambda' A - \dot{\lambda}' B) x &= 0 \\ \lambda' B x &\text{ continuous} \\ \lambda(\tau)' B &= 0. \end{aligned}$$

The behavior of this parameter vector, whose economic meaning is that of discounted prices, permits conclusion about the size and change over time of the set of production activities that is "efficient" within a given economic system.

1126 E 59, St., Chicago, Ill. U. S. A.

ZUR THEORIE DER HOMOGENEN LINEARISIERTEN ÜBERSCHALLSTRÖMUNGEN

Otto Hermann Bernhard Behrbohm

Die vom Verf. gemeinsam mit Kl. Oswatitsch früher gegebene Methode zur Behandlung linearisierter kegeliger Überschallströmungen [Ing. Arch. **18**, 370—377 (1950)] lässt sich auf solche linearisierte Überschallströmungen verallgemeinern, deren Störgeschwindigkeitspotential φ homogen vom n-ten Grade in den Koordinaten x, y, z des Strömungsraums ist. Mathematisch interessant ist dabei hauptsächlich der Fall, dass der umströmte Flügel eine ganz im Machkegel (MK) der Spitze S gelegene dünne Dreiecksplatte ist (tragender Dreiecksflügel mit Unterschallvorderkanten).

Die Randbedingungen zur Differentialgleichung

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = 0, \tag{1}$$

(x-Achse in Anströmungsrichtung, ohne Beschränkung der Allgemeinheit Machzahl $M = \sqrt{2}$) lauten dann

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z) = 0 & \text{stromauf vor dem } MK \\ \varphi(x, y, 0) = 0 & \text{stromauf vor dem Flügel} \\ \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = x^{n-1} P_{n-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{auf dem Flügel,} \end{cases} \tag{2}$$

wo P_{n-1} ein Polynom $(n - 1)$-ten Grades ist.

Durch eine hyperbolische Drehung der x, y-Ebene kann stets der Fall des zur x-Achse symmetrischen Flügels erreicht werden (Vorderkanten also $y = \pm m_1 x$ mit $0 < m_1 < 1$).

Zur Lösung wird jeder von S ausgehende Halbstrahl $y = mx$, $x > 0$, der Ebene $z = 0$, der im Innern des MK liegt, mit Überschallquellen der Stärke $\sim x^n$ belegt. Der Proportionalitätsfaktor $g(m)$, das Gewicht des Halbstrahls, ist dann für $|m| \leqq m_1$ durch die dritte Bedingung (2) gegeben, dagegen für $m_1 < |m| \leqq 1$ aus der zweiten Bedingung (2) zu bestimmen. Statt $g(m)$ wird, nach einer geeigneten partiellen Integration der Darstellungsformeln von φ, eine geeignete Funktion von g durch eine singuläre Integralgleichung (auf verallgemeinerte Cauchysche Hauptwerte erweiterte Tragflügelgleichung) bestimmt. $g(m)$ selbst erhält man dann aus dieser Funktion durch Lösung einer Volterraschen Integralgleichung erster Art mit polynomialem Kern.

LINKÖPING, SVERIGE.

ON THE ANALYTIC REPRESENTATION OF BELTRAMI VECTOR FIELDS ($\nabla \times v = \Omega v$)

ODDVAR BJÖRGUM

The three-dimensional vector fields $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$, $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$, and $\boldsymbol{v} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$ can be represented by $\boldsymbol{v} = \nabla\alpha \times \nabla\beta$, $\boldsymbol{v} = \nabla\varphi$, and $\boldsymbol{v} = \alpha\nabla\beta$, respectively, where α, β and φ denote scalar point-functions. On the other hand, the vector field defined by $\boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{v}) = 0$ which is sometimes referred to as a Beltrami vector field does not seem to possess such a simple representation. This field which is of some hydrodynamical interest can also be defined by $\nabla \times \boldsymbol{v} = \Omega \boldsymbol{v}$ where $\Omega = \Omega(x, y, z)$ denotes a scalar point-function. In the full paper the following representation will be derived in which Ω is a function of z only.

If $\zeta = \int_{z_0}^{z} \Omega(z)dz = \zeta(z)$ and $H = H(x, y, z)$ denotes a scalar point-function satisfying the differential equation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \Omega^2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + H \right) = 0$$

the corresponding Beltrami field is given by

$$v_x = \frac{\partial^2 H}{\partial x\, \partial \zeta} + \frac{\partial H}{\partial y}$$

$$v_y = \frac{\partial^2 H}{\partial y\, \partial \zeta} - \frac{\partial H}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\Omega} v_z = \frac{\partial^2 H}{\partial \zeta^2} + H$$

where v_x, v_y, v_z denote the Cartesian components of $\boldsymbol{v}$.

In the general case a corresponding representation can be derived which, however, proves to be highly complicated.

UNIVERSITY OF BERGEN,
BERGEN, NORWAY.

COMPUTATION OF THE ADJUGATE MATRIX IN WHOLE NUMBERS

K. E. BODEWIG

Until now no other method existed for computing the adjugate matrix than that of calculating all first minors which can be done in several ways each of which affords much computational work. Therefore an other method is developed which is based on Smith's algorithm and which works very easily.

BORWEG 7.
'S-GRAVENHAGE.

SUR LA CORRESPONDANCE ENTRE BIVECTEURS ET SPINEURS

GEORGES BODIOU

D'un point de vue géométrique, il est naturel de définir l'équivalence, $\psi_1 \approx \psi_2$, de deux spineurs, par la condition que les bivecteurs extraits des carrés tensoriels de ψ_1 et de ψ_2 soient identiques: $(\psi_1 \approx \psi_2) \longleftrightarrow ((\psi_1 = \pm \psi_2) \vee (\psi_1 = \pm K \,.\, \psi_2))$; $K \,.\, \psi_2$ est le symétrique de ψ_2 par rapport à l'origine.

Du point de vue quantique, on définit l'équivalence de ψ_1 et de ψ_2 par la condition que les densités de Dirac qui leur sont liées soient identiques: $(\psi_1 \simeq \psi_2) \longleftrightarrow ((\psi_1 = \lambda\psi_2) \wedge (|\,\lambda\,| = 1))$.

L'équivalence la moins stricte, impliquant à la fois équivalence géométrique et équivalence quantique, est définie par: $(\psi_1 \sim \psi_2) \longleftrightarrow (\psi_1 = \pm\psi_2)$, (équivalence forte).

Alors, à tout bivecteur, isotrope, simple, dont le bi-plan contient l'origine, correspond, de façon invariante et bi-univoque, un couple de spineurs, non fortement équivalents, symétriques l'un de l'autre par rapport à l'origine.

Pour que le bivecteur considéré soit réel il faut et il suffit que l'un des deux spineurs du couple qui lui correspond soit equivalent à son „inverse". Nous entendons par „spineur inverse d'un spineur donné" le spineur symétrique, par rapport à l'origine, du spineur conjugué du spineur donné. Si un spineur décrit un corpuscule de Dirac, son inverse décrit la „lacune" attachée à ce corpuscule.

On en déduit que l'on peut établir une correspondance, bi-univoque et tensorielle, donc qu'on peut définir une „équivalence objective" entre les ondes électro-magnétiques planes réelles et les corpuscules de Dirac „confondus avec leur lacune", c'est à dire tels que le spineur qui les décrit soit équivalent (fortement) à son spineur inverse. Cette correspondance étant assurée par les conditions suivantes:

Le bivecteur, φ_{ij} (p), de l'onde, est extrait du carré tensoriel du spineur, $\psi(P)$, du corpuscule; et la quadri-propagation, p, de l'onde, est proportionnelle à la quadri-impulsion, P, du corpuscule.

Un „corpuscule confondu avec sa lacune" est caractérisé par l'annulation de son spin. Sa masse propre est nulle.

La superposition des spineurs équivalents à leur spineur inverse n'entraine pas la superposition des ondes associées. Cependant, sous réserve que les solutions générales des équations de Maxwell et des équations de Dirac correspondent, bi-univoquement et tensoriellement, par transformation de Fourier, aux champs, respectivement bivectoriels et spinoriels, définis sur le cône isotrope des propagations et des impulsions à masse nulle, on peut établir une correspondance, bi-univoque et tensorielle, donc définir une équivalence objective, entre les ondes électromagnétiques générales réelles et les corpuscules confondus avec leur lacune et en état quelconque.

FACULTÉ DES SCIENCES,
MARSEILLE (FRANCE).

STABILITY OF THE EXPANDING UNIVERSE

WILLIAM BOWEN BONNOR

The stability of cosmological models has been studied by various authors, and somewhat conflicting conclusions have been reached. This has been due partly to the use of different sets of boundary conditions in the various treatments.

The boundary conditions to be applied in general relativity at discontinuities have recently been investigated by O'Brien and Synge (Communication of the Dublin Institute for Advanced Studies, Series A, No. 9), and also by Lichnerowicz, and it is intended in this paper to apply their results to two problems connected with the stability of the expanding universe.

First, we consider an expanding model, with zero pressure, which shows spherical symmetry about some origin and is initially homogeneous. Using co-moving coordinates, the line-element may be taken as

$$ds^2 = - e^{\lambda} dr^2 - e^{\omega}(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + dt^2, \tag{1}$$

where λ and ω are functions of r and t. In accordance with the initial homogeneity, we have for $t < t_0$,

$$ds^2 = -e^g(1 - r^2/R^2)^{-1} dr^2 - r^2 e^g (d\theta^2 + \sin^2\theta \, d\varphi^2) + dt^2, \tag{2}$$

where $g(t)$ satisfies the known differential equation for a universe of zero pressure. Applying the field equations, and the continuity conditions of O'Brien and Synge across a supposed discontinuity at $t = t_0$ we find that for $t > t_0$ (1) must reduce to (2) so that the model must continue in its original homogeneous and expanding state. Thus the pressure-free, homogeneous, expanding universe is not merely stable to an instantaneous disturbance, but does not permit any such disturbance to occur.

Secondly, we approach the problem of stability from a rather different viewpoint. Taking again the model (1) we suppose that at $t = t_0$ there is an inhomogeneity inside a surface $r = a$, surrounded by a homogeneous universe (2). The problem is to determine the effect of the inhomogeneity on the expansion, and to find the changes in the density of matter inside $r = a$. An exact solution of this problem has been found for a universe in which $R = \infty$ and Λ (cosmological constant) vanishes. The solution satisfies the field equations, the boundary conditions and also the condition that the average density inside $r = a$ is equal to the cosmic density. From the solution it appears that the proper radius of the inhomogeneity expands at the same rate as equal proper distances in the homogeneous part of the model, and that, whatever the initial distribution of matter inside $r=a$, the effect of time is that throughout the inhomogeneity the density approaches that of the surrounding universe.

THE UNIVERSITY,
LIVERPOOL, ENGLAND.

ON THE INVARIANTS OF FINITE STRAINS

PIERO GIORGIO BORDONI

For a strain of finite amplitude the first two invariants I_1 and I_2, and the Jacobian D cannot take entirely arbitrary values, but must satisfy not only the condition that the final state is reached without D going to zero (1), but must also lead to values of the principal coefficients of strain E_s ($s = 1, 2, 3$), all real (2) and larger than $-\frac{1}{2}$ (3).

An accurate analysis of conditions (1) and (2), shows that they imply also (3). In the I_1, I_2, D space the representative point of a finite deformation belongs always to a comparatively narrow region, and for a given value of I_1, the Jacobian must satisfy the remarkable inequality

$$D^2 \leqslant (1 + \tfrac{2}{3} I_1)^3.$$

The above result shows that the elastic potential obtained in a previous paper for certain solids has a more general meaning than what had first been thought, beeing definite positive for any value of the E_s, under the same conditions which must be satisfied in the linear theory of elasticity.

New inequalitics are finally obtained between I_1 and $\log D$.

VIA LUCRINO 10,
ROMA (ITALIA).

SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS ELLIPTIQUES PRÉSENTANT UNE LIGNE SINGULIÈRE

PIERRE BROUSSE

Dans de nombreuses questions de la Mécanique des milieux continus on rencontre les équations suivantes pour lesquelles Ox est ligne singulière

$$\Delta V(x, y) - \frac{k}{y} \cdot \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\Delta S(x, y) + \frac{k+2}{y} \cdot \frac{\partial S(x, y)}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

(Δ, laplacien; k, const. > 0) et où les fonctions inconnues V, S sont liées par la relation $V = S\, y^{k+1}$.

Nous étudions les intégrales de ces équations satisfaisant à des conditions périphériques données, lorsque le domaine D de définition et de régularité est limité par un segment AB de Ox et par un arc simple rectifiable $A\Gamma B$ du demi-plan $y > 0$. Nous montrons ainsi l'influence de la ligne singulière. Cette influence se manifeste surtout pour l'équation (2), l'utilisation de familles analogues à celles de Perron permettant de généraliser à (1) bien des propriétés des équations classiques. Nous avons déjà indiqué quelques résultats relatifs à cette question (Comptes rendus, Ac. des Sc: t. 236, 1953, p. 1731; t. 237, 1953, p. 1381).

Lorsque la fonction S n'est pas constante, l'ensemble des points de AB où elle prend une même valeur n'est pas quelconque. On obtient à ce sujet des résultats très généraux déduits du cas particulier où Γ est une demi-circonférence. De même S ne peut devenir infinie de façon arbitraire sur AB. Le produit $S \, . \, y^{k+1}$ ne peut s'annuler sans que S soit bornée. Le principe des singularités positives de Picard se généralise pour une singularité située sur AB et cela en remplaçant la fonction $L\,r$ du cas harmonique par r^{-k-2}.

Dans des circonstances très générales, les données de Dirichlet S^* sur l'arc $A\Gamma B$ sont résolutives pour D et l'équation (2), même si $S^* = O(y^{-k-1})$ en A et B. Lorsque D est un demi-cercle, le noyau de l'intégrale de Green s'exprime simplement à l'aide des fonctions de Legendre ou de la série de M. Kogbetliantz (Journal de Mathématiques, 1926, p. 125). L'intégrale obtenue joue vis-à-vis des séries ultrasphériques le même rôle que l'intégrale harmonique de Poisson par rapport aux séries trigonométriques; on retrouve l'influence de la ligne singulière. Nous en déduisons des propriétés relatives à la sommabilité de Poisson des séries ultrasphériques.

FACULTÉ DES SCIENCES,
POITIERS, FRANCE.

ASYMPTOTIC SOLUTION AT HIGH FREQUENCIES OF THE BOUNDARY PROBLEM OF DIFFRACTION BY A STRIP

ALEWYN P. BURGER and R. TIMMAN

The problem of diffraction by a strip is formulated in terms of a scalar potential $u(x, y)e^{ikct}$ as an external Neumann problem for the wave equation $\Delta u + k^2 u = 0$. The exact solution of this problem is known in terms of series of Mathieu functions, but at high frequencies the labour involved in numerical evaluations becomes prohibitive. Here a method is given by which an asymptotic solution for high frequencies may be obtained.

The solution u is considered as the inverse of a one-sided Fourier-transform of a function $\varphi(x, y, \tau)$ which satisfies the equation $\Delta\varphi - \varphi_{\tau\tau} = 0$. Corresponding boundary conditions in the two cases for $y = 0$ are: $u_y = f(x)/ik$ for $|x| < 1$; $u = 0$ for $|x| > 1$; and: $\varphi_y = f(x)$ for $|x| < 1$ and $\tau > 0$; $\varphi_y = 0$ for $\tau < 0$; and $\varphi = 0$ for $|x| > 1$; to which is to be added the conditions at infinity. This problem is equivalent to the problem of a straight-edged wing of infinite chord in steady supersonic flow at constant incidence, and can be solved by the Hadamard-Riesz method (Evvard, Ward). Because of reflection of characteristic lines at the edges, space is divided, with increasing τ, into successive regions, and the potential in each region can be found in terms of preceding potentials by using integral equations of Abel type. Transforming the result gives the solution to the diffraction problem in asymptotic form, since successive terms, when properly chosen, are of decreasing order in k.

Therefore already the first few terms give good numerical results for large k, which is of importance since the form of φ becomes increasingly involved for successive regions. The first terms of the resulting series are

$$u(x, y) \sim \frac{i}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\partial}{\partial y} u(\xi, 0)\left\{H_0^{(2)}(kr) + \frac{2}{\pi i}\int_{r_1+1+\xi}^{\infty} e^{-ik\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi i}\int_{r_2+1-\xi}^{\infty} e^{-ik\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau^2-r^2}} + \dots\right\} d\xi$$

in which $r = r(\xi) = \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2}$, $r_1 = r(-1)$, $r_2 = r(1)$.

Plainly the first term is identical with the result by the customary Kirchhoff procedure. It is known that the Kirchhoff solution does not satisfy the imposed boundary conditions, but that nevertheless good results are obtained at high frequencies, so that it is of importance to know to what extent the Kirchhoff solution does actually give the correct asymptotic behaviour. The present result implies that the Kirchhoff solution gives the geometrical portion plus only part of the principal term of the diffracted wave.

A check on the method is provided by its rendering a new derivation of the known solution of Sommerfeld, for the diffraction problem of a plane wave incident on a screen in the form of a halfplane.

KINKERSTRAAT 137III,
AMSTERDAM-W.

A GENERALIZATION OF FEJÉR'S FORMULA IN A SERIES OF ORTHOGONAL POLYNOMIALS

ROBERT G. CAMPBELL

Il s'agit de donner une formule permettant de calculer explicitement la somme de Fejér $\sigma_n^1(x) = \dfrac{\sum_1^n S_n(x)}{n+1}$ relative au développement d'une fonction $f(x)$ en série de polynômes orthogonaux, comme on le fait pour les séries de Fourier. On sait que $S_n(x)$ est donné par la formule de Darboux-Christoffel

$$S_n(x) = \frac{1}{A_{n+1}}\int_a^b \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x-t} f(t)dt.$$

Le calcul de σ_n^1 est possible explicitement et simplement si on le considère comme la demiesomme des deux expressions:

$$-\frac{1}{A_{n+1}} P_n(x)P_{n+1}(t) + \sum_{r=0}^{n} P_r(t)\left[\frac{P_{r+1}(x)}{A_{r+1}} - \frac{P_{r-1}(x)}{A_r}\right] + \frac{1}{A_1} P_1(x)P_0(t)$$

(2) et

$$+\frac{1}{A_{n+1}} P_n(t)P_{n+1}(x) - \sum_{r=0}^{n} P_r(x)\left[\frac{P_{r+1}(t)}{A_{r+1}} - \frac{P_{r-1}(t)}{A_r}\right] - \frac{1}{A_1} P_1(t)P_0(x),$$

[les A_n désignent les coefficients de la formule habituelle des polynômes orthogonaux:

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad \left(C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}\right)\Bigg]$$

et à condition que les P_n soient liés *de plus* par une relation de la forme

$$P_n(x) = \sum_{0}^{p} g_k(x, x) \frac{d^k}{dx^k}[P_{n-1}(x)]. \tag{3}$$

Ce que fait l'intéret du critère obtenue, c'est que la plupart des polynômes orthogonaux usuels satisfont à une relation de la forme (3) où $k = 1$, soit:

$$P_n(x) = f_n(x)P_{n-1}(x) - g_n(x) P^1_{n-1}(x),$$

qui permet de calculer les sommes (2) si les quantités $\frac{1}{A_r}[2f_r - A_r x - B_r]$ et $\frac{g_r}{A_r}$ sont indépendants de r: (vérifié pour les polynômes de Laguerre et de Hermite). Si cette dernière condition n'est pas vérifiée, mais si les 2 quantités précédentes sont telles que leur quotient soit indépendant de r, alors ce n'est plus une somme de Fejér exactement que l'on calcule, mais une somme qui lui est équivalente du point de vue de la convergence et de l'approximation; soit

$$m_n = \frac{\Sigma_0^n(\alpha_r S_r)}{\Sigma_0^n \alpha_r}.$$

A cette dernière condition satisfont les polynômes de Tchebychev, de Legendre et de Gegenbauer (mais *non* les polynômes de Jacobi les plus généraux).

On peut, réciproquement, déterminer tous les polynomes tels que l'un des procédés précédents puissent s'appliquer. Dans le premier cas (somme de Fejér proprement dite), le calcul s'effectue si A_n^{-2} est fonction linéaire de n, ou bien si

$$\lambda_{n-1} - \lambda_n = C\lambda_n^{-\frac{1}{2}} B_n + D, \qquad (\lambda_n = A_n^{-2}).$$

Dans le 2ième cas, il suffit que $\alpha_{n-1}A_{n-1}^{-2} - \alpha_{n+1}A_n^{-2} = \text{const}$. Dans le 1er cas, le calcul peut se généraliser immédiatement et fournit les sommes (C, k) de Cesàro (k entier) (particulièrement facile pour les séries de polynômes de Weber-Hermite).

Un procédé calqué sur le précédent s'applique à d'autres espèces de séries que celles où les éléments sont des P_n, par exemple aux développements en séries de Neumann d'une fonction; on obtient les moyennes m_n, où α_n a été choisi égal à $n - \frac{1}{2}$; on retrouve ainsi la proposition de Webb-Kapteyn.

75, Cours de Vincennes,
Paris (20e).

SUL COMPORTAMENTO ENERGETICO DI ALCUNI SISTEMI NON-LINEARI AUTOEFFICIENTI

Luigi Caprioli

Si mettono in evidenza certi aspetti del bilancio energetico che si stabilisce, in regime oscillatorio, in alcuni sistemi non-lineari autoefficienti, in relazione alle caratteristiche dei rispettivi elementi non lineari.

Via Galliera 70,
Bologna, (Italia).

SUR LE PROBLÈME DU CONTACT ENTRE DEUX CORPS ÉLASTIQUES

Carlo Cattaneo

Deux corps élastiques de forme quelconque, en contact géometrique, sont mutuellement comprimés en direction normale; successivement ils sont sollicités par deux couples de torsion (égales et opposées) graduellement croissantes. À cause du frottement, que l'on suppose présent entre les deux corps, il s'établit un état d'équilibre élastique. On envisage le problème de la détermination des tensions tangentielles dans l'aire de contact.

Istituto Matematico,
Università di Pisa.

THE GEOMETRICAL INTERPRETATION OF RAYLEIGH'S PRINCIPLE AND SCHWINGERS VARIATIONAL PRINCIPLE

Llewelyn Gwyn Chambers

It is well known (being a generalisation of Rayleigh's Principle) that the ratio $\mu^2 = C/G$ of a pair of positive definite quadratic forms $C(x, x) = \sum_r \sum_s c_{rs} x_r x_s$ and $G(x, x) = \sum_r \sum_s g_{rs} x_r x_s$ in an infinite number of variables (x_r) has an infinity of stationary values $\mu^2 > 0$ such that $\mu_0{}^2 \geqq \mu_1{}^2 \geqq \ldots$, $\underset{n \to \infty}{lt} \; \mu_n{}^2 = 0$

where the μ^2 are the eigenvalues of the associated doubly infinite matrix $[c_{rs} - \mu^2 g_{rs}]$. It is shown in this paper that Schwinger's Variational Principle is a highly degenerate form of this in which the positive definite form $C(x, x)$ is replaced by the square of the linear form

$$B(x, x) = \{A(x)\}^2 \text{ where } A(x) = \sum_r a_r x_r.$$

For this there is one positive eigenvalue only, all the others being zero.

It is shown that in Rayleigh's Principle, the condition for a stationary value for μ^2 corresponds to the two hyperellipsoids $C(x, x) = \mu^2$ and $G(x, x) = 1$ touching. When this occurs the hyperquadric $C(x, x) - \mu^2 G(x, x) = 0$ which is degenerate (being a hypercone), degenerates further into a pair of planes whose intersection joins the origin to the point of contact. Any point on this line represents an eigenvector of the system.

In Schwinger's variational principle, the hyperellipsoid

$$C(x, x) = \mu^2 \text{ is replaced by } B(x, x) = \{A(x)\}^2 = \mu^2.$$

This is equivalent to a pair of hyperplanes $A(x) = \sum_r a_r x_r = \pm \mu$, (or a hyperellipsoid, only one of whose semiaxes is finite). The geometrical condition now becomes the determination of μ^2 so that the pair of hyperplanes are tangential to the ellipsoid. It follows from this that if any approximate value for the eigenvector $\{x_r^{(0)}\}$ is used in evaluating the ratio B/G, the value of the ratio will be less than the value of μ_0^2.

Maths. Branch, Royal Military College of Science,
Shrivenham, Berkshire, England.

THE EVALUATION OF CERTAIN EIGENVALUES OF THE EQUATION $\nabla^2\Phi + \nu\Phi = 0$, WHERE THE DOMAIN IS AN ELLIPSE AND WHEN (i) $\Phi = 0$, (ii) $\partial\Phi/\partial n = 0$ ON THE BOUNDARY

Samuel David Daymond

First let the domain be bounded by a simple curve C. *In Problem I* ($\Phi = 0$ on C) the eigenvalues λ_i are such that $0 < \lambda_0 \leqq \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \ldots$; in *Problem II* ($\partial\varphi/\partial n = 0$ on C) they are μ_i, where $0 = \mu_0 < \mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \ldots$, and $\mu_1 < \lambda_0$. The following are also true: (a) if λ, $\bar{\lambda}$ are eigenvalues of the same order for similar domains of areas A, $\bar{A}$, then $\lambda A = \bar{\lambda}\bar{A}$. Similarly $\mu A = \bar{\mu}\bar{A}$; (b) among all domains having the same constant area the circle is that curve whose λ_0 is smallest and also whose μ_1 is largest.

In this paper are determined six-decimal values of λ_0 and μ_1 associated with a family of ellipses of varying eccentricity, each member of which encloses a constant area π. (The eigenvalues of the same order for any given ellipse $\overline{E}$ can then be found by applying (a), that is by dividing λ_0 or μ_1 by the product of the semi-axes of $\overline{E}$.)

Let e be the eccentricity of an ellipse E of area π. Co-ordinates (ξ, η) are chosen, given by $x + iy = c\, ch(\xi + i\eta)$ and $c = e(1 - e^2)^{-\frac{1}{4}}$. On the ellipse ξ is $\xi_0 = ch^{-1}(1/e)$. If $q = \nu\, c^2/4$, $u, v = \sqrt{q}\, exp(\pm\, \xi_0)$ and $w = u + v$, then

$$uv = q \text{ and } e = 2\sqrt{q}/w. \tag{1}$$

In *Problem I*, $\nu \equiv \lambda_0 = u^2 - v^2 = w\sqrt{(w^2 - 4q)} \geqq \alpha^2 \quad (\alpha = 2.4048 \ldots)$. (2)

For each value of a sequence of positive values of q the w-zero of the Modified Mathieu function

$$Ce_0(\xi_0, q) \propto \sum_0^\infty C_{2r} J_{2r}(w)$$

is determined, where the coefficients C_{2r} are tabulated functions of q. (When q is large either a series of products of Bessel functions or an asymptotic formula is used.) Corresponding pairs of values of e and λ_0 are then found from (1) and (2).

In *Problem II*, $\nu \equiv \mu_1 = u^2 - v^2 = w\sqrt{(w^2 - 4q)} \leqq \beta^2 \quad (\beta = 1.8412 \ldots)$. (3)

In this case zeros are found of the function

$$(d \,|\, d\xi_0)\, Ce_1(\xi_0, q) \propto \sum_0^\infty C_{2r+1}(q)\{J_{2r}(w) - (2r + 1)w^{-1} J_{2r+1}(w)\}$$

for a similar sequence of values of q. Whereas, however, in I the w-zeros are always greater than $2\sqrt{q}$ and lie therefore in the range $\alpha \leqq w < \infty$, the zeros in II are all such that $1.8412 < w < 1.897$, since, when $w > 1.897$, $w^2 - 4q$ is negative and, therefore, μ_1 complex.

Correspondingly, as e increases steadily from zero to unity $\sqrt{\lambda_0}$ increases, slowly at first, from α to infinity, while $\sqrt{\mu_1}$ decreases from β to zero.

THE UNIVERSITY, LIVERPOOL 3.

AN APPROXIMATION FOR THE TRANSONIC FLOW OF A GAS

JOAQUIN B. DIAZ and GEOFFREY S. S. LUDFORD

The object of this paper is to develop the theory of an approximation for the transonic flow of a polytropic gas. The approximation is based on obtaining that pressure-density relation which best fits the pressure-density relation of the given gas in the neighborhood of the sonic point, whilst retaining the simplicity of the Tricomi gas. In this sense it represents a generalization of the Tricomi gas.

For the flow of any gas which possesses a (p, ϱ)-relation, the stream-function ψ satisfies the equation

$$\psi_{\sigma\sigma} + K(\sigma)\psi_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma = \int_q^{q_*} \frac{\varrho}{q}\, dq; \quad K(\sigma) = \frac{(1-M^2)}{\varrho^2}, \tag{1}$$

in the hodograph plane. This equation can be transformed into

$$u_{yy} - yu_{xx} - f(y)u = 0 \tag{2}$$

under change of dependent and independent variables. The present method consists in finding those functions $f(y)$ for which (2) possesses a solution of the form

$$u = A(y)\, B\left(\tfrac{4}{9}y^3 - x^2\right),$$

since the theory of le Roux then permits a general solution in closed form to be written down. To such functions $f(y)$ there correspond functions $K(\sigma)$ and (p, ϱ)-relations, which for practical interest depend on six arbitrary constants. Five of these constants are determined by the condition that the approximating gas shall, at the sonic point, have the same values of

$$p, \ \varrho, \ \frac{dp}{d\varrho}, \ \frac{d^2p}{d\varrho^2}, \ \frac{d^3p}{d\varrho^3}$$

as the polytropic gas. The remaining parameter cannot be chosen so as to give the same $dp^4/d\varrho^4$ at the sonic point. Two ways of determining it so as to obtain good agreement in the supersonic region are discussed, and they give practically identical results.

For this approximation, the general solution of (1) is expressible in terms of Bessel functions, as also are the particular solutions obtained by the method of separation of variables. The approximation therefore has the advantage of being good in both the transonic and supersonic regions, and at the same time yielding solutions in terms of functions whose behavior is well-known.

UNIVERSITY OF MARYLAND,
COLLEGE PARK, MARYLAND, U. S. A.

AERODYNAMIC FORCES ON OSCILLATING SWEPT WINGS OF LARGE ASPECT RATIO IN INCOMPRESSIBLE FLOW

W. ECKHAUS and ADRIAAN ISAK VAN DE VOOREN

An integral equation for the vortex distribution follows from Biot and Savart's law, viz.

$$4\pi w(x_0, y_0) = \iint\limits_{\substack{\text{wing}+\\ \text{wake}}} \frac{(y-y_0)\gamma_x - (x-x_0)\gamma_y}{r^3}\, dx\, dy \tag{1}$$

where the downwash w is given at the wing surface. The rectangular coordinates x, y (x in main stream direction, y in the plane of the wing) are transformed into new coordinates X and Y by

$$x = | Y | \tan \varphi + X, \quad y = \frac{Y}{\varepsilon}$$

where ε = root chord divided by wing span and φ denotes the angle of sweep. X and Y are, in general, of the same order of magnitude for points of the wing. ε is a small parameter.

The integration to Y occurring in (1) is performed by aid of Taylor expansions for γ_x and γ_y towards Y. When only terms independent of ε or linear in ε are retained and when γ_ξ and γ_η denote the vortex components in the directions of Y and X constant, eq. (1) becomes

$$w(X_0, Y_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-l}^{\infty}\frac{\gamma_\eta(X, Y_0)}{X - X_0}\,dX - \frac{\sin\varphi}{2\pi}\int_{-l}^{\infty}\frac{\gamma_\xi(X, Y_0)}{X - X_0}\,dX \qquad (2)$$

where l denotes the semi-chord in the section $Y = Y_0$. In the wake the vortex distribution satisfies the relation

$$\vec{\gamma}(X, Y) = \vec{\gamma}(l, Y)\, e^{-i\nu\frac{X-l}{v}}$$

where ν is the frequency and v the air speed. The solution of eq. (2) satisfying the Kutta condition

$$\gamma_\eta(l, Y) + i\frac{\nu}{v}\int_{-l}^{l}\gamma_\eta(X, Y)\,dX = 0$$

must be determined. The equation of continuity for the vortex field leads to

$$\gamma_\xi(X, Y) = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial y}\int_{-l}^{X}\gamma_\eta(X, Y)\,dX \qquad (3)$$

Eq. (2) is seen to have the advantage of containing Y_0 as a parameter and hence, can be solved for each section separately. Moreover, for $\varepsilon = 0$, the required solution is identical to the well-known two dimensional result for a straight wing, although the pressure, depending on γ_y, is reduced by a factor $\cos\varphi$. Since terms of order ε^2 are neglected, one may substitute the two-dimensional solution for γ_η in eq. (3). Thus, the second term of the right hand side of eq. (2) is known and eq. (2) becomes again of the type which occurs for a straight wing and hence, its solution is known.

There appear to exist three correction terms for the aerodynamic forces of a swept wing. They are proportional to $\frac{dl}{dy}$, $\frac{dz}{dy}$ and $\frac{d\varphi}{dy}$ respectively, where z and φ

are the bending and torsion deformations. The proportionality constants depend on $\omega = \frac{\nu l}{v}$ and contain $\sin \varphi$ as a factor.

Like the two-dimensional approximation for straight wings, this result may be used if $\Omega = \frac{\nu b}{v}$ (b = semi-span) is larger than 1. Otherwise, a correction analogous to the Reissner correction and being of order $\frac{\varepsilon^2 \ln \varepsilon}{\omega}$ should be added.

The complete theory will be presented in N.L.L.-Report F. 146 (National Aeronautical Research Institute, Amsterdam).

NOLENSLAAN 12, AMSTELVEEN.

FUNKTIONEN MIT POSITIVEM REALTEIL UND HURWITZ-POLYNOME IN DER THEORIE DER LINEAREN WECHSELSTROMSCHALTUNGEN UND REGELUNGSSYSTEME

HEINZ-FRIEDRICH EFFERTZ

Für drei technisch wichtige Klassen der rationalen Funktionen, die in der rechten Halbebene positiven Realteil besitzen, wird ein einfacher Zusammenhang mit Hurwitz-Polynomen angegeben, der einen Satz von W. Cauer verallgemeinert. Die Variabilitätsbereiche der Koeffizienten dieser Funktionen werden mitgeteilt, wobei als Parameter die Probefunktionen von E. J. Routh gewählt sind. Dies ermöglicht ein Integral, das für die Beurteilung der Stabilitätsgüte linearer Regelungssysteme Bedeutung besitzt und das von H. Bückner, P. Hazebroek und B. L. van der Waerden untersucht wurde, als Funktion der Anfangswerte und der Routhschen Koeffizientenfunktionen darzustellen. Es folgen einige Bemerkungen über die algebraischen Stabilitätskriterien.

MATHEMATISCHES INSTITUT C,
TECHNISCHE HOCHSCHULE, AACHEN.

GENERATING FUNCTIONS OF NUMBER LANGUAGES

ROBERT ARTHUR FAIRTHORNE

The statistical properties of number languages, important in the design of computers and clerical apparatus, can be studied by writing each string or strings of digits that are the name of n as the coefficient of x^n in a power series. If concatenation of digits be interpreted as multiplication (not necessarily commutative) there is a generating function of this series.

Thus the constant-word-length graphical language which represents n as n significant increments, a_1, followed by N-n-1 'zeros', a_0 $(0 \leqq n < N)$, is generated by

$$W_G(a_0, a_1, N, x) = (a_0^N - a_1^N x^N)/(a_0 - a_1 x)$$

The variable-word-length graphical language where n, $(0 < n \leqq N)$, is represented by n increments, a_1, followed by a single stop, end-marker, or space, a, is generated by

$$W_D(a, a_1, N, x) = a a_1 x\{(1 - a_1^N x^N)/(1 - a_1 x)\}$$

As well as the vocabulary, the cost of the language in different operations is found by substituting u^{α_n} for the numerals in the generating function, α_n being some function, real or imaginary, of the cost of so using the corresponding digits. Thus, for example, the average cost per word is $\left[\dfrac{\partial \ln W}{\partial u}\right]_{u=x=1}$, and the average 'information' per digit is

$$\log_2 r = (\log_2 N) \Big/ \left[\frac{\partial (\ln W)}{\partial u}\right]_{u=x=\alpha_0=\alpha_1=\ldots=1}.$$

For a constant-word-length radix language, r becomes the ordinary radix or base. Thus the concept of radix can be extended to non-integral values. Its logarithm plays a part analogous to temperature in informational systems. It may be noted that the radix of the constant-word-length ('analogue') graphical language is the $N - 1^{\text{th}}$ root of N, coinciding with the binary radix system when N is 2.

Royal Aircraft Establishment,
Farnborough, Hants, England.

TRANSFORMATION CONFORME EN MÉCANIQUE ONDULATOIRE GÉNÉRALISATION DE LA NOTION DE VALEUR PROPRE

Robert Faure

L'équation d'onde relative aux fonctions propres pour un point matériel mobile dans un plan fixe $0x$, $0y$, ($0x$ et $0y$ axes rectangulaires) est, m étant la masse du point

$$(\mathrm{E}_1) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,(E - U(x, y))\,\psi = 0.$$

Le point $M(x, y)$ correspond au point $P(X, Y)$ par la transformation T (z, Z) $z = x + iy = f(Z)$, $Z = Y + iY$, $f(Z)$ fonction analytique de Z.

L'équation d'onde (E_1) devient après la transformation

$$(\mathrm{E}_2) \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial Y^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,(E - U(X, Y))\left(\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2\right)\psi = 0.$$

Nous examinerons les solutions des équations transformées dans X, Y de carré sommable dans x, y (uniformes dans X, Y) avec $r = |z|$, $R = |Z|$. Examinons le cas des potentiels en r^n avec la transformation $z = Z^p$. L'équation est alors

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,p^2(ER^{2p-2} + \varkappa_n R^{np+2p-2})\,\psi = 0$$

Le problème de l'oscillateur plan fournit par la transformation $z = Z^2$

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\,(\lambda R^2 - AR^6)\,\psi = 0 \quad \lambda = 4E, \quad A = 2\varkappa, \quad \varkappa > 0$$

Remarquons que la condition d'uniformité pour $\psi = f(x, y) = f(z)$ peut être écrite $f(z) = f(z\,e^{2\pi i})$ dans le plan xy et $f(Ze^{2\pi i}) = f(Z)$ dans le plan XY. Toutes les solutions de l'oscillateur plan sont uniformes dans le plan XY, puisque on a alors $f(z) = f(z\,e^{2\pi i}) = f(Z) = f(Ze^{i\pi})$.

La condition d'uniformité dans le plan xy, $f(z) = f(z\,e^{2\pi i})$ se traduit par $f(Z) = f(Ze^{i\pi})$. Mais il existe peut être des solutions uniformes dans P (X, Y) qui ne le sont pas dans $p(x, y)$, parce que l' on peut avoir $f(Z) = -f(Z\,e^{i\pi})$.

Les solutions de l'oscillateur plan qui proviennent de la séparation des variables x, y sont uniformes dans $p(x, y)$. Dans le plan xy, pour obtenir les autres solutions nous intégrons l'équations de l'oscillateur plan en séparant les variables polaires, et en prenant pour valeurs de la constante du moment cinétique $n + \frac{1}{2}$, n entier. En intégrant alors l'équations différentielles en r et en écrivant que celle-ci admet pour solution le produit de $e^{-\frac{\pi}{h}\sqrt{km}r^2}$ par $P(r)\,\sqrt{r}$, $P(r)$ polynome en r, et en tenant compte des solutions uniformes de l'oscillateur plan, on obtient pour valeur de $\lambda = 4E = \dfrac{h}{\pi}\sqrt{\dfrac{\varkappa}{m}}\,N$, N entier positif. Nous voyons ainsi que l'on peut donner une extension de la notion de valeur propre étant donné l'équation $\Delta\psi + \dfrac{8\pi^2 m}{h^2}\,(\lambda U_1 + U)\psi = 0$, U et U_1 étant des fonctions de XY réelles.

Nous désignerons par valeur propre les nombres λ tels que l'équation admette une solution uniforme et telle que $\iint \psi\psi^* u_1\, dX\, dY$ étendue au plan XY ait un sens.

Reprenons la transformation $T(z, Z)$ et l'équation E_2.

Nous obtiendrons une équation d'onde si l'éxpression

$$(E - U)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2\right)$$

peut être assimilée a une expression du type $V(X, Y) - k$ c'est-à-dire si

$$U \cdot \left(\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2\right) = k, \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 = |f'(Z)|^2.$$

La transformation s'obtiendra en effectuant la transformation définie par $f(Z)$, $|f'(Z)| = \dfrac{k}{\sqrt{|u|}}$ ce qui n'est possible que si Log U est une fonction harmonique de x et y.

Dans ces conditions, si l'on pose $F(X, Y) = |f'(Z)|^2$ l'expression obtenue étant du type $-k + E\,F(X, Y)$ le problème des valeurs propres relatif à la fonction $F(X, Y)$ pourra, dans certains cas, être ramené au problème correspondant pour la fonction $U(x, y)$.

En procédant ainsi des résultats simples peuvent être obtenu pour les potentiels fonctions monotomes uniquement de la distance $r = OM$.

On peut lier les valeurs propres de deux problèmes

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - k_n r^n)\psi = 0$$

si

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} = -\frac{1}{2}.$$

En tenant compte, s'il y a lieu, des nombres négatifs, on constate qu'entre les énergies E_1 et E_2 existe la relation

$$(E_2)^{\frac{n_2+2}{2}} \cdot E_1 = \left(\frac{n_2 + 2}{2}\right)^{n_2} \cdot \varkappa_2 \cdot (\varkappa_1)^{\frac{n_2+2}{2}}.$$

Il y a lieu de vérifier que la fonction ψ correspondant aux énergies E_1 et E_2 est bien définie et de carré sommable dans les deux plans.

Faculté des Sciences,
Hanoi (Vietnam).

THE OPTIMAL APPROXIMATION OF FUNCTIONS BY POLYNOMIALS

JAN V. GARWICK

The reason for approximating a function by a polynomial is usually that this function shall be used by a high speed computor. The optimal approximating polynomial $P(x)$ to a function $f(x)$ in a given interval is defined so that the rest term $R(x)$ in the equation $f(x) - P(x) = R(x)$ shall have as many extrema as it can, considering the number of coefficients available in $P(x)$ and that the value of these extrema shall be of varying sign and of the same absolute value.

It can be shown that the coefficients in $P(x)$ are generally badly determined, but the coefficients a_k in the expression $P(x) = \sum a_k T_k(x)$ are well determined. $T_k(x)$ are Tsjebysheff polynomials.

If $f(x)$ is developed in a series of Tsjebysheff polynomials, and only the N first are kept, we have a polynomial approximation. $R(x)$ is in this case the rest term of the generally infinite series. If the coefficients decrease rapidly, $R(x)$ is nearly equal to $a_N T_N(x)$ which is of the required form. Even if the other terms do have an influence, the extrema of $R(x)$ will usually be close to those of $T_N(x)$. This shows us that we may as a first approximation to $P(x)$ develop $f(\cos\theta)$ in a cosine series by harmonical analysis using $N + 1$ ordinates. If the coefficients are a_k, we have $P_0(x) = \sum_0^{N-1} a_k T_k(x)$ with a rest term whose extrema will all have an absolute value near $|a_N|$.

If the polynomial found in this manner has a rest term $R_0(x)$ whose extrema are to unequal, a better approximation may be found by the following procedure. First find the positions (x_s) and values (R_s) of the extrema of $R_0(x)$ from the error curve. Then solve the equations

$$\sum_0^{N-1} b_k T_k(x_s) + b_N(-1)^s = R_s$$

If the unknown b_N is eliminated first, the right hand sides will be very small and a very low relative accuracy is required in the b_k's. The polynomial $P_0(x) + \sum_0^{N-1} b_k T_k(x)$ will then be a closer approximation and the new rest term will deviate only slightly more than $|b_N|$ from zero.

NORWEGIAN DEFENCE RESEARCH EST.,
KJELLER PR. LILLESTRØM, NORWAY.

ON SOME FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF AXIALLY SYMMETRIC FLOWS

ABOLGHASSEM GHAFFARI

Let φ and ψ denote the velocity potential and the stream function of a compressible subsonic flow and let τ, $0 < \tau < \tau_s = 1/6$, and θ be the hodograph variables. The author obtained (Thesis, London, Jan. 1948) for φ and ψ the following differential equations: (1) $\varphi_{\theta\theta} + \varphi_{tt} - S\varphi_t = 0, \varphi_{\theta\theta} + \psi_{tt} + S\psi_t = 0$, where $S(t)$ satisfies $S' - 3S^2 \geqq 0$ and its expression is $1/S = R(dR/dt)^{-1} = -3t[1 + 39/25 \,.\, (15/2)^{1/3} t^{2/3}] + 0\,(t^{7/2})$ and $t = \int^{1/6} (1-6\tau)^{1/2} (1-\tau)^{-1/2} d\tau/2\tau$. The author gave also (loc. cit.) the following pair of fundamental solutions of (1): $\varphi = R^{1/2} e^{mt} F_m(t) \cos(m\theta + \varepsilon_m)$, $\psi = -R^{-1/2} e^{mt} G_m(t) \sin(m\theta + \varepsilon_m)$, where F_m and G_m satisfy each a certain Ricatti equation. For the approximate value $S \sim -1/3t$, the equations (1) become (2) $\varphi_{\theta\theta} + \varphi_{tt} + 1/3t\,\varphi_t = 0$, (3) $\psi_{\theta\theta} + \psi_{tt} - 1/3t\,\psi_t = 0$.

The solutions of these elliptic equations are analytic in the upper half-plane $t > 0$, and the line $t = 0$ (axis of symmetry) is in general a singular line for φ. However, some solutions φ remain analytic for $t = 0$. Recently A. Weinstein (Transactions of the AMS, Vol. 63, 1948, pp. 342—354; Bulletin of the AMS, Vol. 59, 1953, pp. 20—38) showed that for $t > 0$, φ and ψ satisfy the equations of an axially symmetric flow in the meridian plane (θ, t) of a fictious space of 2 1/3 dimensions and he then applied to the equations (2), (3) the results of GASF. The equations (2), (3) have been discussed by several authors and two extensive discussions of the equation (2) are given by A. Weinstein (loc. cit.) and P. Germain (La recherche aéronautique, No. 22, 1951). The general solution of the equation (2) is

$$\varphi = A \int_0^\pi F(\theta + it\cos\alpha) \sin^{-2/3}\alpha\, d\alpha + B \int_0^\pi G(\theta + it\cos\alpha) t^{2/3} \sin^{2/3}\alpha\, d\alpha,$$

where A and B are constant. Along the sonic line $t = 0$ $(\tau = \tau_s = 1/6)$, φ may be specified for $\varphi = AF(\theta) \int_0^\pi \sin^{-2/3}\alpha\, d\alpha$ and $d\varphi/dt = 2/3 \,.\, BG(\theta)$. If we take $F(\theta)$ and $G(\theta)$ to be power series in $e^{i\theta}$, then $\varphi = t^{1/3} \Sigma [A J_{1/3}(mt) + B J_{-1/3}(mt)] e^{im\theta}$, where J denotes the Bessel function of the first kind.

FACULTY OF SCIENCE, TEHERAN UNIVERSITY,
TEHERAN, IRAN.

UNE PROPRIÉTÉ DES FONCTIONS CONTINUES SPATIO-TEMPORELLES SUR LES SURFACES RÉGULIÈRES FERMÉES

ANTONIO GIÃO

Soient σ une surface régulière fermée, $p(\varphi, \lambda, t)$ une fonction du temps t et des points (φ, λ) de σ satisfaisant aux conditions de Dirichlet et possédant presque partout des dérivées premières et enfin $\vec{H}_\sigma(\varphi, \lambda)$ un vecteur vitesse tangent à σ et avec des lignes de flux fermées et régulières. Posons $\hat{p} = p + C$, C étant une constante telle que $\hat{p}$ soit positif partout et à chaque instant. On démontre alors la propriété suivante:

Il existe un opérateur linéaire, spatial, non singulier A tel que la fonction $A(\hat{p})$ soit purement advective, c'est-à-dire dont l'évolution résulte uniquement de l'advection des valeurs initiales $p_0(\varphi, \lambda)$ par le vecteur vitesse $\vec{H}_\sigma$. En désignant par $\{f(\varphi, \lambda)\}$ la fonction qui résulte de l'advection de $f(\varphi, \lambda)$ par $\vec{H}_\sigma$, on aura donc: $A(\hat{p}) = \{A(\hat{p}_0)\}$. Cette propriété a le corollaire suivant:

Il existe toujours un scalaire $u(\varphi, \lambda)$ tel que:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -M[\vec{H}_\sigma \cdot \nabla_\sigma p]; \quad \left(M = \frac{1}{u}\int_0^u d\xi,\ M^{-1} = \frac{\partial}{\partial u}u\right).$$

La solution de cette équation peut être écrite, pour des conditions initiales données, aussi bien dans le cas analytique que dans le cas général non analytique. On peut mettre la solution sous la forme:

$$\operatorname{Log} \hat{p}(\varphi, \lambda, t) = M[\beta^{-1}\{\beta M^{-1} \operatorname{Log} \hat{p}_0\}],$$

où $\beta(\varphi, \lambda)$ est une fonction des points de σ satisfaisant à $0 \leqq \beta \leqq 1$ et bien déterminée par $p_0(\varphi, \lambda)$.

Ces résultats peuvent être appliqués par exemple à la prévision mathématique du temps et forment la base du calculateur électronique analogique actuellement en construction à la Société d' Électronique et d'Automatisme sous la direction de M. F. H. Raymond. Dans le cas, par exemple, où $p(\varphi, \lambda, t)$ est la perturbation de la pression au niveau de la mer, on peut poser $u = (\cos\varphi)^k$ (k = constante) quand on part de

$$\vec{H}_\sigma = \frac{R}{2\Omega \sin\varphi} \vec{k}_z \times \nabla_\sigma T_{\sigma m}$$

(φ latitude géographique, Ω vitesse angulaire de la Terre, R constante des gaz pour l'air, $T_{\sigma m}$ température moyenne au niveau de la mer pour une période telle que $\partial T_{\sigma m}/\partial t$ soit négligeable par rapport à la variation locale de la température observée, $\vec{k}_z$ vecteur unitaire normal à σ).

107, RUE LAURISTON, PARIS (16).

ÉTUDES MATHÉMATIQUES NÉCESSITÉES PAR L'UTILISATION DE L'ÉNERGIE DES MARÉES

ROBERT GIBRAT

Les problèmes fondamentaux posés par la nature très particulière de l'énergie des marées ou par son utilisation relèvent soit de la théorie des équations intégrales soit du calcul des variations.

La première théorie intervient quand on cherche à déterminer en utilisant la théorie des marées de H. Poincaré comment un barrage d'abord, une usine utilisant l'énergie ensuite modifient le régime des marées, tant amplitudes que courants. Certains premiers résultats sont donnés permettant de chiffrer la répercussion des grandes usines projetées en France dans la baie du Mont Saint-Michel.

La seconde théorie intervient dans l'exploitation de l'usine une fois construite. Comment exploiter une chute qui s'évanouit en quelques heures? Toute énergie consommée sur le champ paraît perdue. A marée descendante, l'énergie disparait pour partie à chaque instant. Par contre à marée montante elle paraît se reconstituer pour le vidage suivant. Le calcul des variations, en particulier le problème de Mayer est nécessaire pour apporter une solution valable à la recherche de l'exploitation optimum. La recherche délicate des conditions suffisantes trouve ici une application particulièrement élégante. Des formules simples sont données applicables en toute rigueur dans le cas le plus général pour des formes quelconques de bassin, des courbes de marées et de colline débit-hauteur représentant les propriétés des turbo-machines. Certains résultats paraissent susceptibles d'améliorer la connaissance du problème de Mayer.

44 RUE DE LISBONNE,
PARIS 8.

COMPARISON METHODS IN FLUID DYNAMICS

DAVID GILBARG

The methods discussed here are based on certain comparison theorems, of which the following is an important example: Let two irrotational flows which are uniform at infinity be defined in regions D and $\overline{D}$, with $D \subset \overline{D}$, such that each region is bounded by a single streamline extending to $x = \pm\infty$. Let the two bounding streamlines have a regular point P in common. If the respective free stream velocities are $q_0, \bar{q}_0$, with $q_0 \leqq \bar{q}_0$, then the corresponding flow speeds at P satisfy the inequality, $q(P) \leqq \bar{q}(P)$, and the equality holds if and only if the two flows are identical and $D = \overline{D}$. This and other comparison theorems have been proved for various classes of flows and domains, including flows both plane and axially symmetric, subsonic and incompressible, and for channel flows as well as for regions bounded by a single streamline; [cf. M. Lavrentieff, Mat. Sbornik 46, 391—458 (1938); J. Serrin, (1) Amer. J. Math, 74, 492—506 (1952), (2) J. Rational Mech. Anal. 1, 563—572 (1952), (3) J. Rational Mech. Anal. 2, 563—575 (1953); D. Gilbarg, (1) J. Rational Mech. Anal. 1, 309—320 (1952), (2) J. Rational Mech. Anal. 2, 233—251 (1953)].

Results based on these theorems include elementary proofs of uniqueness of flows with free boundaries [Serrin (1), Gilbarg (1)], theorems on geometric properties of free streamlines and determination of bodies with minimum cavity drag [Serrin (3)], uniqueness theorems and other qualitative results for subsonic flows [Gilbarg (2)], and the determination of profiles achieving extreme values of the critical Mach number [Gilbarg and Shiffman, J. Rational Mech. Anal. vol. 3, No. 2 (1954)]. Since the comparison arguments rest primarily on the maximum principle satisfied by the difference of two stream functions, these methods allow discussion of both incompressible and subsonic flows directly in the physical plane — without recourse to hodograph method— thus providing a means of easy generalization of many results from plane to axially symmetric flows.

INDIANA UNIVERSITY,
BLOOMINGTON, IND.

NOTE SUR LA SOLUTION DE L'ÉQUILIBRE ÉLASTIQUE D'UNE PARTIE D'UNE SURFACE DE RÉVOLUTION QUELCONQUE

DJORDJE GOLUBOVIĆ

Cette Note traîte le problème d'une partie de la surface de révolution d'après la théorie de flexion des coques minces. La partie de la surface de révolution est déterminée par deux plans horizontaux qui donnent deux bordures horizontales, et par deux surfaces latérales qui donnent deux bordures latérales. Les résultantes des forces intérieures et des moments sont développées en séries en δ/R jusqu'au quatrième terme qui est, pour les coques minces, largement suffisant. Les coefficients de ces séries sont donnés en fonction des déplacements U, V et W de la surface mediane de la coque et en fonction de la forme de la surface mediane.

Pour déterminer les expressions des déplacements il faut résoudre le système des équations d'équilibre développées jusqu'au deuxième terme en δ/R. Pour résoudre ce système il faut développer les inconnus en séries de Fourier et introduire la fonction des contraintes de Neményi.

Avec les coefficients des séries de Fourier des forces intérieures on obtient, d'après la loi de Hooke macroscopique développée jusqu'au deuxième terme en δ/R, les trois équations avec les U, V et W comme inconnus. Ce système est résolu en introduisant une nouvelle fonction des déplacements de Truesdell.

Dans ce problème d'équilibre élastique d'une partie de la surface de révolution existe le chargement réel ($n = 0$) et le chargement fictif ($n = 1$) dû aux forces extérieures qui donnent aux déplacements sur les bordures latérales les valeurs nulles. Si on exprime la bordure latérale de la surface de révolution sous une forme analytique, on peut déterminer les expressions des déplacements de telle façon que ces déplacements ont une valeur nulle sur les bordures latérales. Les autres quatres constantes qui figurent dans les coefficients des séries de Fourier des déplacements sont déterminées à partir des conditions sur les bordures horizontales.

161 rue du Château,
Paris 14.

LA DINAMICA ISOSTATICA DE LAS REDES ELECTRICAS Y SUS APLICACIONES AL DIMENSIONADO AUTOMATICO DE ESTRUCTURAS MECANICAS

Angel Gonzalez del Valle

Se comienza por poner de manifiesto il isomorfismo entre las relaciones que ligan los elementos de un sistema de fuerzas en equilibrio que actúan sobre un punto (congruente) y determinadas magnitudes de una red eléctrica estrellada. A ese sistema y a esa red se les denomina isomorfos. A las magnitudes eléctrica y mecánica que desempeñan igual papel en las respectivas expresiones matemáticas de que forman parte, se denomian correspondientes. Se demuestran que son correspondientes la fuerza y la raiz cuadrada de la admitancia de una rama cortando ésta, es isomorfa con el sistema de fuerzas obtenido proyectando el sistema isomorfo con la primitiva estrella, según una direccion paralela a la de la fuerza correspondiente con la admitancia de la rama que se ha cortado en dicha estrella primitiva.

A partir de este teorema se etablece un criterio para realizar redes eléctricas isomorfas con sistemas de fuerzas congruentes y equilibrados en espacios de dos, tres o más dimensiones. Después se utiliza una red homeomorfa con una figura geométrica en el sentido que se establece en la teoría titulada „Geometría métrica de las redes rigídas" (1). Esta red se interconecta con la primera para obtener una red resultante en la cual tienen existencia real las magnitudes que definen una estructura mecánica.

Esta red resultante, constituye lo que denominamos una representación o proyecto eléctrico de la estructura mecánica dicha.

Si se desea dimensionar una estructura mecánica en la que se conoce su topología y el número suficiente de valores de sus magnitudes, comenzamos por realizar un proyecto eléctrico de una estructura cualquiera que tenga esa misma topología. Después se compara por diferencia el valor de cada magnitud en ese proyecto eléctrico, y el que tendría si el sistema o estructura mecánica fuese la deseada.

Esas diferencias se utilizan para accionar sendos servosistemas de modo que hagan decrecer tales diferencias. Este proceso cibernético conduce a la obtención automática del proyecto (eléctrico) de la estructura mecánica capaz de satisfacer las exigencias impuestas.

S. Bernardo no. 112,
Madrid.

ON SOME DISTRIBUTIONS OF QUANTUM ELECTRODYNAMICS

Alberto González Domínguez

1. Let S be a temperated n-dimensional distribution; let

$$\delta^{\pm} = \frac{\delta}{2} \mp \frac{1}{2\pi i} \text{ v.p. } \frac{1}{x}$$

(our notation is the one used in the book by L. Schwartz, Théorie des Distributions, Paris, 1950 and 1951, called here TD; references to this book will be made by indication of the volume, followed by the number of the formula); and let m be the least integer for which the convolution of S with $\delta^{\pm}$ makes sense. Then the following formula holds

$$\left.\begin{aligned} S &= S^{++} + S^{-}, \\ S^{\pm} &= I_{x_i}^{[m]} \{S \ast [\delta_{x_i}^{\pm}]^{[m]}\} \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

When S is a function of one variable and $m = 0$, (1) reduces to a classical formula of Plemelj. When $m \neq 0$, $F[S^{\pm}]$ can be used to define the Carleman

[1]) A. Gonzalez del Valle. Revista de Cálculo Automático y Cibernética, no. 5.

Fourier transform of S. This explains the adding by W. Güttinger (Phys. Rev., 89 (1953), p. 1012) of a term $\lambda\delta$ to the Fourier transform of $lg \mid t \mid$ (*TD*, II, form. VII, 7; 18).

Formula (1) can be extended to vectorial distributions; in particular to vectorial distributions whose values are selfadjoint operators of Hilbert space. Let S be such a distribution-operator, expressed in the so called interaction representation (Schwinger); the two distribution-operators $F[S^{\pm}]$ are then identical with the emission and absorption operators of Quantum Electrodynamics. In this connexion the testing functions appear as the mathematical counterpart of the "measurements" of field quantities.

2. If we make the change of variable

$$x \to R - \lambda^2 = x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_{n-1}^2 - \lambda^2$$

in the one-dimensional distributions Y_m (*TD*, I, form. II, 2; 31), we arrive at the n-dimensional distributions

$$\begin{aligned} Y_m[R - \lambda^2] \cdot \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) &= Y_m[R - \lambda^2]^{++} \cdot \varphi + Y_m[R - \lambda^2]^{-} \cdot \varphi = \\ &= Y_m(t) \cdot \psi_1(t) + Y_m(t) \cdot \psi_2(t). \end{aligned} \tag{2}$$

In this formula $(R - \lambda^2)^{\pm}$ designate the sheets of the hyperboloid $R = \lambda^2$ corresponding to $x_n \gtrless 0$ respectively; and

$$2\psi_{1,2}(t) = \underbrace{\int\int\cdots\int}_{n-1} \frac{\varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n = \pm\sqrt{\lambda^2 + \varrho^2 + t}\right)}{\sqrt{\lambda^2 + \varrho^2 + t}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}, \tag{3}$$

with $\varrho^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2$, the integral being extended to the whole $(n - 1)$-dimensional space.

Let us put (n even)

$$2D = \pi^{\frac{2-n}{2}} \left[Y_{\frac{4-n}{2}}(R^+) - Y_{\frac{4-n}{2}}(R^-) \right]. \tag{4}$$

This is the (n-dimensional) "invariant delta" of Pauli-Jordan. Putting now in (1) $S = D$ (with $m = 0$), we obtain the symbolical functions called $D^{\pm}$ by Schwinger. Again by a repeated application of (1) we get

$$2D_F = \pi^{\frac{2-n}{2}} \left[Y_{\frac{4-n}{2}}(R^{++}) \ast \delta_{x_n}^{++} + Y_{\frac{4-n}{2}}(R^-) \ast \delta_{x_n}^{-} \right], \tag{5}$$

which is the (n-dimensional) "magic function", of Stueckelberg-Feynman.

3. Physicists ascribe a meaning to the integrals ($n = 4$, $x_4 = t$)

$$\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{[l]}(R - \lambda^2)\, dx\, dy\, dz\, dt = Y(R - \lambda^2) \cdot 1. \tag{6}$$

Now (3) shows that (6) has no meaning, since the integral (3) diverges if we put $\varphi \equiv 1$ in it. However, if, when calculating the value of (2) we (incorrectly) reverse the order of limits we shall arrive to the result (C is the Euler constant)

$$\delta^{[l]}[R-\lambda^2] = \begin{cases} \pi\lambda^2[lg\,\lambda^2 + C + lg\,2\pi - 1], & \text{for } n = 0, \\ \pi[lg\,\lambda^2 + C + lg\,2\pi], & \text{for } n = 1 \\ \dfrac{(-1)^{l+2}\cdot\pi[l-2]!}{\lambda^{2n-2}} & \text{for } n \geqq 2. \end{cases}$$

PÁRAGUAY 1327, B. A.,
ARGENTINA.

SU UN PROBLEMA DI INDUZIONE MAGNETICA

DARIO GRAFFI

Nelle ricerche sperimentali si ammette che un ellissoide di materiale ferromagnetico (cioè con legge di magnetizzazione non lineare e con isteresi pure non lineare) si magnetizza uniformemente se sottoposto ad un campo magnetico uniforme. Per una deduzione rigorosa, dalle equazioni dell'elettromagnetismo, di questa proprietà dell'ellissoide occorre dimostrare l'esistenza di una soluzione dell'equazione funzionale nel vettore $\overline{J}(t)$ (intensità di magnetizzazione), funzione del tempo t, quest' ultimo variabile in un certo intervallo $(0, a)$:

$$(1) \qquad \overline{J}(t) = f(\overline{H}_0(t) - \alpha\overline{J}(t)) + F(H_0(\tau) - \alpha\overline{J}(\tau))$$

Nella (1) $H(t)$ è un vettore noto (intensità del campo magnetico inducente) α una omografia vettoriale (tensore doppio) $f(H(t) - \alpha J(t))$ un vettore funzione di $H(t) - \alpha J(t)$, $F(\overline{H}_0(\tau) - \alpha\overline{J}(\tau))$ un funzionale del vettore $\overline{H}_0(\tau) - \alpha\overline{J}(\tau)$ definito nell'intervallo $(0, t)$ $(t < a)$. L'equazione (1) è già stata da me studiata nel 1931 (Annali di Matematica pura e applicata, Serie IV, tomo IX) ora viene trattata per via più semplice, mediante considerazioni topologiche e tenendo presente che, per il fenomeno della saturazione magnetica, i due termini al secondo membro di (1) si possono supporre, in ogni caso, limitati.

IST. MAT. UNIVERSITÀ BOLOGNA.

SOME REMARKS ON A PAPER BY C. CARATHEODORY (Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), p. 71—76)

ROLF GRAN-OLSSON

The applications of the Hamilton-Jacobi equations in classical mechanics are not numerous, but there exists a close similarity between different problems of dynamics, which can be shown by using these equations. For the different quantities in one problem it is possible to point out the corresponding quantities in the other and in this way one obtains not only a similar scheme for treating the problems, but also for the interpretation of the physical quantities in different problems. In the following we will give a solution of the spherical pendulum with infinitesimal oscillations on the one hand and the problem of planetary motion on the other. Furthermore we will give a solution of the motion of the sleigh with a slight change of the condition of motion as given in the paper by *C. Carathéodory*, considering the sleigh as the simplest example of a non-holonomic system [1].

The sleigh is regarded as a rigid plane system with three degrees of freedom. We neglect the friction on the snow or consider it as permanently compensated by the pull of a horse. On the other hand we have to take into account the force R exerted laterally by the snow tracks against the runners of the sleigh, letting this force be concentrated at one point of application.

In our calculations we will follow the scheme in the paper by *C. Carathéodory* with the exception that we keep the velocity v different from zero but constant. This assumption may be in better agreement with the real motion of the sleigh, because in some cases the force R is not sufficient to prevent a lateral motion of the sleigh. On the other hand we limit our calculation to the case $v =$ const., $\dot{v} = o$, in order to avoid too complicated equations of motion.

INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
TRONDHEIM.

THE SOLUTION OF PARABOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DIFFERENCE METHODS I

JOHN W. GREEN

F. John, (*On integration of parabolic equations by difference methods*, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. V, 155—211 (1952)) has studied how the solution of linear and quasi-linear parabolic partial

[1] C. Carathéodory, Z. angew. Math. Mech. vol. 13 (1933), p. 71—76.

equations in one space variable can be obtained by solving suitable difference equations in a rectangular lattice and taking the limit of these solutions as the mesh size decreases toward zero. The present work is the initial part of an effort to extend that work to the case of two or more space variables.

The problem considered herein is that of solving the equation

$$u_t = au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + eu_x + gu_y + pu + q \tag{1}$$

in the region R: $0 < t < T, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty$, subject to the initial condition $u(x, y, 0) = f(x, y)$, given. The coefficients a, b, etc., are functions of x, y, and t. The difference equations employed relate to a family of rectangular lattices of mesh (h, k), where $k/h^2 = \lambda =$ constant, and are of the form

$$u(x, y, t+k) = \sum_{n,s} C^{n,s}(x, y, t, h)u(x+nh, y+sh, t) + kq(x, y, t). \tag{2}$$

In order that (2) pass formally over into (1) as h and k tend to zero, it is necessary that the coefficients $C^{n,s}$ be related to the coefficients a, b, etc., by a rather obvious set of compatibility equations — equations which are automatically satisfied, for example, if (2) is obtained from (1) by replacing each derivative by the most obvious divided difference.

In order, however, that the solutions of (2) approach those of (1) some further restrictions on the $C^{n,s}$ are necessary; namely restrictions which will ensure that the solutions of (2) can be bounded in terms of the bounds for f and g, uniformly for all h. If this is so, the difference equation is said to be stable. The present work is devoted to studying the problem of stability, and conditions therefore. The work of John is particularly adapted to being extended to higher dimensions, since he does not restrict his attention to non-negative C. In one dimension this is in many cases feasable, and stability becomes very easy to prove; however in more dimensions it is usually not possible.

In analogy with the work of John it is shown that a necessary condition for stability is that for all θ and φ and for all x, y, t in R,

$$\left| \sum_{n,s} C^{n,s}(x, y, t, 0)e^{i(n\varphi+s\theta)} \right| \leqq 1.$$

Under suitable conditions of boundedness of the coefficients $C^{n,s}$ and their divided differences — conditions usually obtainable from the smoothness of a, b, etc., the sufficient condition for stability,

$$\left| \sum_{n,s} C^{n,s}(x, y, t, 0)e^{i(n\varphi+s\theta)} \right| \leqq e^{-M(\theta^2+\varphi^2)},$$

$M > 0$, is obtained. The methods used, however, are such that with increasing number of dimensions, greater smoothness of the data is required.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS,
UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES 24, CALIF.

ON THE PRECESSIONS OF A RIGID HEAVY BODY FIXED IN A POINT

GIUSEPPE GRIOLI

I establish in an intrinsical form the equations determining the motions of precession which are dynamically possible for a rigid heavy body fixed in a point and show a class of solutions.

UNIVERSITÀ DI PADOVA.

SUR UNE ÉQUATION INTÉGRALE OPÉRATORIELLE DANS UN ESPACE ABSTRAIT DE HILBERT

ROLAND GUY

Avec l'équation:

$$U(t, t_0) = U^0(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau)\, U(\tau, t_0) d\tau, \tag{V}$$

où U, U^0, F sont des fonctions des variables t, τ à valeurs opératorielles, M. A. Visconti [1] a généralisé les équations d'évolution de type intégral de Schwinger et Feynman.

On transforme facilement (V) en:

$$x(t) = x^0(t) + \int_{t_0}^{t} F(t, \tau) x(\tau)\, d\tau, \tag{v}$$

équation fonctionnelle intégrale dans un espace de Hilbert abstrait ($\mathfrak{h}$). Si:

I a) La famille $F(t, \tau)$ est linéaire et bornée pour toutes les valeurs de t et τ dans I $\times$ I (I intervalle compact de la droite réelle),

b) $J_n(\tau^n) = F(t, \tau_n)\, F(\tau_n, \tau_{n-1}) \ldots F(\tau_2, \tau_1)\, x^0(\tau_1) \in L^1_{(\mathfrak{h})}$ (ii) pour n quelconque dans $I \times I \times I \ldots$;

ou si:

II a') La famille $F(t, \tau)$ est linéaire et autoadjointe, à contre-domaine $\Delta_{F(t,\tau)}$ intérieur au domaine $D_{F(t,\tau)}$ de la famille $F(t, \tau)$,

b') Les $x(t) \in D_{F(t,\tau)} \in L^2_{(n)}$ (ii),

c') Les $R_n(t, \tau^n) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \| F_{j_n}(t, \tau_n)\, P_{L_{j_n}(t,\tau_n)}\, x^{(n-1)}_{(\tau_n)} \|^2$

---

[1] A. Visconti, Journal de Physique et de Radium t 12, p 726, 1951.

(bornés pour n fini) sont bornés dans leur ensemble ($x^{(n)}$ itéré d'ordre n, F_{j_n} famille d'opérateurs bornés, réduction de F sur les sous-espaces orthogonaux L_{j_n} déterminant $\mathfrak{h}$ tout entier; $p_{L_{j_n}}$ famille de projecteurs sur L_{j_n});
ou si:

III a'') $F(t, \tau)$ famille d'opérateurs linéaires de ($\mathfrak{h}$),

b'') $J_n(\tau^n) \in \overset{1}{L}_{(\mathfrak{h})}$ [2],

c'') Les fonctionnelles (J_n, y) fonctions de $(\tau^n) = \tau_n, \ldots \tau_2, \tau_1$ sont intégrables au sens de Lebesgue quel que soit $y \in \mathfrak{h}$ et sont bornées dans leur ensemble,

on peut établir l'existence des solutions de (v) par la méthode des approximations successives et montrer que

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} x^{(j)}(t)$$

converge I° *fortement* dans les cas I et II et 2° *faiblement* pour III vers S, solution unique de (v).

10 Rue, du Ranelagh,
Paris 16e.

ÜBER DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DER SUPRALEITUNG

Ernst Hölder

Die von Kamerlingh Onnes entdeckte Supraleitung, insbesondere die Dauerströme in Leitern mehrfachen Zusammenhanges, gehorchen nach der phänomenologischen Theorie von London und (nichtlinear erweitert) von v. Laue Differentialgleichungen, die als Erweiterung der Maxwell'schen Gleichungen mathematisches Interesse verdienen.

Man kann die elektromagnetische Feldstärke $F_{i\alpha}$, bzw. die Differentialform $F = \sum_{(i,\alpha)} F_{i\alpha}\, dt^i\, dt^\alpha$ im 4-dimensionalen Minkowski-Raum ($t^1, t^2, t^3. t^4$) aufspalten: $F = y + \xi$, wo y das Feld der Ohmschen Stromdichte $\mathring{\varrho}^i$, ξ das Feld der Suprastromdichte ϱ^i ist, welche sich als Differentialform dritten Grades aus dem von Laue eingeführten Supraimpuls η_i herleitet:

$$\varrho = K_\eta = \Omega_\eta = W_{\eta_i}(dt)_2, \; (dt)_1 = dt^2\, dt^3\, dt^4, \ldots$$
$$\text{analog } K_x = -\mathring{\varrho}, \; K_{*\xi}\, (dt)_2, \; (dt)_1 = \xi$$

mit der Differentialform $K = \Omega + \frac{1}{2}\xi^*\xi + \mathring{\varrho}\, x$,
wo $\Omega = W(\eta_i)\, dt^1 \ldots dt^4$ die freie Energie des Suprastroms ist. Es gilt dann im

[2] Voir N. Bourbaki, Fonct. var. réelles, Act Sc., Hermann, Paris, p 79 et 145.

Kalkül alternierender Differentialformen (Hodge), mit der Potentialform $x = x_i\, dt^i$ für $\begin{pmatrix} x & \xi \\ y & \eta \end{pmatrix}$, das Gleichungssystem kanonischer Struktur

$$\begin{aligned} dx &= \xi & d^*\xi &= K_\eta \\ d^*y &= -K_x & d\eta &= -K_{*\xi} - y. \end{aligned}$$

Es läßt ohne weiteres (nach Carathéodory) das (in anderer Form von F. Beck aufgestellte) Variationsprinzip und den Mechanismus der London-Laueschen Spannungen erkennen. Statt von Laues Gardinengleichnis kann eine viel treuere Plattenanalogie formuliert werden. Der mathematische Existenzbeweis von Dauerströmen ist mittels Potentialtheorie und nichtlinearer Integralgleichungen (Lichtenstein) zu erbringen.

Am Wasserwerk 7,
Leipzig O 27.

LINEAR PERTURBATIONS OF HYPERBOLIC PROBLEMS IN THREE INDEPENDENT VARIABLES

Maurice Holt

In recent years a number of methods have been developed for the solution of nonlinear hyperbolic problems involving three independent variables, particularly problems of steady and unsteady supersonic flow, by use of characteristic systems of coordinaties. In general these methods are very difficult to apply to specific problems, since the characteristic coordinates are not known in advance and must be determined step-by-step along with the other dependent variables in the problem. But if the solution of a particular basic problem is known a fairly simple approximate method can be developed to apply to any problem which is a linear perturbation of this, since the known characteristic coordinate system of the basic problem can be used in the perturbed problem. Regarded in this way the perturbation of the basic problem can be reduced to a linear hyperbolic problem in three variables, and can be treated either by the results of classical analysis or by a simple numerical process involving difference equations with known independent variables.

In the present paper this method is developed for linear perturbations of problems of steady supersonic flow involving three space coordinates and of unsteady flow involving two space coordinates. Particular attention is given to perturbations of fields of flow involving two independent variables only; these are the least difficult to handle but at the same time are of considerable practical interest. Perturbations of this special type have been considered previously, notably by Guderley, Ferrari and Ferri but their approach is rather different. Each starts from a method of characteristics for two variables, applicable to the basic problem, and then extends this to take account of first order variations with a third variable. Here the reverse procedure is adopted and the perturbation is treated as a special case of fully three dimensional flow. In this way it is ensured that the characteristic coordinate system remains of the correct form for three independent, variables even when the equations of the characteristic surfaces involve only two of these variables.

S.S.A.M., ARMAMENT RESEARCH ESTABLISHMENT,
FORT HALSTEAD, SEVENOAKS, KENT.

GENERATION OF ERROR IN COMPUTATIONS WITH CONTINUED FRACTIONS

ALSTON SCOTT HOUSEHOLDER

In endeavoring to compute a particular functional value $f(x)$ one may actually obtain a somewhat different quantity $f^*(x^*)$ which is in error by an amount

$$f(x) - f^*(x^*) = [f(x) - f(x^*)] + [f(x^*) - f_a(x^*)] + [f_a(x^*) - f^*(x^*)].$$

The three bracketed components of the error may be called, respectively, the propagated error, the residual error, and the generated error. The approximation x^* to the argument x may be known only through measurement or previous calculation, and the initial error, $x - x^*$, gives rise to the propagated error and imposes an irreducible limit on the accuracy of the final result.

Let f_a represent a particular approximant of a continued fraction. If the continued fraction converges then one can choose f_a so as to make the residual error as small as desired, but given the computing system, and a particular arithmetic, the generated error increases as the residual error decreases. With the assumption of single-precision arithmetic on a Princeton-type machine, routines for computing certain elementary functions by continued fractions are discussed, with special reference to the introduction of scale factors and their effect on the generated error, and the selection of the approximant which minimizes the combined generated and residual errors for the desired range of the argument.

MATHEMATICS PANEL, OAK RIDGE NATIONAL LABORATORY,
OAK RIDGE, TENNESSEE, U. S. A.

ONE-DIMENSIONAL NON-HOMENTROPIC GAS FLOW

CLEMENT WORKMAN JONES

Unsteady non-homentropic flow of a gas in one dimension is studied by taking a form of the Lagrangian equations of motion. An exact 'similarity' solution is found, depending upon a pair of non-dimensional variables which satisfy a single first-order differential equation of Poincaré type. The main problem to which this is applied is that of a shock advancing into a region in which the pressure is constant, but the variation of density is according to a simple power law. For convenience in presentation, the discussion is limited to the case of a very strong shock, but in a numerical application there need be no such restriction.

THE UNIVERSITY, LIVERPOOL, 3.

THE ANALYTIC BEHAVIOUR OF THE SCATTERING MATRIX

NICOLAAS G. VAN KAMPEN

Spherical scattering of a nonrelativistic Schrödinger particle on a fixed scattering centre can be described by a phase shift η between ingoing and outgoing waves. The analytic behaviour of $S = e^{2i\eta}$ as a function of the wave number p (momentum of the incident particle) is studied. Concerning the scattering mechanism only some general assumptions are made, e.g., that it is confined to a sphere of finite radius. It is postulated that at any time the total probability of finding the particle outside the sphere is not greater than 1.

This suffices to prove that $S(p)$ is regular in the first quadrant of the complex p plane, and of bounded type („beschränktartig" in the sense of Nevanlinna). Consequently an expansion involving a Blaschke product is possible, which represents $S(p)$ for $Re\, p > 0$. Each factor of the product contains a zero and a pole, and corresponds physically to a resonance level. The exact shape of absorption and emission lines is thus obtained.

More complicated scattering processes may also be obtained; the case of several scattered particles leads to the Breit-Wigner formula. It may be concluded that most of the known scattering formulae are more general and rigorous than is apparent from earlier derivations, which were based on specific physical models for the scattering mechanism.

ZOETERWOUDSE SINGEL 97,
LEIDEN.

THE NUMERICAL SOLUTION OF CERTAIN DIFFERENTIAL EQUATIONS OCCURRING IN CROCCO'S THEORY OF THE LAMINAR BOUNDARY LAYER

SIDNEY KIRKBY and T. R. F. NONWEILER

A numerical method is described for the solution of certain differential equations which result from the application of Crocco's transformation to the laminar boundary layer equations appropriate to high supersonic Mach numbers. (i.e. at hypersonic speeds.)

Solution is obtained by continuous application of a rapidly convergent relaxation process to a pair of simultaneous differential equations, for which one of boundary conditions is a first derivative. The Prandtl number occurs as a parameter.

COLLEGE OF AERONAUTICS,
CRANFIELD, BLETCHLEY, BUCKS. ENGLAND.

DIAGONALIZATION OF GENERAL COMPLEX MATRICES AS A NEW METHOD FOR SOLUTION OF LINEAR EQUATIONS

ERVAND GEORGE KOGBETLIANTZ

The fabulous speed with which the modern electronic equipment performs numerical computations not only opens new possibilities but also makes the mathematician to reexamine and reevaluate the old methods. Thus, Jacobi's idea of computing the eigenvalues of a real symmetric matrix by diagonalizing it with the aid of a sequence of orthogonal transformations leads, when generalized, to a new method of solution of most general system of linear equations with complex coefficients. Once the general complex matrix of coefficients A is diagonalized into D with the aid of two unitary transformations $\overline{U}'$ and V, so that $\overline{U}'AV = D$, its inversion and therefore an explicit solution of the equations is immediate.

The unitary transformations $\overline{U}'$ and V are formed progressively as infinite converging products of left (pre-) and right (post-) factors of A which are rotations through complex angle $z = x + iy$. The four parameters in a pair of such left- and right multiplications are chosen in such a way that at each step two off-diagonal elements symmetrical with respect to the principal diagonal are annihilated. In a cycle all $n(n - 1)/2$ pairs of off-diagonal elements are annihilated in turn. Though later they reappear, the process converges rapidly and after 46 cycles at most the average modulus of all off-diagonal elements decreases 10^{10} times. The characteristic numbers (eigenvalues) in general are not preserved, but in the case of Hermitian and skew-Hermitian matrices our method gives also eigenvalues. Its practical application naturally requires the use of electronic computers.

438 West 116-th Street,
New York 27, N.Y. U.S.A.

REPRÉSENTATION APPROCHÉE DE DÉRIVÉES

Jean Kuntzmann

Les expressions des dérivées

$$f^{(\mu)}(p), \qquad p \text{ entier}$$

au moyen de

$$f(0) \quad \ldots . \quad f(n)$$

ont été calculées pour

$$1 \leqq \mu \leqq n, \qquad 0 \leqq p \leqq n, \qquad n = 1 \ldots 10$$

ainsi que le coefficient exact du terme d'erreur

$$R \leqq A\, M_{n+q},$$

M_{n+q} borne supérieure de $f^{(n+q)}(x)$ dans $0 \leqq x \leqq n$.

Les formules sont établies directement pour les dérivées premières et écrites sous forme de matrice carrée. On obtient les dérivées suivantes en formant les puissances successives de cette matrice.

Grenoble (France).

UNIQUENESS OF THE LOCAL SUPERSONIC REGION OVER A PLANE PROFILE MOVING AT SUBSONIC SPEEDS

Edmund Victor Laitone

A theoretical study is made of the conditions necessary for the existence of a potential supersonic flow region over a two-dimensional body traveling at subsonic speeds in a nonviscous perfect gas.

It is first shown that Frankl's non-existence proof (indicating that any arbitrary contour, either symmetric or unsymmetric, in general cannot have a potential solution with a local supersonic flow region) is incorrect because Frankl assumed that the sonic line remained unaltered when profile changes were made in the central portion of the supersonic flow region. It is now demonstrated that disturbance signals are effectively propagated upstream in this type of a local supersonic flow region by the fact that the sonic line must readjust itself to every change in the supersonic flow pattern. This proves that the supersonic flow region has a unique solution that is directly dependent on the flow in the subsonic region.

Then it is proved that the maximum velocity occurs on the surface of the body and is limited to $a_* \sqrt{2}$ because the characteristic Mach lines always have an inflection point at this velocity. This is shown to produce a singularity, or so-called branch line, wherein the Jacobian vanishes in the mapping from the physical plane to the characteristic plane (wherein the coördinate axes are the Mach lines). Physically, this corresponds to a vanishing velocity and pressure gradient, with a straight streamline and straight Mach lines, so the monotonic requirements of Nikolsky and Taganov predict a flow break-down when this limiting velocity is attained.

It is finally shown that specific geometrical relations must be followed by the velocity vector in the hodograph plane in order to satisfy both the boundary conditions and the restrictions proved necessary by Nikolsky and Taganov. These lead to the conclusion that the local supersonic potential flow is inherently unstable and must terminate in a shock wave for any real gas having a finite boundary layer.

UNIV. OF CALIFORNIA,
BERKELEY, CALIF.

A PARTIAL QUANTUM STATISTICAL PROOF OF THE THIRD LAW OF THERMODYNAMICS

PETER THEODORE LANDSBERG

Various methods of establishing the *second* law of thermodynamics in terms of quantum statistics will be recalled [1]. Alternative formulations of the *third* law will be given, and the difficulties of establishing it from quantum statistics [2] will be briefly discussed. The paper will then proceed to a restricted proof of the third law from quantum statistics. The restriction resides in the

[1] H. Pauli, Probleme der modernen Physik (Leipzig, Hirzel, 1928), p. 30; O. Klein, Z. Phys. 72, 767 (1931); J. von Neumann, Z. Phys. 57, 30 (1929); H. Pauli and M. Fierz, Z. Phys. 106, 572 (1932).

[2] W. Schottky, Naturwiss. 31, 400 (1943); F. E. Simon, Z. Naturforschg. 6a, 397 (1951).

fact that the proof applies only *to systems of "class O" in the "limit L."* [3]

A system of class O is one which consists of non-interacting quantum mechanical particles, such that each satisfies the following requirements: (i) There is an infinity of particles quantum states whose particle energies are $E_1, E_2, \ldots$; the labelling of the states is arranged so that $E_j \leqq E_{j+1}$ for all j; (ii) E_j is finite if j is finite; (iii) all energy levels with finite j behave like $E_j = E_0 + b_j V^{-\theta}$ for large volumes V, where b_j is independent of the volume, and E_0 is the value to which all those E_j's tend in the limit L for which j is finite; (iv) for large volumes there exists a finite positive integer M, such that a continuous spectrum approximation is valid for $j > M$, and the j*th* quantum state is given by $E_j = E_0 + cV^{-\theta} j^{\tau}$ for $j > M$. M must exceed the degeneracy ω_1 of the lowest particle energy E_1 of the system of interest when its volume is finite. Under (iv) one might equivalently specify the density of states function

$$N(\varepsilon) = \frac{1}{\tau}\left(\frac{V^{\theta}}{c}\right)^{1/\tau} (\varepsilon - E_0)^{1/\tau - 1}.$$

The limit L is the limit in which the total number of particles N, as averaged over a grand canonical ensemble, and the volume V of each system of the ensemble, are each allowed to tend to infinity so as to keep the ratio N/V a finite and non-zero constant.

The essence of the proof is to show that the free energy per unit volume of the system has in all the cases under discussion the form $f = a - bT^d$ $(b > 0,\ d > 1)$ near $T = 0$. a, b, d are constants for the system, T is the absolute temperature. The third law follows in the form that the entropy per unit volume vanishes like bT^{d-1} as $T \to 0$. The specific heat per unit volume vanishes also like bT^{d-1}. The significance of this result for the formulations of the third law of thermodynamics will be discussed.

Department of Natural Philosophy.
The University, Aberdeen, Scotland.

SUR L'ACCÉLÉRATION SÉCULAIRE DE LA LUNE

Cristóbal de Losada y Puga

J'espère pouvoir faire connaître, dans cette communication, une cause possible de l'accélération séculaire de la Lune, à laquelle on n'a pas pensée, et qui peut jouer un rôle décisif dans la production du phénomène.

Apartado 2708,
Lima, Perú.

[3] These concepts have been used in connection with Bose-Einstein condensation in Proc. Camb. Phil. Soc. 50, 65 (1954). Compare also two forthcoming papers in the Physical Review.

THE NEGATIVE PROTON PROBLEM

JAMES ROBERT McCONNELL

The Dirac equation

$$\{c(\alpha p) + \beta\, mc^2\}\psi = E\psi$$

is generally used to describe the relativistic motion of a free proton. The "hole-theory" then leads us to assume the existence of the negative proton — a particle which has never been detected. If it does not exist, we must discard the idea of the charge symmetry of elementary particles, and we are not entitled to adopt Dirac's equation for the proton. It is therefore important to know whether we should expect to find the negative proton resulting from nuclear interactions since they have been the source of much of our knowledge about fundamental particles.

The probability of production of a proton pair by a γ-ray is negligibly small, so we investigate this pair production problem by meson theory (Cf. J. McConnell, *Production and Annihilation of Negative Protons*, Proc. Royal Irish Acad., A, **50**, 189 (1945); **51**, 173 (1947); **56**, 45 (1954)). In accordance with the results of recent cosmic-ray experiments we may assume a theory of nuclear forces through pseudoscalar mesons, whose coupling with the nucleon may be either pseudoscalar or pseudovector. We then calculate the cross-section for pair production by meson-nucleon and proton-neutron collisions.

In the case of pseudoscalar coupling we assume a coupling constant g such that $\frac{g^2}{\hbar c} = 4$, and the calculations are performed by perturbation methods. The cross-section arising from a meson-nucleon collision starts from zero when the energy of the incoming meson is about 4 Bev, attains a maximum value 5×10^{-27} cm^2 when the energy of the incoming particle is about 30 Bev, and then slowly decreases to zero. For a proton-neutron collision the threshold energy is about 7 Bev and the maximum cross-section 7×10^{-27} cm^2 is attained at an energy of about 400 Bev.

If the coupling is pseudovector, perturbation theory gives cross-sections which diverge at high energies and it is necessary to take account of damping effects. We solve a set of integral equations

$$U_{BA} = H_{BA} + i\pi \sum_c \int \varrho_c H_{BC}\, U_{CA}\, d\Omega,$$

and replace the matrix element H_{BA} by U_{BA} in the formulae for cross-sections. The resulting pair production cross-sections have a maximum value about 10^{-28} cm^2., which occurs at an energy 8 Bev for a meson-nucleon and 30 Bev for a proton-neutron collision.

The probability that a detectable negative proton would be produced in any of these collisions is small. If it is produced, it may be annihilated by encountering a proton. We are therefore free to assume that the negative proton exists in Nature and are justified in employing Dirac's equation to describe the proton.

St. Patrick's College,
Maynooth, Ireland.

COMPRESSIBLE FLOW IN A GRAVIATIONAL FIELD

William Hunter McCrea

The possible existence of a standing shock-wave in compressible fluid falling towards a gravitating sink is examined. The application of interest would be to interstellar material falling on to a star. On account of the possible radiational loss of energy, the thermodynamical conditions of the problem may be different from those usually assumed in shock-wave problems; the consequences of this difference are examined.

Royal Holloway College,
Englefield Green, Surrey, England.

ON THE EXPONENTIAL SOLUTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS FOR A LINEAR OPERATOR [1]

Wilhelm Magnus

Let $A(t)$ be a linear operator depending on a real parameter t and let $U(t)$ be an operator determined by $dU/dt = AU$. If a solution of this differential equation can be put into the form $U = \exp \Omega$, then Ω must satisfy a nonlinear differential equation $d\Omega/dt = F(A, \Omega)$, where F is an infinite sum of commutators of A and Ω. The explicit form of F, as well as a formal expression for Ω n terms of A can be derived from a formula due to H. F. Baker [Proceedings of the London Mathematical Society (2), **3**, 24—47, (1904)] and F. Hausdorff [Berichte der Saechsischen Akademie der Wissenschaften, Math. Phys. Klasse, Leipzig, **58**, 19—48, (1906)]. It can also be derived directly by a method which in turn provides a simpler derivation of the results of Baker and Hausdorff.

[1] This research was supported by the U. S. Air Force through the Office of Scientific Research of the Air Research and Development Command.

In the case where A denotes the matrix of coefficients of a finite system of ordinary linear homogeneous differential equations the range of validity of the formula for Ω can be characterized. Sufficient conditions can be derived for existence of an expression for U in terms of A, which involves only a finite number of quadratures. These conditions take the form of equations which indicate the vanishing of a finite number of expressions derived from $A(t)$ by repeatedly applying quadratures and forming commutators.

111 Coligni Avenue,
New Rochelle, N. Y.

NUMERICAL CALCULATION OF CERTAIN INVERSE LAPLACE TRANSFORMS

William A. Mersman

In the calculation of wing-body-interference pressures by means of linearized supersonic theory certain Laplace transforms are obtained whose inverses are required. These transforms contain quotients of modified Bessel functions of the second kind and their derivatives. The inversion problem is transformed into a Fredholm integral equation of the second kind with variable upper limit. For small values of the argument a solution is obtained in the form of a power-series. For larger values of the argument the integral equation is solved directly by numerical methods. All calculations were performed on high-speed, automatic, digital computing machines. The same technique of reduction to an integral equation can be applied to many similar Laplace transforms occurring in aerodynamic theory and in the theory of heat transfer.

Ames Aeronautical Laboratory,
Moffet Field, Calif. U.S.A.

THE ERROR OF THE TRAPEZOIDAL FORMULA

William Edmund Milne

The trapezoidal formula for the numerical evaluation of a definite integral usually gives a low order of accuracy. In certain instances, however, as may be seen by a consideration of the Euler-MacLaurin summation formula, the accuracy of the trapezoidal formula may turn out to be unusually good. Among such cases are:

1. The case where we wish to calculate the definite integral of a periodic function over a period.

2. The case where we wish to calculate the definite integral over the infinite interval for a function that vanishes to a high order at plus and minus infinity.

The principal object of this paper is to present rigorous bounds for the error of the trapezoidal formula under various hypotheses. Such bounds have been obtained for the following cases:

I. Integration over a finite interval
   a. of a function of bounded variation,
   b. of a function with a first derivative of bounded variation,
   c. of a function with a continuous second derivative.

II. Integration over a period of a periodic function having a $(k-1)^{\text{th}}$ derivative of bounded variation.

III. Integration from $-\infty$ to $+\infty$ of a function with a continuous derivative of order $2k$, where the function and its derivatives up to order $2k$ vanish at $\pm\infty$.

In addition a number of numerical examples illustrate the surprising accuracy attainable in certain cases.

A practical application is found in the calculation of certain types of frequency functions which can be expressed in form of a definite integral extending over the infinite interval.

Oregon State College, Corvallis, Ore.

ROTATIONAL FLOW PAST CYLINDERS

Andrew Ronald Mitchell

The stream function ψ for an incompressible flow of constant vorticity ω and undisturbed velocity U at infinity satisfies $\nabla^2\psi + \omega = 0$. By making the transformation $\Psi = \psi + \frac{1}{2}\frac{ax^2 + by^2}{a+b}$, this equation becomes $\nabla^2\Psi = 0$. For the case of flow with constant shear parallel to the x-axis, the stream function is $\psi = Uy - \frac{1}{2}\omega y^2$, and so $\Psi = Uy + \frac{1}{2}\omega\frac{a(x^2 - y^2)}{a+b}$.

The Circular Cylinder. Put $a = b$, and Ψ for parallel flow becomes the imaginary part of $Uz + \frac{1}{4}i\omega z^2$. From Milne Thomson's Circle Theorem, if a circle of unit radius is inserted in the flow at the origin, the appropriate complex function is $U(z + 1/z) + \frac{1}{4}i\omega(z^2 - 1/z^2)$. The imaginary part Ψ of this function is substituted in the transformation formula, and the required stream function $\psi = U \sin\theta(r - 1/r) - \frac{\omega}{2}\left(r^2 \sin^2\theta + \frac{\cos 2\theta}{r^2}\right)$ obtained for rotational flow past a circular cylinder.

The Elliptic Cylinder. (including the flat plate). For shapes other than the circle, put $a = 0$, and so $\psi = \Psi - \frac{1}{2}\omega y^2$. Introducing elliptic co-ordinates ξ, η by means of the formulae $x = c \cosh\xi \cos\eta$, $y = c \sinh\xi \sin\eta$, the function Ψ is expressed in the form $\Psi = Uy + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\eta + B_n \sin n\eta)e^{-n\xi}$. The constants A_n, $B_n (n = 1, 2, \ldots)$ are determined which make ψ constant on the ellipse $\xi = \xi_0$. The resultant stream function for rotational flow past this ellipse is $\psi = Uc[\sinh\xi - e^{\xi_0}\sinh\xi_0(\cosh\xi - \sinh\xi)]\sin\eta - \frac{\omega c^2}{4}[\sinh^2\xi + \{e^{2\xi_0}\sinh^2\xi_0(\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) - \sinh^2\xi\}\cos 2\eta]$, where $c^2 = a^2 - b^2$, a and b being the major and minor diameters lying along the x and y axes respectively. A similar result is found for rotational flow parallel to the y-axis past the same ellipse, the latter reducing to a flat plate of length $2a$ when $\xi = 0$. The appropriate stream function for flow past this plate is $\psi = Uc \sinh\xi \cos\eta - \frac{\omega a^2}{4}[\cosh^2\xi + (\sinh 2\xi - \sinh^2\xi)\cos 2\eta]$.

The Parabolic Cylinder. Introducing parabolic co-ordinates u, v by means of the formulae $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, the function Ψ is expressed in the form $\Psi = Uy + \int_0^{\infty} [A(m) \cos mu + B(m) \sin mu]\, e^{-mv}\, dm$.

Using Fourier transforms, the constants $A(m)$ and $B(m)$ are determined to make ψ zero on the parabola $v = v_0$ for the range $0 \leqq u \leqq \lambda$, where λ is any finite quantity. The above infinite integral is then evaluated and the stream function obtained for rotational flow past the cylinder, which is parabolic up to $u = \lambda$. Because of flow complications on the cylinder surface at $u \geqq \lambda$, the flow pattern will only be accurate within some prescribed distance (depending on λ) from the cylinder nose.

MATHEMATICS DEPT., THE UNIVERSITY,
ST. ANDREWS, FIFE, SCOTLAND.

COMPORTAMENTO ASINTOTICO DELLA SOLUZIONE DI UN PROBLEMA AL CONTORNO DELLA MAGNETO-IDRODINAMICA

RENATO NARDINI

In un precedente lavoro, riguardante una questione di magneto-idrodinamica [1] è stato risolto il problema al contorno costituito dall'equazione

$$\frac{\partial^2 H(t, z)}{\partial t^2} = V^2 \frac{\partial^2 H(t, z)}{\partial z^2} + a^2 \frac{\partial^3 H(t, z)}{\partial t \, \partial z^2} \qquad (a \text{ e } V \text{ cost.}) \tag{1}$$

e dalle condizioni

$$\lim_{t \to +0} H(t, z) = 0 \qquad \lim_{t \to +0} \frac{\partial H(t, z)}{\partial t} = 0 \tag{2}$$

$$\lim_{z \to +0} H(t, z) = G(t) \qquad \lim_{z \to +\infty} H(t, z) = 0, \tag{3}$$

dove $G(t)$ è nulla per $t < 0$.

Nel caso in cui la conducibilità del liquido si considera infinita, nella (1) si ha $a = 0$ e la soluzione $G\left(t - \frac{z}{V}\right)$ rappresenta un'onda pregressiva; per $a \neq 0$ la soluzione $H(t, z, a)$ risulta invece generalmente diversa da zero per ogni z. Si può dimostrare che, se la trasformata di Laplace della $G(t)$ è, in un semipiano $R(s) \geqq \alpha$ dell'ordine $O(s^{-k})$ con $k > 1$, si ha

$$\lim_{a \to 0} H(t, z, a) = G\left(t - \frac{z}{V}\right).$$

Sotto determinate ipotesi di regolarità sulle derivate fino al terz'ordine di $G(t)$ si ricava che

$$H(t, z, a) = G\left(t - \frac{z}{V}\right) + R_1(t, z, a) \, . \, a^2$$

dove R_1 risulta limitato per qualunque $a > 0$ ed è $\lim_{a \to 0} R_1(t, z, a) = \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right)$.

Anche per dimostrare tale risultato ci si vale della trasformazione di Laplace. Se poi le dette ipotesi si possono estendere fino alle derivate del quinto ordine di $G(t)$, si ottiene

$$R_1(t, z, a) = \frac{z}{2V^3} G''\left(t - \frac{z}{V}\right) + R_2(t, z, a) \, . \, a^2$$

dove R_2 è limitato per $a > 0$ ed è

[1] Ann. Mat. pura e appl. **35**, 1953, 269—290.

$$\lim_{a \to 0} R_2(t, z, a) = \frac{z}{8V^5}\left[\frac{z}{V} G^{V}\left(t-\frac{z}{V}\right) - 3G'''\left(t-\frac{z}{V}\right)\right]$$

e così di seguito.

Quindi nei casi concreti, in cui la conducibilità è molto grande ma finita, si riscontra che praticamente, con un'approssimazione tanto maggiore quanto più regolari sono i valori assegnati al contorno, sussiste ancora la propagazione ondosa ottenuta come caso limite.

Il problema in questione può anche rappresentare le vibrazioni longitudinali di uha corda elastica qualora si tenga conto della resistanza interna, che introduce nella (1) il coefficiente a.

VIA PODGORA 7,
BOLOGNA, ITALIA.

FURTHER CONSIDERATIONS OF THE GENERAL INSTABILITY OF RING-REINFORCED CYLINDRICAL SHELLS SUBJECT TO HYDROSTATIC PRESSURE

WILLIAM A. NASH

The failure of a multiple-bay ring-reinforced cylindrical shell subject to external hydrostatic pressure may take place by either of several modes: (a) general instability of the ring-shell combination in which collapse of both elements occurs simultaneously with the formation of a number of lobes spaced uniformly around the circumference of the cylinder and extending from one end of the shell to the other, (b) single-bay type instability in which a band of lobes forms around the periphery of each bay of the cylinder, each lobe extending only so far as the rings bounding that bay with the lobes in adjacent bays being staggered, (c) yielding of the shell characterized by an axially symmetric corrugation of the shell plating, or (d) axial symmetric buckling of the shell. In this paper it is presupposed that failure takes place by general instability.

The method used to attack the problem is that of minimization of the total potential. A displacement configuration is introduced which implies a simple-support condition at the junction of the shell and the end closure plates; these plates are presumed to be indefinitely rigid.

Expressions for the elastic strain energy in the shell and also in the rings are written in terms of displacement components of a point in the middle surface of the shell. Expressions for the work done by the external forces acting on the cylinder likewise are written in terms of these displacement components.

The total potential is expressed in terms of these displacement components and is then minimized. A set of linear homogeneous equations is obtained and in order that a nontrivial solution exist it is necessary that the determinant of the coefficients vanish. This condition determines the critical pressure at which general instability will occur.

UNIVERSITY OF FLORIDA,
GAINESVILLE, FLORIDA, U.S.A.

FERNWIRKUNGEN DER HERMITIK DER FELDOPERATOREN IN WELLENFELDERN

ERWIN FREIHERR VON NEUSTEIN-BROZOWSKY

Die von dem Verfasser entdeckte Hermitik der Feldoperatoren in Wellenfeldern (Math. Kongress Univ. Innsbruck) hat bedeutende Fernwirkungen gezeitigt.

Tsuneji Rikitake (kaiserl. Universität Tokio) gelang mit dieser Methode die erstmalige Analyse eines geomagnetischen Feldes. Auch in Edward Kerners Prinzip der konfluenten hypergeometrischen Funktion seiner Exitationstheorie molekularer Rotationen und Vibrationen (USA) ist die Hermitik ebenso enthalten wie im Photonenkalkül der Ridellschen Feynmandiagramme:

$$\begin{gathered}(\text{sub}\, x^2 y^\varepsilon) \text{ in } N^e(n\varepsilon) = n \exp\left[\Sigma_i(x^i y) + \Sigma_j x^j j)\right], \\ \text{bezw. coeff. } x^n y^\varepsilon \text{ in } n_0\left[1 - x^{-1} \exp\left(xy/(1-x)\right)\right].\end{gathered}$$

G. Wenzels skalare Mesonfelder stehen unter ihrem Einfluss, desgleichen Dysons Disskussion mit Tamm-Dancoff und Nobelpreisträger Schrödinger.

Darüber hinaus ist ohne Hermitik der Feldoperatoren in Wellenfeldern die astrophysikalisch — magnetische Selbstfokussierung auroraler Protonen undurchführbar, desgleichen die Erschliessung des Röntgenspektrums der Sonnenstrahlen und der Mesonen der kosmischen Strahlung, letzthin die Sphärosymmetrie der nuklearen Mesonenphysik undenkbar.

HAHNG. 8/21,
WIEN, 9.

MOTION OF A BODY OF REVOLUTION IN ROTATING FLUID

SWAMI DAYAL NIGAM

In Hydrodynamics considerable interest centers in problems relating to the flow of fluids of small viscosity past solid bodies. The assumptions infinite Reynolds number ($\mu = 0$) and irrotational flow seem justified for stream-line bodies except in the boundary layer and turbulent wake running off from the extreme trail.

For axisymmetric irrotational flow, the equations expressed in terms of Stokes' stream function ψ, reduce to one second order differential equation,

$$D^2\psi = 0, \quad D^2 \equiv \frac{h_3}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\right] \tag{1}$$

$$(ds)^2 = h_1^2(d\alpha)^2 + h_2^2(d\beta)^2 + h_3^2(d\gamma)^2$$

where α and β are general orthogonal coordinates in a meridian plane; h_3 denotes the distance from the axis of revolution. The boundary conditions, (i) $\psi =$ const. on the boundary; (ii) ψ gives uniform flow at infinity, determine ψ uniquely in any given situation. Analytical solutions of (1) can be obtained in many cases. Relaxational method and the numerical method of Thom can be used for any body of revolution.

For non-stream-line bodies the assumption of irrotationality is not justified and in general the problem is intractable. But, when a body of revolution moves with uniform velocity U along the axis of the fluid rotating with an angular velocity Ω, the non-linear equations of motion reduce to one third order differential equation;

$$\frac{D}{Dt}\left[\frac{1}{h_3^2}(D^2 + k^2)\,\psi\right] = 0 \tag{2}$$

or

$$(D^2 + k^2)\psi = h_3^2 f(\psi) \tag{2a}$$

This equation requires three boundary conditions for a unique determination of ψ. The conditions are:

(i) ψ corresponds to uniform rotation Ω at infinity
(ii) relative normal velocity is zero on the surface
(iii) relative tangential velocity is zero on the surface.

The first and the second are the usual physical conditions but the third has been chosen to keep more in accord with observations on actual fluids in which all experimental evidence is against surface-slip. (c.f. Taylor, G. I. Proc. Roy. Soc. A 102 (1922) pp. 180—189). The rotational solutions satisfy the boundary conditions exactly and unlike the irrotational solutions donot involve any slip at the boundary. Therefore, they should represent reality more closely than the irrotational solutions.

Using the condition at infinity, (2a) becomes

$$(D^2 + k^2)\psi = -\,k\Omega h_3^2; \qquad k = 2\Omega/U. \tag{2b}$$

Whence

$$\psi = -\frac{U}{2} h_3^2 + A\psi_1 + B\psi_2 \tag{3}$$

where ψ_1 and ψ_2 are the two solutions of

$$(D^2 + k^2)\psi = 0 \tag{4}$$

Equation (4) plays the same role in the theory of rotational motion as does (1) in the theory of irrotational motion. Unfortunately (4) can not be solved in many coordinate systems by separating the variables, but numerical methods can be used with success, and problems relating to any body of revolution can be solved.

DEPT. OF APPLIED MATHEMATICS,
INDIAN INSTITUTE OP TECHNOLOGY, KHARAGPUR, (INDIA).

OSCILLATIONS OF AN AXIALLY SYMMETRICAL SUPERSONIC JET OF GAS EMBEDDED IN A SUPERSONIC STREAM

DONALD CECIL PACK

The general problem of the behaviour of a supersonic jet emerging into a medium in supersonic motion is of interest since it represents the motion relative to a rocket in supersonic flight of the flow of exhaust gases from the rocket-motor. In this paper an analysis is made of the oscillations of an axially symmetrical jet of gas moving at supersonic speed in an infinite medium which is likewise in supersonic motion. The pressure changes are assumed to be everywhere small, heat conduction and viscosity are neglected, and the motion is supposed to be steady. The linearized equation of supersonic motion is used and the problem solved by means of Laplace transforms.

The displacement of the boundary of the jet from that of a coaxial circular cylinder with diameter equal to that of the orifice from which the jet issues may be divided into three parts. The first part is a constant, representing the ultimate displacement downstream and the second may be expressed by means of an infinite integral. The third part is obtained by the superposition of an infinite number of damped harmonic oscillations; the damping is often very strong and for certain choices of Mach number of the outer and inner streams, these oscillations are actually absent. The behaviour of the jet boundary near to and at large distances from the orifice has been studied. The jet expands near the orifice if at an excess pressure, but at some distance downstream it is found to be contracting quickly towards its final (asymptotic) width. This behaviour, except near the orifice, is in marked contrast to that of a two-dimensional jet. The final width of the axially symmetrical jet is slightly greater than the width at the orifice of the jet for a jet at excess pressure, as may be inferred directly from the equation of continuity.

THE ROYAL TECHNICAL COLLEGE,
GLASGOW, C. 1.

ANALYSE SPECTRALE DE CERTAINES FAMILLES DE MATRICES

JEAN PELTIER

L'équation caractéristique $E(\lambda) = 0$ d'une matrice est formée à partir des équations caractéristiques des matrices d'ordre 2, 3, 4, . . . contenues dans la matrice donnée. La méthode de calcul numérique des coefficients de cette équation permet d'écrire, sans calcul, les expressions polynomiales, en fonction du paramètre λ, des composantes des directions propres de la matrice. Les coefficients de ces polynomes et ceux de l'équation caractéristique sont obtenus exactement lorsque les éléments de la matrice donnée sont des nombres simples. Le principe même de la méthode assure, sans calcul supplémentaire, l'exactitude des calculs relatifs à chacune des matrices partielles considérées. Notre méthode de résolution des équations algébriques rend possible la détermination des valeurs propres avec la précision demandée, quelle que soit la répartition de ces valeurs dans le plan complexe et quelle que soit la difficulté apparente ou réelle de la résolution de l'équation caractéristique.

6, RUE RAYNOUARD,
PARIS 16ÈME.

TEMPERATURE DISTRIBUTIONS FOR FLUIDS MOVING IN HOT CYLINDRICAL PIPES

CLAY L. PERRY

Graetz (1885) and others (1910—49) have investigated steady state temperature distributions for fluids moving with parabolic velocity distributions in hot cylindrical pipes. The differential equation for this boundary value problem for the case of angular symmetry is

$$k[1 - r^2] \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

In their investigations the last term in this differential equation was neglected so that the boundary value problem could be solved by the method of separating variables. In this paper numerical methods are used to determine the error committed by neglecting this last term.

U. S. NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL,
MONTEREY, CALIF., U.S.A.

ABOUT SOME RESEARCHES IN DIFFUSION PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

ANTONIO PIGNEDOLI

The author refers about some of his researches relative to diffusion problems in the mathematical physics field. He, particularly, considers problems connected to the phenomenological theory and with the Maxwell-Boltzmann one, on the diffusion of thermal neutrons in relenting media. As to the first theory, he studies from the analytical point of view the phenomenological equation of diffusion of gas of thermal neutrons for the approximation $|\operatorname{grad} \varrho| \cdot L \ll \varrho$, where $\varrho(x, y, z, t)$ is the neutron number in the unit volume and L is the neutron free mean range. As to the second theory, the author considers the integro-differential equation by Maxwell-Boltzmann, relative to the case of a plane distribution, with an opportune contour condition corresponding to the fact that no external neutrons fall into the space occupied by relenting medium.

Finally, the author relates on a recent work of his, relative to a contour problem for the differential equation of the Fokker-Planck type, which interests the theory of the Brownian motion, and therefore also the theory of the neutron diffusion under some energy conditions, namely the spectral distribution of the energies of the neutrons in the so called "chemical zone".

UNIVERSITY OF BOLOGNA,
(ITALY).

ON THE PRODUCTION OF VORTICITY IN A NORMALLY DISTRIBUTED AND ISOTROPIC TURBULENT VELOCITY FIELD

IAN PROUDMAN and WILLIAM H. REID

The hypothesis that the probability distribution of fluctuating velocity components at two different points in homogeneous turbulence is approximately normal has played an important part in recent research in the subject. On the other hand, the application of the hypothesis to the central problem of the decay of homogeneous turbulence has received comparatively little attention, in spite of the fact that it was in this context that the approximation was first introduced into the subject by Millionshtchikov. The analysis of the present paper involves the specific assumption that certain properties of the joint probability distribution of the velocity components at *three* different points are of the normal form.

In the problem considered, the velocity field is essentially characterized by mean values involving the velocity vector at two and three points in space or, equivalently, by the Fourier transforms of these mean-values. The derivation of the dynamical equations which follow from the hypothesis is somewhat lengthy, particularly in the case of isotropic turbulence, and is only indicated symbolically. The final result, however, involving the inviscid rate of change of the transfer function in terms of the energy spectrum on which all further discussion of the production of vorticity is based, is given in full.

When the Reynolds number is large, the mechanism which dominates the decay process as a whole is the transfer of energy from large to small eddies. It is shown that there exists a remarkably simple exact solution of the general inviscid equation for the vorticity. This solution shows that, irrespective of the initial conditions, after a finite interval of time the direction of energy-transfer is always from large to small eddies. It is also shown that this behaviour of the vorticity is in complete accordance with Kolmogoroff's theory of local similarity.

TRINITY COLLEGE,
CAMBRIDGE, ENGLAND.

NUMERISCHE INTEGRATION GEWÖHNLICHER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DURCH INTERPOLATION NACH HERMITE

WILHELM QUADE

Ist $y = u(x)$ ein durch den Punkt a, b gehendes Integral der expliziten Differentialgleichung erster Ordnung $y' = f(x, y)$, so besteht bei stetigem $f(x, y)$ die Identität

$$u(x) \equiv b + \int_a^x f[\xi, u(\xi)]d\xi.$$

Bei verschiedenen Extra — und Interpolationsverfahren, die der numerischen Integration solcher Differentialgleichungen dienen, wird der Integrand durch ein Polynom angenähert, das so bestimmt wird, dass der Defekt der Differentialgleichung in isolierten Punkten verschwindet. Die Genauigkeit der Verfahren dieser Klasse lässt sich beträchtlich steigern, wenn man die Funktion $y = u(x)$ nach Hermite interpoliert, indem man zunächst annimmt, dass an gewissen Stellen x_k die Funktionswerte $y_k = u(x_k)$, sowie die Werte der Ableitung $y'_k = f[x_k, u(x_k)]$ bekannt sind. Hierdurch ergibt sich ein Polynom, das für jede der Abzissen x_k dem *Richtungsfeld der Differentialgleichung angepasst* ist. Aus solchen dem Richtungsfeld angepassten Polynomen können auf verschiedenartigen Wegen Formeln mannigfacher Gestalt gewonnen werden, die sich durch grosse Genauigkeit auszeichnen. Einerseits ergeben sich durch Aufsuchen eines Polynoms bester Approximation Formeln, wie sie beim Mehrstellenverfahren auftreten, andererseits durch Einfügen zusätzlicher Nullstellen des Defektes der Differentialgleichung Formeln, die denen von Runge-Kutta ähnlich sind.

HANNOVER, GOEBENSTR. 45.

ON THE CORRELATION BETWEEN THE FUNDAMENTAL EQUATIONS OF THE HYDRODYNAMICAL AND ELECTROMAGNETIC FIELDS

DIMITRI PAVLOVITCH RIABOUCHINSKY

The author studies systematically the points of contact and divergency between the differential equations governing the motion of a perfect gas and those of Maxwell. He specifies the limits in which these equations, as well as those which determine the transfer of energy, present themselves in an identical form. In the general case, however, this analogy ceases to be perfect; the author makes evident why this is so, and demonstrates that a univocal and reciprocal connection continues to exist between the constitutive elements of both fields. These researches obliged him to go all the way back to the axioms and fundamental definitions of Newton's mechanics and to state exactly what modifications they must undergo in order to deduct from them the equations of Maxwell. The junction of these two mechanics comes forward in the plane of energy. Applying this theory to fluid mechanics, the author ascertains that free aether appears as a perfect incompressible fluid, but the eddies are no longer indestructible: they can be created or destroyed, for instance when a wave is passing.

10, RUE EDMOND ROGER,
PARIS XV°.

MÉTHODE MATRICIELLE DE COUPLAGE DES CONSTITUANTS EN SPECTROSCOPIE MOLÉCULAIRE

FRÉDÉRIC ROGER

Après avoir montré que les équations fondamentales de la méthode des orbitales moléculaires, en Mécanique ondulatoire, s'identifient à celles, mises sous forme convenable, de la théorie des petits mouvements, en Mécanique analytique classique, l'auteur, se plaçant au point de vue de la Mécanique matricielle, propose, sous le nom de méthode de couplage des constituants, un élargissement considérable de la méthode des orbitales moléculaires: d'une part, en prenant comme éléments de base, non plus nécessairement les atomes qui possèdent un électron π, mais selon les commodités, des groupements d'atomes, par exemple des chromophores; d'autre part, en introduisant dans les calculs, non plus seulement les états normaux des atomes de base, mais tels états excités qui conviennent pour les groupements distingués. La méthode consiste, en vue de rendre compte de certaines propriétés d'un composé chimique, à décomposer celui-ci par la pensée en quelques constituants appropriés, à imaginer des couplages convenables entre ces constituants, enfin à traduire tant les propriétés énergétiques des constituants que celles de leurs couplages au moyen de matrices: l'étude mathématique de la matrice du composé pourra traduire, en sens inverse, certaines propriétés énergétiques de celui-ci (C. R. Acad. Sci., Paris, 1953, **236**, 2207).

L'application de cette méthode au cas de n constituants semblables conduit à un effet bathochrome théorique en $\cos[\pi/(n+1)]$ en accord numérique excellent (de l'ordre de quelques millièmes) avec les résultats expérimentaux de la série des parapolyphényles (ibid., **237**, 385).

Dans le cas de constituants différents, la méthode fournit un procédé mathématique pour l'étude d'un composé chimique. Appliquée au déplacement vers le visible de la première bande d'absorption des substitués alcoylés de l'éthylène, elle conduit, en première approximation à la loi linéaire expérimentalement établie par Carr et Stücklen et, en seconde approximation, à l'écrasement progressif des intervalles, conformément aux données de l'observation (ibid., **237**, 483).

51, RUE DU PARC,
CAUDÉRAN (GIRONDE).

USE AND ABUSE OF MODERN COMPUTERS

CLARENCE ROSS

During the past decade modern computers have spurned mathematicians to bridge the gap between algebra and final detailed coding for automatic computation. Often the mathematician himself was abused in his efforts to fit a complicated problem onto a fixed pattern machine. The machine in turn was abused by the unfortunate lack of iterative processes and economical sub-routines befitting a modern computer. Several hundred hours on each new machine were wasted because of the lag in the development of mathematical processes applicable to high speed digital computers. It is safe to say that 5 % of the cost of each new machine went down the drain while people were learning to use them. Another large time waste in the initial machines was found in checking solutions. Some machines were abused in such a way that 50 % of the available machine time was lost in checking procedures. Trained mathematicians and improved computers have greatly reduced this percentage. The initial gap is more slowly being closed by research work in methods more suitable to electronic computers while the popular more general sub-routines may save the time of the mathematician coder but in general wastes machine time. In order to realize the maximum benefit from high speed computers it is suggested that still more effort be spent on increasing the reliability of modern computers while an endless research in improved machine methods takes place.

1204 IRVING AVE,
DAYTON 9, OHIO.

A NEW CLASSICAL THEORY OF LIGHT AND MATTER

BHUPATI MOHAN SEN

Half a century age, in order to explain various phenomena such as the photo-electric effect, Einstein formulated the principle that every beam of light of frequency ν carries the quantum of energy $h\nu$. But a divisible beam (as required by the phenomenon of interference) with an indivisible quantum of energy is a contradiction in terms. Besides, the continuous spectrum and spectral lines of finite breadth imply infinite radiated energy. Einstein's principle must therefore be regarded as an *over-generalisation.*

Starting from the Maxwell equations in free space, it has been proved that a linear beam which presents the Doppler effect and is otherwise invariant against the Lorentz transformation must have an equation of the form

$$E_y = H_z = A \sin k(x - ct)/(x - ct) = A \int_0^k \cos k(x - ct)\, dk$$

where A is a universal constant, the other electric and magnetic components being zero. This represents a packet of waves (identified with a photon) of all frequencies from 0 to $kc/2\pi$, but presenting only the length of the shortest wave. To ensure a definite path for the beam, the electric and magnetic vectors are supposed to be confined to the y and z planes. The energy deduced from the Poynting vector is found to be $h\nu$ and the impulse $h\nu/c$ on the assumption of a limit.

It is then verified that a photon may split up into a photon of lesser energy and a partial photon of the form

$$E_y = H_z = A\{\sin k(x - ct) - \sin k_1(x - ct)\}/(x - ct)$$

of energy $h(\nu - \nu_1)$. The latter reduces to a simple harmonic wave $A\,\delta k \cos k(x - ct)$ where $k - k_1 = \delta k$ is small. The energy is also proportional to δk. Further, if the amplitude is halved the energy is also halved. This gives an exact picture of the method of producing interference bands. The current controversy between wave and particle nature of light is therefore settled.

An electron (or proton) is conceived as a photon $A \sin k(s - ct)/(s - ct)$ in the form of coils along the parallels of latitude on a sphere. This agrees with de Broglie's theory and explains simply and naturally the transformation of mass into energy. It explains also the various types of so-called fundamental particles now known. The inverse square law follows as a matter of elementary geometry and the problem of infinite energy resolves itself.

By applying the Gauss theorem to the allied two dimensional model, the charge is found to be a constant independent of the mass. Lorentz transformation leads to the relativity variation of mass.

Full details may be found in Light and Matter, published by Longmans, Green & Co.

12, Ballygunge Circular Road.
Calcutta.

SYNTHETIC METHOD FOR COMPRESSIBLE FLOW

Bhoj Raj Seth

Compressible flow equations for irrotational flow can be transformed into the canonical form $\nabla^2\varphi_1/\varphi_1 = \nabla^2\varrho_1/\varrho_1$, whose solution may be as readily obtained as those of other equations in mathematical physics. But the difficulty lies in finding solutions common to this equation and the Bernoulli's equation and also satisfying given boundary conditions. If an external potential can be supposed to act on the field, the problem can be readily solved. For example, it is found that a heavy adiabatic gas, when gravity is taken into account, can flow uniformly in a region bounded by a plane provided the density varies as $y^{1/\gamma-1}$, y being the distance from the plane and γ the adiabatic constant.

The drawback in such solutions is that the motion is supposed to be exactly irrotational which need not be the case. Without making this assumption, it is found that the synthetic method (Seth, B.R., Proc. International Congress of Maths., vol. iii, 1950; J. R. Foote, Proc. Midwest Conf. Fluid Dynamics, U.S.A., 1950) in which the solution is obtained as a limiting case of an extended solution gives good results. The possibility of using this method for discussing the formation of shocks, which should be obtained as limiting cases of some exact solutions, is being investigated.

INDIAN INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
KHARAGPUR, INDIA.

PROPAGAZIONE DI UN'ONDA ELETTROMAGNETICA IN UNA GUIDA CON DIELETTRICO ETEROGENEO

MARIA LUISA DE SOCIO

Si espongono alcune ricerche sulla propagazione del campo elettromagnetico in una guida d' onda a pareti perfettamente conduttrici riempita da dielettrico lievemente eterogeneo; in particolare si esaminano l'influenza della eterogeneità del dielettrico su due o più modi che nella guida con dielettrico omogeneo si propagano con uguali velocità.

VIA DON MINZONI 9,
BOLOGNA (ITALIA).

ÜBER KONFORME ABBILDUNG VON KREISBOGENPOLYGONEN

FRIEDEMANN STALLMANN

Das Problem der konformen Abbildung von Kreisbogenpolygonen läßt sich bekanntlich zurückführen auf die Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fuchsschen Klasse mit reellen Koeffizienten; der Quotient zweier linear unabhängiger Lösungen bildet die obere Halbebene auf ein Kreisbogenpolygon ab. Hat die Differentialgleichung beliebige reelle rationale Koeffizienten, so erhält man bei der konformen Abbildung durch den betreffenden Quotienten Gebiete, die neben Kreisbögen auch logarithmische Windungspunkte als Randelemente enthalten können. Solche Gebiete sollen ebenfalls den Kreisbogenpolygonen zugerechnet werden; im Unterschied zu den gewöhnlichen mögen sie als außergewöhnliche Kreisbogenpolygone bezeichnet werden.

Bei Anwendung dieser Theorie auf physikalische und technische Probleme wird es darauf ankommen, möglichst zweckmäßige Integrationsmethoden für die betreffenden Differentialgleichungen aufzufinden. Diese müssen nicht nur die Abbildungsfunktion liefern, sondern auch die Lösung des Parameterproblems, d.h. die Parameter in den Koeffizienten der Differentialgleichung müssen für das vorgegebene Kreisbogenpolygon bestimmt werden. Hierzu müssen die Lösungen der Differentialgleichung als Funktion der Parameter gegeben sein.

Als brauchbar für die Behandlung dieser Probleme hat sich die folgende Methode erwiesen: Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{y''}{y} = v(x) + \varrho^2\varphi(x) \tag{1}$$

und üben hierauf die Liouvilletransformation aus:

$$\xi(x) = \varrho\int_{x_0}^{x} \sqrt{\varphi(x)}dx, \qquad u(\xi) = \sqrt[4]{\varphi(x)}y(x). \tag{2}$$

Die Differentialgleichung (1) erhält dann die Form:

$$\frac{u''}{u} = 1 + \frac{Q(\xi)}{\varrho^2}. \tag{3}$$

Dieser Differentialgleichung stellt man eine Hilfsdifferentialgleichung mit bereits bekannten Lösungen gegenüber

$$\frac{v''}{v} = 1 + \frac{P(\xi)}{\varrho^2} \tag{4}$$

und kann dann mit Hilfe einer Integralgleichung die Lösungen von (3) durch die Lösungen von (4) annähern. Die Näherung hat die Form asymptotischer Abschätzungen für große ϱ; die Methode, die auf Liouville und auf R. E. Langer zurückgeht, sei deshalb asymptotische Integration genannt.

Die Gestalt des zu der Differentialgleichung (1) gehörenden Kreisbogenpolygons ermittelt man auf Grund folgender Überlegung: $\xi(x)$ aus (2) kann als Schwarz-Christoffelsches Integral aufgefaßt werden; es bildet die obere x-Halbebene auf gewisse Geradenpolygone ab, im Folgenden ξ-Polygone genannt.

Dieses ξ-Polygon wird in geeignete Teilbereiche zerlegt und auf jedem Teilbereich die Differentialgleichung (3) asymptotisch integriert. Es läßt sich zeigen, daß jeder dieser Teilbereiche durch den Quotienten zweier linear unabhängiger Lösungen näherungsweise auf gewisse einfache Kreisbogenpolygone abgebildet wird, aus denen das gesuchte Gesamtpolygon zusammengesetzt werden kann. Das Parameterproblem der Kreisbogenpolygone ist somit zurückgeführt auf das wesentlich einfachere Parameterproblem der ξ-Polygone. Auf dieser Grundlage wird es auch möglich, eine Übersicht in die Vielfalt der Kreisbogenpolygone zu bringen.

Diese mehr qualitativen Untersuchungen werden ergänzt durch numerische Berechnungen, für die die asymptotische Integration ebenfalls mit Erfolg — auch bei relativ kleinen Parametern — herangezogen werden kann. Durchgerechnet wurden vom Verfasser vor allem die Lamésche und die Mathieusche Differentialgleichung. Da diese und noch manche andere Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten wesentliche Bedeutung in der theoretischen Physik gewonnen haben, dürften unsere Methoden nicht nur für Abbildungsprobleme von Nutzen sein. Das Studium der Abbildungseigenschaften vermag dabei eine gute Anschauung von dem Verhalten der untersuchten Funktionen zu geben.

BAD NAUHEIM,
AUG.-VIKTORIASTR. 22.

VIBRATION OF A BEAM ELASTICALLY SUPPORTED AT THE ENDS UNDER AN IMPULSIVE LOAD

MILOMIR M. STANIŠIĆ

In the present paper a study is made of the vibration problem of a beam elastically supported at both ends when subjected to an impulsive load. The method is based on the generalized Fourier analysis. The impulsive load is assumed to be produced by a shock wave. Formulae are obtained for the amplitudes, reactions, and strains. Numerical examples illustrating the theory are worked out and the results are tabulated.

ARMOUR RESEARCH FOUNDATION,
CHICAGO 16, ILLINOIS.

MAXWELLIAN FIELDS IN VACUO WITHOUT SINGULARITIES AND WITH FINITE TOTAL ENERGY

JOHN L. SYNGE

This paper gives a simple method of generating wave functions without singularities, and hence Maxwellian fields without singularities and with finite total energy. Minkowskian coordinates x_r are used, with $x_4 = ict$ and summation 1 to 4 understood for repeated suffixes. The well known fundamental wave function is $W = 1/S$ where $S = (x_r - a_r)(x_r - a_r)$; it satisfies $\Box W = W_{,rr} = 0$ (the comma denotes partial differentiation). This function has singularities not only at $x_r = a_r$ but also all over the null cone having a_r for vertex. Replacing a_r by $\alpha_r + i\beta_r$, where α_r and β_r are Minkowskian vectors, we get a complex wave function W, and hence two real wave functions (U, V) by writing $W = U + iV$. To simplify, we get rid of α_r by change of origin, and then we have

$$W = 1/S, \ S = (x_r - i\beta_r)(x_r - i\beta_r) = x_r x_r - \beta_r\beta_r - 2i\,\beta_r x_r.$$

We choose β_r to be a timelike vector, so that $\beta_r\beta_r = -\beta^2$ (β real). Then, taking β_r for time-axis, we get

$$S = r^2 - c^2t^2 + \beta^2 + 2i\beta ct.$$

It is clear that S does not vanish anywhere in space-time, and so U and V are real wave functions without singularities, vanishing at infinity in all space-time directions at least as fast as $1/r$ (r = spatial distance).

From any scalar wave function W we can generate a Maxwellian field by means of the 4-potential $\phi_r = -K_{rm}W_{,m}$, where K_{rm} is any constant skew-symmetric tensor. For we see that $\phi_{r,r} = 0$, $\phi_{r,nn} = 0$, and so

$$F_{rs} = K_{rm}W_{,ms} - K_{sm}W_{,mr}$$

is the tensor of a Maxwellian field in vacuo, without singularities if W is chosen as above. The most interesting results are obtained by taking β_r in the timelike principal 2-flat associated with K_{rs} [cf. Univ. of Toronto Studies, Appd. Math. Series 1, 1935]. Then, integrating over the whole of space, the total 4-momentum M_r of either the U-field or the V-field comes out to be

$$M_r = \frac{\pi^2\beta_r}{4c^2\beta^6}\left[(KK)^2 + (KK^*)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

where $(KK) = K_{rs}K_{rs}$, $(KK^*) = K_{rs}K^*_{rs}$, $K^*_{rs} = \frac{1}{2}i\,\varepsilon_{rsmn}K_{mn}$. The field may be regarded as the electromagnetic model of an uncharged particle, distributed over space-time, with a proper mass

$$m = \frac{\pi^2}{4c^2\beta^5}\left[(KK)^2 + (KK^*)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

We get a model of a photon by taking β_r to be a null vector, but the energy comes out to be infinite.

The theory will appear in more detail in a book on Relativity to be published by the North-Holland Publishing Company.

DUBLIN INSTITUTE FOR ADVANCED STUDIES,
64 MERRION SQUARE, DUBLIN, IRELAND.

HYDRODYNAMIC APPLICATION OF SOME NEW INTEGRAL TRANSFORMATIONS

VICTOR G. SZEBEHELY

The classical derivation of the equations of the motion of solids through a fluid given by Lamb and Milne-Thomson makes use of the kinetic energy of the system and of the impulse-momentum principle. The present paper derives the six equations of motion of this six degrees of freedom system by integrating the pressure on the surface of the solid. The derivation requires certain transformations of the integrals occuring in the problem. These transformation formulae have some general interest besides the fact that they enable one to obtain the equations of motion in a straight forward manner, without having to refer to the impulse-momentum principle.

The equations of motion are presented as one tensor equation by introducing six-vectors and a generalized alternating six dimensional third rank tensor E_{ijk} with elements ± 1 and 0. The expression for the generalized force becomes:

$$P_i = A_{kl}(E_{ijk} v_l v_j - \delta_{ik} \dot{v}_l)$$

where A_{kl} is the virtual mass tensor, δ_{ij} is Kronecker's delta and v_i the velocity six-vector (with three translational and three rotational components).

8800 Bradford Rd,
SILVER SPRING, MD., U. S. A.

SINGULARITIES ON SHOCKS

ABRAHAM H. TAUB

It is our purpose to discuss the situation which arises when a shock front is such that there are points on it at which the tangents to the shock, the curvature of the shock or some derivative of the curvature is discontinuous. Such shocks will be called shocks with singularities. They occur in many shock interaction problems, for example, in the Mach reflection of a plane shock from a finite rigid wall.

The discussion will be restricted to two dimensional pseudostationary flows. However the methods used and results obtained will be applicable to stationary flows.

It shall be assumed that at any time t every point in the region behind the shock with a singularity is occupied by a single fluid particle which has crossed the shock at some time earlier than t.

It follows from considerations involving the conditions that must obtain across the locus formed by the particles which have crossed the singular point of the shock that the shock configuration in the vicinity of the singular point is determined up to one parameter which may be taken to be either the curvature or some derivative of the curvature of one branch of the singular shock. This freedom must exist if such shock configurations are to satisfy additional boundary conditions.

The arguments used to obtain this result are most conveniently given in terms of a coordinate system in which the independent variables label the place at which a particle crosses the shock and the time it did so. These coordinates enable one to formulate the hydrodynamical conservation laws in such a form that they may be integrated formally or numerically in a quite simple manner.

Digital Computer Lab. Univ. of Ill.
Urbana, Ill. U. S. A.

HYDRODYNAMICAL STABILITY OF INTERFACIAL OSCILLATIONS OF TWO SUPERPOSED STREAMS

Chan-Mou Tchen

Because of its mathematical interest as an eigenvalue problem, as well as its importance in the understanding of the mechanism and conditions for the growth of waves and for the transition from laminar to turbulent flow, the stability of laminar flow has long been a subject of intense investigation. Early investigators (Rayleigh, Taylor, Goldstein, etc.) had considered the inviscid flow, with rectilinear basic velocity profiles. However, it is felt that the viscosity must play a very important role, not in causing always a damping, as one would expect from simple arguments, but in changing the phases of the vibration in such a manner that a transfer of energy occurs, and that, consequently, there results an amplification of the vibration. The question is then how the viscosity can cause instability under various circumstances: from the case of a flow bounded by a solid wall (which can be considered as a light flow over a layer of infinite density or viscosity) to the case of a free jet (i.e. two layers of equal density and viscosity). A general formulation of the problem is obtained by considering the oscillations of the laminar region between two superposed liquids of different densities, viscosities and free stream velocities, the liquid being otherwise unlimited. On the assumption of two dimensional small oscillations, and considering the variation of density and viscosity, the generalized equation of perturbation is established, containing the following parameters: wave number, wave velocity, Reynolds number (viscous effect), Froude number (gravitational effect) and Richardson number (effect of the variable density). It is shown that, for a step distribution in densities and viscosities, the generalized equation of perturbation degenerates into a system of two equations of the Sommerfeld-Orr type, one for the upper layer and the other for the lower layer. These equations give eight particular solutions with eight arbitrary constants. Two of the solutions increase without limit, as one goes away from the interface. Therefore, their corresponding arbitrary constants must vanish, as required by the conditions of boundedness of the oscillations at infinity. Consequently there remain six arbitrary constants to be determined by the following six boundary conditions: At the two edges of the layers, two conditions are obtained by joining the solutions with those corresponding to a uniform basic flow; on the interface, another two conditions are obtained from the continuity of the velocity components, and the remaining two from the continuity of the tangential and normal stresses. The condition for the possibility of determining the arbitrary constants in such a system of six equations leads to a determinantal equation of the sixth order. Further the eigenvalue problem is subject to numerical computation. Is is shown that, ou the one hand, if the density of the lower fluid increases indefinitely, the determinantal equation of the sixth order degenerates into a determinantal equation of the third order, similar to the one characterizing the stability of a boundary layer flow over a solid ground. On the other hand, if the density and viscosity of the two layers become identical, the determinantal equation of the sixth order is shown to degenerate into a determinantal equation of the second order, similar to the one characterizing the stability of a jet or half-jet. The special case where the lower fluid is much heavier than the upper fluid is somewhat emphasized in connection with the stability of water waves generated by wind.

National Bureau of Standards, D.C. U.S.A.

THE DIFFRACTION OF A SHOCK OF MODERATE STRENGTH AROUND A RIGHT-ANGLED CORNER

CHARLES KENNETH THORNHILL

When a plane shock, followed by uniform flow, moves into still air bounded by a semi-infinite plane wall perpendicular to the shock, and encounters a convex corner formed by a second semi-infinite plane wall perpendicular to the shock, it is diffracted around the corner. Since no fundamental length is introduced in the definition of this problem, the flow must be expressible in terms of two variables only, such as x/t and y/t, where x, y are space-coordinates in a plane perpendicular both to the walls and the shock, and t denotes time.

Using this pseudo-stationary property of the flow, Bargmann (1945) developed a first-order solution restricted to weak shocks and small corner angles; Lighthill (1949) gave a linearised solution restricted only to small corner angles; and the present author and others (1951) showed the existence, in the case of strong shocks, of a limited region of Prandtl-Meyer flow near the corner, expanding uniformly with time, and examined the possible extent of this region of flow.

The present paper is concerned with a numerical solution for a shock of moderate strength diffracted around a right-angled corner. The restriction placed on shock strength is only that the flow behind it, relative to still air ahead, shall be subsonic, so that the system of governing equations is entirely elliptic in the closed region where the flow has to be determined. The most interesting boundary condition is that near the corner, where it has been assumed that there can be no discontinuity in direction of the subsonic pseudo-stationary streamline along the wall, so that it must separate from the wall at the corner. It has then been assumed, by analogy with the acoustic case, that the free streamline and all other pseudo-stationary streamlines concur at the point where the free streamline re-joins the wall. Since no fluid enters or leaves the region enclosed by the free streamline and the wall, which is increasing uniformly with time, it has been assumed that this region is a vacuum. A series solution, around the point of reattachment of the free streamline shows that the free streamline turns through an angle $(\pi + \delta)$, where δ is the corner angle, and runs into the inclined wall tangentially and directed back towards the corner, with all the other pseudo-stationary streamlines.

The numerical solution described was obtained by relaxation methods for a shock moving with Mach number 1.34 relative to still air, and a right-angled corner. In this first calculation, in order to simplify the governing equations and concentrate attention on the boundary conditions, (particularly the diffracted part of the shock and the free streamline, which have to be determined as the solution proceeds) the Rankine-Hugoniot conditions across the shock were modified so that the whole flow remained isentropic. The numerical solution is therefore at present only an approximation, but, in principle, there is no difficulty in correcting this solution for the full governing equations. For shocks moving into still air followed by subsonic flow the correction will be small.

The solution is compared with experimental results obtained by interferometry in a shock tube, and the agreement is very good.

The relaxation solution described was arranged and directed at the Imperial College of Science and Technology, London, by D. N. de G. Allen, to whom grateful acknowledgment is made.

REFERENCES

BARGMANN, V. 1945. On nearly glancing reflection of shocks. O.S.R.D. Report No. 5171.
LIGHTHILL, M. J. 1949. Proc. Roy. Soc. A. **198**, 454.
JONES, DORIS M. MARTIN, MOIRA E. and THORNHILL, C. K. 1951. Proc. Roy. Soy. A. **209**, 238.

ARMAMENT RESEARCH ESTABLISHMENT,
FORT HALSTEAD, SEVENOAKS, KENT, ENGLAND.

THE CONDITION OF MATRICES

JOHN TODD

The concept of the condition of a matrix arises in numerical analysis. With a specific practical way of inverting a matrix it is desirable to associate a measure of the way in which the approximate inverse is affected e.g. by the fact that all calculations are carried out to a fixed number of decimal places. Such measures have been called condition-numbers. They clearly depend on the details of the method used, but it can be hoped that condition-numbers can be defined which are of some significance for various methods e.g. direct methods (like the Gaussian elimination process) or iterative methods such as relaxation.

Various condition numbers have been introduced, for instance by von Neumann and Goldstine, Turing, Mitchell and Rutherford. These have been studied, both theoretically and practically, both for matrices which arise in theory and those which arise in practice.

We now confine our attention to the P-condition number of von Neumann and Goldstine, defined by

$$P(A) = \max |\lambda_i| / \min |\lambda_i|$$

where the λ_i are the characteristic roots of the non-singular $n \times n$ matrix A. Difficulties in the inversion of A are to be expected when $P(A)$ is large. When A is the identity (or any orthogonal matrix), $P(A) = 1$. An average value of $P(A)$ is about n. If A arises from second order equations such as $y'' = ky$, $z_{xx} + z_{yy} = kz$, using the familiar approximations to the derivatives, then $P(A) = O(n^2)$. Similarly, for fourth order equations like $y^{(iv)} = ky$, $z_{xxxx} + 2z_{xxyy} + z_{yyyy} = kz$, we have $P(A) = O(n^4)$. If $A = H_n$, the $n \times n$ segment of the Hilbert matrix $H = (h_{ij})$ where $h_{ij} = (i + j - 1)^{-1}$, then $P(A) = O(\exp \alpha n)$, for a positive α.

To indicate how these theoretical results are reflected in practice we shall describe some results obtained by use of a certain variation of the elimination process, prepared for use on *SEAC*, the National Bureau of Standards Eastern Automatic Computer, a machine which works to 42 binary digits, by S. L. Pollack and M. Newman. The inverse of a 49×49 matrix arising from $y'' = ky$ had errors of the order of 10^{-9}, while that of a 49×49 matrix arising from $y^{(iv)} = ky$ had errors of the order of 10^{-4}; the process failed completely to give the inverse of H_6.

National Bureau of Standards,
Washington 25, D.C.

DUAL INTEGRAL EQUATIONS

Clement John Tranter

The pair of equations

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty G(u)\, f(u)\, K(\varrho, u) du &= g_1(\varrho), \qquad (0 < \varrho < 1), \\ \int_0^\infty f(u)\, K(\varrho, u)\, du &= g_2(\varrho), \qquad (\varrho > 1), \end{aligned}\right\}$$

where $G(u)$, $g_1(\varrho)$, $g_2(\varrho)$, $K(\varrho, u)$ are given functions of the variables indicated and $f(u)$ is to be found are known as dual integral equations. They arise in the solution of boundary-value problems in which the condition on one boundary is a "mixed" one and it is usually a simple matter to reduce this type of problem to the solution of such a pair of integral equations.

The solution to the special case in which

$$K(\varrho, u) = J_\nu(\varrho u), \quad G(u) = u^\alpha, \quad g_2(\varrho) = 0$$

has been given by Titchmarsh and Busbridge using Mellin transforms. Here a method is sketched whereby the solution to the more general case in which

$$K(\varrho, u) = J_\nu(\varrho u), \; g_2(\varrho) = 0$$

but both $G(u)$ and $g_1(\varrho)$ remain arbitrary is made to depend on that of a system of linear algebraical equations. This is effected by making use of known infinite integrals containing Bessel functions and known properties of Jacobi polynomials.

In certain cases the exact solution of the resulting set of algebraical equations can be easily found. In other important cases, particularly that in which $g_1(\varrho) = A\varrho^\nu$(A constant), an iterative solution to the algebraical equations can be given. This is not without interest in itself.

Finally, certain physical problems are listed in which the above method has proved useful in obtaining either exact or approximate solutions.

Royal Military College of Science,
Shrivenham, Nr. Swindon. England.

SOME NEW RESULTS IN NUMERICAL ANALYSIS

Sydney John Tupper

This paper seeks to present some useful new, but simple, results obtained in two short investigations in the mathematics of computation.

The first concerns extensions of a well-known method of iteration to the real roots of an algebraic or trancendental equation. It is shown how a few iterates, from an origin of iteration, may be extrapolated successively to give new origins of iteration, with greatly enhanced convergence to the significant root. The method may be applied even when the initial iteration has followed a divergent circuit.

The same iteration method, applied to an arbitrary system of equations, all too frequently leads to divergence. An attempt is made to define the convergent iterative sequence in the case of a linear system of equations. The result is compared with the Southwell relaxation treatment and a further simple, iterative, method for the solution of a system of linear equations is given.

In the second part of the paper attention is first drawn to a fundamental method of expanding an arbitrary definite integral (in one variable) in terms of the advancing difference operator over unit interval. In the light of this method it is doubtful if any "new" formula expressing a definite integral as a function of values of the integrand at isolated points may be said to exist.

An application is made to develop a useful formula of high accuracy, based on a combination of the well-known Simpson rule with the Tchebychef rules.

A.R.E. FORT HALSTEAD SEVENOAKS,
KENT, ENGLAND.

THE EFFECT OF WIND FORCES ON A SEA

GERHARD W. VELTKAMP

Instigated by the catastrophal flood of February 1st 1953 a research was made on methods for computation of changes in the height of the sea-level, caused by the shearing-stresses which are exerted by the wind on the surface of the sea.

As a starting point, the equations, proposed by Schalkwijk, [1], were taken, which read

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{S} \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{S}}{\partial t} = \frac{1}{\varrho} \vec{W} - gH \operatorname{grad} \zeta - l\mathrm{T} \,.\, \vec{S} - \alpha \vec{S}, \tag{2}$$

in which

$\zeta(x, y, t)$	= change in height of the sea level, caused by the wind (all other changes, due to tides, air-pressure etc, being omitted).
$\vec{S}(x, y, t)$	= velocity of the water, integrated along a vertical line from bottom to surface.
$\vec{W}(x, y, t)$	= shearing stress at the surface, caused by the wind.
$H(x, y)$	= depth of the sea in undisturbed position.
T.	= an operator which converts a vector (a_1, a_2) into $(-a_2, a_1)$.

whereas ϱ, g, l and α are constants, depending on the density, gravity, force of Coriolis and turbulent friction respectively.

First the stationary case is considered for a sea of uniform depth $H = H_0$. The functions $U(x, y)$ and $V(x, y)$ are chosen as to satisfy

$$\vec{W} = -\varrho g H_0 (\operatorname{grad} V - \mathrm{T}. \operatorname{grad} U).$$

If, on account of (1), we put

$$l\vec{S} = g\, H_0\, \mathrm{T}. \operatorname{grad} \Theta,$$

(2) reduces to

$$\operatorname{grad}\ (\lambda\Theta - U) + \mathrm{T}. \operatorname{grad}\ (\Theta - \zeta - V) = 0, \tag{3}$$

in which $\lambda = \alpha/l$.

The general solution of (3) is

$$\Theta = \lambda^{-1}(\Phi + U) \tag{4}$$

$$\zeta = \lambda^{-1}(\Phi + U) - (\Psi + V) \tag{5}$$

where $\Omega(z) = \Phi(x, y) + i\,\Psi(x, y)$ is an analytic function of $z = x + iy$.

The sea is taken to be a simply-connected domain G with a partially smooth boundary Γ and two cases are considered.

1. Γ consists of coasts only. Then we should have $\Theta = 0$ on Γ and by (4) $\Omega(z)$ is subjected to the boundary condition

$$Re\,\Omega = -U \text{ on } \Gamma,$$

from which $\Omega(z)$ can be computed.

2. A part Γ_1 of Γ is a coast and along the other part Γ_2 of Γ the sea is connected with a deep ocean (e.g. the case of the North Sea). In this case we have $\Theta = 0$ on Γ_1 and $\zeta = 0$ on Γ_2, or, according to (4) and (5),

$$Re\,\Omega = -U \text{ on } \Gamma_1 \text{ and } Re\,\Omega - \lambda\, Im\,\Omega = -U + \lambda V \text{ on } \Gamma_2.$$

The latter type of boundary problems can be shown to be quite generally solvable by means of Cauchy integrals (Muskhelishvili, [2]).

Finally, some remarks are made on the non-stationary case.

References

[1] W. F. Schalkwijk, A contribution to the study of storm surges on the dutch coast, Diss. Utrecht, 1947.

[2] N. T. Muskhelishvili, Singular integral equations, Groningen, 1953.

Mathematisch Centrum,
Amsterdam.

AN ELECTRONIC COMPUTING MACHINE FOR THE SOLUTION OF DIFFERENTIAL AND INTEGRAL EQUATIONS

Henry Wallman

A computing machine of analog type has been built at Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden for the solution of both differential and integral equations. The machine is all-electronic, and is named *EIDA* (for *E*lectronic *I*ntegral and *D*ifferential *A*nalyzer). Ordinary differential equations, which may be linear or non-linear, with constant or variable coefficients, and of order up to eight, are solved in a time of 1/100-second. This high speed permits the solution of characteristic value problems and "two-point" boundary-value problems, a facility which in turn permits the solution of certain partial differential equations of hyperbolic and parabolic type in two variables. A high-speed generator for functions of two variables permits the evaluation of integral transforms with arbitrary kernel $K(x, t)$. The combination of this function generator and the previously described units permits the solution by an iteration method of certain integral equations.

INST. FOR TELETEKNIK I, CHALMERS UNIVERSITY OF TECHNOLOGY, GIBRALTARGATAN 5P, GOTHENBURG, SWEDEN.

A METHOD FOR DETERMINATION OF SUBSONIC FLOW PATTERNS

A. D. WASEL

In the case of an incompressible fluid, there exist various explicit formulas representing stream functions of certain flow patterns. For example, the Schwarz-Christoffel formula yields the stream function for a flow in a channel bounded by segments of straight lines. Other explicit formulas for the stream functions can be obtained using the theory of orthogonal functions. Bergman's integral operator in the theory of linear partial differential equations permits, using the hodograph method, the generalization of formulas of the latter kind to the case of subsonic flows of compressible fluids. In this way one can obtain, among others, formulas for the stream function of a subsonic flow in a channel bounded by segments of straight lines and portions of free boundary. (See Bergman, Proceedings of the U. S. National Academy of Sciences, vol. 29 (1943), pp. 276—281, § 5, and Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics by the American Society of Mechanical Engineers (1953), pp. 705—713.) The author investigates this method and discusses different aspects of its application. Two different tasks arise in the process: 1. evaluation of singular solutions which yield a sink or a source; 2. determination of a regular solution defined in a domain of the hodograph plane which satisfies prescribed boundary conditions. The author indicates the feasibility of the construction of tables which can be prepared once and for all for facilitating the computation of hodographs for various families of flows of the type mentioned above. Further, he develops useful procedures for the transition from the hodograph to the physical plane. In this connection he discusses the use of special computational machines (e.g. punched-card machines) in obtaining subsonic flow patterns in channels of the type previously indicated. In order to obtain the best procedures for the computation of stream functions and to obtain estimates of the errors, he proves certain theorems about properties of solutions of partial differential equations which occur in this theory.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF SANTA CLARA,
SANTA CLARA, CALIFORNIA.

ERROR BOUNDS FOR EIGENVALUES OF HERMITIAN INTEGRAL EQUATIONS AND INFINITE MATRICES

HELMUT W. WIELANDT

In addition to the method based on Fredholm determinants there are two classical methods for determining approximately the eigenvalues $\varkappa_\varrho$ of an integral equation

$$\int_0^1 K(x, \xi) y(\xi) d\xi = \varkappa y(x) \qquad (0 \leqq x \leqq 1) \tag{1}$$

whose kernel $K(x, \xi)$ is hermitian and square-integrable: (A) numerical quadrature, (B) the Rayleigh-Ritz method. Although the convergence of these methods has been established already by Hilbert, the problem of practical error bounds in the pre-limit stage (which is important for programming of high-speed calculations) is still open. The author obtained the following results.

A. Let $Sf = \Sigma_1^n p_\nu f(x_\nu) \approx \int_0^1 f(x)\,dx$ be any given formula of numerical quadrature. Let $\varkappa_\varrho^S$ be the n eigenvalues of the algebraic problem derived from (1) by replacing $\int$ by S, complemented by infinitely many zeros. Then a constant $C(K, S)$ may be determined explicitely such that

$$| \varkappa_\varrho - \varkappa_\varrho^S | \leqq C(K, S) \tag{2}$$

holds for every ϱ (provided the eigenvalues are numerated in a certain natural way). The constant $C(K, S)$ depends on smoothness properties of K and on the given quadrature formula S. For example, if S denotes Simpson's rule and T the trapezoidal rule (each using n points) then

$$C(K, S) = \frac{.75}{(n-1)^2} \sup_{x, \xi} | K_{xx}(x, \xi) |, \qquad C(K, T) = \frac{.54}{n-1} \sup_{x, \xi} | K_x(x, \xi) |$$

fulfill (2); the latter bound is best possible.

B. Let $\Phi = \{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ be any set of n linearly independent functions $(0 \leqq x \leqq 1)$. Denote by $\varkappa_\varrho^\Phi$ the n eigenvalues, complemented by infinitely many zeros, of the algebraic problem

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij} y_j = \varkappa^{\Phi} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} y_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

where

$$k_{ij} = \int_0^1 \int_0^1 \bar{\varphi}_i(x) K(x, \xi) \varphi_j(\xi) dx\, d\xi, \quad m_{ij} = \int_0^1 \bar{\varphi}_i(x) \varphi_j(\xi) d\xi.$$

Then for every set of arbitrary complex numbers c_{ij}

$$| \varkappa_\varrho - \varkappa_\varrho^{\Phi} | \leqq \frac{1}{2\, | \varkappa_\varrho^{\Phi} |} \int_0^1 \int_0^1 | K(x, \xi) - \sum_i \sum_j c_{ij} \varphi_i(x) \bar{\varphi}_j(\xi) |^2 dx\, d\xi$$

holds. This is a corollary of the following theorem on hermitian matrices:

Let L be any (finite or infinite) hermitian matrix, $L = (a_{ij} + d_{ij})$, where $a_{ij} = 0$ if $i > n$ or $j > n$, and $d_{ij} = 0$ if $i \leqq n$ and $j \leqq n$. Let the eigenvalues of L, (a_{ij}) be λ_ϱ, α_ϱ respectively. Then

$$| \lambda_\varrho - \alpha_\varrho | \leqq \frac{1}{2\, | \alpha_\varrho |} \sum_i \sum_j | d_{ij} |^2.$$

This theorem seems remarkable in that it estimates the error of the eigenvalues by the *square* of the error of the matrix.

MATHEMAT. INSTITUT D. UNIVERSITÄT,
TÜBINGEN (DEUTSCHLAND).

INTEGRAL AND RATIONAL NUMBERS IN THE NUCLEAR DOMAIN

ENOS EBY WITMER

If m is the rest mass of the negative electron, then the mass of any nucleus in any state may be represented by Mm, where M is a pure number. By making use of $E = mc^2$ any nuclear reaction energy or excitation energy can be represented in the same way. The writer has believed that M is always an integer or rational number. More precisely M now appears to be an integral multiple of 2^{-n}, where n is a positive integer or zero. Furthermore it seems plausible, though not certain, on the basis of the most accurately known mass differences that $n \leqq 8$ always. In any case the application of the latter idea to all the existing data has produced remarkable agreements and remarkable results. Thus the nuclear mass of I^{16} is found to be $29148\frac{13}{128}\, m$, which yields $m = 0.0005487702859$ amu by taking account of the binding energy of the electrons.

Using this value of m on the nuclear masses recently published by Bainbridge [1]) yields the following M-values for $A \leqq 17$ that are astoundingly close to integers.

Table 1

Nucleus	*M-value*
Li^7	12786.00006 ± 0.0474
C^{11}	20065.9998 ± 0.0437
O^{15}	27340.0007 ± 0.0237
F^{17}	$30983\ 0003 \pm 0.0200$

For $A \leqq 17$ there are 25 nuclear masses with a probable error of $\pm\ 0.051m$ or less. The probability of the situation shown in Table 1 arising by chance is only about 3×10^{-9}. In general there are many more integral or near-integral M-values than one would expect by the laws of chance. The writer has also found that the following formula represents the M-values to within about $\pm\ 0.1$ for $A \leqq 11$.

$$M = (7/2)^6 A - (139/64) AB(A) f_1(Z) + (23/64) f_2(A, N). \tag{1}$$

Here $AB(A)$ is always an integer and is 1, 3, 9, 28, 30, and 36 for A from 1 to 6 respectively. $f_1(0) = 0$ and $f_1(Z) = 1$ for $Z \geqq 1$. $f_2(A, N)$ is an integer and some of the formulas for it are

$$f_2(A, 0) = 0; \quad f_2(A, 1) = 1; \quad f_2(A, 2) = A + 1. \tag{2}$$

Formula (1) gives the masses of the neutron and proton as accurately as they are known. Although this simple formula containing only rational numbers is only approximate, it is so very accurate that it is probably significant.

[1] E. Segrè, Experimental Nuclear Physics (John Wiley and Sons, Inc., New York 1953), Vol. I, Part V, Table 16.

RANDAL MORGAN LABORATORY,
UNIVERSITY OF PENNSYLVANIA, PHILA. PA.

SECTION VI

LOGIC AND FOUNDATIONS

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG DES HERBRAND'SCHEN SATZES MIT DEN NEUEREN ERGEBNISSEN VON SCHÜTTE UND STENIUS

Paul Bernays

Der Herbrand'sche Satz in seiner beweistheoretischen Fassung kann als das zentrale Theorem der Prädikatenlogik angesehen werden. In ihm wird die Beziehung der Prädikatenlogik zur Aussagenlogik auf eine prägnante Form gebracht.

Der ursprüngliche Herbrand'sche Beweis ist an entscheidender Stelle schwierig. Von Gentzen wurde der Satz als Konsequenz seines noch weitergehenden Teilformelsatzes gewonnen. Dieser Beweis ist durchsichtig, erfordert aber viele Fallunterscheidungen. Verhältnismässig einfach lässt sich der Herbrand'sche Satz mit Anwendung des Hilbert'schen ε-Schemas (mittels des ersten ε-Theorems) beweisen. Neuerdings ist der Gentzen'sche Beweis durch Schütte vereinfacht worden, und andererseits enthält auch die beweistheoretische Untersuchung von Stenius über die Zahlentheorie einen Beweis des Herbrand'schen Satzes. In den beiden letztgenannten Arbeiten tritt dieses Resultat jedoch nicht ganz explizit hervor.

Um aus den Schütte'schen Betrachtungen möglichst direkt den Herbrand'schen Satz zu entnehmen, ist es vorteilhaft, zwischen die von ihm aufgestellten Kalkule K_1 und K_2 einen intermediären Kalkul einzuschalten, welcher einerseits mit K_1 den aufbauenden Charakter und andererseits mit K_2 die Einbeziehung von Konjunktion und Alloperator gemeinsam hat. Für diesen lässt sich ganz wie für K_1 die Eliminierbarkeit der Schnitte beweisen, und die Anwendung des Ergebnisses auf pränexe Formeln oder Alternativen aus solchen liefert unmittelbar den Herbrand'schen Satz.

Aus den Überlegungen von Stenius lässt sich ein Beweis des Herbrand' schen Satzes entnehmen, indem man den folgenden in den Stenius'schen Ergebnissen enthaltenen Satz verwendet: Wenn aus einem Axiomensystem der ersten Stufe, dessen Axiome keine gebundenen Variablen enthalten, sich eine Formel ohne gebundene Variable mit Hilfe des Prädikatenkalkuls herleiten lässt, dann können die gebundenen Variablen auch aus der Herleitung entfernt werden. Man gewinnt auf diese Weise den Herbrand'schen Satz in der Form (a) von HB II.

Bodmerstrasse 11,
Zürich 2,

ABSTRACTION VERSUS GENERALIZATION

J. RICHARD BÜCHI and JESSE B. WRIGHT

The verb "to abstract" often is used in the sense of "to disregard" or "to separate from". Thus, one says that real affine geometry results by abstraction from real Euclidean geometry, because the former is obtained from the latter by disregarding perpendicularity. In order to further clarify the use of the term abstraction it may be contrasted with generalization. For example: Real projective geometry is an abstraction from real affine geometry, but affine geometry over an arbitrary field is a generalization of real affine geometry. An important problem is to find an exact definition of these two concepts.

Abstraction is useful for a number of reasons which are well known to mathematicians. For example, it serves as a tool for the classification of concepts and theorems of a subject matter.

The mathematician's approach to abstraction employs groups of automorphisms (see Klein's Erlanger-program). From the logician's point of view abstraction consists in the weakening of a language with respect to its expressive power, alone. The study of the mutual relationship between transformation groups and formal languages might be called Galois-theory in its full generality. Although generalized Galois-theory contains a large number of unsolved problems, it has already led to several specific problems for which solutions have been found. Among these are the following.

Since the correlations are not automorphisms of projective geometry, it is natural to ask for that abstraction of projective geometry whose automorphism group or Galois-group consists of the collineations and correlations. This leads, in the two-dimensional case, to a geometry in which the difference between points and lines is disregarded. Axioms for such a geometry have been found by one of the authors.

A similar problem is that of abstracting the group concept in such a way that the automorphism group is enlarged to enclude the translations. This has the effect that the set of elements of the group becomes homogeneous, i.e. there is no distinguished element. A solution of this problem has been found in the form of an axiom system in which equivalence relations play a fundamental role.

UNIVERSITY OF MICHIGAN,
ANN ARBOR, MICH.

GENERALIZATIONS OF THE DEDUCTION THEOREM

HASKELL B. CURRY

Let S be a propositional algebra in which modus ponens is the sole rule of inference. Let the notation

(1) $$A_1, \ldots, A_m \vdash B$$

indicate that one can derive B by modus ponens from A and the axioms of S. If this holds for $m = 0$, B will be said to be an S-theorem. A scheme involving A, B, C will be said to be an S-scheme if it is an S-theorem for all A, B, C.

The deduction theorem for S is the statement that whenever (1) holds the formula

(2) $$A_1 \supset . A_2 \supset . \ \ldots \supset . A_m \supset B$$

is an S-theorem. It is well known that a sufficient condition for this is that the formulas

(PB) $B \supset C . \supset : A \supset B . \supset . A \supset C$
(PC) $A \supset . B \supset C : \supset : B \supset . A \supset C$
(PW) $A \supset . A \supset B : \supset . A \supset B$
(PK) $A \supset . B \supset A$

be S-schemes.

This theorem admits the following generalization. Suppose that (PB) and

(PI) $A \supset A$

are S-schemes. Then if (1) holds there will be $C_1, \ldots C_n$ each of which is either one of the A_i or is an S-theorem, such that

(3) $$C_1 \supset . C_2 \supset . \ \ldots \supset . C_n \supset B$$

is an S-theorem. We can suppose that C_1 is not an S-theorem. The theorem holds if (PI) is replaced by any scheme of the form (3) in which some C_j is B.

The theorem can be specialized thus: If (PC) is also an S-scheme, we may require that every C_j be one of the A_i (since the order of the C_j is immaterial, and any which are S-theorems can be moved to the beginning and cut off.) It is then sufficient to consider the case $m = 1$. If (PW) is also an S-scheme, then (3) becomes the same as (2) except that some (or all) of the A_i may be absent. These cases were established by Church (Journal of Symbolic Logic, Vol. 16, p. 238, and the paper reviewed ibid., Vol. 18, p. 177.)

Again, let $W_k(A, B)$ be defined by

$$W_1(A, B) \equiv A \supset B; \quad W_{k+1}(A, B) \equiv A \supset W_k(A, B)$$

Let $(PW)_k$ be the formula $W_{k+1}(A, B) \supset W_k(A, B)$. Let H_k be the propositional algebra formed by postulating (PB), (PC), $(\mathrm{PW})_k$, and PI as axiom schemes. Then in H_k we have a generalized deduction theorem in which each C_j is one of the A_i and each A_i occurs at most k times. The logics H_k are of ever decreasing strength.

These circumstances throw some doubt on the existence of a minimal logic in the sense of Church (ibid., Vol. 16, p. 238). A process of weakening, similar to that which he describes, can be continued indefinitely. If (PW) or some modification of it is not assumed the number of possibilities (3) for a given (1) is infinite; but if $(\mathrm{PW})_k$ and (PC) hold it is finite. Even in the most general case the proof of the theorem associates with any proof of (1) unique C_j such that (3) holds.

THE PENNSYLVANIA STATE COLLEGE,
STATE COLLEGE, PA.

ON THE POSSIBILITY OF PROVING THE CONSISTENCY OF THE SIMPLE THEORY OF TYPES

ROBIN OLIVER GANDY

Starting from Church's version of the simple theory of types, it has been found possible to set up a formulation which is similar to the calculus used by Gentzen in his first proof of the consistency of number theory. The primitive constants are: 'T_o' ('Truth'), 'F_o' ('Falsity'), '$Q_{o\alpha\alpha}$' (Equality), '0_ι', '$S_{\iota\iota}$' (Successor). '$\sim A_o$' is considered as an abbreviation for '$A_o = F_0$', '$(x_\beta)A_o$' for '$\lambda x_\beta \,.\, A_o = \lambda x_\beta T_o$', '$A_o$ & B_o' for '$(f_{ooo})\ (f A_o B_o = f T_o T_o)$'. The 'structural' rules, and the 'cut', are exactly as in Gentzen's system; further, from a given sequence one may deduce the sequence obtained from it by an application of Church's rules II and III (λ-conversion), but a change of bound variable is not permitted. (Collisions can be avoided by changing a variable throughout the proof). The other rules and basic sequences are as follows:

1. $$\frac{\Gamma, A_o \to B_o \quad \Delta, B_o \to A_o}{\Gamma, \Delta \to A_o = B_0}$$ (This rule is actually derivable from the others).

2. $$\frac{\Gamma \to A_o = B_o}{\Gamma, A_o \to B_o}.$$ 3. $$\frac{\Gamma, A_o \to F_o}{\Gamma \to \sim A_o}.$$

4. $$\frac{\Gamma \to A_\alpha(x_\beta) = B_\alpha(x_\beta)}{\Gamma \to \lambda x_\beta \,.\, A_\alpha(x_\beta) = \lambda x_\beta \,.\, B_\alpha(x_\beta)}$$

5. $$\frac{\Gamma \to A_o(0_\iota) \quad \Delta, A_o(x_\iota) \to A_o(S_{\iota\iota}0_\iota)}{\Gamma, \Delta \to A_o(y_\iota)}$$

provided x_β is not free in any of the formulae of Γ and Δ.

6. $\sim\sim A_o \to A_o$. 7. $A_o \to A_o = T_o$. 8. $\to G_\alpha = G_\alpha$.

9. $G_\alpha = H_\alpha,\ J_\alpha = K_\alpha \to (G_\alpha = J_\alpha) = (H_\alpha = K_\alpha)$.

10. $G_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta} \to G_{\alpha\beta} X_\beta = H_{\alpha\beta} X_\beta$. 11. $X_\beta = Y_\beta \to G_\alpha(X_\beta) = G_\alpha(Y_\beta)$.

12. $\to S_{\iota\iota} x_\iota \neq 0_\iota$. 13. $S_{\iota\iota} x_\iota = S_{\iota\iota} y_\iota \to x_\iota = y_\iota$.

This system is not equivalent to Church's (e.g. one cannot prove '$\to \lambda x_\alpha . x_\alpha = \lambda y_\alpha . y_\alpha$'), but it is a comparatively trivial matter to show that Church's system (with descriptions, but without the selection axiom) is consistent relative to it.

UNIVERSITY COLLEGE,
LEICESTER.

A FREE VARIABLE FUNCTION THEORY

REUBEN LOUIS GOODSTEIN

This note summarises the objectives of a free variable finitist system of mathematical analysis, called recursive function theory, which has been in process of construction during the past fifteen years. As the name suggests, recursive function theory is based on Skolem's recursive arithmetic and shares with it the patent freedom from contradiction of a system of verifiable statements. It is more strictly finitist than current constructivist theories like intuitionistic analysis and aims at formulating in a rational field analogues of theorems of classical analysis entirely without the use of limits, or real numbers, by means of a relativisation of concepts.

The system admits a codification in which logic is reduced to mathematics and the only axioms are $x = x$ and the defining equations of recursive functions. These defining equations are not limited to primitive recursions. By allowing transfinite recursions of the form

$$f(0) = a, \quad f(n+1) = \Phi(n, \gamma(n)),$$

where Φ and γ are primitive recursive and $\gamma(n)$ is a predecessor of $n+1$ in some ordering of the natural numbers (of ordinal less than ε_0, the first ε-number, and so definable by primitive recursive relations) there is little likelihood of excluding any constructively defined function since it is provable (outside the system) e.g. in the Hilbert-Bernays system Z_μ that any function general recursive in Z_μ is transfinite recursive of ordinal less than ε_0.

The finitist character of transfinite recursion is not self-evident but derives from the termination of the sequence of predecessors $\gamma(n), \gamma(\gamma(n)), \ldots$;

for recursions of ordinal α not greater than ω^{ω^ω} it is known that the number of terms in the sequence of predecessors is bounded by a function of ordinal less than α, but it remains a major unsolved problem to formulate the defining equations of the function which bounds the number of terms in decreasing sequence of ordinals with an arbitrarily assigned initial ordinal less than ε_0.

The passage from natural number- to rational-recursive function is effected in the now familiar way by means of ordered triples and it is readily shown that the class of functions is not widened by applying the original recursion schemata to rational functions with natural number arguments.

This rational number theory succeeds in reflecting the multiplicity of classical real-variable analysis by means of a technique for replacing repeated limits by single convergent sequences which, in the theory of contour integration, for instance, serves to confine topological considerations to simple grid patterns.

UNIVERSITY COLLEGE,
LEICESTER, ENGLAND

POLYADIC BOOLEAN ALGEBRAS

PAUL R. HALMOS

The purpose of this work is to define and study a class of algebraic systems whose relation to the first order functional calculus is the same as that of Boolean algebras to the propositional calculus. (These systems are related to, but not identical with, the cylindric algebras introduced by Tarski and Thompson, Bull. A. M. S. 1952, p. 65.)

A *quantifier* (properly: existential quantifier) on a Boolean algebra $\mathbf{A}$ is a mapping $\exists$ of $\mathbf{A}$ into itself such that (i) $\exists 0 = 0$, (ii) $p \leqq \exists p$ for all p in $\mathbf{A}$, (iii) $\exists\exists p = \exists p$ for all p in $\mathbf{A}$, and (iv) if p and q are in $\mathbf{A}$ and if $p = \exists p$, then $\exists(p \wedge q) = p \wedge \exists q$.

Let I be a set and let ε be the identity mapping of I onto itself. Let T be the semigroup of all those transformations τ of I into itself which agree with ε outside some finite set.

A *polyadic Boolean algebra* is a Boolean algebra $\mathbf{A}$ and a set I such that to each finite subset J of I there corresponds a quantifier $\exists_J$ on $\mathbf{A}$ and to each τ in T there corresponds an endomorphism $\bar{\tau}$ of $\mathbf{A}$, subject to the following conditions. (1) If J is empty, then $\exists_J p = p$ for all p in $\mathbf{A}$, (2) $\exists_J \exists_K = \exists_{J \cup K}$, (3) if p is in $\mathbf{A}$, then there exists a finite subset J of I such that $\exists_K p = p$ whenever $K \cap J$ is empty, (4) $\bar{\varepsilon} p = p$ for all p in $\mathbf{A}$, (5) if σ and τ are in T and if $\pi = \sigma\tau$, then $\bar{\pi} = \bar{\sigma}\bar{\tau}$, (6) if τ is one-to-one on $\tau^{-1}J$, then $\exists_J\bar{\tau} = \bar{\tau}\exists_{\tau^{-1}J}$, (7) if $\sigma = \tau$ outside J, then $\bar{\sigma}\exists_J = \bar{\tau}\exists_J$.

If X and I are arbitrary sets, and if $\mathbf{B}$ is a (lattice-theoretically) complete Boolean algebra, then the set $\mathbf{A}$ of all functions from X^I into $\mathbf{B}$, and also suitable subsets of $\mathbf{A}$, form in a natural way polyadic Boolean algebras. A relatively deep theorem asserts that every simple polyadic Boolean algebra can be obtained in this way, with $\mathbf{B} = \{0, 1\}$. (The method of proof is modelled after related work by Henkin, J. Symb. Logic 1941, pp. 159—166, and Rasiowa and Sikorski, Fund. Math. 1950, pp. 193—200.) In view of this result, the algebraic analogue of Gödel's completeness theorem becomes the assertion that every polyadic algebra is semisimple (i.e., that the intersection of all maximal ideals consists of the zero element only).

Via polyadic algebras many other results of modern logic (e.g., Gödel's incompleteness theorem, the consistency of the continuum hypothesis, and Shepherdson's work on inner models) become susceptible of a purely algebraic formulation.

University of Chicago

Γ-COMPLETENESS

Leon Henkin

In *A generalization of the concept of ω-consistency* (to appear in *The Journal of Symbolic Logic*, 1954), a formal notion of Γ-consistency was defined and its significance for the interpretation of formal systems was explored. In the present paper a closely related generalization of the concept of ω-completeness is presented.

We consider a first-order functional calculus $\mathfrak{S}$ which includes a certain non-empty set Γ of individual constants, among its primitive symbols, and which may possess additional formal axioms besides logically valid axioms such as are usually employed in formulating the pure functional calculus. Such a system is called *Γ-complete* if, whenever $B(x)$ is a formula (containing the single free individual variable x) such that $B(\alpha)$ is a formal theorem of $\mathfrak{S}$ for every α in Γ, then the universal sentence $(x)B(x)$ is also a formal Theorem of $\mathfrak{S}$. (Here $B(\alpha)$ is the formula resulting from $B(x)$ when each free occurrence of x is replaced by an occurrence of α.)

In order to see the model-theoretic significance of this formal concept, we introduce the notion of *Γ-satisfiability*. A model M is said to Γ-satisfy the system $\mathfrak{S}$ if all of the axioms (and hence Theorems) of $\mathfrak{S}$ are true of M, and if every element of M is denoted by some constant in Γ.

Now it is evident that the following condition is *sufficient* to guarantee Γ-completeness: Every formula of $\mathfrak{S}$ which is true for all models which Γ-satisfy $\mathfrak{S}$, is a formal theorem of $\mathfrak{S}$. Our principal result is that in case Γ is denumerable, this condition is also necessary.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA,
BERKELEY

ZUR WEITERENTWICKLUNG DER MENGENLEHRE

HERBERT KARL

Durch ein neuartiges dialektisches Schlussverfahren wird für die Grundidee Georg Cantors zur Bildung von Mengen wachsender Mächtigkeiten, das „Hinüberzählen" über die fertig abgezählte Menge der natürlichen Zahlen, ein einfaches Modell konstruiert. Dabei wird die Definition einer reellen Zahl durch eine Fundamentalfolge, im „Grundmodell" z.B. der Zahl 1 durch die Folge $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}, \ldots, \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{2^\nu}, \ldots$, so gewendet, dass diese Folge mit $1, 2, \ldots, n, \ldots$ abgezählt wird. Die Zahl 1 wird also durch ω abgezählt. Erst durch „Hinüberzählen" $\omega+1, \omega+2, \ldots \omega+\omega=\omega.2$ kann eine weitere reelle Zahl transfinit abgezählt werden. Unendlich oft wiederholte Iteration des Grundmodells und seine Konsequente Verwendung innerhalb immer umfassenderer Strukturbereiche von transfiniten Zahlen gestattet eine (stufenweise) transfinite Abzählung der Menge der reellen Zahlen unter Beibehaltung ihrer Anordnung durch die „Zahlen der zweiten Zahlenklasse". Dabei ist „stufenweise" ähnlich zu verstehen, wie die Abbildung eines Flächenstücks auf eine Strecke nach Peano geschieht. Die neue Methode lässt die „Zweischichtigkeit" der Menge der reellen Zahlen hervortreten und macht im Zusammenhang damit deutlich, dass der Begriff „Menge der rationalen Zahlen" verschärft werden muss. Ebenso erfährt der Begriff des Kontinuums eine gewisse Neufassung. Die möglichen Folgerungen für Analysis, Topologie und andere Gebiete sind noch kaum zu übersehen. Im Zusammenhang mit dieser Behandlungsweise der aktual-unendlichen Grössen aufsteigender Stufen kann die Rolle der aktual unendlichkleinen Grössen neu bestimmt werden. Auch deutet sich die Möglichkeit an, in Grundlagenfragen einen Standpunkt zu gewinnen, der Mengenlehre und Intuitionismus zu einer Synthese höherer Art vereinigt.

GONTARDSTRASSE 3,
POTSDAM.

BASES FOR SYSTEMS OF ANALYSIS

Georg Kreisel

Bases (introduced in the *British Journal for the Philosophy of Science*, Vol. IV, No. 14, 1953, pp. 107—129) are obtained for several classes of formulae in a typical system of analysis. The results permit (i) a comparison of different proofs of Brouwer's theorem on the continuity of computable functions of a real variable, (ii) the construction of non-trivial classes of functions which are continuous for all reals if they are continuous for suitable enumerable subsets of reals, (iii) other applications to analysis and the theory of proofs.

The University,
Reading, England

SOLUTION OF A PROBLEM BY LEON HENKIN

Martin Hugo Löb

A solution will be presented of problem 3 (Journal of Symbolic Logic, 17, p. 160) in respect of Z_μ (Hilbert and Bernays, Grundlagen der Mathematik, vol. 2, pp. 289—294), and, more generally, in respect of any system whose set of theorems is closed with regard to the rules of inference of the first order predicate calculus, and satisfies the subsequent five conditions, and in which the function $\gamma(k, l)$ used below is definable. The notation and terminology is that of H. & B., vol. 2, pp. 306—326. We shall also write $\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{a}$ as short for $(Ex)\mathfrak{B}(x, \mathfrak{a})$ and $\tilde{\mathfrak{B}}f(y)$ as short for $(Ex)\mathfrak{B}(x, f(y))$. In H. & B. (loc. cit.) the following four conditions are shown to be satisfied by the predicate $\mathfrak{B}(m, n)$ of Z_μ.

1. For any formulae $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{T}$ $\tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{T}\} \rightarrow [\tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{S}\} \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{T}\}]$ is a theorem.
2. If $\mathfrak{T}$ is derivable from $\mathfrak{S}$, then $\tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{S}\} \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{T}\}$ is a theorem.
3. If $f(x)$ is a recursive term, then $f(x) = 0 \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}\{f(x) = 0\}$ is a theorem.
4. From the proof of $\mathfrak{A}$ a proof of $\tilde{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A})$ is obtainable.

In addition, we require:

5. For any formula $\mathfrak{A}$, $\tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{A}\} \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}\{\mathfrak{A}\}\}$ is a theorem.

5. is easily established by the predicate calculus and 2. and 3. to be valid for Z_μ.[1]

Let $\mathfrak{s}(k, l)$ be the function defined in H. & B., vol. 2, p. 256.

Let $\mathfrak{F}$ be the formula $\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(a, a) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q$, where q is the Gödel-number of $\tilde{\mathfrak{B}}q$, and let f be the Gödel-number of $\mathfrak{F}$. Consider now the formula $\mathfrak{P} : \tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q$. If $\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f)$ and $\mathfrak{P}$ are provable so is $\tilde{\mathfrak{B}}q$. The previous metamathematical statement is expressed in Z_μ by the formula (i): $\tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f)\} . \tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q\} \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}q\}$.[2] Since the Gödel-numbers of $\mathfrak{P}$ and $\tilde{\mathfrak{B}}q$ are $\mathfrak{s}(f, f)$ and q, respectively, (i) reduces to (ii): $\tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f)\} . \tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q$. From (ii) and 5. we have $\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q$. Thus $\mathfrak{P}$ is provable. Moreover, from $\mathfrak{P}$ and 4. we obtain $\tilde{\mathfrak{B}}\{\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f) \rightarrow \tilde{\mathfrak{B}}q\}$, i.e. $\tilde{\mathfrak{B}}\mathfrak{s}(f, f)$. From the previous formula and $\mathfrak{P}$ $\tilde{\mathfrak{B}}q$ follows.

[1] I propose to give the proof of 5. in full in the lecture.

[2] (i) is easily provable by an application of 1.

9. Marlborough Gardens,
Leeds, 2, England

A GÖDEL THEOREM FOR AN INFINITE-VALUED ERWEITERTER AUSSAGENKALKÜL

Alan Rose

By methods similar to those used by Gödel we can prove that there is no plausible and complete formalization of a certain infinite-valued Erweiterter Aussagenkalkül whose truth-values are the real numbers satisfying $0 \leqq x \leqq 1$, 1 being the designated truth-value. If $p, q, r, p_1, p_2, \ldots, p_n, Cpq, Gpqr, \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n), \Pi p_i \Phi(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ take the truth-values $x, y, z, x_1, x_2, \ldots, x_n, c(x, y), g(x, y, z), \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ respectively then $c(x, y) = \min(1, 1 - x + y)$, $\psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \min \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $g(1, 1, 2^{-w}) = 1 (w = 0, 1, \ldots)$, $g(1, 0, z) = 1 \quad (z \neq 1)$, $g(2^{-v}, 2^{-w}, 2^{-u_{vw}}) = 1 \ (v = 1, 2, \ldots; w = 0, 1, \ldots, \lambda_v)$ where the vth sequence in an enumeration of all finite sequences of non-negative integers is $u_{v0}, u_{v1}, \ldots, u_{v\lambda_v}$. In all other cases $g(x, y, z) = 0$. Other functions are then defined as follows: $APQ =_{\text{df.}} CCPQQ$, $O =_{\text{df.}} \Pi pp$, $1 =_{\text{df.}} COO$, $NP =_{\text{df.}} CPO$, $KPQ =_{\text{df.}} NANPNQ$, $DP =_{\text{df.}} G1OP$, $HP =_{\text{df.}} \Pi pANCPpp$ (where p does not occur in P), $EPQ =_{\text{df.}} KDDCPQDDCQP$, $\Sigma pP =_{\text{df.}} N\Pi pNP$.

We can define formulae $\Psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, q)$ corresponding to primitive recursive functions $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in such a way that Ψ takes the truth-value 0 except when the truth-values of $p_1, p_2, \ldots, p_n, q$ are of the forms $2^{-x_1}, 2^{-x_2}, \ldots, 2^{-x_n}, 2^{-\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ respectively, in which case Ψ takes the truth-value 1. e.g. If $\varphi(x) = x'$, then $\Psi(p, q)$ is $KEHpqG11p$; if $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \zeta(\chi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \chi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, \chi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n))$ and Ψ_i, Ω are the formulae corresponding to χ_i, ζ respectively ($i = 1, 2, \ldots, m$) then $\Psi(p_1, p_2, \ldots, p_n, q)$ is $\Sigma q_1 \ldots \Sigma q_m K^m \Psi_1(p_1, \ldots, p_n, q_1) \ldots \Psi_m(p_1, \ldots, p_n, q_m)\ \Omega(q_1, \ldots, q_m, q)$. Similarly we can define formulae corresponding to primitive recursive predicates. This enables us to find a formula without free variables which is provable if and only if it does not take the truth-value 1. Since the formalization is plausible the formula must take the truth-value 1 and be unprovable. Thus the formalization is incomplete.

MATHS DEPT.,
UNIVERSITY OF NOTTINGHAM

EIN REIN AUSSAGENLOGISCHER ZUGANG ZU DEN MODALITÄTEN DER STRIKTEN LOGIK

ARNOLD SCHMIDT

Die aussagenlogischen Axiome

$a \wedge b \prec b \wedge a$	$(a \prec b) \wedge (b \prec c) \prec (a \prec c)$
$(a \wedge b) \wedge c \prec a \wedge (b \wedge c)$	$(a \prec b) \prec (\neg b \prec \neg a)$
$a \wedge b \prec a$	$(a \wedge b \prec c) \prec (a \wedge \neg c \prec \neg b)$
$a \prec a \wedge a$	$a \prec \neg\neg a, \quad \neg\neg a \prec a$
$a \wedge (a \prec b) \prec b$	$(a \prec b \wedge c) \prec (a \prec b)$

legen mit den Regeln für die Einsetzung und die Umsetzung und mit den weiteren Schlussregeln „mit A und $A \prec B$ auch B" und „mit A und B auch $A \wedge B$" einen echten Teilbereich der klassischen Aussagenlogik fest, der übrigens weder von der intuitionistischen Aussagenlogik umfaßt wird — dies ist evident — noch sie oder den aussagenlogischen Teil des Minimalkalküls umfaßt. (Auf die Frage der gegenseitigen Unabhängigkeit der Axiome soll hier kein Wert gelegt werden; es genüge anzumerken, daß jedenfalls kein Axiom ohne störende Umwege der anschließenden Herleitungen entbehrt werden kann.) Es läßt sich einsehen, daß bei Einbeziehung der Definition $\Diamond a =: \neg(a \prec \neg a)$ der Bestand der beweisbaren Formen mit demjenigen des strikten Systems $S\ 2$ übereinstimmt ($\vee$ und $=$ sind in beiden Kodifikaten gleichartig zu definieren). Somit ist die strikte Logik in übersichtlicher Weise *rein aussagenlogisch* konstituiert, wobei die Modalitäten der (strikten) Möglichkeit $\Diamond$ und der (strikten) Notwendigkeit N — letztere durch $Na =: \neg a \prec a$ — aussagenlogisch fixiert, d.h. als zusammengesetzte aussagenlogische Verknüpfungen definiert sind.

Durch Zufügung des aussagenlogischen Äquivalentes für $N \prec NN$ gelangt man nun offensichtlich zum Formenbestand von $S\ 4$ (wobei einige der früheren

Axiome überflüssig werden); entsprechend erhält man bei Hinzufügung etwa des aussagenlogischen Äquivalentes für $\Diamond \prec N\Diamond$ den Formenbestand des — entscheidungsdefiniten — Systems $S\,5$. — Es erweist sich für die interpretative Durchdringung der so gewonnenen „verschärften strikten Aussagenlogik" als nützlich, noch die weiteren Modalitäten der Offenheit — durch $Oa =: \Diamond a \wedge \neg Na$ — und der Zufälligkeit — durch $Za =: a \wedge \neg Na$ — einzuführen. (Die Benennungen schließen sich an die in der Umgangssprache übliche Terminologie an, in der z.B. die Aussage „er ist heute zufällig gutgelaunt" mitbeinhaltet: „er ist heute gutgelaunt".) Zu den vier bisher erklärten „positiven" Modalitäten treten die vier Negate als „negative" Modalitäten hinzu. Mit $\Diamond$ und N sind alle acht strikten Modalitäten rein aussagenlogisch fixiert. Es mögen abschließend die sich ergebenden Regeln zur Reduktion der 32 direkten Modalitätenüberlagerungen angegeben werden. (Auf die Anführung der Reduktionsregeln für die indirekten Überlagerungen, bei denen die Verknüpfungen $\wedge$, $\vee$, $\prec$ hineinspielen, sei hier verzichtet.)

X stehe für eine beliebige der sechs Modalitäten $\Diamond$, N, O, $\neg\Diamond$, $\neg N$, $\neg O$.

(1) $\Diamond X = NX = X$, (2) $\neg\Diamond OX$, also $OX = a \wedge \neg a$,

(3) $ZZ = Z$ (4) $Z\neg Z = Z\neg$, (5) $\neg\Diamond ZX$, also $ZX = a \wedge \neg a$,

(6) $\Diamond Z = OZ = O\neg Z = O$, (7) $N\neg Z = \neg O$,

(8) $\neg\Diamond NZ$, also $NZ = a \wedge \neg a$, (9) $N\Diamond\neg Z$, also $\Diamond\neg Z = a \vee \neg a$.

(16) MARBURG/LAHN
FRANKFURTER STR. 15 (WESTDEUTSCHLAND)

A CRITICAL REMARK ON FOUNDATIONAL RESEARCH

THORALF ALBERT SKOLEM

As is well known, the origin of modern research on the foundation of mathematics is above all due to the discovery of the settheoretic antinomies. It is customary in other sciences, that if a theory has failed, one gives it up and tries to replace it by an improved theory. In mathematics and even in foundational research, however, the necessity of such a procedure is often neglected. Indeed it is not difficult to find in literature the use of notions which appear to presuppose ordinary set theory. For example the definition of satisfiability of a closed formula in the predicate calculus is often formulated so that it presupposes the general idea of a set or domain of objects. Even such a specific settheoretic notion as cardinal number is taken into account in this connection. One may then ask: What is the starting point, set theory or mathematical logic?

If we know set theory before mathematical logic, why not first of all expose the former theory explicitly? On the other hand, if mathematical logic is destined to be the foundation of all mathematics, then applications of set theory must wait until it has been developed on this basis. Since it appears necessary to set up either an axiomatic set theory or some equally powerful logical system, and since this can be done in different ways, it is not at all clear that we should be forced to assume just the classical theory. Also we have to recognise the relativity of set theory that is inevitable according to results obtained by the undersigned.

Further, the interpretation of formulas containing bound logical variables with infinite range is not always clear. For example the formula $(x)(Ey)R(x,y)$ may sometimes be interpreted constructively meaning that for any x we can find a y such that $R(x, y)$. But in a formal system it may be registered as a theorem with only the meaning that it can be derived by the formal rules of the system.

GULDBERGS VEI 4, OSLO.

ON SENTENCES HOLDING IN DIRECT PRODUCTS OF RELATIONAL SYSTEMS

ROBERT L. VAUGHT

Consider relational systems $\mathfrak{A} = < A, R_1, \ldots, R_m >$ constituted by a non-empty set A and relations $R_1, \ldots, R_m$ among the elements of A, R_j a k_j-ary relation, $j = 1, 2, \ldots, m$ (the natural numbers $m, k_1, \ldots, k_m$ are fixed for the discussion). The direct product $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_i/\ i \in I)$ of an indexed family of relational systems is defined in the usual way. Consider also the corresponding elementary sentences, i. e., sentences of the first order predicate logic with identity and with constant predicates corresponding in number and in number of places to the relations of the relational systems being discussed. As the solution of a problem proposed by J. Los, we obtain: Theorem I. Let $\mathfrak{A}_0, \ldots, \mathfrak{A}_n, \ldots$ be an infinite sequence of relational systems and φ an elementary sentence. If for each natural number n $\overset{n}{\underset{i=1}{\mathfrak{P}}} \mathfrak{A}_i$ satisfies φ, then the infinite product $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\mathfrak{P}}} \mathfrak{A}_i$ satisfies φ. A related result is: Theorem II. If for each finite $J \subseteqq I$, $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_i/\ i \in J)$ satisfies φ, then $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_i/i \in I)$ satisfies φ. An immediate corollary is: Theorem III. If the class of models of a set of elementary sentences is closed under finite direct multiplication, then it is closed under arbitrary direct multiplication.

Two further related theorems concern the decision problem. Theorem IV.

If the theory of each of the relational systems $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ is decidable, so is the theory of $\underset{i=1}{\overset{n}{\mathfrak{P}}} \mathfrak{A}_i$. (This is a result established by S. Feferman, and is a particular case of a much more general theorem he has obtained concerning not only direct products, but also various other kinds of products of relational systems, e. g., ordered products.) Theorem V. If the theory of a class K of relational systems is decidable, so is the theory of the system $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}^{\aleph_0}/\mathfrak{A} \in K)$ (where $\mathfrak{A}^{\aleph_0}$ is the direct product of $\aleph_0$ replicas of $\mathfrak{A}$). The method applied in establishing these results (with the exception of IV) is an extension of the method used by Mostowski (J. Symbolic Logic vol. 17 (1952), pp. 1—31) to obtain the particular cases of I, II, IV, and V in which all the relational systems involved are identical, and of IV in which the class K consists of one element. V, as opposed to I, II, and III, is also true for so-called weak direct products, provided the distinguished element is definable by an elementary formula — again generalizing a result of Mostowski, loc. cit.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA,
BERKELEY, CALIFORNIA.

SECTION VII

PHILOSOPHY, HISTORY AND EDUCATION

DIE VEKTORRECHNUNG IM DEUTSCHEN SCHULUNTERRICHT

HERMANN ATHEN

Seit dem Ende des zweiten Weltkrieges spiegeln die Tagungsvorträge, die Zeitschriftenveröffentlichungen und spezielle Buchpublikationen eine lebhafter werdende Diskussion wieder darüber, ob die Vektorrechnung in den höheren Schulunterricht übernommen werden soll. Trotz sehr gegensätzlicher Auffassungen sind diese Forderungen auch in die Lehrpläne der meisten Bundesländer übergegangen, indem in ihnen die fakultative Behandlung der Vektoren freigestellt wird. Dementsprechend enthalten auch fast alle in den Nachkriegsjahren erschienenen Schulbücher Abschnitte über die Vektorrechnung, ohne sie allerdings wirklich organisch einzubauen. — Eine wirkliche Lösung dieser Frage scheint noch fern zu sein. Die Gegner sehen hierin ein neues Stoffgebiet, welches im Vergleich zum möglichen Gewinn zu hohe Anforderungen an die Abstraktionsfähigkeit der Schüler stelle. Die Befürworter weisen dem Vektor eine ähnliche Rolle in der Fusion der mathematischen Teilgebiete in der Schule zu, wie sie seit langem der Funktionsbegriff leistet. — Es ist also nachzuforschen, in welchen mathematischen Schuldisziplinen und bei welchen Lehrsätzen das Wesen und die Vorteile der Vektoren am überzeugendsten zum Ausdruck kommen. Weiterhin ist die häufig zu Unrecht als Zentralfrage diskutierte Alternative zu prüfen, ob die Vektorrechnung von der Mathematik oder Physik auszugehen habe. Über den Beginn der Vektorrechnung herrscht insofern Übereinstimmung, dass sie *so* früh einsetzen muss, dass Geometrie und Physik ihren Nutzen davon haben; andererseits muss sie auch *sehr* früh, d.h. propädeutisch aufgenommen werden, damit alle Teilgebiete der Schulmathematik fruchtbringend durchdrungen werden können: Nicht Unterricht in der Vektorrechnung, sodern Vektorrechnung im Unterricht! Im Zusammenhang hiermit ist zu prüfen, wie die besonderen Teilstrukturen der Vektorrechnung den der jeweiligen Altersstufe eigenen Denkformen angepasst werden können, und ferner, wie sich eine über die Jahre eines ganzen Schülerjahrganges aufgelockerte Darbietung gestaltet. — Vektorrechnung in der Schule ist kein mathematisch-sachliches Problem, sondern eine methodisch-didaktische und psychologische Frage!

ELMSHOM, KIRCHENSTR. 7.

ANSCHAULICHKEIT UND STRENGE IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT DER DEUTSCHEN OBERSCHULE

ARNOLD BAUR

Die Lehrpläne aller Länder der Deutschen Bundesrepublik fordern im mathematischen Unterricht sowohl die Pflege anschaulicher als auch die Heranziehung strenger Methoden. In der Tat hat der mathematische Unterricht ein doppeltes Gesicht; der Lehrer hat zwei erzieherische Aufgaben zu lösen. Zur geistigen Ausbildung gehört beides: Der junge Mensch muss mit mehr intuitiv-anschaulichen Methoden vertraut gemacht werden; aber auch die mehr abstrakt-logische Denkkraft muss geübt werden.

In den letzten Jahrzehnten haben die Methoden des mathematischen Unterrichts an unseren Oberschulen eine tiefgreifende Wandlung erfahren. Unter dem machtvollen Impuls von Felix Klein hat diese Entwickelung eine im ganzen mehr anschaulich-geometrische Richtung eingeschlagen. In den letzten Jahren wurden aber auch Versuche unternommen, die Strenge der Methoden zo fördern mit dem Ziel, eine Vertiefung der Behandlung der Unterrichtsstoffe anzubahnen.

Von unserem Gesichtspunkt her interessiert vor allem die Tatsache, dass ein und derselbe Vorgang „anschaulich" oder „abstrakt" sein kann. Die Einführung der Zahlengeraden zur Verdeutlichung gewisser arithmetischer Tatsachen kann etwa im vierzehnten Lebensjahr anschaulich sein, während dasselbe Hilsmittel für einen Zehnjährigen eine starke Abstraktion bildet. Die Worte „Anschaulichkeit" und „Strenge" bedeuten keine eindeutige präzise Sinngebung a priori. Sie kennzeichnen vielmehr eine Lage von einem gewissen relativen Standpunkt her. Der Lehrer muss jedoch in der jeweiligen Lage wissen, ob seine Methode bezüglich der das Objekt bildenden Schüler einen mehr anschaulichen oder abstrakten Charakter hat.

Der Funktionsbegriff gestattet es, anschauliches Denken für die strengere Behandlung einzelner Gebiete nutzbar zu machen. Beide Methoden ergänzen sich aufs glücklichste; sie führen zu einer inneren Harmonie, wie sie etwa aus Platons Ideenlehre bekannt ist. So kann die Einführung in die Lehre von den Grenzwerten oder die Lehre von den Extremwerten oder auch die Anbahnung des Begriffs der reellen Zahl durch Heranziehung geometrischer Vorstellungen dem Schüler so nahe gebracht werden, dass das Ziel erreicht wird und gleichzeitig die Sauberkeit der Begründungen gesteigert wird. Aehnliches gilt für viele andere Gebiete.

Die Zusammenfassung abstrakt-logischer Zusammenhänge in einer „Anschauung" auf gleichsam höherer Stufe bedeutet ein Ziel für die mathematische Unterrichtsführung. Dieses Ziel bedeutet aber die Forderung, überall, wo es möglich erscheint, die logisch-abstrakten Stoffe und die anschaulich-intuitiven Methoden innig mit einander zu verflechten.

LÜBECK, PLOENNIESSTR. 24.

DER MATHEMATISCHE UNTERRICHT DER 16-21-JÄHRIGEN JUGEND IN DER BUNDESREPUBLIK DEUTSCHLAND

HEINRICH ADOLPH LOUIS BEHNKE

Der Bericht ist von einer Kommission von etwa 25 Vertretern der verschiedenen deutschen Schulgattungen aufgestellt worden. Er gibt also ein Bild von der unterrichtlichen Leistung im mathematischen Unterricht aller deutschen Schulen. Der Vortrag soll nur auf allgemeine Gesichtspunkte und Probleme des Berichtes hinweisen.

HÜFFERSTR. 60,
MÜNSTER/WESTFALEN.

THE MATHEMATICAL LABORATORY IN THE GRAMMAR SCHOOL AND THE TECHNICAL COLLEGE

MARCUS BRIDGER

The traditional equipment of a mathematical laboratory is the apparatus of elementary mechanics. Such a laboratory is very often the responsibility of the Physics Department.

A new situation has developed due to changes in industry, commerce and Government institutes. All methods of computation are being mechanized and the mathematical activities of educational institutes are affected by this trend.

Instead of applied mathematics referring only to mechanics, the phrase now covers numerical methods and statistics. The latter normally includes frequency distributions; the nature and calculation of averages and measures of dispersion; correlation; the Binomial, Poisson and Normal distributions; elements of probability; sampling methods and tests of significance. In technical colleges experimental design and quality control are dealt with.

Numerical methods include finite differences, the practical solution of equations, numerical integration and the method of least squares. In technical colleges matrix methods are used for the solution of linear simultaneous equations.

The minimum equipment for the laboratory is the desk calculating machine and a good selection of mathematical tables. Other equipment would depend on local bias. Thus the grammar school, with a statistics course, would find good use for an adding-printing machine. The technical college would provide an annexe containing a fully automatic electric desk machine for the use of advanced students. The engineering educational institute would equip itself for analogue computing. Not only the different types of slide rules, but the planimeter, harmonic analyzer and even the small differential analyzer are possibilities.

22, KINGSWAY CRESCENT, N. HARROW,
MIDDLESEX, ENGLAND

DIDACTICAL RESEARCH IN THE FIELD OF MATHEMATICS AT THE INSTITUTE OF EDUCATION OF THE UNIVERSITY OF UTRECHT

LUCAS NICOLAAS HENDRIK BUNT

During recent years a number of investigations into the teaching of mathematics in Dutch secondary schools have been in progress at the Institute of Education of the University of Utrecht.

Two of these were concerned with the general problem of the subject-matter of secondary mathematics, and were in particular intended to ascertain whether or not there is an overburdening of the mathematical curriculum.

In the first investigation 233 teachers of mathematics replied to a questionnaire of ca 500 items covering nearly the whole field of school mathematics. As a result it was shown that many teachers were of the opinion that a large percentage of the desirable subjects could not be treated because of lack of time.

In the second investigation the time, required to deal adequately with certain specified subjects was experimentally checked by 48 mathematics teachers. It was shown that many more than the allowed number of lessons are needed.

The progress, achieved by the students as a result of these lessons, was examined by means of examination-papers of the conventional, non-objective type. In spite of the special care and the extra lessons, given to the preparation of the material, the papers showed, that in many cases the results were unsatisfactory. The questions of the examination-papers were evaluated as a testing means.

Another investigation was concerned with the special problem of trying out new subject-matter for mathematics in the Humanistic Gymnasium. It was conducted in five schools of this type. The greater part of the time in the eleventh and twelfth grade, generally spent on teaching solid geometry, was devoted to the teaching of history of mathematics, whereas in the same two forms most of the time of the algebra lessons was taken up by teaching elementary probability and statistics. The text on history of mathematics and that on probability and statistics were prepared by the referee in co-operation with the mathematics teachers of the five schools. Students and teachers showed considerable interest in this subject-matter and the results on the final examination turned out to be very gratifying.

BIBLIOGRAPHY.

[1] L. N. H. BUNT, De leerstof van ons wiskunde-onderwijs. Een onderzoek naar de opvattingen en gebruiken dienaangaande. Acta Paedagogica Ultrajectina I. Wolters, Groningen, 1949.

[2] L. N. H. BUNT, Een onderzoek naar de overlading van het programma voor de wiskunde bij het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs. Acta Paedagogica Ultrajectina V, Noordhoff, Groningen, 1953.

TRANS 14, UTRECHT.

LES NOTIONS DE STRUCTURE EN MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

J. L. P. CHEVRIER

Le programme de la classe de mathématiques élémentaires, qui, en France, couronne les études du second degré orientées vers les Sciences, permet de définir quelques structures algébriques, groupe, corps et de préciser aux yeux des élèves l'unité de la mathématique, en dépit de la diversité des titres: arithmétique, géométrie, algèbre, etc.

L'addition définie sur l'ensemble des entiers naturels fournit un exemple de lois de composition et de leurs propriétés: réalisation d'une structure fermée, associativité, (commutativité), existence d'un élément neutre. Une interprétation graphique simple conduit à la notion d'éléments symétriques, ici aux entiers négatifs.

Les propriétés caractérisent la structure de groupe (abéliers) que l'on retrouve pour la multiplication en introduisant les éléments symétriques pour cette loi, les inverses.

L'étude des déplacements et transformations en géométrie, celle des permutations conduisent à la même structure.

Les relations d'égalité, de congruences entre entiers, celle de parallélisme entre droites mènent aux relations et classes d'équivalence ainsi qu'à leur algèbre.

L'association de la loi additive et de la loi multiplicative conduit aux corps dont les polynômes donnent un autre exemple.

Les sciences naturelles (cristaux, plantes), l'étude des arts (sculpture, tapisserie, musique) montrent l'importance historique de la structure de groupe.

Il est alors possible de définir le groupe abstrait.

MATHEMATIK AN GYMNASIEN (HÖHEREN SCHULEN)

HANS CRAMER

Mathematik an den Höheren Schulen kann nicht „Gebrauchsmathematik" sein, weil dies dem Wesen der Mathematik und der Aufgabe der Höheren Schulen widerspräche; der arithmetische wie der geometrische Teil des Unterrichts müssen deshalb „mathematisiert" werden.

Die Grundschule formalisiert verfrüht den Zahlbegriff. Die Reihe der natürlichen Zahlen samt ihrer dekadischen Darstellung ist also neu aufzubauen, die Rechengesetze sind zu durchleuchten, ihre ständige Anwendung beim dekadischen Rechnen zu erweisen, die gebrochenen Zahlen sinnvoll zu zugesellen, das Rechnen mit ihnen von Formalismen freizuhalten.

Im Algebraunterricht sind Addition und Multiplikation im natürlichen Zahlbereich rekursiv zu erklären, ihre Gesetze durch vollständige Induktion zu ermitteln, bei den Erweiterungen zum Rationalbereich die notwendigen logischen Überlegungen sorgfältigst vorzunehmen; die Irrationalzahlen sind als Grenzzahlen einzuführen und das Rechnen mit ihnen ist genau zu definieren, die Fortdauer der im Rationalbereich erwiesenen Gesetze einwandfrei zu sichern.

Die Differentialrechnung beginnt am besten mit der Ableitung der ganzrationalen Funktionen (Binomialsatz!) und muß alle Grenzübergänge exakt durchführen. Die Integralrechnung sollte vom bestimmten Integral ausgehen und zunächst das Integral der natürlichen Potenzfunktion direkt berechnen. Das Nadelproblem mit Wahrscheinlichkeitsberechnung und statistischer Wahrscheinlichkeitsermittlung kann den Schluß bilden.

Die Planimetrie sollte gleich anfangs das Versagen der Anschauung gegenüber dem Parallelen-Axiom und gegenüber den beiden konkurrierenden Annahmen aufzeigen. In der Flächenlehre wäre Flächenvergleich und Flächenmessung streng zu trennen, der Größenvergleich bei Polygonalflächen auf den Begriff der Zerlegungsgleichheit aufzubauen, um von der Unterscheidung zwischen dem kommensurablen und inkommensurablen Fall freizuwerden, eine davon gleichfalls unabhängige Ähnlichkeitslehre anzuschließen.

Daß der Größenvergleich prismatischer Räume noch auf Zerlegungsgleichheit gegründet werden kann, der Vergleich pyramidaler Räume aber den Begriff Grenzgleichheit fordert, muß klar werden.

Die Messung von Kurven und krummlinig begrenzten Flächen wie Räumen (Kreis, Kugel) verlangt den Ansatz je einer monoton zunehmenden und monoton abnehmenden Zahlenfolge mit gemeinsamer Grenzzahl und gibt eine vorzügliche Vorbereitung der Integralrechnung. Die Behandlung der regulären Körper gestattet die Vermittlung des Gruppenbegriffs. Die Trigonometrie füllt Lücken in der rechnerischen Beherrschung von Dreieck und Dreikant, die durch ebene und räumliche Geometrie belassen wurden.

Die analytische Geometrie zeigt die arithmetischen Äquivalente für die geometrischen Grundgebilde und Grundoperationen. Die darstellende Geometrie offenbart die Ersetzbarkeit der Raumanschauung durch Konstruktionen an ebenen Bildern, beim vierdimensionalen Raum durch das Studium von Projektionen in den dreidimensionalen Raum.

Nur wenn sie im Geiste Platons gelehrt wird, kann Mathematik ihren unersetzlichen Beitrag zur philosophischen Bildung liefern.

SCHWABACH (BAYERN), BADSTR. 2A.

STRUKTURSTUFEN DER SCHULMATHEMATIK IN ANPASSUNG AN ALTERSTYPISCHE AUFFASSUNGSWEISEN

FRIEDRICH DRENCKHAHN

Unter Struktur des Mathematischen wird die Gesetzmässigkeit und Aufbaugliederung der mathematischen Sinnzusammenhänge verstanden. Sie ist, wie die Geschichte der Mathematik ausweist, nichts Konstantes. Es erscheint demzufolge berechtigt, in diesem Bereich von Strukturformen der Mathematik zu sprechen, die sich in der Eigenart der Systematik, der Begriffe und der Beweise wie in ihrem Umfang unterscheiden. Wird das Verhältnis der anschaulichen und gedanklichen Anteile in den Begriffen und Herleitungen in der Abgrenzung leitend gemacht, so ergeben sich im Rohen drei Strukturstufen, die bezüglich der Gegenständlichkeit als realistisch, intuitiv und begrifflich, und bezüglich der Verfahrensweisen als experimentell-induktiv intuitiv und formal-logisch bezeichnet werden. (Intuitiv soll besagen, dass anschauliche und gedankliche Elemente in ungefähr gleichem Ausmasse auftreten.) In diesem Sinne soll über den Bereich des Geschichtlichen hinausgehend von Strukturstufen der Schulmathematik gesprochen werden.

Es wird unterstellt, dass der jeweiligen Struktur des Objektiven eine Geistesstruktur, oder anders ausgedrückt: Strukturierungsfähigkeit des erkennenden Subjekts, entspricht, die sich in einem charakteristischen Bilden und Auffassen von Begriffen, Verhalten und Zusammenhängen äussert. Nach den Ergebnissen der Psychologie dürfen für bestimmte Lebensjahre in der individuellen Entwicklung als Durchschnitt zu wertende charakteristische Gesamthaltungen und auch Auffassungsweisen angenommen werden. Die alterstypischen Strukturierungsfähigkeiten können ohne Pressung mit den obigen objektiven Strukturstufen in Verbindung gebracht werden. Im Allgemeinen entspricht die Auffassungsweise vom 6. bis zum 12. (13.) Lebensjahr der anschaulichen Strukturstufe, vom 12. (13.) bis 15. (16.) Lebensjahr der intuitiven und die der folgenden Lebensjahre der begrifflichen Stufe.

Der mathematische Stoff der drei Altersstufen unterscheidet sich im Strukturrellen: also hinsichtlich der eingangs angegebenen Merkmale. Er kann nicht ohne weiteres von oben her durch Vereinfachung, Veranschaulichung, kurz Elementarisierung der in wissenschaftlicher Form vorliegenden Mathematik gefunden werden. Vielmehr erwächst der Didaktik die Aufgabe, von sich aus die Strukturstufen in extenso zu entwickeln, und zwar in enger Anlehnung an die gewordene Mathematik und unter Einfügung von neuzeitlichen Strukturelementen, sofern dies zwanglos geschehen kann.

Cf. die Aufsätze des Verf.: Zur Didaktik der Mathematik und ihrer Wissenschaftsmethodik. MNU **5** (1952/53). Von der Anpassung des mathematischen Unterrichtsstoffes an die geistige Auffassungsfähigkeit des Schülers. Die Sammlung **7** (1952). Sull'adattamento della Matematica alla capacità comprensiva dello scolaro. Scoula secondaria **1** (1952); De l'adaptation de l'enseignement des mathématiques à la réceptivité mentale de l'élève. L'enseignement mathématique **39** (1942—1950).

FLENSBURG-MÜRWIK,
MÜRWIKERSTR. 192.

HENRI BROCARD AND THE GEOMETRY OF THE TRIANGLE

LAURA GUGGENBUHL

In 1875, Henri Brocard, French army officer stationed at Algiers, submitted the following problem to Nouvelles Annales de Mathematiques: — Find a point O within a triangle ABC such that the angles OAB, OBC, and OCA are equal.

Soon after the problem was proposed many solutions were published, and gradually a unit of geometric theory had developed from this source. The most picturesque solution is one in which circles are drawn as follows: — circles tangent to the side AB of triangle ABC, at the vertex A, and at the vertex B respectively, and passing through the vertex C; and four other similar circles. Three of these six circles are concurrent at a point O, and the other three at a point O'. The points O and O' satisfy the conditions of the problem, and are now called the Brocard points of the triangle.

Henri Brocard was born in 1845 at Vignot in France. After graduation from the École Polytechnique, he became a member of the Engineers of the French Army. He organized and taught courses in physics and chemistry at different military colleges in France; he was a member of many scientific and mathematical societies; and he gave much of his time to research in meteorology and mathematics. For several years of his army service he was assigned to North Africa.

During the latter part of his life he was Librarian of the Society of Letters, Sciences and Arts of Bar-le-Duc, the town in which he lived after his retirement from the army. At his retirement he was a lieutenant colonel, and an Officer in the Legion of Honor. He died in 1922, and was buried at Vignot.

His most colorful publication was Notes de Bibliographie des Courbes Géométriques, which was lithographed in the printscript of the author, and later published in printed form under the joint authorship of H. Brocard and T. Lemoyne.

During his lifetime Brocard always attended the meetings of the International Congress of Mathematicians, and it is fitting that a tribute be paid to his memory at such a gathering.

2685 Grand Concourse
New York 68, New York; U.S.A.

GEOMETRIE UND WIRKLICHKEIT

Hans Henrik Hansen

Die Geometrie hat ihren Ursprung in der Erfahrung und nimmt ihren Vorstellungsinhalt aus der Wirklichkeit. Die Grundbegriffe der Euklidischen Geometrie sind Idealbilder von einfachen Objekten der Wirklichkeit, gezeichnete Figuren mitgerechnet. Die Geometrie kann als eine Realwissenschaft betrachtet werden. Das Lehrgebäude Euklids unterscheidet sich nicht von anderen, späteren Lehrgebäuden wie die Mechanik. Die Begriffe werden idealisiert, und die Sätze werden in deduktive Systeme geordnet. Die Idealisierung der Grundbegriffe ist keine für die Geometrie besondere Eigentümlichkeit. Mit jeder Begriffsbildung folgt eine Idealisierung, und die Geometrie wird dadurch nicht mehr von der Wirklichkeit entfernt, als es für die elektrodynamische Gesetze Maxwells der Fall ist. Die Ordnung der geometrischen

Sätze in ein deduktives System ist eine logische Frage, die nichts mit dem Verhältnis der Geometrie zur Wirklichkeit zu tun hat. Deshalb ist die Geometrie bei Hilbert eigentlich ein leeres System. Es handelt sich hier nur um die logische Struktur des geometrischen Lehrgebäudes, von jedem Vorstellungsinhalt ganz entblösst, sowohl in Euklidischer wie in Nicht-Euklidischer Geometrie. Ein solches leeres System verdient kaum den Namen Geometrie, besonders nicht wenn man beachtet, dass es andere, sicher nicht geometrische Interpretationsmöglichkeiten gibt. Vom logischen Gesichtspunkt aus sind Euklidische und Nicht-Euklidische Geometrien gleichberechtigt und ihre Axiome blosse Konventionen. Wie schon bemerkt, ist das letzte nicht der Fall mit der eigentlichen Euklidischen Geometrie, deren Grundlage in natürlicher Weise aus der Wirklichkeit entstanden sind. In den Nicht-Euklidischen Geometrien benutzt man dieselben Namen wie in der Euklidischen. Es ist aber nicht sicher, dass man auch den Vorstellungsinhalt mit den Namen übertragen kann. Die Nicht-Vorstellbarkeit, die man den Nicht-Euklidischen Geometrien angehaftet hat, hat ihren Grund darin, dass man eben den Vorstellungsinhalt der Grundbegriffe vom Euklidischen übertragen hat. Bekanntlich ist es gelungen, mehrere geometrische Modelle der Nicht-Euklidischen Gedankensysteme zu schaffen, und auf der anderen Seite hat man auch geometrische Modelle des Euklidischen Systems, in welchen die Gerade nicht Gerade in üblicher Weise sind. Zu guter letzt kann man auch die Euklidische Geometrie als ein Modell eines abstrakten Gedankensystems auffassen, und erkenntnistheoretisch gesehen sind alle diese Modelle gleichberechtigt. Das alte Euklidische Modell ist aber das einfachste. — Bei diesen Betrachtungen ist weder auf Geometrie im kleinen und im grossen noch auf Geometrie in Verbindung mit Mechanik Rücksicht genommen.

TEGLSTRUPVEJ 2 A,
COPENHAGEN Ö.

WERDEN UND SICHERHEIT MATHEMATISCHER ERKENNTNIS

ERICH KAMKE

1. Die Grundlage der mathematischen und jeder wissenschaftlichen Beweisführung bilden nicht feste Denk- oder Schlußformen, die a priori gegeben sind, sondern die Denkformen, Schlüsse usw. haben sich aus primitivsten Geistesfunktionen entwickelt; die Entwicklung ist auch heute noch nicht abgeschlossen.

2. Die Allgemeingültigkeit, welche Denk- und Schlußformen heute zu haben scheinen, erklärt sich aus den langen Zeiträumen, in denen sie durch Erfahrung gewonnen, geformt und kontrolliert worden sind.

3. Auch die Mathematik hat genau die Sicherheit und Allgemeingültigkeit, die durch einen solchen Prozeß immer währender, sorgfältiger und vorurteilsloser Kontrolle gewährleistet ist.

4. Die Mathematik ist deswegen eine wissenschaftliche Disziplin mit einer besonders großen Zuverlässigkeit, weil in ihr die Kontrolle der Denkprozesse die schärfste ist, weil ferner in ihr bei der Subtilität und Fülle der Schlußketten Widersprüche am ehesten sichtbar würden und weil mit ihrer Hilfe sehr weitreichende Prognosen auch auf anderen Gebieten (Astronomie, Physik) möglich sind, deren Wahrheit geprüft werden kann.

Ausführlicherer Bericht im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 57 (1954).

TÜBINGEN (GERMANY),
FRISCHLINSTR. 29.

LA THÉORIE DE PLATON SUR L'UN ET LA DYADE INDÉFINIE ET SES TRACES DANS LA MATHÉMATIQUE GRECQUE

ŽELJKO MARKOVIĆ

La théorie de Platon sur l'Un et la Dyade indéfinie dont une forme se trouve dans l'exposé du *Philèbe* sur la Limite (péras) et l'Illimité ('apeïron) devait avoir une répercussion profonde puisque ses traits essentiels se retrouvent dans la philosophie mathématique grecque postérieure. Les expressions du *Philèbe* en particulier concernant le comportement du couple d'opposés Limite-Illimité (p.e. *προχωρεῖ . . . οὐ μένει* pour l'Illimité, *ἔστη καὶ προϊὸν ἐπαύσατο* pour la Limite) figurent parmi les termes techniques des philosophes-mathématiciens postérieurs.

L'exemple de la constitution de l'angle droit est très instructif à ce sujet. De la Dyade indéfinie des angles aigus et obtus, formés par une démi-droite variable érigée en un point d'une droite fixe ($10^{\text{ième}}$ définition d'Euclide I), l'angle droit est constitué par l'action de la Limite à laquelle il doit son caractère d'invariabilité et surtout celui d'unicité. Le $4^{\text{ième}}$ postulat d'Euclide sur l'égalité des angles droits apparaît comme le résidu de cette théorie.

Héron dans ses *Définitions* partage la même vue quant à la nature de l'angle droit; sa classification des triangles introduit la terminologie du *Philèbe.* Théon de Smyrne dans son *Exposition* suit la même ligne, surtout quant à la signification du $4^{\text{ième}}$ postulat. Nicomaque de Gérasa s'inspire de la conception platonicienne dans son *Introduction;* sa terminologie est platonicienne ou plutôt pythagoricienne d'après lui, mais il applique aussi la théorie de la seconde métrétique de Platon qui entre dans le même ordre d'idées. Mais c'est surtout dans le *Commentaire* de Proclus du I[er] livre d'Euclide qu'on trouve une théorie de philosophie mathématique élaborée à partir du couple Limite-Illimité et cela tant sous le rapport de la conception générale de la genèse et la nature des êtres mathématiques que sous le rapport de leurs propriétés particulières (p.e. de celle de l'angle droit). Les termes dont se sert Proclus en parlant de la tension (épitasis) et du relâchement (anésis) entraient, d'après Porphyre, dans le même cadre; ils se retrouvent plus tard dans la pensée médiévale.

ZAGREB, YUGOSLAVIA,
GREGORIJANČEVA 38

TRENDS IN THE CONTENT OF HIGH SCHOOL MATHEMATICS IN THE UNITED STATES

MYRON F. ROSSKOPF

During the nineteenth century the teaching of mathematics in the high schools of the United States was greatly influenced by German practices, and high school textbooks followed their English counterparts. However, the organization of the mathematics courses in high schools developed along quite independent lines. The separation of organization and methods of teaching from European influences has been particularly sharp since 1900.

The educational program of the high schools developed in the twentieth century under the influence of researches in educational psychology, the growth of the organization of labor in the United States, and the impact of John Dewey's philosophy of education. Each of these three disparate influences had its effect on the schools. Committees representative of colleges, universities, and secondary schools studied the mathematics program of the high schools. The reports of these committees recommended a grade placement of topics. Since teacher training institutions and textbook authors followed the recommendations of the committees, there was fastened on the high schools a rigid sequence of topics in mathematics.

At present a mild revolt is taking place among United States teachers of mathematics. On the one hand, teachers are dissatisfied with the traditional organization of the present mathematics program. On the other hand, there are a few leaders who would like to replace the classical approach to certain topics in mathematics by a contemporary approach to these topics; this procedure implies a complete reorganization of the mathematics program of the secondary school. Less emphasis is being placed on developing mathematical skills; more emphasis than earlier is being placed on teaching for meaning and understanding of mathematical processes.

TEACHERS COLLEGE,
COLUMBIA UNIVERSITY, U.S.A.

PHILOSOPHISCHE VERTIEFUNG DES MATHEMATISCHEN UNTERRICHTS

HEINRICH RÜPING

Einleitend soll in dem Referat nach einer kurzen Schilderung der Stellung der Philosophie an den höheren Schulen der Bundesrepublik Deutschland die Notwendigkeit einer philosophischen Vertiefung des mathematischen Unterrichts begründet werden.

Die Aufteilung des Lehrstoffes in die vielen Einzelfächer bringt die Gefahr der Zersplitterung mit sich. Um dieser Gefahr, die für höhere Schule und Hochschule in gleicher Weise besteht, zu begegnen, wird in immer stärkerem Masse die Forderung nach einem Studium generale erhoben. Eins der Mittel zur Verwirklichung der Ziele, die in einem Studium generale erstrebt werden, ist die Zusammenfassung der Einzelerkenntnisse zu einer geistigen Einheit durch eine Betrachtung des Fachwissens unter philosophischen Gesichtspunkten.

Im Hauptteil des Referates sollen auf Grund von Erfahrungen im mathematischen Unterricht der Prima Wege zur praktischen Durchführung einer solchen philosophischen Vertiefung aufgewiesen werden. Der mathematische Unterricht wird einer philosophischen Vertiefung bereits dann Vorarbeit leisten, wenn er an Stelle des häufig recht ausgedehnten Aufgabenbetriebes die Betonung allgemeiner Zusammenhänge und grosser Leitgedanken setzt. Darüber hinaus sollte er als eigentliche Ziele einer philosophischen Vertiefung anstreben: Klarheit über die logische Struktur der Schulmathematik, d.h. Kenntnis der Methoden ihrer Begriffsbildung und Beweisführung, ein erstes Verständnis für die erkenntnistheoretische Frage nach dem Wesen der Mathematik und Einsicht in die Grenzen des mathematischen Erkennens. Auf diese Weise ist es möglich, den Schülern eine erste Vorstellung von der Einheit der Einzelwissenschaften und von der Stellung, die der Mathematik unter ihnen zukommt, zu vermitteln. Als besonders fruchtbar im Sinne eines Studium generale hat sich dabei die Berücksichtigung der historischen Entwicklung der Probleme erwiesen.

BIELEFELD, BANDELSTRASS 3.

ARBEITSUNTERRICHTLICHE METHODEN IN DER MATHEMATIK DER HÖHEREN SCHULEN

Paul Sengenhorst

I. *Geschichtliche Bemerkungen.*

Die Jahre zwischen 1918 und 1933 bedeuten für das deutsche Schulwesen eine Periode starker innerer Bewegung. Dem freiheitlichen Denken der Zeit entspricht es, daß sich der Arbeitsunterricht immer entschiedener durchsetzt. Der Nationalsozialismus, der die Ziele der Erziehung und des Unterrichts von der Politik (*seiner* Politik) her bestimmte, brachte einen argen Rückschlag. Nach dem Zusammenbruch von 1945 scheint es zunächst vielen Lehrern vordringlich, die in den letzten Kriegsjahren entstandenen Wissenslücken durch straffen Lernbetrieb auszufüllen, aber dann wird immer nachdrücklicher die Forderung erhoben, an die große Entwicklung der Jahre nach dem ersten Weltkrieg wieder anzuknüpfen.

II. *Begriffliche Abgrenzung.*

Als wesentlich für den Arbeitsunterricht sehen wir nicht die manuelle Betätigung des Schülers an, es handelt sich vielmehr darum, seine wertvollsten geistigen Kräfte — Aktivität, selbständiges Urteil, Erfindungsgabe — ins Spiel zu bringen. Wir nennen also Arbeitsunterricht eine Führung des Unterrichts, die nicht nur die Entwicklung dieser Kräfte *zum Ziel hat* (dies behauptet ja jede Unterrichtsmethode von sich), *sondern diese Kräfte in jeder Unterrichtsstunde, ja bei jedem Unterrichtsschritt anspricht, beansprucht, einsetzt.*

III. *Arbeitsunterrichtliche Methoden in der Mathematik.*

Die Mathematik ist für die Verwendung arbeitsunterrichtlicher Methoden besonders geeignet, weil hier der Schüler — grundsätzlich — alle Ergebnisse selbst finden kann. Es gibt für den Arbeitsunterricht keine starre Schablone, die Durchführung wechselt je nach dem Alter, der Vorbildung, der Begabung der Schüler sowie nach der Art der Probleme. Wir haben den Arbeitsunterricht abgegrenzt von manueller Betätigung, aber dennoch kann sich auch im Rahmen manueller Tätigkeit echter Arbeitsunterricht entfalten, wenn nämlich die genannten geistigen Kräfte dabei angesprochen werden. Wir nennen den Modellbau, die zeichnerischen Methoden, das mathematische Experiment, die Vermessungsübungen. Wichtiger Grundsatz ist das Ausgehen von der Anwendung (es braucht nicht unbedingt eine „praktische" Anwendung zu sein), von der Aufgabe. Auch wenn ein *Lehrsatz* das Ziel ist, soll der Lehrer eine *Aufgabe* ersinnen, deren Lösung auf den Lehrsatz führt. Ferner wird er ein schweres Problem in Teilprobleme zerlegen. Bei einer umfangreichen Aufgabe empfiehlt sich oft die Aufteilung auf Schüler oder Schülergruppen, wobei man auf Begabungsrichtungen Rücksicht nehmen kann. Förderlich ist die „Stillbeschäftigung": Nach Mitteilung einer Aufgabe versucht jeder Schüler etwa 10 Minuten lang, in intensiver geistiger Arbeit möglichst weit zu kommen. Ist eine Klasse so an Selbständigkeit gewöhnt, so erwerben die Schüler allmählich einen Schatz von Methoden wissenschaftlicher Arbeit.

IV. *Abwehr von Einwänden.*

Gegen den Arbeitsunterricht wird eingewandt, er überschätze die Kräfte der Schüler. Aber durch die unter III empfohlene Problemzerlegung läßt sich der Schwierigkeitsgrad stets in angemessener Weise vermindern. Der weitere Einwand, der „Lernunterricht" führe *schneller* zum „Ziele" (womit meist die „Erledigung" eines bestimmten „Stoffes" oder „Pensums" gemeint ist), hat wenig Gewicht. Wird der Arbeitsunterricht frühzeitig in besonnener Weise *von allen Lehrern* durchgeführt, so kommt man tatsächlich mit ihm *weiter* — und vor allem: Man erreicht mit ihm *wertvollere Ziele*! Man darf die Überzeugung aussprechen, daß die arbeitsunterrichtliche Methode das einzige Unterrichtsverfahren ist, das der Würde des Menschen als eines selbständig zu denken befähigten Wesens Rechnung trägt.

(21A) MÜNSTER (DEUTSCHLAND).
NORDSTR. 2

INTUITIVE METHODEN IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

KLAUS WIGAND

Die Mathematik stellt sich uns als starres Gedankengerüst und als lebendiger Denkvorgang dar; sie bietet ineinander verwoben gleichermassen fertige Systeme und offene Probleme. Methoden des mathematischen Unterrichts haben beide Seiten der Wissenschaft zu berücksichtigen. Sie müssen den Stoff vermitteln und das Denken schulen. Und zwar tun sie dies mehr und mehr durch Gewinnung unmittelbarer Einsichten in Zusammenhänge und durch Weckung von Einfällen, von neuen Gedanken, im Schüler. Der Schüler soll mehr und mehr vom rezeptiven über das reproduktive Verhalten zu eigenem Sehen und produktivem Denken streben, während zugleich der Lehrer in demselben Masse als Mittler zurücktritt. Auch in einem weiteren Punkte soll die Einsicht unmittelbar sein: sie soll nicht über langatmige Gedankenreihen vermittelt werden, sondern möglichst nah greifbar erscheinen. Das einfache „Siehe!" wird das Zauberwort zum Tor der Erkenntnis. Und das Erlebnis des „Ich sehe!", die freudige Erregung des Geistes über eine gewonnene Einsicht oder einen glücklichen Einfall wirkt in hohem Grade den Schüler bildend.

Diese fruchtbare Intuition ist das Ziel der intuitiven Methoden. Die innere Anschauung vollzieht sich weitgehend über die äussere Anschauung. Die intuitiven Methoden nehmen weitgehend Bilder, Modelle, Erfahrungen und Beispiele zu Hilfe, sind jedoch nicht daran gebunden. Sie können heuristisch, arbeitsunterrichtlich, induktiv und experimentell vorgehen. Sie wollen im Grunde nicht allein den Verstand des Menschen bewegen, sondern auch sein Gemüt. Die intuitiven Methoden sollen aber auch in ihren Grenzen gesehen werden. Intuitionen lassen sich nicht erzwingen, es lassen sich ihnen nur die Wege bereiten, von der Sache her und vom Menschen her. Die fördernde Umstände und Kräfte verdienen unser besonderes Interesse. „Wie löse ich Probleme?" heisst die Frage, die sich mehr den Dingen zuwendet, die fachlich orientiert ist. Zu ihr gehört die andere Frage, die dem Menschen gilt, die die psychologische Seite hervorkehrt: „Wie werde ich sehend?"

Die zeitnahe Bedeutung der intuitiven Methoden ist offenbar: Die Mathematik hält als Kunst des Denkens und Findens (des Neudenkens und Erfindens) und im Sinne des griechischen Ursprungs des Wortes (tò máthema, die Wissenschaft) bei der Vielfalt der bestehenden und noch aufkeimenden Wissenschaften eine zentrale Stellung in einer Welt, „die immer mathematischer wird".

DAHLERDYK 137,
KREFELD, DEUTSCHLAND.

DAS PROJEKTIVE DENKEN IM MATHEMATISCHEN UNTERRICHT

KARL GEORG WOLFF

Die Umstellung des mathematischen Unterrichts von der Euklidischen Geometrie zur Bewegungs- und Abbildungsgeometrie hat sich in Deutschland in den letzten 80 Jahren vollzogen. Am schwersten war die Neuordnung des Anfangsunterrichtes und der daran anschliessenden Kreis und Ähnlichkeitslehre. Vorher war schon auf der Oberstufe aus der sogenannten synthetischen Geometrie und aus der Projektionslehre (darstellende Geometrie) das Verlangen nach der Abbildung als Grundlage des modernen geometrischen Denkens herausgestellt worden. Die Affinität und die Zentralkollineation traten als Verwandtschaftsbeziehungen und als Teil der Projektivität hervor.

Dazu kam das Erlanger Programm von Felix Klein als Ordnungsprinzip für die verschiedenen Abbildungen. Es hat vor allem das grosse Verdienst, dass unsere Schulmathematik nicht nur Bruchstücke der projektiven Geometrie enthält, sodass die grossen Gruppen Kongruenz, Ähnlichkeit, Affinität, Kollineation und Projektivität mit ihren Untergruppen — ausser Reziprozität — geradezu erschöpfend behandelt werden.

Düsseldorf-Oberkassel,
Leostr. 51.

TABLE OF CONTENTS

SECTION I: ALGEBRA AND THEORY OF NUMBERS

SECTION II: ANALYSIS

SECTION III: GEOMETRY AND TOPOLOGY

SECTION IV: PROBABILITY AND STATISTICS

SECTION V: MATHEMATICAL PHYSICS AND APPLIED MATHEMATICS

SECTION VI: LOGIC AND FOUNDATIONS

SECTION VII: PHILOSOPHY, HISTORY AND EDUCATION