

**“What is Mathematics?” —  
and why we should ask, where one  
should experience or learn that, and  
who can teach it**

**Günter M. Ziegler**



**ICME 2016, Hamburg**

# “What is Mathematics?”

- Descriptions
- Images
- Panoramas
- The Human Factor

## Teaching and learning “What is Mathematics?”

- Klein’s Double Discontinuity
- The Panorama Project
- An Images Project
- A Stories Project

“What is Mathematics?”

Descriptions

"A lucid representation of the fundamental concepts and methods of the whole field of mathematics."

—Albert Einstein

# What is Mathematics?

SECOND EDITION

An  
Elementary  
Approach to  
Ideas and  
Methods

INDIAN EDITION

Richard Courant and Herbert Robbins  
Revised by Ian Stewart

## WHAT IS MATHEMATICS?

Mathematics as an expression of the human mind reflects the active will, the contemplative reason, and the desire for aesthetic perfection. Its basic elements are logic and intuition, analysis and construction, generality and individuality. Though different traditions may emphasize different aspects, it is only the interplay of these antithetic forces and the struggle for their synthesis that constitute the life, usefulness, and supreme value of mathematical science.

Without doubt, all mathematical development has its psychological roots in more or less practical requirements. But once started under the pressure of necessary applications, it inevitably gains momentum in itself and transcends the confines of immediate utility. This trend from applied to theoretical science appears in ancient history as well as in many contributions to modern mathematics by engineers and physicists.

Fortunately, creative minds forget dogmatic philosophical beliefs whenever adherence to them would impede constructive achievement. For scholars and layman alike it is not philosophy but active experience in mathematics itself that alone can answer the question: What is mathematics?



what is mathematics



Alle

Bilder

Bücher

Videos

News

Mehr ▾

Suchoptionen

Ungefähr 78.200.000 Ergebnisse (0,47 Sekunden)

# mathematics

## Webdefinitionen

Mathematics oder Allah Mathematics, eigentlich Ronald M. Bean, ist ein US-amerikanischer Produzent und DJ der Musikrichtung Hip-Hop unter anderem für den Wu-Tang Clan. Mathematics tritt neben weiteren Projekten auch als Solokünstler auf und hat als solcher ebenfalls Plattenveröffentlichungen. ...  
<http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematics>

Feedback

## What is Mathematics? - Live Science

[www.livescience.com](http://www.livescience.com) › Tech ▾ [Diese Seite übersetzen](#)

15.08.2013 - Mathematics is the science that deals with the logic of shape, quantity and arrangement. Math is all around us, in everything we do. It is the ...

## What is Mathematics? | Fordham

[www.fordham.edu](http://www.fordham.edu) › ... › Mathematics › Resources ▾ [Diese Seite übersetzen](#)

The great misconception about mathematics -- and it stifles and thwarts more students than any other

# Mathematics



From Wikipedia, the free encyclopedia

*This article is about the study of topics, such as quantity and structure. For other uses, see [Mathematics \(disambiguation\)](#).*

*"Math" redirects here. For other uses, see [Math \(disambiguation\)](#).*

**Mathematics** (often called **math** or **maths** for short) is the study of topics such as quantity (numbers),<sup>[2]</sup> structure,<sup>[3]</sup> space,<sup>[2]</sup> and change.<sup>[4][5][6]</sup> There is a range of views among mathematicians and philosophers as to the exact scope and definition of mathematics.<sup>[7][8]</sup>

**Mathematicians** seek out **patterns**<sup>[9][10]</sup> and use them to formulate new **conjectures**. Mathematicians resolve the truth or falsity of conjectures by **mathematical proof**. When mathematical structures are good models of real phenomena, then mathematical reasoning can provide insight or predictions about nature. Through the use of **abstraction** and **logic**, mathematics developed from **counting**, **calculation**, **measurement**, and the systematic study of the **shapes** and **motions** of physical objects. Practical mathematics has been a human activity for as far back as **written records** exist. The research required to solve mathematical problems can take years or even centuries of sustained inquiry.

**Rigorous arguments** first appeared in **Greek mathematics**, most notably in **Euclid's *Elements***. Since the pioneering work of **Giuseppe Peano** (1858–1932), **David Hilbert** (1862–1943), and others on **axiomatic systems** in the late 19th century, it has become customary to view mathematical research as establishing **truth** by **rigorous deduction** from appropriately chosen **axioms** and **definitions**. Mathematics developed at a relatively slow pace until the **Renaissance**, when mathematical



Euclid, Greek mathematician, 3rd century BC, as imagined by Raphael in this detail from *The School of Athens*.<sup>[1]</sup>



# Mathematik

Die **Mathematik** (griechisch μαθηματικὴ τέχνη *mathēmatikḗ téchnē* ‚die Kunst des Lernens‘, ‚zum Lernen gehörig‘) ist eine **Wissenschaft**, welche aus der Untersuchung von **geometrischen Figuren** und dem **Rechnen** mit **Zahlen** entstand. Für *Mathematik* gibt es keine allgemein anerkannte **Definition**; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch *logische* Definitionen selbstgeschaffene **abstrakte Strukturen** mittels der **Logik** auf ihre Eigenschaften und **Muster** untersucht.

## Inhaltsverzeichnis [Verbergen]

- 1 Geschichte
- 2 Inhalte und Methodik
  - 2.1 Inhalte und Teilgebiete
  - 2.2 Fortschreiten durch Problemlösen
  - 2.3 Axiomatische Formulierung und Sprache
  - 2.4 Anwendungsgebiete
- 3 Verhältnis zu anderen Wissenschaften
  - 3.1 Kategorisierung der Mathematik
  - 3.2 Sonderrolle unter den Wissenschaften
- 4 Mathematik in der Gesellschaft
  - 4.1 Mathematik als Schulfach
  - 4.2 Mathematik als Studienfach und Beruf
- 5 Mathematische Museen und Sammlungen
- 6 Literatur
- 7 Weblinks
- 8 Einzelnachweise



Der ägyptische Papyrus Rhind

**Mathematics** [...] is a science that developed from the investigation of geometric figures and the computing with numbers. For *mathematics*, there is no commonly accepted definition; today it is usually described as a science that investigates abstract structures that it created itself by logical definitions using logic for their properties and patterns.

Mathematics is . . .

I. Toolbox for everyday life

II. Part of culture, 6000 years old

III. Basis for high-tech, essential

. . . three Subjects at School

(and at University) ?

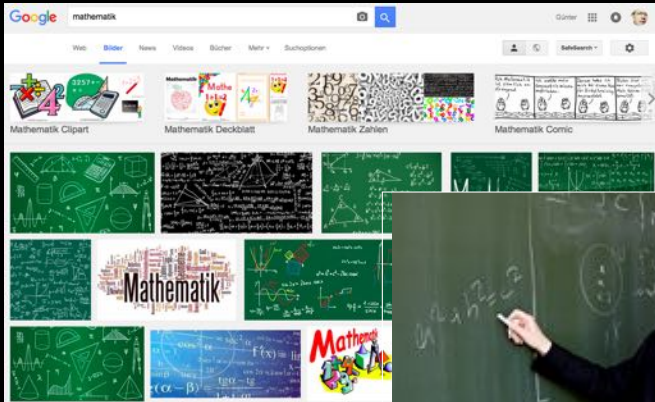
“What is Mathematics?”

Images

“The students’ views of maths itself included narrow and inaccurate images that were often limited to numbers and basic arithmetic.”

Heather Mendick et al., 2008:

“Mathematical images and identities: Education, entertainment, social justice”





“What is Mathematics?”

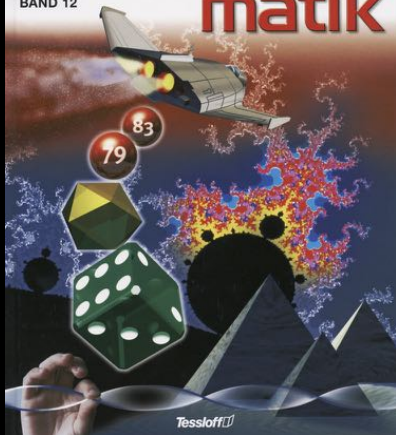
Panoramas



WAS  
IST  
WAS

BAND 12

# Mathe matik

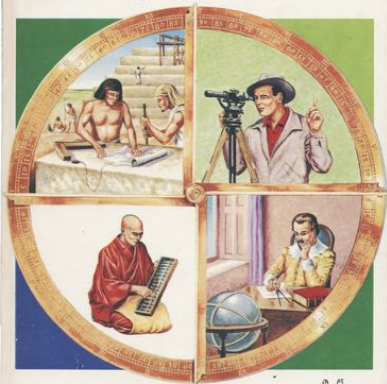


Tessloff

WAS  
IST  
WAS

# Mathematik

BAND 12

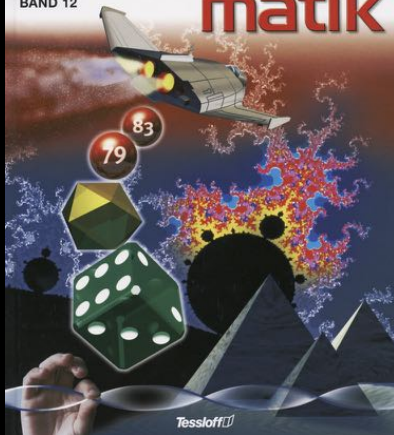


Neuer  Verlag

WAS  
IST  
WAS

# Mathe matik

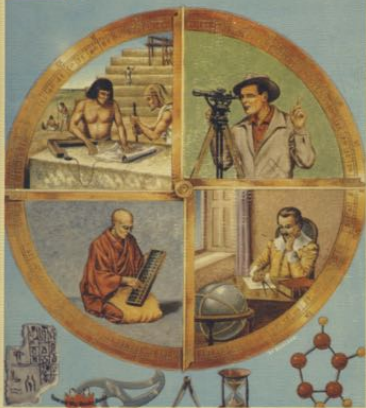
BAND 12



Tessloff 

The  
HOW  
AND  
WHY  
*Wonder Book of*

# MATHEMATICS



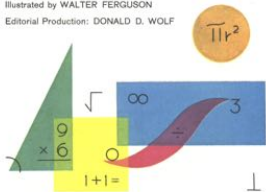
## THE HOW AND WHY WONDER BOOK OF MATHEMATICS

Written by ESTHER HARRIS HIGHLAND, B.A.  
Associate Director of Research,  
International Statistical Bureau, Inc.

and HAROLD JOSEPH HIGHLAND, B.S., M.S., Ph.D.  
Assistant Professor, College of Business Administration,  
Long Island University

Illustrated by WALTER FERGUSON

Editorial Production: DONALD D. WOLF



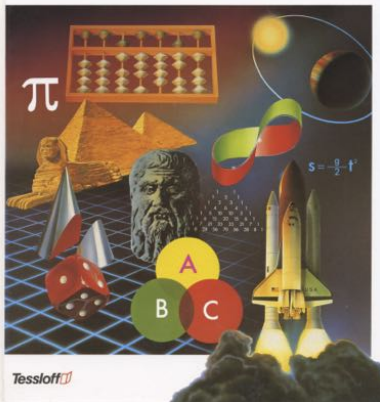
Edited under the supervision of  
Dr. Paul E. Blackwood, Specialist for Elementary Science  
U. S. Department of Health, Education and Welfare, Washington, D. C.  
Text and illustrations approved by  
Oakes A. White, Brooklyn Children's Museum, Brooklyn, New York

GROSSET & DUNLAP • Publishers • NEW YORK

WAS  
IST  
WAS

# Mathe- matik

BAND 12

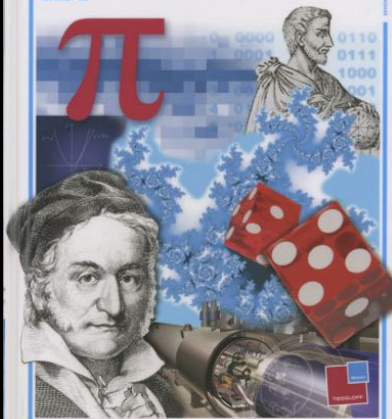


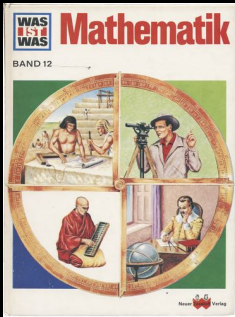
www.wasistwas.de

WAS  
IST  
WAS

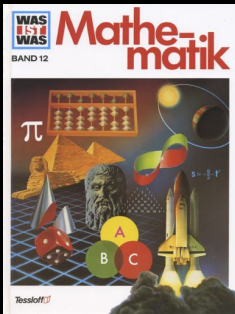
# Mathematik

BAND 12

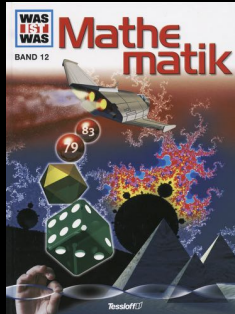




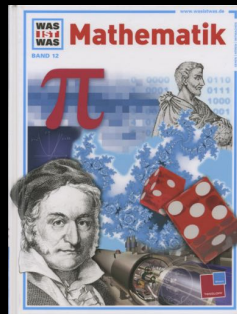
1963



1983



2001



2010



2016+ ?

“What is Mathematics?”

The Human Factor

“Many students and undergraduates seem to think of mathematicians as old, white, middle-class men who are obsessed with their subject, lack social skills and have no personal life outside maths.

The research revealed that many of the clichéd perceptions which it identified are linked to the way in which mathematics and mathematicians are presented in popular culture.”

Heather Mendick et al., 2008:

“Mathematical images and identities: Education, entertainment, social justice”



Mathematics is . . .

Mathematics is . . .

- I. Toolbox for everyday life
- II. Part of culture, 6000 years old
- III. Basis for high-tech, essential
- IV. A human activity

. . . and all this should be visible at  
School

(and at University) !





```

1 |g'± JFIF dd 'I wDucky P b /Schoolgirl Sarah Sherry, aged
- five, plays with calculators in her first year
- class at the Beaver Road Infant School January 5.
- Schools standards minister Stephen Byers told a
- conference in Manchester on Monday that standards
- of literacy and numeracy for girls were higher for
- girls than boys.

```

```

2
3
4
5
6
7
8
9
10
11

```

```

BRITAIN `Ó &Adobe d¿
_4 àµ î ú«e Ñ

```

```

~ x ' 'f '

```

```

- | 01 @"A 2# PB3$ 4D 11 A Qaa"2 AB
- e"±jR#0eb3 --r(CÇS$440s~cTPasD P ! @ 0'p1Ãêja " !1AQ aq
- Åe"±je--00e"/ úeI te d#;y< dSôgIÊ'dl'I<-0ai+sa"baS, ",d,ÃEÛÈ\Ù000a'èotZ 3c¶505e i±fi¶¶"dÃvd

```



Günter M. Ziegler

## FAVORITES

- News Feed
- Messages
- Other 1
- Events 1
- Find Friends

## GROUPS

- Berlin Mathematic... 1
- Create Group...

## APPS

- App Center
- Photos
- Games Feed 7
- Music
- Notes
- Links
- Pokes 1

 Sarah Sherry[Messages](#)[Activity](#)

**Numerator: Mädchen rechnen genauso gut wie Jungs – SPIEGEL ONLINE**  
[www.spiegel.de](http://www.spiegel.de)

Das Vorurteil hält sich hartnäckig: Mädchen und Mathematik passen nicht zusammen. Eine Studie mit sieben Millionen US-Schülern hat nun gezeigt, dass es bei Rechnen und Geometrie keine Geschlechterunterschiede gibt.

[Share](#)Sarah Sherry  
Prof Ziegler

3 hours ago

I am the Sarah Sherry in the photo. I vaguely remember the photo being taken when I was in infant school. The photo was not staged I was simply playing with the calculators after finishing my maths classwork. What would you like to know about it.

Sarah.

[Reply](#)



# “What is Mathematics?”

- Descriptions
- Images
- Panoramas
- The Human Factor

## Teaching and learning “What is Mathematics?”

- Klein’s Double Discontinuity
- The Panorama Project
- An Images Project
- A Stories Project



# Teaching and learning “What is Mathematics?”

## Klein's Double Discontinuity

**Felix Klein (1849 - 1925)**

Vergleichende Betrachtungen  
über  
neuere geometrische Forsch

VON

**Dr. Felix Klein,**

o. A. Professor der Mathematik an der Universität

Programm

zum Eintritt in die philosophische Fakultät usw.  
der k. Friedrich-Alexanders-Universität  
in Erlangen.



**Erlanger Programm**  
1872

2011

MaPhyPhil

59



Deutsche Post

55



MARKE INDIVIDUELL

“At the beginning of his university studies, the young student is confronted with problems that do not remind him at all of what he has dealt with up to then, and of course, he forgets all these things immediately and thoroughly.

When after graduation he becomes a teacher, he has to teach exactly this traditional elementary mathematics, and since he can hardly link it with his university mathematics, he soon readopts the former teaching tradition

and his studies at the university become a more or less pleasant reminiscence which has no influence on his teaching.”

Felix Klein, 1908:

“Elementary Mathematics from a Higher Standpoint”



# DZLM Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik



Eine Initiative der



Fortbildungen



Material



Moodle



Madipedia

## Das DZLM: Qualifizieren. Forsuchen. Netzwerke bilden.

Das DZLM ist die erste bundesländerübergreifende, zentrale Anlaufstelle für die Lehrerfortbildung in der Mathematik, initiiert von der **Deutsche Telekom Stiftung**.

Forschungsbasiert und praxisnah entwickelt das Zentrum Fortbildungsprogramme, um diese in Kooperation mit den Bundesländern und Bildungseinrichtungen durchzuführen, weiter zu beforschen und kontinuierlich zu verbessern. Der Fokus liegt dabei auf langfristigen Angeboten für Lehrende, die andere fortbilden und begleiten (**Multiplikatorinnen und Multiplikatoren**).



Infografik



Film



### WIE NUTZEN SIE DIE DZLM-WEBSITE?

Wir haben eine kurze Umfrage zusammengestellt. Ihre Antworten helfen uns, das Online-Angebot für Sie zu verbessern.

News und Presseinformationen

Teaching and learning  
“What is Mathematics?”

The Panorama Project  
(*with Andreas Loos*)



## Z08\* „Panorama of mathematics“

Undergraduate course  
(in particular for teacher students)  
on

- What is Mathematics (today)?

„Panorama der Mathematik“ will present

- the landscape of mathematics („maps“)
- the variety of mathematics
- the people of mathematics
- the making of mathematics
- how mathematics is **applied**

Goals:

- a course
- web materials
- a book



# “Panorama of Mathematics” (with Andreas Loos)

## I. What is Mathematics?

- 01 What is Mathematics
- 02 Mathematical Research
- 03 Proofs
- 04 Formulas and Images
- 05 Philosophy of Mathematics

## II. Concepts

- 06 Infinity
- 07 Dimensions
- 08 Prime numbers
- 09 Numbers
- 10 Functions
- 11 Probability

## III. Mathematics in Practice

- 12 Computing
- 13 Algorithms
- 14 Applications
- 15 Mathematics in Public

When did mathematics start?



When did mathematics start?

Numbers and geometric figures start in stone age;  
the science starts with Euclid?

How large is mathematics?

How many Mathematicians are there?

How large is mathematics?

How many Mathematicians are there?

The Mathematics Genealogy Project  
had 200683 records as of 26 July 2016

How is mathematics done,  
what is doing research like?

How is mathematics done,  
what is doing research like?

Collect (auto)biographical evidence!  
Recent examples: Frenkel, Villani

What does mathematics research do today?

What are the Grand Challenges?

What does mathematics research do today?

What are the Grand Challenges?

The Clay Millennium problems  
might serve as a starting point.

What and how many subjects and subdisciplines are there in mathematics?



What and how many subjects and subdisciplines  
are there in mathematics?

See the

Mathematics Subject Classification MSC 2010

What and how many subjects and subdisciplines  
are there in mathematics?

See the

Mathematics Subject Classification MSC 2010

It has 5020 entries!

Why is there no “Mathematical Industry”,  
as there is e.g. Chemical Industry?

Why is there no “Mathematical Industry”,  
as there is e.g. Chemical Industry?

There is!

See e.g. Telecommunications, Financial Industry, etc.

What are the “key concepts” in mathematics?  
Do they still “drive research”?

What are the “key concepts” in mathematics?  
Do they still “drive research”?

Numbers, shapes, dimensions,  
infinity, change, abstraction, . . .

What are the “key concepts” in mathematics?  
Do they still “drive research”?

Numbers, shapes, dimensions,  
infinity, change, abstraction, . . .  
they do.

What is mathematics “good for”?



What is mathematics “good for”?

It is a basis for understanding the world,  
but also for technological progress.

Where do we *do* mathematics in everyday life?

Where do we *do* mathematics in everyday life?

Not only where we compute,  
but also where we read maps, plan trips, etc.

Where do we see mathematics in everyday life?

Where do we see mathematics in everyday life?

There is more maths in every smart phone than anyone learns in school.

What are the greatest achievements  
of mathematics through history?

What are the greatest achievements  
of mathematics through history?

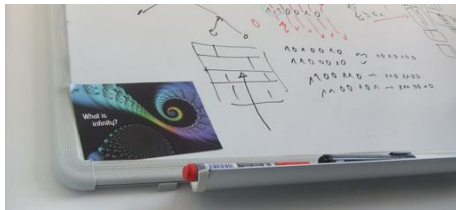
Make your own list!

## *Inhaltsverzeichnis*

<b>I Was ist Mathematik?</b>	<b>3</b>
<b>1 Was ist Mathematik?</b>	<b>5</b>
1.1 Thema: Was ist Mathematik? .....	6
1.2 Variationen: Was ist Mathematik? .....	11
1.3 Partituren .....	33
1.4 Etüden .....	34
<b>2 Mathematische Forschung</b>	<b>37</b>
2.1 Thema: Mathematische Forschung .....	38
2.2 Variationen: Mathematische Forschung .....	43
2.3 Partituren .....	57
2.4 Etüden .....	57
<b>3 Beweise</b>	<b>59</b>
3.1 Thema: Beweise .....	60
3.2 Variationen: Beweise .....	63
3.3 Partituren .....	78
3.4 Etüden .....	79
<b>4 Formeln und Bilder</b>	<b>81</b>
4.1 Thema: Formeln und Bilder .....	82
4.2 Variationen: Formeln und Bilder .....	86
4.3 Partituren .....	102
4.4 Etüden .....	102
<b>5 Philosophie der Mathematik</b>	<b>103</b>
5.1 Thema: Philosophie der Mathematik .....	104
5.2 Variationen: Philosophie der Mathematik .....	108
5.3 Partituren .....	127
5.4 Etüden .....	127



## Vorwort



Sie halten eigentlich zwei Bücher in Händen: Eines, aus dem man Material, Ideen, Inspirationen und Struktur für eine Vorlesung schöpfen kann und eines, in dem man schmökern, lesen, sich anregen lassen kann.

Die Vorlesung soll Bachelorstudenten beibringen, dass Mathematik viel mehr ist als eine „Einführung in Analysis“, „Diskrete Mathematik“ und „lineare Algebra I und II“, wo man kleine, sorgfältig zubereitete Portionen Mathematik serviert bekommt: Mathematik ist eine gewaltige Landschaft, in der sich weltweit und jeden Tag viele sehr unterschiedliche Menschen tummeln, forschen, arbeiten. Das Schmökerebuch soll Geschichten aus dieser Welt erzählen, Fragen aufwerfen und Lust machen, selbst zu forschen, Lust machen, sich selbst ein Gericht zu kochen, und wenn auch nur Rührei ist. Gutes Rührei ist eine Kunst – und ein Anfang.

Dieses Buch wäre nicht entstanden, wenn wir nicht unterstützt

## 1 Was ist Mathematik?

Auf die Frage „Was ist Mathematik?“ gibt es hunderte Antworten. Oder gar keine – je nachdem, was man als Antwort gelten lässt und unter welchem Blickwinkel und zu welcher Zeit man die Mathematik betrachtet. Im Folgenden nehmen wir die Mathematik unter mehreren verschiedenen Blickwinkeln unter die Lupe.

### Inhalt dieses Kapitels

---

1.1	Thema: Was ist Mathematik? .....	6
1.1.1	Mathematik als Teil der Kultur .....	6
1.1.2	Mathematik als Werkzeugkasten .....	7
1.1.3	Mathematik als Wissenschaft .....	8
1.1.4	Mathematik als Studienfach und als Beruf .....	10
1.2	Variationen: Was ist Mathematik? .....	11
1.2.1	Mathematik als Teil der Kultur .....	11
1.2.2	Mathematik als Werkzeugkasten für den Alltag ...	14
1.2.3	Mathematik als Wissenschaft .....	16
1.2.4	Schulfach, Studienfach, Arbeitsmarkt .....	30
1.3	Partituren .....	33
1.4	Etüden .....	34

---

### 1.1 Thema: Was ist Mathematik?

Was ist Mathematik? Eine Definition ist schwierig. Definitionsversuche etwa in Lexika, wie auch in Wikipedia, greifen zu kurz:

„Die Mathematik (...) ist eine Wissenschaft, welche aus der Untersuchung von geometrischen Figuren und dem Rechnen mit Zahlen entstand. Für Mathematik gibt es keine allgemein anerkannte Definition; heute wird sie üblicherweise als eine Wissenschaft beschrieben, die durch logische Definitionen selbstgeschaffene abstrakte Strukturen mittels der Logik auf ihre Eigenschaften und Muster untersucht.“ (Version 12. Oktober 2015)

In der Tat entstand die Mathematik historisch aus „Zahlen und Figuren“ (ein Novalis-Zitat!), aber das beschreibt nicht die Untersuchungsgegenstände der modernen Wissenschaft Mathematik. Die Behauptung – als Teil der Definition von Mathematik! – es gebe keine Definition von Mathematik klingt nach einem „Widerspruch in sich“. Wenn Mathematik nur „selbstgeschaffene abstrakte Strukturen“ betrachtet, wieso kann sie dann interessant sein? Überrascht dann nicht die offenkundige Widerspruchsfreiheit der Mathematik? Und wie kann dann Mathematik relevant sein für die Welt, für Physik, Chemie, Technik, Wirtschaft, sogar Kunst?

Teil der Schwierigkeit scheint zu sein, dass wir mit „Mathematik“ mindestens drei unterschiedliche (aber zusammenhängende) Bereiche und Funktionen von Mathematik bezeichnen: 1. Mathematik als Teil der Kultur, 2. Mathematik als Reservoir von Hilfsmitteln und Werkzeugen für den Alltag, und 3. Mathematik als hochentwickelte Wissenschaft.

#### 1.1.1 Mathematik als Teil der Kultur

Mathematik ist ein entscheidendes Hilfsmittel zum Verständnis der Welt, trägt entscheidend bei zur Gestaltung des Lebens, ist ein integraler (nicht abtrennbarer) Teil der Kultur, in vielfältigen Formen.

**Anfänge der Kultur.** Mathematik ist so *alt wie die menschliche Kultur*: Wir finden geometrische Muster auf steinzeitlichen Fundstücken, Markierungen in Gruppen von 11, 13, 17, 19 (Zahlen? Bestandteil eines Kalenders?) auf dem etwa 22.000 Jahre alten Ishango-Knochen (siehe Bild 1.1), der in Zentralafrika gefunden wurde. In der Ägyptischen Hochkultur wurde Geometrie entwickelt, um das Niltal nach Überschwemmungen neu zu vermessen und um Heer und Verwaltung zu organisieren, es wurde mit Brüchen gerechnet, usw. In Mesopotamien sind Untersuchungen etwa mit Quadratzahlen belegt. Aus der klassischen griechischen Hochkultur kennen wir Mathematik als Wissenschaft, mit Definitionen, Lehrsätzen, und Beweisen, die auch heute noch klassisches Wissen der Mathematik sind – etwa die Unendlichkeit der Primzahlen. All dies war meisterhaft dargestellt in den „Elementen“ des Euklid, die bis in die Neuzeit als Lehrbuch genutzt wurden!

**Schlüssel zum Verständnis der Welt.** Mathematik wurde entwickelt, um die Welt zu beschreiben und zu erklären – und ist dabei über die Maßen erfolgreich. Galileo wird zitiert mit der Behauptung, das Buch der Natur sei in der Sprache der Mathematik geschrieben. Der Physik-Nobelpreisträger Eugene

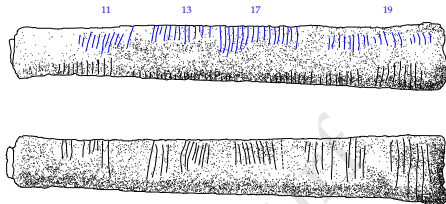


Abbildung 1.1: Die beiden Seiten des etwa 20.000 Jahre alten Ishango-Knochens. Was hier gezählt wurde, bleibt ein Geheimnis. Entdeckte ein Urmensch die Primzahlen zwischen 10 und 20? Mehr zur Geschichte des Knochens in » Primzahlen. Grafik: A. Löss

1.2 Variationen: Was ist Mathematik?

1.2.1 Mathematik als Teil der Kultur

Anfänge der Kultur

„Proclus, ein antiker Philosoph sagt: ‘Das aber ist Mathematik: sie erinnert dich an die unsichtbaren Formen der Seele; sie gebietet ihre eigenen Entdeckungen; sie erweckt den Geist und reinigt den Intellekt; sie erleuchtet die uns innewohnenden Ideen; sie vernichtet das Vergessen und die Ahnungslosigkeit, die uns mit der Geburt zu eigen sind...’ Aber ich mag Mathematik einfach, weil sie Spaß macht.“

So beginnt der Mathematiker Terence Tao sein Buch *Solving Mathematical Problems* [477]. Tao ist einer der wichtigsten Mathematiker der Gegenwart; 2006 wurde er mit der Fields-Medaille gewürdigt, die häufig als „Nobelpreis der Mathematik“ bezeichnet wird. Er gehört zugleich zu den jüngsten Teilnehmern und Preisträgern der Internationalen Mathematik-Olympiade aller Zeiten: Er war noch nicht einmal elf, als er eine Bronzemedaille in Händen hielt, ein Jahr darauf holte er Silber und dann Gold.

Proclus’ deckt bereits eine ganze Reihe von Blickwinkeln auf die Mathematik ab. In seiner Meinung, Mathematik sei eine gute Schule



Terence Tao (\*1975)

# Teaching and learning “What is Mathematics?”

An Images Project



## Inhalt

Vorschau: Bilder meiner Ausstellung	8
-20.000: Der Knochen mit den Primzahlen	12
1498: Ein Genie macht Fehler	22
1522/1525: Eine deutsche Revolution	40
1557: Die Erfinder des Gleichheitszeichens	52
1801: Schatzkarte für eine Entdeckung	62



1933

## Fotos einer Dame

Welches Bild bleibt von der Mathematikerin Emmy Noether? Diese Frage kann man ganz unterschiedlich interpretieren, wie man an den beiden folgenden Äußerungen sieht:

Ich hoffe, dass am Beispiel von Emmy Noether ein paar mehr junge Frauen den Zauber der Mathematik entdecken. Ich habe sie sehr lieb gewonnen, während ich ihre Geschichte konstruiert habe – sie war warmherzig und lebendig, völlig selbstlos, und entwickelte im Laufe ihrer Entwicklung immer mehr Leidenschaft für die Mathematik. Sie gibt dem Ausdruck »Reine Mathematik« eine neue Bedeutung.

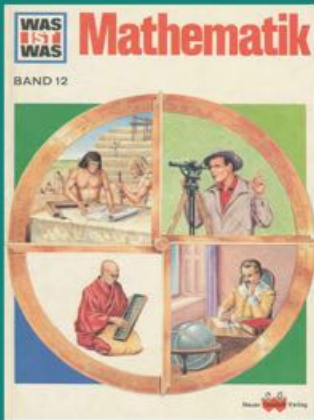
Margaret B. W. Tent, Autorin von  
*Emmy Noether: The Mother of Modern Algebra*

Von Emmy Noether sind nur wenige gute Fotos erhalten.

Professor Peter Rosquatto, Universität Heidelberg

Bevor wir uns den Bildern widmen, die bleiben, wollen wir erst einmal an diese Frau erinnern: Das ist offenbar nötig, trotz der über fünfzig Emmy-Noether-Straßen in Deutschland. Eigentlich ein Skandal, dass nicht jeder sie kennt. Und dann wollen wir das beste und das schlechteste Bild gegenüberstellen, das es von Emmy Noether gibt.





1963

## Was ist was?

Mit den Was ist was-Bänden bin ich aufgewachsen. Wir hatten einen ganzen Stapel davon, verteilt auf die Kinderzimmer meiner vielen Brüder. (Kleine Rechenaufgabe: 75 Prozent meiner Brüder leben in München, einer in Frankfurt – wie viele sind wir?) Der Was ist was-Band Nummer 12 aber, Mathematik, der gehörte mir! Darin habe ich geschmökert, immer wieder, er muss mein Bild der Mathematik geprägt haben. Viele Jahre später, da war ich schon lange Professor für Mathematik, fiel mir in einem Kaufhaus in Berlin-Moabit ein Drehregal mit Was ist was-Bänden ins Auge.

Band 12 entdeckte ich in einer Reihe zwischen Band 9: »Der Ur-mensch«, Band 10: »Fliegerei und Luftfahrt«, Band 11: »Hunde« und Band 13: »Wilde Tiere«. Es gab ihn also immer noch. Aber das Titelbild hat mich überrascht: so hatte ich das nicht in Erinnerung! Natürlich habe ich zugriffes und mit Freude die 8,90 Euro bezahlt für eine Lesereise zurück in die Kindheit. Die gab es allerdings nicht, denn hinter dem neuen Titelbild steckte auch ein neu geschriebenes Buch, 2001 veröffentlicht.





1993

## Bild eines Mathematikers



Unser Foto zeigt einen genialen Mathematiker zehn Jahre vor seiner Jahrhundertleistung: ein großes, offenes Gesicht mit rötlichem Bart, buschigen Augenbrauen, schmalen Lidern und leuchtend blauen Augen. Der da interessiert, aber verhalten, direkt in die Kamera blickt ist Grigori »Grisha« Perelman, geboren am 13. Juni 1966 in Leningrad. Das Foto stammt aus dem Herbst des Jahres 1993, Perelman war damals 27 Jahre alt. Er hatte schon als sechsjähriger Schüler auf der Internationalen Mathematik-Olympiade 1982 in London mit voller Punktzahl eine Goldmedaille gewonnen, 1990 dann in Moskau bei Yuri Burago promoviert.

Seine Forschung wurde auch im Ausland aufmerksam verfolgt und führte zu Einladungen an das IHES-Institut in Paris und dann in die USA. Das Jahr 1993/1994 verbrachte Perelman mit einem Stipendium der Miller Foundation als »Research Fellow« an der Universität in Berkeley. Dort ist unser Foto entstanden – für ein Fotoprojekt mit langer Vorgeschichte: 1968 hatten sich die Mathematik-Studenten der Universität ein Album mit Portraits der Dozenten gewünscht – um mit diesem »Who is Who« in der großen und renommierten Professorenriege den Durchblick zu behalten. Ein junger Postdoc, George Bergman, der nach seiner Promotion in Harvard neu nach Berkeley gekommen war, meldete sich als Freiwilliger. Er fotografierte dann nicht nur die berühmten Professoren, sondern auch alle Dozenten und Gäste.





1998

## Das Mädchen mit den Taschenrechnern

Ich weiß nicht mehr, wann und wie mir das Foto des kleinen Mädchens mit den Taschenrechnern in die Hände gefallen ist. Ich erinnere mich aber noch daran, wie ich durch einen Zufall auf die dazugehörige Agenturmeldung stieß, die in der Bilddatei versteckt war:

Die Schülerin Sarah Sherry, 5, spielt mit Taschenrechnern in ihrer ersten Klasse in der Beaver Road Infant School. Der Schulstandard-Minister Stephen Byers erklärte auf einer Konferenz in Manchester am Montag, dass Standards der Lese- und Rechenfähigkeit bei Mädchen höher seien als bei Jungen.

Die Meldung als solche dürfte uns eigentlich nicht weiter überraschen; dass Rechnen «eher was für Jungs» sei, stimmt nur dann, wenn man darauf verzichtet, Mädchen überhaupt was lernen zu lassen, wie das heutzutage teilweise noch in Pakistan und Afghanistan der Fall ist. Hier im Westen müssen wir uns ja eher Sorgen machen, dass Jungs schon in der Grundschule ins Hintertreffen geraten, weil Mädchen sich besser konzentrieren können, sorgfältiger arbeiten – und damit auch besser Lesen und Rechnen lernen. Aber offenbar hatte der britische Minister für Schulstandards (damals 44 und Mitglied im ersten Kabinett des gleichaltrigen Tony Blair) den Eindruck, dass man mit einer solchen positiven Meldung punkten kann.





US 6,285,999 B1

United States Patent  
PagePatent No. US 6,285,999 B1  
Date of Patent: Sep. 4, 2001METHOD FOR NEAR READING IN A  
LINKED LIST

Inventor: Lawrence Page, San Jose, CA, USA

Assignee: The State of Oregon, the Linked  
List, Inc., Beaverton, OR, USAReferences: Includes one or more references, the text of this  
patent is included or referred to in  
U.S. PATENT OFFICE

U.S. Pat. No. 5,882,827

U.S. Pat. No. 5,882,827

Related U.S. Application Data:

Continuation application No. 09/511,251, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000U.S. Pat. No. 5,882,827, filed on Mar. 31,  
2000Craig Bove, "To Sell is to Sell: An Innovative Combination  
of Business Selling Strategy", *ACM* 1993, pp. 221-225C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31C. Bove, "A new state table derived from automatic  
parsers", 1993, *Mathematics*, vol. 13, pp. 29-31

2001

## Patent auf eine Formel

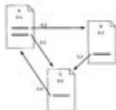
Unter Kapitelaufgabebild zeigt die erste Seite einer bemerkenswerten Patentschrift für eine mathematische Formel. Anlass genug, drei Fragen zu stellen und sofort zu beantworten:

- Kann man sich eine Formel patentieren lassen? – Ja.
- Kann man damit Geld verdienen? – Ja, sehr viel sogar.
- Muss die Formel dafür neu sein? – Offenbar nein.
- Kann sie wenigstens für etwas Schönes eingesetzt werden? – Ja, für die schönste Nebensache der Welt.

Nun könnten Sie triumphierend ausrufen: »Das waren doch vier Fragen!« Stimmt, aber Mathematiker können ja bekanntlich nicht besonders gut zählen. Sie könnten auch sagen: »Die Antworten waren etwas knapp.« Stimmt ebenfalls. Da gibt es natürlich viel mehr zu erzählen, und das werde ich mit Vergnügen tun. Und ich werde sogar noch Zusatzfragen beantworten wie:

- Macht Geld sexy
- Kann ich mir auch Geometrie patentieren lassen?

Da staunen Sie jetzt, was? Aber immer schön der Reihe nach.

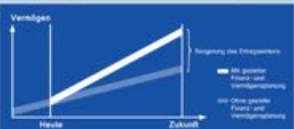


2004

## Ertragswinkel

### Ertragswinkel: Steigerung durch Finanz- und Vermögensplanung

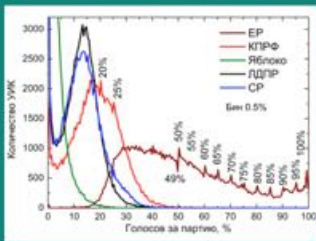
Der Ertragswinkel verdeutlicht, wie eine gezielte Finanz- und Vermögensplanung systematisch höhere Renditen ermöglicht.



Steigern Sie Ihren Ertragswinkel mit der db Finanz & Vermögensplanung. Wir optimieren gemeinsam mit Ihnen Faktoren, die für Ihren finanziellen Erfolg entscheidend sind. Sprechen Sie mit uns über Ihre Finanz- und Vermögensplanung. Weitere Informationen senden wir Ihnen gerne zu.  
*Leistung aus Leidenschaft. Deutsche Bank.*

Sechs Wochen lang, von der letzten September- bis zur ersten Novemberwoche 2004, lief in Deutschland diese großangelegte Werbekampagne. Sie war kaum zu übersehen: Anzeigen und Beiliefer in Magazinen wie dem Stern, dazu Onlinewerbung und Fernsehberichterstattung an der besten (und teuersten) Stelle, nämlich direkt vor der Tageschau. Und dann natürlich die Plakate in den Schaufenstern jeder Filiale, dazu Broschüren in großer Auflage und Aufsteller. Dem entgeht man nicht. So zählten die Werber auch ganz stolz für die Print-Kampagne 36 Millionen »Brutto-Kontakte« über 4,3 Millionen verbreitete Auflage; für die Online-Kampagne wurden 5,3 Millionen »Ad Impressions« (im Marketing-Jargon auch »Views«) gezählt. Wollen wir wissen, was das gekostet hat? Nun: es war sicher teuer.






2012

## Gauß in Russland

Von Mathematik in den Händen der Mächtigen, im Dienst der Kriegführung und in den taktischen Überlegungen des Kalten Krieges war schon die Rede. Da ist es umso schöner, wenn wir zum Abschluss dieses Bilderbuchs Mathematik in den Händen der Ohnmächtigen zeigen, eingesetzt nicht als Waffe, sondern in friedlichem Protest.

Unser oberes Aufnahmebild zeigt Teilnehmer einer Demonstration auf dem Bolotnajs-Platz in Moskau, sechs Tage nach den Parlamentswahlen am 4. Dezember 2011. Auf dem Plakat, das sie hochhalten (links unten die Originalgraphik), prangt eine Statistik über die Wahlergebnisse verschiedener Parteien in den rund 95.000 Wahlbezirken in ganz Russland. Die Graphen aller Parteien weichen von der Gauß-Verteilung stark ab (und in die wohl vorhersehbaren Richtungen); die Kurve für die Regierungspartei »Einiges Russland« von Wladimir Putin hat außerdem Spitzen bei großen »runden« Prozentzahlen. Der Slogan auf dem Plakat dazu lautet »Tschuruw glauben wir nicht, Gauß schon!« Wladimir Tschuruw (\*1953) war seit März 2007 der Vorsitzende der Zentralen Wahlkommission der Russischen Föderation. Schon zu den Parlamentswahlen im Dezember 2007 hatte er geschworen, sich den Bart abzurasierern, den er schon seit 1971 trägt, sollten die Wahlen nicht fair sein, dies dann aber nicht getan – obwohl es genug Auffälligkeiten gab, darunter ein Wahlergebnis von 99 Prozent für »Einiges Russland« in Tschetschenien, bei einer Wahlbeteiligung von ebenfalls 99 Prozent.





Günter M. Ziegler

Mathematik -  
Das ist doch keine Kunst!

KNAUS

Teaching and learning  
“What is Mathematics?”

A Stories Project

Remarkable places, where Mathematics is/was discovered, include:

- At the Desk
- At the Café
- In the Computer
- In Bed
- In Church
- In Captivity
- In an Attic Room in Princeton
- On a Beach
- In a Paradise with a Library
- In the Internet?



## Three Legends:

- Mathematician vs. Mathematician
- It's the Kovalevskaya's Fault
- The Disappearance of Alexander Grothendieck

“History of mathematics has the tendency to become gossip.”



Gian-Carlo Rota (1932-1999)

GÜNTER M. ZIEGLER

# Darf ich Zahlen?

Geschichten aus der Mathematik



PIPER

# Do I Count?

*Stories from  
Mathematics*



Günter M. Ziegler

 CRC Press  
Taylor & Francis Group  
AN A & PETERS BOOK

# “What is Mathematics?”

- Descriptions
- Images
- Panoramas
- The Human Factor

## Teaching and learning “What is Mathematics?”

- Klein’s Double Discontinuity
- The Panorama Project
- An Images Project
- A Stories Project

Freie Universität Berlin



**DZLM**  Deutsches Zentrum für  
Lehrerbildung Mathematik

