Medalla Fields Andrei Okounkov

"Por sus contribuciones en la interacción entre probabilidad, teoría de representaciones y la geometría algebraica"

El trabajo de Andrei Okounkov ha puesto de manifiesto profundas y novedosas conexiones entre diferentes áreas de las matemáticas y ha proporcionado nuevas perspectivas en problemas que se presentan en física. Aunque su trabajo es difícil de clasificar, porque toca una gran variedad de áreas, dos referencias claras son el uso de nociones de aleatoriedad y las ideas clásicas de la teoría de representaciones. Esta combinación ha demostrado ser de gran potencialidad al atacar problemas de geometría algebraica y mecánica estadística.
Uno de los objetos básicos de estudio en teoría de la representación es el "grupo simétrico", cuyos elementos son permutaciones de objetos. Por ejemplo, si los objetos son las letras {C, G, J, M, N, O, Q, Z}, una permutación es un determinado orden de las mismas, como GOQZMNJC o JZOQCGNM. El número de permutaciones posibles crece rápidamente con el número de objetos. Para 8 objetos, por ejemplo, hay 40.320 permutaciones diferentes. Si consideramos un grupo abstracto de n objetos, el "grupo simétrico de n letras" es el conjunto de todas las posibles permutaciones de esos n objetos junto con las reglas para combinar las permutaciones.
La teoría de representaciones permite estudiar el grupo simétrico representándolo mediante otros objetos matemáticos que ofrecen una visión de las características más significativas del grupo. Se trata de una subdisciplina bien desarrollada, que tiene importantes aplicaciones en las propias matemáticas y en otros campos de la ciencia, como la mecánica cuántica. Resulta que, para el grupo simétrico de n letras, los bloques con que se construyen todas sus representaciones están indexados por las particiones de n, es decir, secuencias de números positivos que sumados dan n. Por ejemplo 2+3+3+4+12 es una partición de 24.
A través del lenguaje de las particiones, la teoría de las representación conecta con otra rama de las matemáticas, denominada combinatoria, que es el estudio de objetos que tienen partes discretas (no continuas) y distinguibles. Muchos fenómenos continuos en matemáticas están relacionados entre sí por tener una subestructura discreta común, de la que surgen cuestiones combinatorias. Los fenómenos continuos también pueden discretizarse, haciéndolos asequibles a los métodos combinatorios. Las particiones se encuentran entre los objetos combinatorios más básicos, y su estudio se remonta al menos al siglo XVIII.
La aleatoriedad se introduce en la combinatoria cuando uno considera objetos combinatorios enormes, como el conjunto de todas las particiones de números muy grandes. Si uno se plantea la partición de un número mediante su división aleatoria en números más pequeños, puede preguntarse ¿cuál es la probabilidad de obtener una determinada partición? Cuestiones semejantes aparecen en teoría de la representación de grupos simétricos grandes. Estas relaciones entre la probabilidad y la teoría de

representaciones fueron objeto de estudio por matemáticos rusos durante los años 70 y 80 del siglo XX. La clave para encontrar la herramienta adecuada desde la teoría de la probabilidad apropiada para esta cuestión procede del estudio de las particiones como representaciones del grupo simétrico. Un matemático ruso que estudió en la Universidad Estatal de Moscú, Andrei Okounkov, asumió este punto de vista y lo ha desarrollado con espectacular éxito aplicándolo a la resolución de una amplia variedad de problemas.

Uno de sus primeros resultados importantes se refiere a las "matrices aleatorias", que han sido ampliamente aplicadas en física. Una matriz aleatoria es un cuadrado de números que han sido elegidos aleatoriamente. Cada matriz de este tipo está asociada con un conjunto de números característicos llamados los "valores propios" de esa matriz. Desde los años 50, los físicos estudiaron las propiedades estadísticas de los "valores propios" de matrices aleatorias para avanzar en el estudio del problema de la predicción y distribución de los niveles de energía del núcleo atómico. En años recientes, las matrices aleatorias han recibido una renovada atención por parte de matemáticos y físicos.

Okounkov ha utilizado ideas procedentes de la teoría cuántica de campos para demostrar una sorprendente conexión entre las matrices aleatorias y las subsucesiones crecientes en las permutaciones de números. Por ejemplo, en una permutación de números del 1 al 8, pongamos 71452638, dos subsucesiones crecientes serían 14568 y 1238. Hay una forma de colocar estas subsucesiones de forma jerarquizada: la más larga seguida por la segunda más larga, la tercera más larga, etc. Okounkov demostró que, si n es muy grande, la secuencia o sucesión de los mayores "valores propios" de una matriz aleatoria "n x n" se comporta, desde el punto de vista probabilístico, de la misma forma que las longitudes de las mayores subsucesiones crecientes en las permutaciones de los números del 1 a n. En esta demostración, Okounkov abordó el problema de una forma extremadamente original, al reformularlo en un contexto completamente diferente: como comparación de dos descripciones diferentes de una superficie aleatoria. Este trabajo estableció una conexión con la geometría algebraica, proporcionándole un germen para sus posteriores trabajos en esa materia.

Las superficies aleatorias también aparecen en el trabajo de Okounkov en mecánica estadística. Si calentamos un cristal cúbico desde una temperatura muy baja encontramos que las esquinas del cubo van desapareciendo a medida que el cubo se derrite. La geometría de este proceso puede visualizarse imaginando una esquina consistente en un conjunto de bloques minúsculos. El derretimiento del cristal equivale a la progresiva desaparición aleatoria de estos bloques. Relacionando la partición del cristal en estos bloques con las particiones de enteros, Okounkov proporcionó sus propios métodos para lidiar con el análisis de superficies aleatorias. En un trabajo conjunto con Richard Kenyon, demostró de forma sorprendente que la parte derretida del cristal, proyectada en dos dimensiones, tiene una forma definida y está siempre rodeada por una curva algebraica, esto es, una curva que puede ser definida mediante una ecuación polinómica. Este fenómeno se ilustra mediante la figura adjunta, donde la curva tiene forma de corazón

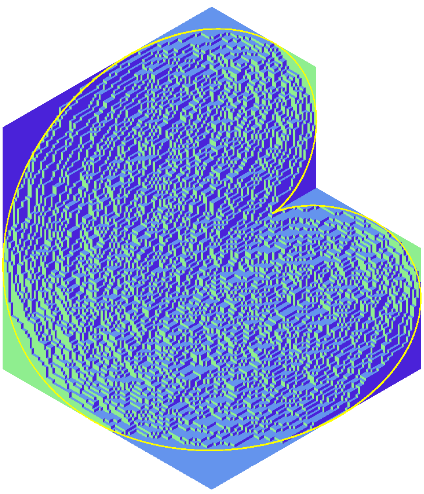
y se denomina "cardioide". Esta conexión con la geometría algebraica real es bastante inesperada.
Durante los últimos años, Okounkov, junto con Rahul Pandharipande y otros colaboradores, ha escrito una larga serie de artículos sobre cuestiones de geometría algebraica enumerativa, un campo con una larga historia, que en años recientes ha sido enriquecido por el intercambio de ideas entre matemáticos y físicos. Una forma clásica de estudiar curvas algebraicas es variar los coeficientes de las ecuaciones polinómicas que definen las curvas y aplicar algunas condiciones como, por ejemplo, que las curvas pasen a través de un conjunto de puntos específicos. Con muy pocas condiciones, el conjunto de curvas es infinito; con muchas, el conjunto es vacío, pero con un número equilibrado y exacto de condiciones se obtiene un conjunto finito de curvas. El problema de contar el número de curvas de esta manera (un problema planteado desde hace mucho tiempo en geometría algebraica, que también aparece en la teoría de cuerdas) es la principal preocupación de la geometría enumerativa. Okounkov y sus colaboradores han realizado contribuciones sustanciales a este campo, proporcionando ideas desde la física y desplegando un amplio abanico de herramientas procedentes del álgebra, la combinatoria y la geometría. La continuación de esta investigación por Okounkov supone un maravilloso intercambio de ideas entre las matemáticas y la física.

Nota biográfica

Andrei Okounkov nació en Moscú en 1969, doctorándose en matemáticas en la Universidad Estatal de Moscú en 1995. Es profesor de matemáticas en la Universidad de Princeton y ha sido investigador en la Academia Rusa de Ciencias, el Instituto de Estudios Avanzados del Princeton, la Universidad de Chicago y la de California en Berkeley. Entre sus distinciones se encuentra el haber sido seleccionado como investigador de la Fundación Sloan (2000) y la Fundación Packard (2001), así como haber obtenido el premio de la Sociedad Matemática Europea (2004).

Pie de la imagen:

Esta imagen muestra una superficie aleatoria que puede ser interpretada como el derretimiento de un cristal. La curva en forma de corazón que forma la frontera entre las regiones sólida y derretida se llama cardiode. Imagen obtenida por cortesía de Richard Kenyon y Andrei Okounkov.



Retrato de Okounkov: cortesía de Andrei Okounkov.